Кружок любителей арифметики: меню тем

А. Л. Смирнов

Поначалу кружок проходил в форме свободной дискуссии, а темы для обсуждения возникали спонтанно. Постепенно выявилось общее желание – время от времени обсуждать не только спонтанно возникающие темы, но и подготовленные доклады. При этом хотелось бы полностью избежать принуждения – в частности по выбору тем и срокам. Как к этому прийти?

Предлагаю действовать следующим образом:

– желающий сделать доклад выбирает тему и согласовывает ее с руководителем;

– время на подготовку не ограничиваем;

– дата подготовленного доклада согласовывается с руководителем.

Тему можно предложить свою, а можно выбрать из меню. Меню не охватывает всего интересного. Его назначение не ограничить круг тем, а помочь с ее выбором.

Источники указывают лишь на возможные точки входа в соответствующие темы, но не исчерпывают их.

Содержание

1 Великие аналогии

1.1 Розетский камень

Это аналогия между числами и алгебраическими фунциями. Розетский камень найден в ходе египетского похода Наполеона и содержит одно и то же повествование на трех языках. Один из этих языков – древнеегипетский. С помощью этого камня Шамполион научился понимать древнеегипетский язык.

В нашем случае речь идет об одной и той же истории, рассказанной на трех языках. В частности, речь идет о полях мероморфны функций на римановых поверхностях, полях рациональных функций на алгебраических кривых над конечными полями и полями алгебраических чисел. В простейшем случае речь идет о полях

$$\mathbb{C}(t), \quad \mathbb{F}_p(t), \quad \mathbb{Q}.$$

– A 1940 Letter of Andre Weil on Analogy in Mathematics.

– Шафаревич, Поля алгебраических чисел, Stockholm 1962.

1.2 Аналогия с мероморфными фунциями

Это аналогия между теорией чисел и теорией Неванлинны. Теория Неванлинны изучает мероморфные отображения $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Как правило это бесконечнолистные отображения; такие, например, как exp. Для таких отображений доказывается две основные теоремы. Морально, первая из них утверждает, что у каждой точки имеется одинаковое число прообразов. Вторая является аналогом формулы Римана–Гувица. Арифметические аналоги второй теоремы оказываются удивительно сильными. В целом эта аналогия оказалась очень даже работающей и привела не только к новым гипотезам но и к новым методам. Эти методы появились как имитация соответствующих методов в теории Неванлинны и позволили получить ряд выдающихся результатов. Имеется словарь перевода с языка теории функций на язык теории чисел. К сожалению, смысл этого словаря не ясен. Желательно его найти.

– Osgood, Sometimes Effective Thue-Siegel-Roth-Schmidt-Nevanlinna Bounds, or Better;

– Vojta, Diophantine Approximation and Nevanlinna.

1.3 Трехмерная точка зрения

Это аналогия между числовыми полями и 3-многообразиями. В простейшем случае анадогия проявляется на уровне конечных полей. С этой точки зрения $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ следует понимать как окружность.

– Morishita, Analogies between knots and primes, 3-manifolds and number rings.

2 Программы

2.1 Поле из одного элемента

Речь идет об углублении и развитии аналогии "розетский камень".

– Durov, New Approach to Arakelov Geometry.

2.2 Программа Ленглендса

Другое название – некоммутативная теория полей классов.

– Tate, Number theoretic background.

– Deligne, Serre, Formes modulaires de poids 1, 1974.

2.3 Гипотезы Бейлинсона и регуляторы

Это грандиозное обобщение формулы Дирихле и гипотезы Берча– Суиннертона-Дайера.

– Бейлинсон, Высшие регуляторы и значения L-функций.

– Rapoport and others, Beilinsons Conjectures on Special Values of L-Functions.

2.4 Эйлеровы системы

Это относительно новое, удивительно красивое и далеко не осознанное явление, уже приведшее к нескольким удивительным результатам. Рассматривает с единой точки зрения гауссовы суммы, круговые единицы, точки Хегнера и другие интригующие вещи.

– Kolyvagin, Euler systems.

– Rubin, Euler systems.

3 Нерешенные проблемы

1. Проблема Гаусса о бесконечности однокласных вещественных квадратичных полей.

   – Хассе, Лекции по теории чисел;
   – Cohen, Lenstra, Heuristics on class groups of number fields.

2. 12-я проблема Гильберта.

   – Александров, Проблемы Гильберта.
   – Shappacher, On the History of Hilbert's Twelfth Problem A Comedy of Errors.
   – Stark, Hilbert's twelfth problem and L-series.

3. Конечность группы Шафаревича–Тейта.

   – Tate, The Arithmetic of Elliptic Curves, Invent. 1974.

4. Гипотеза Тейта об алгебраических циклах.

   – Тэйт, Алгебраические классы когомологий.

5. Проблема аналитического продолжения дзета-функции Хассе–Вейля.

   – Серр, Дзета-функции и L-функции.

6. Гипотеза Берча–Суиннертона-Дайера.

   – Свиннертон-Дайер, Применение вычисления в теории полей классов, голубая книга Касселса–Фрелиха.
   – Коблиц, Введение в эллиптические кривые и модулярные формы.

7. Гипотеза Артина о голоморфности L-рядов.

   – Хейльброн, ζ-функции и L-функции, , голубая книга Касселса–Фрелиха.
   – Weil, Sur les formules explicites de la theorie des nombres, 1972.

   Связь с гипотезой Римана, положительность Вейля.

8. Гипотеза Шафаревича о $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}^{ab})$.

   – Fried, Jarden, Field arithmetic.

9. Проблема Манина–Морделла–Вейля для кубических поверхностей.

   – Kanevsky, Manin, Composition of points and the Mordell-Weil problem for cubic surfaces.

10. Египетские дроби. Гипотеза Эрдеша–Штраусса.

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

   – Ionasku, Wilson, On the Erdos–Straus conjecture.

11. Гипотеза Вандивера.

   – Vandiver, Wilson, Fermat's last theorem. Its history and the nature of the known results concerning it.
   – Washington, Introduction to Cyclotomic Fields.

4 Золотой век арифметики

1. Теорема Морделла–Вейля.

   – Манин, Приложение к книге Мамфорда "Абелевы многообразия".
   – Serre, Lectures on the Mordell–Weil theorem.

2. Закон взаимности Артина.

   – Касселс, Фрелих, Алгебраическая теория чисел.

3. Теорема Рота. Неэффективность.

   – Ленг, Основы диофантовой геометрии.

4. Проблема башни полей классов. Теорема Голода–Шафаревича.

   – Шафаревич, Поля алгебраических чисел.
   – Голод, Шафаревич, О башне полей классов.

5. Гипотеза Морделла над функциональными полями функций, Теорема Манина.

   – Манин, Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями.

6. Гипотеза Римана для многообразий над конечными полями. Теорема Делиня.

   – Freitag, Kieh, Etale Cohomology and the Weil Conjecture.

7. Теоремы Мазура и Мереля.

   – Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal.
   – Merel, Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur le corps de nombres.

8. Конечность Ш в некоторых случаях.

   – Rubin, Tate-Shafarevich groups and L-functions of elliptic curves with complex multiplication.
   – Колывагин, Конечность $E(\mathbb{Q})$ и $Ш(E, \mathbb{Q})$ для подкласса кривых Вейля.

9. Проблема десятого дискриминанта. Теорема Хигнера.

   – Goldfield, Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields;
   – Шафаревич, Проблема десятого дискриминанта.

10. Теорема Кронекера–Вебера.

    – Shappacher, On the History of Hilbert's Twelfth Problem A Comedy of Errors.
    – Washington, Introduction to Cyclotomic Fields.

11. 12-тая проблема Гильберта для локальных полей.

– Касселс–Фрелих, Алгебраическая теория чисел.

Формальные группы Любина–Тейта.

12. 12-тая проблема Гильберта для функциональных полей.

    – Дринфельд, Эллиптические модули.

    Модули Дринфельда.

13. Комплексное умножение эллиптических кривых. Jugendtraum.

    – Касселс–Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
    – Borel,Seminar on Complex Multiplication.

14. Гипотезы Рамануджана.

    – Ramanujan, On certain arithmetical functions.

15. Гипотеза Морделла.Теорема Фалтингса. Неэффективнось.

    – Зархин, Паршин, Проблемы конечности в диофантовой геометрии.

16. Вторая гипотеза Шафаревича. Теорема Абрашкина и Фонтена.

    – Fontaine, Il n'y pas variete abeliennes zur $\mathbb{Z}$.

17. 10-я проблема Гильберта. Эффективность.

    – Матиясевич, 10-я проблема Гильберта;
    – Манин, Вычислимое и невычислимое.

18. Гипотеза Таниямы–Вейля.

    – Diamond, Shurman, A First Course in Modular Forms.
    – Lang, Some History of the Shimura-Taniyama Conjecture.

19. Теорема Ферма.

    – Ribet, From the Taniyama-Shimura Conjecture to Fermat's Last Theorem.
    – Boston, The proof of Fermat's last theorem.

5 Миниатюрные шедевры

1. Трансцедентность e и π.
   - Ленг, Алгебра.
2. Периоды.
   - Kontsevich, Zagier, Periods.
3. $\zeta(3)$ и кватернионные эллиптические кривые.
   - Beucers, Peters, A family of K3 surfaces and $\zeta(3)$.
4. Теоремы Эрмита и Минковского. Гипотезы Шафаревича.
   - Зархин, Паршин, Проблемы конечности в диофантовой геометрии.
5. Статистика расширений.
   - Cohen, Lenstra, Heuristics on class groups of number fields.
6. Масс-формула Серра. Число локальных полей.
   - Serre, Une "formule de masse" pour les extensions totalement ramifie de degre donne d'un corps local.
7. Вторичное препятствие Манина.
   - Манин, Кубические поверхности.
8. Матрица Хассе–Витта. Единство математики. Связность Гаусса–Манина.
   - Манин, О матрице Хассе-Витта алгебраической кривой.
   - Клеменс, Мозаика теории комплексных кривых.
   - Манин, Алгебраические кривые над полями с дифференцрованием.
9. Теорема Лютц–Нагеля. Кручение далеко от нуля в p-адической метрике.
   - Lutz, Sur l'equation $y^2 = x^2 - Ax - B$ dans les corps p-adiques.
10. Теорема Мамфорда. Красивое и короткое доказательство почти Морделла.
    - Ленг, Основы диофантовой геометрии.
11. Критика Гротендиком доказательства Делиня. Стандартные гипотезы.
    - Grothendieck, Standard conjectures on algebraic cycles.
    - Serre, Analogues Kehleriens de Certaines Conjectures de Weil.
12. Гипотезы Вейля. Аргумент Серра: нет когомологий Вейля с коэффициентами в $\mathbb{Q}$, нет простой конструкции представлений Артина и Суона.

– Serre, Sur la rationalite des representations d'Artin.

13. Полиномы Эрхарта.

   – Ehrhart, Sur un probleme de geometrie diophantienne lineaire II.
   – Pommersheim, Toric varieties, lattice points, and Dedekind sums.
   – Rademacher–Grosswald, Dedekind sums. (1951), 41-46.

   Сравнение Гроссвальда–Радемахера для тетраэдров и 4-мерные симплексы. Бесконечномерные тетраэдры и η-функция.

14. Лемма Минковского и теорема Римана–Роха. Теорема Блихфельдта и неравенства Морса.

   – Шпиро, Гипотеза Морделла [по Г. Фальтингсу].
   – Gillet, Mazur, Soule, A note on a classical theorem of Bliechfeld.

   Высшие соотношения Кавальери (Ext по Ионеде).

15. Теория Аракелова.

   – Аракелов, Теория пересечений дивизоров на арифметической поверхности.
   – Faltings, Calculus on arithmetic surfaces.

16. L-ряды Артина. Мероморфная продолжимость. Гипотеза Артина. Естественное доказательство теоремы Чеботарева.

   – Касселс, Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
   – Cogdell, On Artin L-functions.

17. Теорема Брауэра. Формализм Фробениуса и сопряженные функторы.

   – Серр, Линейные представления конечных групп.

18. Явные формулы. Риман и Вейль.

$$\prod_{\text{нули } \zeta} = \prod_{p} .$$

   – Ленг, Алгебраические числа.
   – Цагир, Первые 50 миллионов простых чисел.

19. Группа Демушкина и малые римановы поверхности. Топология символа Гильберта.

   – Демушкин, Топологические 2-группы с четным числом образующих и одним полным определяющим соотношением.

20. p-адическая ζ-функция. Соотношение Штикельбергера.

   – Коблиц, p-адические числа, p-адический анализ и ζ-функции.

– Айерленд, Роузен, Классическок введение в современную теорию чисел.
– Шафаревич, ζ-функция.

21. Почти тривиальные зацепления. Теория Ивасавы и числовой аналог полинома Александера. Двойственность Артина–Вердье.

    – Milnor, Link Groups.
    – Redei, Ein neues zahlentheoretisches Symbol mit Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Zahlkorper.

22. Теорема Белого. Теорема Санова о $\Gamma_0(2)$. Неконгруэнц-подгруппы. Детские рисунки.

    – Белый, О расширениях Галуа максимального кругового поля;
    – Shabat, Voevodsky, Drawing Curves Over Number Fields.

23. Можно ли услышать форму барабана.

    – Perlis, On the equation $\zeta_K(s) = \zeta_{K'}(s)$.

24. Числа Тамагавы. Теорема Блоха.

    – Касселс, Фрелих, Алгебраическая теория чисел.
    – Bloch, A Note on Height Pairings, Tamagawa Numbers, and the Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture.

25. Теорема Гильберта о неприводимости. Обратная задача теории Галуа.

    – Ленг, Основы диофантовой геометрии.

26. Теорема Чеботарева. Эффективность. Неестественность: круговой трюк.

    – Serre, Quelques applications du theoreme de density de Chebotarev.
    – Шафаревич, О работе Н.Г. Чеботарева «Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок». Собрание сочинений Чеботарева, т.3.

27. Тета-функции как модулярные формы. Формула Пуаассона. Чудо гауссового интеграла.

    – Мамфорд, Лекции о тэта-функциях.

    Фунциональное уравнение для θ и ζ

28. Метод Тейта–Ивасавы.

    – Ленг, Алгебраические числа.

29. Конечные групповые схемы. Вопрос Тейта о $G/\mathbb{Z}$ с $pG = 0$.

    – Tate, Oort, Group schemes of prime order.

- Dembele, Schoof, GRH and finite flat group schemes over $\mathbb{Z}$.

30. Классификаторы (пространства модулей) и универсальные объекты.

    - Мамфорд, Проблемы модулей и их группы Пикара.

31. Формулы Витта и Брюкнера–Востокова.

    - Witt, Zyklische Korper und Algebren der Charakteristic p vom Grade p^n.
    - Востоков. Явная форма закона взаимности.

32. Разбиения. Точная формула Радемахера.

    - Холл, Комбинаторика.
    - Эндрюс, Теория разбиений.

33. Принцип компактности в логике. Ультрапроизведения.

    - Ax, Kochen, Diophantine problems over local fields.

6 Отдельные работы на другие темы

1. K-теория конечных полей.

    - Quillen, On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field.

    Очень красивая и идейная работа Квиллена. Поразительная смесь арифметики и топологии.

2. Векторы Витта. Представители Тейхмюллера.

    - Hazewinkel.

    Изначально эти векторы были предназначены для построения p-адичских чисел чисто алгебраическими методами.

3. Стабильные гомотопические группы сфер и $K_*(\mathbb{F}_1)$.

    - Priddy, On $\Omega^\infty S^\infty$ and the infinite symmetric group.

4. Гомотопии букетов сфер.

$$\pi_2(S^1 \vee S^2), \pi_3(S^2 \vee S^2).$$

    Сложение пространств резко усложняет ситуацию.

5. Стабильные гомотопические группы сфер и эллиптические кривые.

    - Hopkins, Mahowald, From elliptic curves to homotopy theory.

Некоммутативные одномерные формальные группы.

6. Топология, формальные группы и локальная теория полей классов.
   - Голо, Операции Адамса и символ норменного вычета.
   - Morava, Stable homotopy and local number theory.
7. Простой гомотопический тип и линзы.
   - DeRham, Kervaire, Maumary,Torsion et Type Simple d'Homotopy.
8. Трансфер-матрицы. Дискретные операторы Лапласа. Формула Фейнмана–Каца и формулы следа.
   - Стенли, Перечислительная комбинаторика.
9. Мера Винера и уравнение теплопроводности.
   - Кац, Несколько вероятностных задач физики и математики.
10. ζ Сельберга. Формула следа Сельберга. Геодезические как аналог простых чисел.
    - ????.
11. Тождества Макдональда.
    - Фукс, Когомологии алгебр Ли.
12. Топосы как обобщенные пространства. Зачем они нужны. Определения Гротендика и Жиро. Элементарные топосы. Классификаторы.
    - Джонсон, Теория топосов.
13. Поликатегории. 2-группы.
    - Leinster, Higher operads, higher categories.
14. Гомотопическая теория типов. Правильные и неправильные слова (категория всех категорий).
    - nlab ???
15. Статистические системы, равновесные состояния, состояния Гиббса, фазовые переходы, условие Кубо, Мартина, Швингера.
    - Брателли, Робинсон.
    - Бакстер, Точно решаемые модели в статистической механике.
16. ζ-функции и статфизика, полюса статсуммы и фазовые переходы, двойственнось Серра, трудная теорема Лефшеца и средняя размерность.
    - Отрицательная температура и Далай-лама.

– Откровение Иоанна Богослова.

– Fisher, Lectures in Theoretical Physics, 1965.

В статфизике понятие фазового перехода саязано с утратой дифференцируемости свободной эпергии. Критическая полоса и катастрофы. Апокалипсис как отражение генетической памяти о глобальной катастрофе.

17. W^*-алгебры, гиперконечные факторы.

    – Connes, Noncommutative geometry.

18. Элементарные частицы. Системы Хитчина.

    – Кобзарев, Манин.

    – Hamilton. Mathematical Gauge Theory: With Applications to the Standard Model of Particle Physics.