СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

С. С. Подкорытов

Найдено математическое ожидание эйлеровой характеристики гиперповерхности пространства $\mathbb{R}P^n$ (n нечётно), определяемой случайным многочленом степени m, имеющим нормальное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия ортогональной группы $O(n+1)$.

Когда X — случайный элемент, принимающий значения в измеримом пространстве Q, будем использовать запись $X \mathrel{\hat{\in}} Q$.

Пусть $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ — векторное пространство однородных многочленов степени m на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. На пространстве $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ очевидным образом действует ортогональная группа $O(n+1)$.

Координаты точки $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ будем обозначать $x_0, \dots, x_n$. Пусть $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ — единичная сфера. Пусть $o = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ — отмеченная точка.

Случайный многочлен $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ будем называть *удовлетворительным,* если он имеет нетривиальное нормальное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(n+1)$, при этом *параметром* случайного многочлена F будем называть число

$$r = \frac{\mathbf{E}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(o)\right)^2}{\mathbf{E}\, F(o)^2}.$$

Можно проверить, что значения параметров удовлетворительных случайных многочленов $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ заполняют отрезок

$$\frac{1-(-1)^m}{2} \leqslant r \leqslant \frac{m(m+n-1)}{n}.$$

Пример 1. Определим случайный многочлен $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ формулой

$$F(x) = \sum_{m_0+\dots+m_n=m} F_{m_0\dots m_n} x_0^{m_0} \dots x_n^{m_n}, \qquad x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где $F_{m_0\dots m_n}$ — независимые нормальные случайные величины со средним 0 и дисперсией

$$\mathbf{E}\, F^2_{m_0\dots m_n} = \frac{m!}{m_0! \dots m_n!}.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Можно проверить, что тогда случайный многочлен F удовлетворителен, его параметр
$$r = m.$$

Пример 2. Введём в пространстве $H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ скалярное произведение
$$(f, f') = \int_{x \in S^n} f(x) f'(x)\, dx, \qquad f, f' \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}).$$
Пусть $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ — такой нормальный случайный многочлен, что
$$\mathbf{E}\left((f, F)(f', F)\right) = (f, f'), \qquad f, f' \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}).$$
Можно проверить, что тогда случайный многочлен F удовлетворителен, его параметр
$$r = \frac{m(m+n+1)}{n+2}.$$

Этот пример при $n = 3$ рассматривался в [1].

Для многочлена $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ пусть $V_f \subset \mathbb{R}P^n$ — множество его нулей. Если $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ — удовлетворительный случайный многочлен, то множество V_F есть гладкая гиперповерхность почти наверное (см. предложение 2.1).

Для нечётного натурального n положим
$$I_n(s) = \int_0^s (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dt, \quad s \in \mathbb{R}, \qquad M_n(r) = \frac{I_n(r^{\frac{1}{2}})}{I_n(1)}, \quad r \geqslant 0.$$

Теорема. *Пусть $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ (n нечётно) — удовлетворительный случайный многочлен с параметром r. Тогда $\mathbf{E}\,\chi(V_F) = M_n(r)$.*

Этот результат был анонсирован в [2].

Доказательство

Пусть дано евклидово векторное пространство E. Скалярное произведение векторов $v, v' \in E$ будем обозначать (v, v'), длину вектора $v \in E$ — $|v|$. Пусть $L^+(E)$ — пространство симметрических операторов на пространстве E. Пусть $e \in L^+(E)$ — единичный оператор. Для $w \in L^+(E)$ пусть $\operatorname{tr} w$ и $\det w$ — соответственно след и определитель оператора w, $\operatorname{ad} w \in L^+(E)$ — присоединённый оператор, так что $w \operatorname{ad} w = \det w\ e$, и $\|w\| = (\operatorname{tr} w^2)^{\frac{1}{2}}$ — евклидова норма оператора w.

Ортогональная группа $O(n)$ очевидным образом действует на пространстве $L^+(\mathbb{R}^n)$, а также на пространствах $\mathbb{R} \times L^+(\mathbb{R}^n)$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times L^+(\mathbb{R}^n)$ — покомпонентно.

Пусть $|S^n|$ — n-мерная мера сферы S^n. Для точки $x \in S^n$ пусть $T_x S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, v) = 0\}$ — касательное пространство сферы S^n в точке x.

Для многочлена $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ и точки $x \in S^n$ пусть $Df(x) \in T_x S^n$ и $D^2 f(x) \in L^+(T_x S^n)$ — соответственно градиент и оператор второй производной сужения многочлена f на сферу S^n в точке x, так что
$$f\Big(\frac{x + tv}{|x + tv|}\Big) = f(x) + (Df(x), v)t + (D^2 f(x) v, v)\frac{t^2}{2} + O(t^3), \qquad t \to 0,\ v \in T_x S^n.$$

Многочлен $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ будем называть *регулярным,* если нет таких точек $x \in S^n$, что одновременно $f(x) = 0$ и $Df(x) = 0$.

Для натурального n пусть

$$a_n = \mathbf{E}\,|Z|^n,$$

где Z — стандартная нормальная случайная величина.

Для $c \in \mathbb{R}$, $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ определим функции A_f^c, B_f^c, J_f^c на сфере S^n формулами

$$\begin{aligned}
A_f^c(x) &= \frac{cf(x)\det\left(cf(x)e + D^2 f(x)\right)}{\left(c^2 f(x)^2 + |Df(x)|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \\
B_f^c(x) &= \frac{(1-c)(\operatorname{ad}\left(cf(x)e + D^2 f(x)\right) Df(x), Df(x))}{\left(c^2 f(x)^2 + |Df(x)|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad x \in S^n, \\
J_f^c &= A_f^c + B_f^c.
\end{aligned}$$

1. 2-струя случайного многочлена

Пусть $F \mathrel{\hat\in} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ — удовлетворительный случайный многочлен с параметром r. Отождествляя очевидным образом пространства $T_o S^n$ и $\mathbb{R}^n$, будем считать, что $F(o) \mathrel{\hat\in} \mathbb{R}$, $DF(o) \mathrel{\hat\in} \mathbb{R}^n$, $D^2F(o) \mathrel{\hat\in} L^+(\mathbb{R}^n)$.

1.1. Предложение. *Случайные элементы $F(o)$, $DF(o)$, $D^2F(o)$ имеют нормальное совместное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(n)$.*

Доказательство. Это очевидно. □

1.2. Следствие. *Пара $F(o), D^2F(o)$ и случайный вектор $DF(o)$ независимы.*

Доказательство. Ввиду предложения 1.1 это следует из инвариантности относительно ортогонального преобразования $v \mapsto -v$ пространства $\mathbb{R}^n$. □

1.3. Предложение. *Справедливы равенства:*

а) $nr\,\mathbf{E}\,F(o)^2 = \mathbf{E}\,|DF(o)|^2$*;*
б) $\mathbf{E}\,(F(o)\operatorname{tr} D^2F(o)) = -\,\mathbf{E}\,|DF(o)|^2$*;*
в) $\mathbf{E}\,(\operatorname{tr} D^2F(o))^2 - \mathbf{E}\,\|D^2F(o)\|^2 = (n-1)\,\mathbf{E}\,|DF(o)|^2$.

Доказательство. Ввиду предложения 1.1 часть а) очевидна. Части б), в) в силу симметрии следуют из легко проверяемых тождеств

$$\begin{aligned}
&\int_{x\in S^n} f(x)\operatorname{tr} D^2 f(x)\,dx = -\int_{x\in S^n} |Df(x)|^2\,dx, \\
&\int_{x\in S^n} ((\operatorname{tr} D^2 f(x))^2 - \|D^2 f(x)\|^2)\,dx = (n-1)\int_{x\in S^n} |Df(x)|^2\,dx, \qquad f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}),
\end{aligned}$$

соответственно. □

2. Регулярность случайного многочлена

Пусть $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ — удовлетворительный случайный многочлен с параметром r.

2.1. Предложение. *Случайный многочлен F регулярен почти наверное.*

Доказательство. Пусть $r > 0$ (иначе тривиально).

Для $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ определим функцию R_f на сфере S^n формулой

$$R_f(x) = (f(x)^2 + |Df(x)|^2)^{-\frac{n}{2}}, \qquad x \in S^n.$$

Используя предложение 1.1 и следствие 1.2, легко проверить, что $\mathbf{E}\, R_F(o) < \infty$. В силу симметрии имеем

$$\mathbf{E}\Big(\int_{x \in S^n} R_F(x)\, dx\Big) < \infty.$$

Легко проверить, что если многочлен $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ нерегулярен, то

$$\int_{x \in S^n} R_f(x)\, dx = \infty.$$

Отсюда следует требуемое. $\square$

3. Величина, связанная со случайным вектором

Фиксируем натуральное n. Для $c \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ определим функцию j_u^c на пространстве $\mathbb{R}^n$ формулой

$$j_u^c(v) = \frac{cu}{(c^2u^2 + |v|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad v \in \mathbb{R}^n.$$

3.1. Утверждение. *Пусть $u \in \mathbb{R}$. Тогда: а) для всех $c \in \mathbb{R}$ функция j_u^c знакопостоянна и имеем*

$$\int_{v \in \mathbb{R}^n} j_u^c(v)\, dv = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{a_n} \operatorname{sgn} c \operatorname{sgn} u;$$

б) для любого $r > 0$ имеем

$$\int_{v \in \mathbb{R}^n,\ |v| \geqslant r} |j_u^c(v)|\, dv \to 0, \qquad c \to 0.$$

Доказательство. а) Пусть $c \in \mathbb{R}$. То, что функция j_u^c знакопостоянна, очевидно. Для вычисления интеграла достаточно сделать замену

$$z = \frac{(cu, v_1, \ldots, v_n)}{(c^2u^2 + |v|^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad z \in S^n,$$

и использовать легко проверяемое равенство

$$\frac{|S^n|}{2} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{a_n}.$$

б) Это следует из оценки $|j_u^c(v)| \leqslant |c||u||v|^{-n-1}$, $v \in \mathbb{R}^n$. $\square$

3.2. Утверждение. *Пусть* $u \in \mathbb{R}$. *Пусть* $V \mathbin{\hat{\in}} \mathbb{R}^n$ *— случайный вектор, имеющий нетривиальное сферически симметричное нормальное распределение со средним* 0. *Пусть*

$$N = \frac{\mathbf{E}\,|V|^2}{n}, \quad G = \frac{N^{-\frac{n}{2}}}{a_n}.$$

Тогда: а) $\mathbf{E}\,|j_u^c(V)| \leqslant G$, $c \in \mathbb{R}$; *б)* $\mathbf{E}\,j_u^c(V) \to \pm G \operatorname{sgn} u$, $c \to \pm 0$.

Доказательство. Пусть p — непрерывная плотность распределения случайного вектора V. Тогда $p(v) \leqslant p(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} N^{-\frac{n}{2}}$, $v \in \mathbb{R}^n$. Теперь требуемое следует из утверждения 3.1. $\square$

4. Определитель случайного оператора

Для натурального n определим многочлен b_n от двух переменных равенством

$$\mathbf{E}\,(t + qY)^n = b_n(t, q^2), \qquad t, q \in \mathbb{R},$$

где Y — стандартная нормальная случайная величина.

4.1. Предложение. *Пусть* $W \mathbin{\hat{\in}} L^+(\mathbb{R}^n)$ *— случайный оператор, имеющий нормальное распределение со средним* 0, *инвариантное относительно действия группы* $O(n)$. *Пусть*

$$R = \frac{\mathbf{E}\,(\operatorname{tr} W)^2 - \mathbf{E}\,\|W\|^2}{n(n-1)}.$$

Тогда

$$\mathbf{E} \det\,(te + W) = b_n(t, R), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Уточнение. В случае $n = 1$ величина R оказывается не определена, но можно считать, что утверждение остаётся справедливым, если учесть, что $b_1(t, v) = t$, $t, v \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Рассмотрим независимые стандартную нормальную случайную величину Z и случайный оператор $T \in L^+(\mathbb{R}^n)$ такой, что элементы T_{ij} $(= T_{ji})$ его матрицы независимы и имеют нормальное распределение со средним 0 и дисперсией

$$\mathbf{E}\,T_{ij}^2 = \begin{cases} 2, & i = j, \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$$

Легко проверить, что распределение случайного оператора T сферически симметрично относительно евклидовой нормы и, следовательно, инвариантно относительно действия группы $O(n)$.

Используя соображения инвариантности, легко показать, что достаточно проверить требуемое равенство в случае, если $W = rZe + sT$, где $r, s \in \mathbb{R}$. Тогда $R = r^2 - s^2$ и проверка проводится прямым вычислением. $\square$

Для нечётного натурального n определим однородный многочлен s_n степени $\dfrac{n-1}{2}$ от двух переменных равенством

$$\mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} X\,(pX + qY)^n) = p\, s_n(p^2, q^2), \qquad p, q \in \mathbb{R},$$

где X, Y — независимые стандартные нормальные случайные величины.

4.2. Лемма. *Для нечётного натурального n имеем*

$$\mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} X\, b_n(pX, v)) = p\, s_n(p^2, v), \qquad p, v \in \mathbb{R},$$

где X — стандартная нормальная случайная величина.

Доказательство. Достаточно проверить это для $v = q^2$, $q \in \mathbb{R}$, когда это очевидно. $\square$

4.3. Утверждение. *Пусть $U \hat{\in} \mathbb{R}$ — случайная величина, $W \hat{\in} L^+(\mathbb{R}^n)$ (n нечётно) — случайный оператор, имеющие нормальное совместное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(n)$, причём распределение случайной величины U нетривиально. Пусть*

$$P = \mathbf{E}\, U^2, \quad Q = \frac{\mathbf{E}\,(U \operatorname{tr} W)}{n}, \quad R = \frac{\mathbf{E}\,(\operatorname{tr} W)^2 - \mathbf{E}\, \|W\|^2}{n(n-1)}, \quad k = P^{-\frac{1}{2}} Q.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} U\, \det W) = k\, s_n(k^2, R - k^2).$$

Уточнение. В случае $n = 1$ величина R оказывается не определена, но можно считать, что утверждение остаётся справедливым, если учесть, что $s_1(u, v) = a_1$, $u, v \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $X = P^{-\frac{1}{2}} U$, $W^0 = W - kXe$. Тогда случайная величина X и случайный оператор W^0 имеют нормальное совместное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(n)$, причём случайная величина X имеет стандартное нормальное распределение. Легко проверить, что $\mathbf{E}\,(X \operatorname{tr} W^0) = 0$. В силу симметрии отсюда следует, что случайная величина X и случайный оператор W^0 независимы. Пусть

$$R^0 = \frac{\mathbf{E}\,(\operatorname{tr} W^0)^2 - \mathbf{E}\, \|W^0\|^2}{n(n-1)}.$$

Легко проверить, что $R^0 = R - k^2$. Используя предложение 4.1 и лемму 4.2, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} U\, \det W) &= \mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} X\, \det(kXe + W^0)) = \\ &= \mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} X\, b_n(kX, R^0)) = k\, s_n(k^2, R^0) = k\, s_n(k^2, R - k^2). \end{aligned}$$

$\square$

4.4. Лемма. *Для нечётного натурального n имеем*

$$M_n(r) = \frac{r^{\frac{1}{2}}\, s_n(r, 1 - r)}{a_n}, \qquad r \geqslant 0.$$

Доказательство. Это проверяется вычислением. $\square$

5. Величины, связанные со случайным многочленом

Для натурального n выберем такие постоянные k_n, l_n, чтобы выполнялись неравенства

$$|\det w| \leqslant k_n \|w\|^n, \quad \|\operatorname{ad} w\| \leqslant l_n \|w\|^{n-1}, \qquad w \in L^+(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ — удовлетворительный случайный многочлен с параметром r.

5.1. Утверждение. *Предположим, что $r > 0$. Тогда: а) $\mathbf{E}\,|A_F^c(o)| < \infty$, $c \in \mathbb{R}$; б) если n нечётно, то $\mathbf{E}\,A_F^c(o) \to \mp M_n(r)$, $c \to \pm 0$.*

Доказательство. Пусть

$$N = \frac{\mathbf{E}\,|DF(o)|^2}{n}, \quad G = \frac{N^{-\frac{n}{2}}}{a_n}.$$

Для $c \in \mathbb{R}$, $C \geqslant 0$, $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ положим

$$E_f^c = \mathbf{E}\,\frac{cf(o)\det\left(cf(o)e + D^2 f(o)\right)}{(c^2 f(o)^2 + |DF(o)|^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad K_f^C = k_n G (C n^{\frac{1}{2}} |f(o)| + \|D^2 f(o)\|)^n.$$

Используя утверждение 3.2 а), получаем $|E_f^c| \leqslant K_f^C$, $|c| \leqslant C$, $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$. Используя предложение 1.1, легко проверить, что $\mathbf{E}\,K_F^C < \infty$, $C \geqslant 0$.

Теперь часть а) следует из того, что, в силу следствия 1.2, имеем $\mathbf{E}\,|A_F^c(o)| = \mathbf{E}\,|E_F^c|$, $c \in \mathbb{R}$.

Пусть n нечётно. Используя утверждение 3.2 б), получаем

$$E_f^c \to \pm G \operatorname{sgn} f(o) \det D^2 f(o), \qquad c \to \pm 0,\ f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Используя предложения 1.1, 1.3, утверждение 4.3, лемму 4.4, получаем

$$\mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} F(o) \det D^2 F(o)) = -\frac{M_n(r)}{G}.$$

Применяя теорему Лебега о предельном переходе, получаем $\mathbf{E}\,E_F^c \to \mp M_n(r)$, $c \to \pm 0$. Теперь часть б) следует из того, что, в силу следствия 1.2, имеем $\mathbf{E}\,A_F^c(o) = \mathbf{E}\,E_F^c$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

5.2. Утверждение. *Предположим, что $r > 0$. Тогда: а) $\mathbf{E}\,|B_F^c(o)| < \infty$, $c \in \mathbb{R}$; б) $\mathbf{E}\,B_F^c(o) \to \mathbf{E}\,B_F^0(o)$, $c \to 0$.*

Доказательство. Для $C \geqslant 0$, $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ положим

$$L_f^C = l_n (C+1) \Big(\frac{C n^{\frac{1}{2}} |f(o)| + \|D^2 f(o)\|}{|Df(o)|}\Big)^{n-1}.$$

Имеем $|B_f^c(o)| \leqslant L_f^C$, $|c| \leqslant C$, $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$. Используя предложение 1.1 и следствие 1.2, легко проверить, что $\mathbf{E}\,L_F^C < \infty$, $C \geqslant 0$. Отсюда непосредственно следует часть а) и по теореме Лебега о предельном переходе — часть б). $\square$

6. Интегральное представление эйлеровой характеристики

Фиксируем $c \neq 0$ и регулярный многочлен $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$. Определим отображения $g\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, $h\colon S^n \to S^n$ формулами

$$g(x) = cf(x)x + Df(x), \quad h(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}, \qquad x \in S^n.$$

6.1. Утверждение. *Если n нечётно, то*

$$\deg h = 1 - \operatorname{sgn} c\ \chi(V_f).$$

Это вариант формулы Химшиашвили, см. [3].

6.2. Утверждение. *Справедливо равенство*

$$\deg h = \frac{1}{|S^n|} \int_{x \in S^n} J_f^c(x)\, dx.$$

Доказательство. Это следует из того, что, как легко проверить, функция J_f^c есть якобиан отображения h. $\square$

7. Эйлерова характеристика случайной гиперповерхности

Доказательство теоремы. Пусть $r > 0$ (иначе тривиально).

Выберем произвольное $c \neq 0$. В силу симметрии и утверждений 5.1 а), 5.2 а) имеем $\mathbf{E}\,|J_F^c(x)| = \mathbf{E}\,|J_F^c(o)| < \infty$, $x \in S^n$. Это оправдывает будущее использование математического ожидания и интеграла. Используя предложение 2.1, утверждения 6.1, 6.2 и соображение симметрии, получаем

$$1 - \operatorname{sgn} c\ \mathbf{E}\,\chi(V_F) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{|S^n|} \int_{x \in S^n} J_F^c(x)\, dx\right) = \mathbf{E}\, J_F^c(o).$$

В силу утверждений 5.1 б), 5.2 б) в пределе при $c \to \pm 0$ получаем

$$1 \mp \mathbf{E}\,\chi(V_F) = \mp M_n(r) + \mathbf{E}\, B_F^0(o),$$

откуда следует требуемое. $\square$

Замечание. Попутно получилось, что $\mathbf{E}\, B_F^0(o) = 1$. Можно показать, что если сужение многочлена $f \in H_m(\mathbb{R}^{n+1})$ на сферу S^n имеет только невырожденные критические точки, то

$$\frac{1}{|S^n|} \int_{x \in S^n} B_f^0(x)\, dx = 1.$$

Список литературы

1. И. А. Ибрагимов, С. С. Подкорытов, *О случайных вещественных алгебраических поверхностях*, Доклады академии наук **343** (1995), №6, 734 — 736.
2. С. С. Подкорытов, *Об эйлеровой характеристике случайной алгебраической гиперповерхности*, Записки науч. семин. ПОМИ **252** (1998), 224 — 230.
3. В. И. Арнольд, *Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского — Олейник и смешанные структуры Ходжа*, Функцион. анализ и его приложения **12** (1978), №1, 1 — 14.