Порядок гомотопического инварианта в стабильном случае

С. С. Подкорытов

Аннотация

Пусть даны клеточные пространства X, Y, абелева группа U и гомотопический инвариант $f\colon [X,Y] \to U$. Инвариант f имеет *порядок* не выше r, если для непрерывного отображения $a\colon X \to Y$ характеристическая функция r-й декартовой степени его графика $\mathbf{Z}$-линейно определяет величину $f([a])$. Доказывается, что в стабильном случае (когда $\dim X < 2n-1$, а Y $(n-1)$-связно) при условии конечности клеточного пространства X порядок инварианта f равен его степени относительно фильтрации Кёртиса группы $[X,Y]$.

1. Введение

Порядок гомотопического инварианта. Пусть даны пространства X, Y. Для $r \in \mathbf{N}$ $(= \{0,1,\dots\})$ пусть E_r — группа всех функций $(X\times Y)^r \to \mathbf{Z}$. Для отображения $a \in C(X,Y)$ пусть $\Gamma_a \subset X\times Y$ — его график, $I_r(a) \in E_r$ — характеристическая функция множества $\Gamma_a^r \subset (X\times Y)^r$. Пусть $D_r \subset E_r$ — подгруппа, порождённая функциями $I_r(a)$, $a \in C(X,Y)$.

Пусть даны абелева группа U и отображение $f\colon [X,Y] \to U$. Определим *порядок* отображения f, $\operatorname{ord} f \in \hat{\mathbf{N}}$ $(= \mathbf{N}\cup\{\infty\})$, как инфимум тех $r \in \mathbf{N}$, для которых существует такой гомоморфизм $l\colon D_r \to U$, что $f([a]) = l(I_r(a))$ для всех $a \in C(X,Y)$. Как легко понять, наличие такого l для какого-то r влечёт таковое для всех бо́льших r.

Основной результат. Предположим, что X — конечное клеточное пространство, Y — клеточное пространство, причём $\dim X \leqslant m$, Y $(n-1)$-связно и $m < 2n-1$ (*стабильный случай*). Множество $[X,Y]$ канонически становится абелевой группой. Определена фильтрация Кёртиса $B = (B_s)_{s=1}^{\infty}$, $[X,Y] = B_1 \supset B_2 \supset \dots$, см. § 3. Известно [1], что $B_s = 0$ при

$s > 2^{m-n}$. Определена степень отображения f относительно фильтрации B, $\deg_B f \in \hat{\mathbf{N}}$, см. ниже.

(1.1) Теорема. $\operatorname{ord} f = \deg_B f$.

Пример: если f — гомоморфизм, то его порядок равен наибольшему s, для которого $f|B_s \neq 0$ (или нулю при $f = 0$).

Степень отображения абелевых групп относительно фильтрации. Пусть даны абелевы группы T, U, отображение $f\colon T \to U$ и фильтрация $P = (P_s)_{s=1}^{\infty}$ группы T: $T = P_1 \supset P_2 \supset \dots$. Определим *степень* отображения f относительно P, $\deg_P f \in \hat{\mathbf{N}}$, как инфимум таких $r \in \mathbf{N}$, что для любых $t_1 \dots, t_k \in T$ $(k \in \mathbf{N})$, где $t_l \in P_{s_l}$ и $s_1 + \dots + s_k > r$, имеем

$$\sum_{e_1,\dots,e_k=0,1} (-1)^{e_1+\dots+e_k} f(e_1 t_1 + \dots + e_k t_k) = 0.$$

2. Предварительный материал

Полиэдры. Полиэдр L — конечное множество аффинных симплексов в $\mathbf{R}^{\infty}$, удовлетворяющее «аксиомам симплициального комплекса» и снабжённое линейным порядком вершин каждого симплекса так, что порядок вершин любого симплекса индуцирует порядок вершин каждой его грани. *Тело* $|L|$ полиэдра L — объединение его симплексов. *Полиэдральное тело* — тело полиэдра.

Морфизмы полиэдров. Для полиэдров K, L отображение $f\colon K \to L$ называем *морфизмом*, если образ вершины — вершина, образ симплекса — выпуклая оболочка образов его вершин и нестрогий порядок вершин сохраняется. Морфизм $f\colon K \to L$ индуцирует непрерывное отображение $|f|\colon |K| \to |L|$.

Порождение. Симплекс $y \in L$ порождает подполиэдр $\bar{\bar{y}} \subset L$. Множество $T \subset L$ порождает подполиэдр $\bar{T} \subset L$.

Малые множества. Множество $T \subset L$ *мало*, если существует симплекс $y \in L$ с $\bar{\bar{y}} \supset T$; наименьший такой симплекс *натянут* на T.

Расстояние ρ_L. Для $x, y \in L$ пусть $\rho_L(x, y) \in \hat{\mathbf{N}}$ — инфимум длин цепочек рёбер, соединяющих x и y. (Ориентация рёбер не учитывается; длина цепочки — число её звеньев.) Если $\rho_L(x, y) < a$, $\rho_L(y, z) < b$ $(x, y, z \in L$, $a, b \in \mathbf{N})$, то $\rho_L(x, z) < a + b$.

Окрестности O_L. Для $y \in L$, $d \in \mathbf{N}$ пусть $O_L(y,d) = \{z \in L : \rho_L(y,z) < d\}$. Для $T \subset L$ пусть $O_L(T,d)$ — объединение множеств $O_L(y,d)$, $y \in T$.

Разделённость ϵ_L. Для $T \subset L$ пусть $\epsilon_L(T) = \inf\{\rho_L(x,y) : x,y \in T, x \neq y\} \in \hat{\mathbf{N}}$.

Подразделения. Для полиэдра L введём полиэдр δL — его барицентрическое подразделение, снабжённое таким порядком: чем больше размерность симплекса, тем старше его барицентр. Пусть $\phi_L\colon \delta L \to L$ — морфизм, посылающий барицентр каждого симплекса в его старшую вершину. Пусть $\delta' L$ — барицентрическое подразделение полиэдра L, снабжённое обратным порядком. Пусть $\phi'_L\colon \delta' L \to L$ — морфизм, посылающий барицентр каждого симплекса в его младшую вершину. Пусть $\Delta L = \delta' \delta L$, $\Phi_L = \phi_L \circ \phi'_{\delta L}\colon \Delta L \to L$. Отображение $|\Phi_L|\colon |L| = |\Delta L| \to |L|$ гомотопно тождественному. Образ звезды любого симплекса полиэдра ΔL при морфизме Φ_L мал. Поэтому если $\rho_{\Delta L}(x,y) \leqslant 2d$ ($x,y \in \Delta L$, $d \in \mathbf{N}$), то $\rho_L(\Phi_L(x), \Phi_L(y)) \leqslant d$.

Пустой симплекс. Для полиэдра L пусть $L^\circ = L \cup \{\varnothing\}$. Пусть пустой симплекс порождает пустой подполиэдр: $\bar{\bar{\varnothing}} = \varnothing$. Для $x, y \in L^\circ$ имеем $x \cap y \in L^\circ$.

Пополнение. Полиэдр L определяет симплициальное множество $\hat{L}$ (добавление вырожденных симплексов). Имеем $L \subset \hat{L}_0 \cup \hat{L}_1 \cup \ldots$. Пространства $|L|$ и $|\hat{L}|$ канонически гомеоморфны. Морфизм $f\colon K \to L$ полиэдров индуцирует симплициальное отображение $\hat{f}\colon \hat{K} \to \hat{L}$. Отображение $f \mapsto \hat{f}$ биективно.

Сечения. Для полиэдра L и симплициального множества E пусть $E(L)$ — множество симплициальных отображений $v\colon \hat{L} \to E$, *сечений.* Сечение $v \in E(L)$ индуцирует отображение $|v| \in C(|L|, |E|)$. Для подполиэдра $K \subset L$ определено сужение $v|_K \in E(K)$. Для морфизма $f\colon K \to L$ (K — полиэдр) — композиция $v \circ f \in E(K)$. Симплициальное отображение $t\colon D \to E$ (E — симплициальное множество) индуцирует отображение $t_\#\colon D(L) \to E(L)$. Для сечения $v \in G(L)$ (G — симплициальная группа) пусть $\sigma(v) = \{y \in L : v|_{\bar{\bar{y}}} \neq 1\}$.

Сложные сечения. Для множества $T \subset L$ и симплициального множества E пусть
$$E_T = \prod_{y \in T} E(\bar{\bar{y}}).$$
Для $v \in E(L)$ пусть $v\|_T = (v|_{\bar{\bar{y}}})_{y \in T} \in E_T$. Для сложного сечения $w \in E_L$

и морфизма полиэдров $f\colon K \to L$ определим композицию $w \circ f \in E_K$ правилом $(w \circ f)_x = w_{f(x)} \circ f'_x$, $x \in K$, где $f'_x\colon \bar{\bar{x}} \to \overline{\overline{f(x)}}$ — сокращения морфизма f. Имеем отображение $f^{\#}\colon E_L \to E_K$, $f^{\#}(w) = w \circ f$. Для симплициального отображения $t\colon D \to E$ (D — симплициальное множество) и сложного сечения $v \in D_L$ определена композиция $t \circ v \in E_L$.

Свободные группы. Для множества E с отмеченным элементом $*$ имеем группу FE, заданную образующими $\underline{e}$, $e \in E$, и соотношением $\underline{*} = 1$. Отображение $i\colon E \to FE$, $i(e) = \underline{e}$, назывем *каноническим.*

Нижний центральный ряд и абелианизация. Для группы G пусть $(\gamma_s G)_{s=1}^{\infty}$ — её нижний центральный ряд, $G^+ = G/\gamma_2 G$.

Свободные абелевы группы. Для множества E имеем абелеву группу $\langle E \rangle$ с базисом $(\text{‘}e\text{’})_{e \in E}$. Отображение $j\colon E \to \langle E \rangle$, $j(e) = \text{‘}e\text{’}$, назывем *каноническим.* Пусть $\langle E \rangle_{\vartriangle}$ — ядро гомоморфизма $\langle E \rangle \to \mathbf{Z}$, ‘$e$’ $\mapsto 1$. Отображение $t\colon D \to E$ (D — множество) индуцирует гомоморфизм $\langle t \rangle\colon \langle D \rangle \to \langle E \rangle$.

Пусть даны полиэдр L, симплициальное множество E и элемент $V \in \langle E(L) \rangle$. Пусть $|V| \in \langle C(|L|, |E|) \rangle$ — образ элемента V при гомоморфизме, индуцированном отображением $|?|\colon E(L) \to C(|L|, |E|)$. Для подполиэдра $K \subset L$ аналогично определяется элемент $V|_K \in \langle E(K) \rangle$; для множества $T \subset L$ — элемент $V\|_T \in \langle E_T \rangle$. Для пространств X, Y и элемента $A \in \langle C(X, Y) \rangle$ — элемент $[A] \in \langle [X, Y] \rangle$. Для множества $Z \subset X$ — элемент $A|_Z \in \langle C(Z, Y) \rangle$.

Для симплициальной группы G и элемента $V \in \langle G(L) \rangle$,

$$V = \sum_{v \in G(L)} m_v \text{‘}v\text{’}$$

($m_v \in \mathbf{Z}$), пусть

$$\Sigma(V) = \bigcup_{v \in G(L)\,:\, m_v \neq 0} \sigma(v).$$

Групповые кольца. Для группы G $\langle G \rangle$ — групповое кольцо, $\langle G \rangle_{\vartriangle}$ — его (двусторонний) идеал. Для $s \in \mathbf{N}_+$ ($= \mathbf{N} \setminus \{0\}$) идеал $\langle G \rangle_{\vartriangle}^s$ аддитивно порождён всеми элементами вида $(\text{‘}g_1\text{’} - 1) \dots (\text{‘}g_s\text{’} - 1)$, $g_1, \dots, g_s \in G$.

Симплициальное применение. Естественные конструкции можно применять к симплициальным объектам послойно. Для пунктированного симплициального множества E имеем симплициальную группу FE и каноническое симплициальное отображение $i\colon E \to FE$. Отображение i — модель канонического отображения пунктированного пространства в пространство петель его надстройки (*модель Милнора*, см. [2]). Для симплициальной группы G имеем симплициальную абелеву группу G^+, симплициальное кольцо $\langle G\rangle$, каноническое симплициальное отображение $j\colon G \to \langle G\rangle$ и симплициальные подгруппы $\gamma_s G \subset G$, $s \in \mathbf{N}_+$, и $\langle G\rangle^s_\triangle \subset \langle G\rangle$, $s \in \mathbf{N}$.

Симплициальные мелочи. Симплициальное отображение между пунктированными симплициальными множествами называем *связанным*, если оно сохраняет пунктировку. Симплициальную абелеву группу D называем *свободной*, если абелевы группы D_n, $n \in \mathbf{N}$, свободны. Для симплициального множества E пусть $E_{(m)} \subset E$ ($m \in \mathbf{N}$) — его m-остов.

Сведения. Пусть даны полиэдр L и симплициальная группа G. Пусть $j\colon G \to \langle G\rangle$ — каноническое отображение. Кольцевой гомоморфизм $J\colon \langle G(L)\rangle \to \langle G\rangle(L)$, $J(‘v’) = j \circ v$, называем *сведéнием.*

3. Фильтрация Кёртиса в стабильном случае

Пусть даны клеточные пространства X и Y, $\dim X \leqslant m$, Y $(n-1)$-связно и $m < 2n-1$. Построим фильтрацию $B = (B_s)_{s=1}^{\infty}$ абелевой группы $[X, Y]$, $[X, Y] = B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, *фильтрацию Кёртиса.* Есть симплициальное множество E и гомотопическая эквивалентность $k\colon Y \to |E|$. Пунктируем E и введём симплициальную группу $G = FE$. По теореме Фрейденталя, каноническое симплициальное отображение $i\colon E \to G$ $(2n-1)$-связно. Отображение $h = |i| \circ k\colon Y \to |G|$ тоже $(2n-1)$-связно. Пусть $j_s\colon \gamma_s G \to G$, $s \in \mathbf{N}_+$, — симплициальные гомоморфизмы включения. Для $s \in \mathbf{N}_+$ имеем цепочку групп и гомоморфизмов

$$[X, Y] \xrightarrow{h_*} [X, |G|] \xleftarrow{|j_s|_*} [X, |\gamma_s G|].$$

Так как $m < 2n-1$, h_* — изоморфизм. Пусть $B_s = h_*^{-1}(\operatorname{im} |j_s|_*)$. (Результат не зависит от выбора E и проч.)

4. Лемма о кольцах Ли

Здесь U — функтор универсального обёртывающего кольца.

(4.1) *Пусть даны кольца Ли L, M, свободные как абелевы группы, и инъективный гомоморфизм $k\colon L \to M$. Тогда гомоморфизм $Uk\colon UL \to UM$ инъективен.*

Это легко доказать через теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта. $\square$

5. Лемма о групповых кольцах

Пусть даны группы V, W и гомоморфизм $t\colon V \to W$. Имеем кольцевой гомоморфизм $\langle t\rangle\colon \langle V\rangle \to \langle W\rangle$. Для $s \in \mathbf{N}$ пусть $I_s \subset \langle V\rangle$ — подгруппа, порождённая всеми элементами вида $(`v_1\text{'} - 1)\dots(`v_k\text{'} - 1)$, где $k \in \mathbf{N}$, $v_l \in t^{-1}(\gamma_{s_l}W)$ и $s_1 + \ldots + s_k \geqslant s$. Легко видеть, что I_s — идеалы, $I_s \supset I_{s+1}$ и $I_s I_t \subset I_{s+t}$.

(5.1) *Предположим, что W — произведение конечного числа свободных групп. Тогда $\langle t\rangle^{-1}(\langle W\rangle^s_\triangle) = I_s$, $s \in \mathbf{N}$.*

Доказательство. Если $w \in \gamma_s W$, то $`w\text{'} - 1 \in \langle W\rangle^s_\triangle$ (это верно для любой группы W [3, III.1.3]). Отсюда следует включение $\langle t\rangle^{-1}(\langle W\rangle^s_\triangle) \supset I_s$.

Введём градуированные кольца P, $P_s = I_s/I_{s+1}$, и Q, $Q_s = \langle W\rangle^s_\triangle/\langle W\rangle^{s+1}_\triangle$. Так как $\langle t\rangle(I_s) \subset \langle W\rangle^s_\triangle$, гомоморфизм $\langle t\rangle$ индуцирует гомоморфизм градуированных колец $l\colon P \to Q$. Мы покажем, что гомоморфизм l инъективен. Тогда индукцией по s с применением 5-леммы получаем, что индуцированный гомоморфизм $\langle V\rangle/I_s \to \langle W\rangle/\langle W\rangle^s_\triangle$ инъективен, т. е. нужное равенство.

Введём градуированные кольца Ли L, $L_s = t^{-1}(\gamma_s W)/t^{-1}(\gamma_{s+1}W)$, и M, $M_s = \gamma_s W/\gamma_{s+1}W$ (произведение индуцируется групповым коммутированием, см. [3, VIII.2]). Гомоморфизм t индуцирует гомоморфизм градуированных колец Ли $k\colon L \to M$, очевидно, инъективный.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "l"] & Q, \end{tikzcd}$$

где f и g — представления с компонентами $f_s\colon L_s \to P_s$, $f_s(v) = `v\text{'} - 1$, $v \in t^{-1}(\gamma_s W)$, и $g_s\colon M_s \to Q_s$, $g_s(w) = `w\text{'} - 1$, $w \in \gamma_s W$. Продолжая представления f и g до гомоморфизмов универсальных обёртывающих колец, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} UL \arrow[r, "Uk"] \arrow[d, "\tilde f"'] & UM \arrow[d, "\tilde g"] \\ P \arrow[r, "l"] & Q. \end{tikzcd}$$

Методом Магнуса легко показать, что $\tilde{g}$ — изоморфизм, а M свободно как абелева группа (ср. [3, VIII.6]). По (4.1), гомоморфизм Uk инъективен. Кольцо P порождено элементами вида 'v' $- 1 \in P_s$, где $s \in \mathbf{N}_+$, $v \in t^{-1}(\gamma_s W)$. Они лежат в образе представления f и, следовательно, гомоморфизма $\tilde{f}$, который поэтому сюръективен. Значит, гомоморфизм l инъективен. (А $\tilde{f}$ — изоморфизм.) □

6. Идеалы группового кольца произведения групп

Пусть дан конечный набор $(G_i)_{i\in I}$ групп. Для $J \subset I$ пусть

$$G_J = \prod_{i\in J} G_i,$$

$p_J \colon G_I \to G_J$ — гомоморфизм проекции. Имеем кольцевые гомоморфизмы $\langle p_J\rangle \colon \langle G_I\rangle \to \langle G_J\rangle$.

(6.1) *Для* $s \in \mathbf{N}$ *имеем*

$$\bigcap_{\#J<s} \ker\langle p_J\rangle \subset \langle G_I\rangle_\triangle^s.$$

Доказательство. Имеем

$$\langle G_I\rangle = \bigotimes_{i\in I} \langle G_i\rangle.$$

Так как $\langle G_i\rangle = \langle G_i\rangle_\triangle \oplus \langle 1\rangle$, то

$$\langle G_I\rangle = \bigoplus_{J\subset I} S(J), \qquad S(J) = \bigotimes_{i\in I} T_i(J),$$

где подгруппа $T_i(J) \subset \langle G_i\rangle$ есть $\langle G_i\rangle_\triangle$ при $i \in J$ и $\langle 1\rangle$ иначе. Очевидно, $\langle p_J\rangle|S(J')$ есть мономорфизм при $J' \subset J$ и нуль иначе. Отсюда

$$\bigcap_{\#J<s} \ker\langle p_J\rangle = \bigoplus_{\#J\geqslant s} S(J).$$

Осталось заметить, что $S(J) \subset \langle G_I\rangle_\triangle^{\#J}$. □

7. Функции η и θ

Пусть даны полиэдр L и симплициальная группа G. Имеем гомоморфизм $?\|_L\colon G(L) \to G_L$. Для $V \in \langle G(L)\rangle$ пусть $\eta(V) = \sup\{s \in \mathbf{N} : V\|_L \in \langle G_L\rangle^s_\vartriangle\} \in \hat{\mathbf{N}}$. Для $s \in \mathbf{N}$ введём подгруппу $I_s \subset \langle G(L)\rangle$, порождённую всеми элементами вида $(`v_1\text{'} - 1)\ldots(`v_k\text{'} - 1)$, где $k \in \mathbf{N}$, $v_l \in (\gamma_{s_l} G)(L) \subset G(L)$ и $s_1 + \ldots + s_k \geqslant s$. (Это идеал.)

(7.1) *Предположим, что группы G_n, $n \in \mathbf{N}$, свободны. Тогда $\{V \in \langle G(L)\rangle : \eta(V) \geqslant s\} = I_s$, $s \in \mathbf{N}$.*

Это следует из (5.1). □

Для симплициального множества E и элемента $V \in \langle E(L)\rangle$ пусть $\theta(V) = \inf\{\#T : T \subset L, V\|_T \neq 0\} \in \hat{\mathbf{N}}$.

(7.2) *Для $V \in \langle G(L)\rangle$ имеем $\theta(V) \leqslant \eta(V)$.*

Это следует из (6.1). □

8. Произведение аффинных функций

(8.1) *Пусть даны группа V, кольцо H и гомоморфизмы $a_1, \ldots, a_r\colon V \to H$ (в аддитивную группу; $r \in \mathbf{N}$). Введём аддитивный гомоморфизм $Q\colon \langle V\rangle \to H$,*

$$Q(`v\text{'}) = \prod_{s=1}^{r}(1 + a_s(v)).$$

Тогда $Q|\langle V\rangle^{r+1}_\vartriangle = 0$.

Это следует из [3, V.2.1]. □

9. Строгие и r-строгие гомоморфизмы

Пусть даны группы V и W. Аддитивный гомоморфизм $h\colon \langle V\rangle \to \langle W\rangle$ называем *строгим*, если $h(\langle V\rangle^s_\vartriangle) \subset \langle W\rangle^s_\vartriangle$ для всех $s \in \mathbf{N}$, и *r-строгим* ($r \in \mathbf{N}$), если это верно при $s \leqslant r$.

(9.1) *Пусть дан гомоморфизм $t\colon V \to W$. Тогда гомоморфизм $\langle t\rangle\colon \langle V\rangle \to \langle W\rangle$ строг.* □

(9.2) *Пусть даны r-строгие ($r \in \mathbf{N}$) гомоморфизмы $f, g\colon \langle V\rangle \to \langle W\rangle$. Тогда гомоморфизм $h\colon \langle V\rangle \to \langle W\rangle$, $h(`v`) = f(`v`)g(`v`)$, r-строг.*

Доказательство. Возьмём $s \in \mathbf{N}_+$, $s \leqslant r$, и $v_1, \ldots, v_s \in V$. Пусть $x_t = `v_t` - 1 \in \langle V\rangle_\triangle$. Покажем, что $h(x_1 \ldots x_s) \in \langle W\rangle_\triangle^s$. Имеем

$$(-1)^s h(x_1 \ldots x_s) = \sum_{e_1,\ldots,e_s=0,1} (-1)^{e_1+\ldots+e_s} h(`v_1^{e_1} \ldots v_s^{e_s}`) =$$

$$= \sum_{e_1,\ldots,e_s=0,1} (-1)^{e_1+\ldots+e_s} f(`v_1^{e_1} \ldots v_s^{e_s}`) g(`v_1^{e_1} \ldots v_s^{e_s}`) =$$

$$= \sum_{e_1,\ldots,e_s=0,1} (-1)^{e_1+\ldots+e_s} f\Big(\prod_{t=1}^s (1+e_t x_t)\Big) g\Big(\prod_{t=1}^s (1+e_t x_t)\Big) =$$

$$= \sum_{e_1,\ldots,e_s=0,1} (-1)^{e_1+\ldots+e_s} \Big(\sum_{a_1,\ldots,a_s=0,1} e_1^{a_1} \ldots e_s^{a_s} f(x_1^{a_1} \ldots x_s^{a_s})\Big)\cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{b_1,\ldots,b_s=0,1} e_1^{b_1} \ldots e_s^{b_s} g(x_1^{b_1} \ldots x_s^{b_s})\Big) =$$

$$= \sum_{a_1,b_1,\ldots,a_s,b_s=0,1} \Big(\sum_{e_1,\ldots,e_s=0,1} (-1)^{e_1+\ldots+e_s} e_1^{a_1+b_1} \ldots e_s^{a_s+b_s}\Big) f(x_1^{a_1} \ldots x_s^{a_s})\cdot$$

$$\cdot g(x_1^{b_1} \ldots x_s^{b_s}).$$

Фиксируем $a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s$ и покажем, что соответствующее слагаемое внешней суммы принадлежит $\langle W\rangle_\triangle^s$. Пусть $a = a_1 + \ldots + a_s$, $b = b_1 + \ldots + b_s$. Так как $a, b \leqslant s \leqslant r$, а гомоморфизмы f, g r-строги, то

$$f(x_1^{a_1} \ldots x_s^{a_s}) g(x_1^{b_1} \ldots x_s^{b_s}) \in \langle W\rangle_\triangle^{a+b}.$$

Если $a + b \geqslant s$, то этого достаточно. Иначе есть такое t, что $a_t = b_t = 0$. Тогда величина $e_1^{a_1+b_1} \ldots e_s^{a_s+b_s}$ не зависит от e_t и поэтому внутренняя сумма равна нулю. □

10. Групповое кольцо свободной группы

Пусть дано пунктированное множество E. Пусть $G = FE$, $i\colon E \to G$ — каноническое отображение. Для $s \in \mathbf{N}$ введём пунктированное множество $E^{\wedge s} = E \wedge \ldots \wedge E$ ($E^{\wedge 0}$ — 0-сфера) и гомоморфизм $k_s\colon \langle E^{\wedge s}\rangle_\triangle \to \langle G\rangle_\triangle^s$,

$$k_s(`(e_1, \ldots, e_s)` - `\,*\,`) = \prod_{t=1}^s (`\underline{e_t}` - 1),$$

где $* \in E^{\wedge s}$ — отмеченный элемент. Согласно [3, VIII.6.2], композиция

$$\langle E^{\wedge s}\rangle_{\triangle} \xrightarrow{k_s} \langle G\rangle^s_{\triangle} \xrightarrow{\text{проекция}} \langle G\rangle^s_{\triangle}/\langle G\rangle^{s+1}_{\triangle}$$

— изоморфизм. Таким образом, $\langle G\rangle^s_{\triangle} = D^s \oplus \langle G\rangle^{s+1}_{\triangle}$, где $D^s \cong \langle E^{\wedge s}\rangle_{\triangle}$.

11. Подъём симплициального гомоморфизма

(11.1) *Пусть дана диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "f"] \\ D \arrow[r, "s"] & P \end{tikzcd}$$

симплициальных абелевых групп и гомоморфизмов. Предположим, что группа D свободна и m-связна ($m \in \mathbf{N}$), а гомоморфизм f сюръективен. Тогда существует такой симплициальный гомоморфизм $t\colon D \to Q$, что $f \circ t|D_{(m)} = s|D_{(m)}$.

Доказательство. Знаком $\heartsuit$ обозначаем функтор нормализации. Комплекс $D^\heartsuit$ свободен. Поэтому $D^\heartsuit = C^0 \oplus C^1 \oplus \dots$, где C^n — свободный комплекс с $C^n_i = 0$ при $i \neq n, n+1$ и инъективным дифференциалом $\partial\colon C^n_{n+1} \to C^n_n$. Комплекс $D^\heartsuit$ m-связен. Поэтому при $n \leqslant m$ дифференциал $\partial\colon C^n_{n+1} \to C^n_n$ — изоморфизм. Морфизм $f^\heartsuit\colon Q^\heartsuit \to P^\heartsuit$ сюръективен. Поэтому для $n \leqslant m$ есть такой морфизм $g^n\colon C^n \to Q^\heartsuit$, что $f^\heartsuit \circ g^n = s^\heartsuit|C^n$. Введём морфизм $h\colon D^\heartsuit \to Q^\heartsuit$, полагая $h|C^n$ равным g^n при $n \leqslant m$ и нулю иначе. Очевидно, $(f^\heartsuit \circ h)_n = s^\heartsuit_n$ при $n \leqslant m$. Соответствие Дольда — Кана даёт симплициальный гомоморфизм $t\colon D \to Q$ с $t^\heartsuit = h$. Он имеет нужное свойство. $\square$

12. Функция μ_L

Пусть дан полиэдр L. Для $x \in L^\circ$ пусть $\mu_L(x) = 1 - \chi(\mathrm{lk}_L\, x)$ (χ — эйлерова характеристика; lk — линк; считаем $\mathrm{lk}_L \varnothing = L$).

(12.1) *Для $y, z \in L^\circ$ имеем*

$$\sum_{x \in L^\circ\,:\, x \cap y = z} \mu_L(x) = \begin{cases} 1 & \textit{при } y = z, \\ 0 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Для $t \in L^\circ$ имеем

$$\sum_{x \in L^\circ :\, x \subset t,\, x \cap y = z} (-1)^{\dim x} = \begin{cases} (-1)^{\dim z} & \text{при } z \subset t \subset y, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

(считаем $\dim \varnothing = -1$). Для $x \in L^\circ$ имеем

$$\chi(\mathrm{lk}_L\, x) = \sum_{t \in L^\circ :\, x \subsetneq t} (-1)^{\dim t - \dim x - 1}$$

и, значит,

$$\mu_L(x) = \sum_{t \in L^\circ :\, x \subset t} (-1)^{\dim t - \dim x}.$$

Имеем

$$\sum_{x \in L^\circ :\, x \cap y = z} \mu_L(x) = \sum_{x, t \in L^\circ :\, x \subset t,\, x \cap y = z} (-1)^{\dim t - \dim x} =$$
$$= \sum_{t \in L^\circ} (-1)^{\dim t} \sum_{x \in L^\circ :\, x \subset t,\, x \cap y = z} (-1)^{\dim x} =$$
$$= \sum_{t \in L^\circ :\, z \subset t \subset y} (-1)^{\dim t + \dim z} = \begin{cases} 1 & \text{при } y = z, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

□

13. Фигура симплициальной группы

Модель расслоения путей. Введём косимплициальное симплициальное пунктированное множество B: для $m, n \in \mathbf{N}$ пусть B_m^n — множество нестрого возрастающих частичных отображений $b\colon [m] \dashrightarrow [n]$ (имеем $\operatorname{dom} b \subset [m]$) с отмеченным элементом o_m^n, $\operatorname{dom} o_m^n = \varnothing$; структурные отображения очевидные. Для $n \in \mathbf{N}$ имеем пунктированное симплициальное множество B^n.

Пусть дана симплициальная группа G. Введём симплициальную группу $\tilde{G}$, *фигуру*: для $n \in \mathbf{N}$ пусть $\tilde{G}_n$ — группа связанных симплициальных отображений $B^n \to G$; структурные гомоморфизмы индуцируются косимплициальной структурой.

(13.1) *Пространство $|\tilde{G}|$ стягиваемо.*

Доказательство. Пусть симплициальное множество I — стандартный 1-симплекс: I_n ($n \in \mathbf{N}$) — множество нестрого возрастающих отображений $s\colon [n] \to [1]$. Набор отображений $I_n \times B^n_m \to B^n_m$, $(s, b) \mapsto b|(s \circ b)^{-1}(1)$, $m, n \in \mathbf{N}$, индуцирует стягивающую гомотопию $I \times \tilde{G} \to \tilde{G}$. □

Вычисление на элементах $i_n \in B^n_n$, $i_n = \mathrm{id}\colon [n] \to [n]$, даёт симплициальный гомоморфизм $p\colon \tilde{G} \to G$, *проекцию.*

(13.2) *Предположим, что $G_0 = 1$. Тогда гомоморфизм p сюръективен.*

Доказательство. Возьмём элемент $g \in G_n$ ($n \in \mathbf{N}$). Нужно найти элемент $\tilde{g} \in \tilde{G}_n$ с $p_n(\tilde{g}) = g$, т. е. связанное симплициальное отображение $\tilde{g}\colon B^n \to G$ с $\tilde{g}_n(i_n) = g$. Пусть $V \subset B^n$ — симплициальное подмножество, порождённое элементами i_n и $l_n \in B^n_1$, $\operatorname{dom} l_n = \{0\}$, $l_n(0) = 0$. Это букет стандартных n-симплекса и 1-симплекса. Введём симплициальное отображение $f\colon V \to G$, $f_n(i_n) = g$, $f_1(l_n) = 1$. Так как V стягиваемо, а G — множество Кана, то отображение f продолжается на B^n, что даёт нужное $\tilde{g}$. □

Продолжение сечений. Пусть дан полиэдр L. Возьмём симплексы $x, y \in L$ размерностей r, s, соответственно. Пусть $i\colon [r] \to L$, $j\colon [s] \to L$ — возрастающие нумерации их вершин. Имеем частичное отображение $t = i^{-1} \circ j\colon [s] \dashrightarrow [r]$. Для связанного симплициального отображения $\tilde{g}\colon B^r \to G$ введём связанное симплициальное отображение $e_{xy}(\tilde{g})\colon B^s \to G$, для $b\colon [m] \dashrightarrow [s]$ ($m \in \mathbf{N}$) полагая $e_{xy}(\tilde{g})_m(b) = \tilde{g}_m(t \circ b)$ (композиция частичных отображений понимается в обычном смысле). Этим задан гомоморфизм $e_{xy}\colon \tilde{G}_r \to \tilde{G}_s$.

Для $x \in L$, $\dim x = r$, введём гомоморфизм $E_x\colon \tilde{G}(\bar{\bar{x}}) \to \tilde{G}(L)$, полагая $E_x(v)_s(y) = e_{xy}(v_r(x))$ ($y \in L$, $\dim y = s$). Распространим это построение на случай $x \in L^\circ$, полагая $E_\varnothing(1) = 1$ (имеем $\tilde{G}(\bar{\bar{\varnothing}}) = 1$).

(13.3) *Для $x \in L^\circ$, $v \in \tilde{G}(\bar{\bar{x}})$ имеем*

а) $E_x(v)|_{\bar{\bar{x}}} = v$;

б) $E_x(v)|_{\bar{\bar{y}}} = E_{x \cap y}(v|_{\bar{\bar{x}} \cap \bar{\bar{y}}})|_{\bar{\bar{y}}}$ ($y \in L^\circ$);

в) $\sigma(E_x(v)) \subset O_L(x, 1)$ *при* $x \neq \varnothing$. □

Реализация. Пусть $\tilde J\colon \langle\tilde G(L)\rangle \to \langle\tilde G\rangle(L)$, $\tilde J_x\colon \langle\tilde G(\bar{\bar x})\rangle \to \langle\tilde G\rangle(\bar{\bar x})$, $x \in L$, — сведения. Очевидно, $\tilde J_x$ — изоморфизмы. Введём аддитивный гомоморфизм $R\colon \langle\tilde G\rangle(L) \to \langle\tilde G(L)\rangle$,

$$R(w) = \sum_{x\in L} \mu_L(x)(\langle E_x\rangle \circ \tilde J_x^{-1})(w|_{\bar{\bar x}}),$$

реализацию. Имеем $R(\langle\tilde G\rangle_\triangle(L)) \subset \langle\tilde G(L)\rangle_\triangle$.

(13.4) *Для $w \in \langle\tilde G\rangle_\triangle(L)$ имеем $\tilde J(R(w)) = w$.*

Доказательство. Для $z \in L^\circ$ введём гомоморфизм $H_z\colon \langle\tilde G\rangle(\bar{\bar z}) \to \langle\tilde G(L)\rangle$, полагая $H_z = \langle E_z\rangle \circ \tilde J_z^{-1}$, $z \neq \varnothing$, и $H_\varnothing = 0$. Из (13.3 б) следует, что для $x, y \in L^\circ$, $u \in \langle\tilde G\rangle_\triangle(\bar{\bar x})$ имеем $H_x(u)|_{\bar{\bar y}} = H_{x\cap y}(u|_{\bar{\bar x}\cap\bar{\bar y}})|_{\bar{\bar y}}$. Для $y \in L$ имеем

$$\begin{aligned}
\tilde J(R(w))|_{\bar{\bar y}} &= \tilde J_y(R(w)|_{\bar{\bar y}}) = \\
&= \sum_{x\in L^\circ} \mu_L(x)\tilde J_y(H_x(w|_{\bar{\bar x}})|_{\bar{\bar y}}) = \sum_{x\in L^\circ} \mu_L(x)\tilde J_y(H_{x\cap y}(w|_{\bar{\bar x}\cap\bar{\bar y}})|_{\bar{\bar y}}) = \\
&= \sum_{z\in L^\circ}\Big(\sum_{x\in L^\circ\,:\,x\cap y = z} \mu_L(x)\Big)\tilde J_y(H_z(w|_{\bar{\bar z}})|_{\bar{\bar y}}) \overset{\text{по (12.1)}}{=} \tilde J_y(H_y(w|_{\bar{\bar y}})|_{\bar{\bar y}}) = \\
&= \tilde J_y(\langle E_y\rangle(\tilde J_y^{-1}(w|_{\bar{\bar y}}))|_{\bar{\bar y}}) \overset{\text{по (13.3 а)}}{=} \tilde J_y(\tilde J_y^{-1}(w|_{\bar{\bar y}})) = w|_{\bar{\bar y}}. \quad \square
\end{aligned}$$

(13.5) *Для $w \in \langle\tilde G\rangle(L)$ имеем $\Sigma(R(w)) \subset O_L(\sigma(w), 1)$.*

Следует из (13.3 в). $\square$

(13.6) *Имеем $R(\langle\tilde G\rangle^s_\triangle(L)) \subset \langle\tilde G(L)\rangle^s_\triangle$, $s \in \mathbf{N}$.*

Доказательство. Для $w \in \langle\tilde G\rangle^s_\triangle(L)$, $x \in L$ имеем $w|_{\bar{\bar x}} \in \langle\tilde G\rangle^s_\triangle(\bar{\bar x})$, $\tilde J_x^{-1}(w|_{\bar{\bar x}}) \in \langle\tilde G(\bar{\bar x})\rangle^s_\triangle$ и $\langle E_x\rangle(\tilde J_x^{-1}(w|_{\bar{\bar x}})) \in \langle\tilde G(L)\rangle^s_\triangle$, по (9.1). Суммируя по $x \in L$, получаем $R(w) \in \langle\tilde G(L)\rangle^s_\triangle$. $\square$

14. Дробления

Пусть даны полиэдр L и симплициальная абелева группа D. Набор гомоморфизмов $(h_z\colon D(\bar{\bar z}) \to D(L))_{z\in L}$ называем *дроблением*, если для $w \in D(L)$ имеем

$$\sum_{z\in L} h_z(w|_{\bar{\bar z}}) = w$$

и $\sigma(h_z(w)) \subset O_L(z, 1)$ для всех $z \in L$.

(14.1) *Предположим, что* $\dim L \leqslant m$ $(m \in \mathbf{N})$*, а группа* D *свободна и* m*-связна. Тогда существует дробление* $(h_z\colon D(\bar{\bar{z}}) \to D(L))_{z \in L}$.

Доказательство. Будем пользоваться соответствием Дольда — Кана. Есть разложение $D = D^0 \oplus D^1 \oplus \ldots$, где D^n — симплициальная абелева группа, нормализация C^n которой сосредоточена в размерностях n, $n+1$ и имеет инъективный дифференциал $\partial\colon C^n_{n+1} \to C^n_n$ (ср. доказательство утверждения (11.1)). Достаточно для каждого n построить дробление $(h^n_z\colon D^n(\bar{\bar{z}}) \to D^n(L))_{z \in L}$. Если $n \leqslant m$, то $\partial\colon C^n_{n+1} \to C^n_n$ — изоморфизм, так как группа D m-связна. Поэтому сечения на полиэдре со значениями в D^n — то же, что n-коцепи на нём с коэффициентами в C^n_n. Пусть h^n_z — продолжение коцепи нулём при $\dim z = n$ и нуль иначе. Если $n > m$, то $D^n(L) = 0$, так как $\dim L \leqslant m$, и есть нулевое дробление. $\square$

15. Модификация набора сечений

Фиксируем числа $b_1, \ldots, b_5, c \in \mathbf{N}$, каждое из которых достаточно велико относительно предыдущих, а именно: $b_1 \geqslant 2$, $b_2 \geqslant b_1 + 2$, $b_3 \geqslant 2b_2$, $b_4 \geqslant 2b_1 + b_3$, $b_5 \geqslant 2b_2 + b_4$, $2^{c-1} \geqslant 2b_5 + 1$.

Морфизм $e\colon L \to K$. Пусть дан полиэдр K, $\dim K \leqslant m$ $(m \in \mathbf{N})$. Пусть $L = \Delta^c K$, $e = \Phi_K \circ \ldots \circ \Phi_{\Delta^{c-1}K}\colon L \to K$. Для $z \in L$ множество $e(O_L(z, b_5)) \subset K$ мало (это следует из свойств операции Δ и неравенства $2^{c-1} \geqslant 2b_5 + 1$).

Морфизмы e_z. Возьмём симплекс $z \in L$. Так как $b_2 \leqslant b_5$, множество $e(O_L(z, b_2))$ мало. Пусть $x \in K$ — натянутый на него симплекс, $u \in K$ — старшая вершина симплекса x. Построим морфизм $e_z\colon L \to K$ со свойствами:

1) $e_z(O_L(z, b_1)) = \{u\}$;

2) $e_z(O_L(z, b_2)) \subset \bar{\bar{x}}$;

3) e_z совпадает с e вне $O_L(z, b_2)$.

Пусть $L_1 = \delta \Delta^{c-1} K$. Имеем $L = \delta' L_1$. Пусть $B_1 \subset L_1$ — подполиэдр, порождённый симплексами, центры которых (будучи вершинами полиэдра L) принадлежат множеству $O_L(z, b_1 + 1)$. Пусть $B = \delta' B_1$. Имеем $B \subset L$, подполиэдр. Имеем $O_L(z, b_1) \subset B$ и (так как $b_2 \geqslant b_1 + 2$) $O_L(B, 1) \subset O_L(z, b_2)$. У полиэдра L нет рёбер, выходящих и направленных из B. Зададим морфизм e_z, для вершины $t \in L$ полагая $e_z(t)$ равным

u при $t \in B$ и $e(t)$ иначе. Легко проверить корректность задания и нужные свойства.

Морфизмы e_Z. Возьмём множество $Z \subset L$ с $\epsilon_L(Z) \geqslant b_3$. Зададим морфизм $e_Z\colon L \to K$ условиями:

1) для $z \in Z$ морфизм e_Z совпадает с e_z на $O_L(z, b_2)$;

2) e_Z совпадает с e вне $O_L(Z, b_2)$.

Так как $b_3 \geqslant 2b_2$, это задание корректно.

Симплициальные группы G и D. Пусть дано $(n-1)$-связное ($n \in \mathbf{N}$) симплициальное множество E с одной вершиной. Предположим, что $m \leqslant 2n-1$. Пусть $G = FE$, $i\colon E \to G$ и $j\colon G \to \langle G \rangle$ — канонические симплициальные отображения, симплициальный гомоморфизм $q\colon G \to G^+$ — проекция. Нам понадобится разложение $\langle G \rangle \cong \langle 1 \rangle \oplus G^+ \oplus D$ (ср. § 10) и связанные с ним симплициальные гомоморфизмы. Пусть $d\colon \langle G \rangle \to \langle G \rangle$ — симплициальный гомоморфизм, тождественный на $\langle G \rangle_\vartriangle$ и нулевой на $\langle 1 \rangle$. Зададим симплициальные гомоморфизмы $f\colon \langle G \rangle \to G^+$ условием $f \circ j = q$ и $g\colon G^+ \to \langle G \rangle$ условием $g \circ q \circ i = d \circ j \circ i$. Имеем $f \circ g = \mathrm{id}$. Пусть $D = \langle G \rangle_\vartriangle^2 \subset \langle G \rangle$, $k\colon D \to \langle G \rangle$ — включение. Зададим симплициальный гомоморфизм $l\colon \langle G \rangle \to D$ условием $k \circ l + g \circ f = d$. Имеем $l \circ k = \mathrm{id}$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[r, "i"] & G \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & D \arrow[r, "k"] & \langle G \rangle \arrow[r, "f"] \arrow[l, bend left, "l"] & G^+ \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Группа D свободна. По теореме Фрейденталя, отображение $i\colon E \to G$ $(2n-1)$-связно. Так как $m \leqslant 2n-1$, оно m-связно. Используя теорему Дольда — Тома, получаем, что симплициальный гомоморфизм $\langle i \rangle\colon \langle E \rangle \to \langle G \rangle$ m-связен. Легко понять, что $(\langle i \rangle, k)\colon \langle E \rangle \oplus D \to \langle G \rangle$ — изоморфизм. Поэтому группа D m-связна.

Для $s \in \mathbf{N}$ введём симплициальную подгруппу $D^{(s)} \subset D$, равную $\langle G \rangle_\vartriangle^s$ при $s \geqslant 2$ и D иначе.

Разложение группы D. Пусть дано число $r \in \mathbf{N}$, $r \geqslant 2$. Сказанное в § 10 даёт разложение $D = D^2 \oplus \ldots \oplus D^r$, в котором $\langle G \rangle_\vartriangle^s = D^s \oplus \ldots \oplus D^r$, $s = 2, \ldots, r$. (Имеем $D^s \cong \langle E^{\wedge s} \rangle_\vartriangle$ при $s < r$ и $D^r = \langle G \rangle_\vartriangle^r$.) Так как группа D свободна и m-связна, группы D^s свободны и m-связны.

Дробление h. По (14.1), для каждого $s = 2, \dots, r$ есть дробление $(h_z^s\colon D^s(\bar{\bar{z}}) \to D^s(L))_{z\in L}$. Объединяя их, получаем дробление $(h_z\colon D(\bar{\bar{z}}) \to D(L))_{z\in L}$. Имеем $h_z(D^{(s)}(\bar{\bar{z}})) \subset D^{(s)}(L)$, $s \in \mathbf{N}$, $s \leqslant r$.

Симплициальный гомоморфизм X. Пусть $\tilde{G}$ — фигура группы G, $p\colon \tilde{G} \to G$ — проекция. По (13.2), гомоморфизм p сюръективен. Поэтому для симплициального гомоморфизма $\langle p\rangle\colon \langle\tilde{G}\rangle \to \langle G\rangle$ имеем $\langle p\rangle(\langle\tilde{G}\rangle^s_\triangle) = \langle G\rangle^s_\triangle$, $s \in \mathbf{N}$. Применяя (11.1) к каждой компоненте D^s разложения группы D, получаем симплициальный гомоморфизм $X\colon D \to \langle\tilde{G}\rangle$ со свойствами:

1) диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \langle\tilde{G}\rangle \arrow[d, "\langle p\rangle"] \\ D_{(m)} \arrow[ur, "X|D_{(m)}"] \arrow[r, "\text{включение}"] & \langle G\rangle \end{tikzcd}$$

коммутативна;

2) $X(D^{(s)}) \subset \langle\tilde{G}\rangle^s_\triangle$, $s \in \mathbf{N}$, $s \leqslant r$.

Имеем $\operatorname{im} X \subset \langle\tilde{G}\rangle_\triangle$.

Гомоморфизм V. Пусть $J\colon \langle G(L)\rangle \to \langle G\rangle(L)$ — сведение, $R\colon \langle\tilde{G}\rangle(L) \to \langle\tilde{G}(L)\rangle$ — реализация. Введём композицию

$$V\colon D(L) \xrightarrow{X_\#} \langle\tilde{G}\rangle(L) \xrightarrow{R} \langle\tilde{G}(L)\rangle \xrightarrow{\langle p_\#\rangle} \langle G(L)\rangle.$$

Имеем $\operatorname{im} V \subset \langle G(L)\rangle_\triangle$.

(15.1) *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & \langle G(L)\rangle \arrow[d, "J"] \\ D(L) \arrow[ur, "V"] \arrow[r, "k_\#"] & \langle G\rangle(L) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $\tilde{J}\colon \langle\tilde{G}(L)\rangle \to \langle\tilde{G}\rangle(L)$ — сведение. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \langle\tilde{G}\rangle(L) \arrow[r, "R"] & \langle\tilde{G}(L)\rangle \arrow[r, "\langle p_\#\rangle"] \arrow[d, "\tilde{J}"] & \langle G(L)\rangle \arrow[d, "J"] \\ D(L) \arrow[u, "X_\#"] \arrow[r, "X_\#"] & \langle\tilde{G}\rangle(L) \arrow[r, "\langle p\rangle_\#"] & \langle G\rangle(L) \end{tikzcd}$$

коммутативна (привлекаем (13.4), учитывая, что $\operatorname{im} X \subset \langle \tilde{G} \rangle_\triangle$). Имеем $J \circ V = \langle p \rangle_\# \circ X_\# = k_\#$, по свойству 1) гомоморфизма X. $\square$

(15.2) *Для $w \in D(L)$ имеем $\Sigma(V(w)) \subset O_L(\sigma(w), 1)$.*

Это следует из (13.5). $\square$

(15.3) *Имеем $V(D^{(s)}(L)) \subset \langle G(L) \rangle_\triangle^s$, $s \in \mathbf{N}$, $s \leqslant r$.*

Это следует из свойства 2) гомоморфизма X и утверждений (13.6), (9.1). $\square$

Отображения P_z, P. Для $z \in L$ введём отображение $P_z \colon G(K) \to \langle G(L) \rangle$, $P_z(u) = (V \circ h_z)(l \circ j \circ u \circ e|_{\bar{\bar{z}}})$. Имеем $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_\triangle$, так как $\operatorname{im} V \subset \langle \tilde{G}(L) \rangle_\triangle$. Имеем $\Sigma(P_z(u)) \subset O_L(z, b_1)$ (по определению дробления, утверждению (15.2) и неравенству $b_1 \geqslant 2$).

Введём отображение $P \colon G(K) \to \langle G(L) \rangle$, $P(u) = V(l \circ j \circ u \circ e)$. Имеем

$$\sum_{z \in L} P_z(u) = P(u).$$

Гомоморфизм M. Введём аддитивный гомоморфизм $M \colon \langle G(K) \rangle \to \langle G(L) \rangle$,

$$M(‘u’) = \sum_{Z \subset L \,:\, \epsilon_L(Z) \geqslant b_3} (-1)^{\# Z} ‘u \circ e_Z’ \prod_{z \in Z} P_z(u).$$

Здесь и далее считаем, что порядок сомножителей под знаком $\prod$ определяется некоторым фиксированным порядком на L (впрочем, можно понять, что во всех формулах сомножители коммутируют).

(15.4) *Для $U \in \langle G(K) \rangle$ имеем $\theta(M(U)) \geqslant \min(\theta(U) + 1, \eta(U))$.*

Доказательство. Допустим, что $\theta(U) \geqslant s - 1$, $\eta(U) \geqslant s$ ($s \in \mathbf{N}_+$) и покажем, что $\theta(M(U)) \geqslant s$. Возьмём множество $T \subset L$ с $\# T < s$ и покажем, что $M(U)\|_T = 0$.

Случай $\epsilon_L(T) \geqslant b_4$. Пусть $I = \{Z \subset L : \epsilon_L(Z) \geqslant b_3\}$. Имеем (для $u \in G(K)$)

$$M(‘u’)\|_T = \sum_{Z \in I} (-1)^{\# Z} ‘u \circ e_Z’\|_T \prod_{z \in Z} P_z(u)\|_T.$$

Множества $O_L(y,b_1)$, $y\in T$, (*шарики*) не пересекаются; расстояние (ρ_L) между симплексами разных шариков не меньше b_3 (так как $b_4\geqslant 2b_1+b_3$). Расстояние между симплексами одного шарика меньше b_3 (так как $b_3\geqslant 2b_1$). Пусть I_0 — множество множеств $Z\subset L$, лежащих в объединении шариков и имеющих в каждом не более одного симплекса. Покажем, что сумму по $Z\in I$ можно заменить на сумму по $Z\in I_0$. Имеем $I_0\subset I$. Если $Z\in I\setminus I_0$, то есть симплекс $z\in Z\setminus O_L(T,b_1)$; тогда $P_z(u)\|_T=0$, так как $P_z(u)\in\langle G(L)\rangle_\triangle$, а $\Sigma(P_z(u))\subset O_L(z,b_1)$, но $O_L(z,b_1)\cap T=\varnothing$. Поэтому соответствующее слагаемое равно нулю.

Пусть
$$I_0'=\coprod_{S\subset T}W_S,$$
где W_S — множество таких отображений $w\colon S\to L$, что $w(y)\in O_L(y,b_1)$, $y\in S$. Имеем биекцию $I_0'\to I_0$, $(S,w)\mapsto w(S)$. Поэтому
$$M(‘u’)\|_T=\sum_{(S,w)\in I_0'}(-1)^{\#S}‘u\circ e_{w(S)}’\|_T\prod_{y\in S}P_{w(y)}(u)\|_T.$$

Для $y\in T$ пусть $t_y\colon G(\bar{\bar{y}})\to G_T$ — канонический мономорфизм сомножителя в произведение. Покажем, что для $(S,w)\in I_0'$
$$(u\circ e_{w(S)})\|_T=\prod_{y\in T\setminus S}t_y(u\circ e|_{\bar{\bar{y}}}).$$

Если $y\in S$, то $y\in O_L(w(y),b_1)$ и морфизм $e_{w(S)}$ посылает симплекс y в вершину полиэдра K; тогда $u\circ e_{w(S)}|_{\bar{\bar{y}}}=1$, так как $G_0=1$. Если $y\in T\setminus S$, то $y\notin O_L(w(S),b_2)$ (так как $b_4\geqslant b_1+b_2$) и $e_{w(S)}|_{\bar{\bar{y}}}=e|_{\bar{\bar{y}}}$. Сказанное даёт нужное равенство.

Для $(S,w)\in I_0'$, $y\in S$ имеем $P_{w(y)}(u)\|_T=\langle t_y\rangle(P_{w(y)}(u)|_{\bar{\bar{y}}})$. Это следует из того, что $\Sigma(P_{w(y)}(u))\subset O_L(w(y),b_1)$, а $O_L(w(y),b_1)\cap T=\{y\}$ (так как $b_4\geqslant 2b_1$).

Итак,

$$M(`u')\|_T = \sum_{(S,w)\in I_0'} (-1)^{\#S}\Big(\prod_{y\in T\setminus S} `t_y(u\circ e|_{\bar{\bar y}})'\Big)\Big(\prod_{y\in S}\langle t_y\rangle(P_{w(y)}(u)|_{\bar{\bar y}})\Big) =$$
$$= \sum_{S\subset T}(-1)^{\#S}\Big(\prod_{y\in T\setminus S} `t_y(u\circ e|_{\bar{\bar y}})'\Big)\Big(\sum_{w\in W_S}\prod_{y\in S}\langle t_y\rangle(P_{w(y)}(u)|_{\bar{\bar y}})\Big) =$$
$$= \sum_{S\subset T}(-1)^{\#S}\Big(\prod_{y\in T\setminus S}\langle t_y\rangle(`u\circ e'|_{\bar{\bar y}})\Big)\Big(\prod_{y\in S}\sum_{z\in O_L(y,b_1)}\langle t_y\rangle(P_z(u)|_{\bar{\bar y}})\Big) =$$
$$= \prod_{y\in T}\langle t_y\rangle\Big(`u\circ e'|_{\bar{\bar y}} - \sum_{z\in O_L(y,b_1)} P_z(u)|_{\bar{\bar y}}\Big).$$

В последней сумме область суммирования можно расширить до $z\in L$, потому что при $z\in L\setminus O_L(y,b_1)$ имеем $P_z(u)|_{\bar{\bar y}}=0$, так как $P_z(u)\in\langle G(L)\rangle_\triangle$, а $\Sigma(P_z(u))\subset O_L(z,b_1)$, но $O_L(z,b_1)\cap\bar{\bar y}=\varnothing$ при таком z. Получаем

$$M(`u')\|_T = \prod_{y\in T}\langle t_y\rangle(`u\circ e'|_{\bar{\bar y}} - P(u)|_{\bar{\bar y}}).$$

Для $y\in T$ пусть $J_y\colon\langle G(\bar{\bar y})\rangle\to\langle G\rangle(\bar{\bar y})$ — сведение. Очевидно, это изоморфизм. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \langle G(L)\rangle \arrow[r, "?|_{\bar{\bar y}}"] \arrow[d, "J"] & \langle G(\bar{\bar y})\rangle \arrow[d, "J_y"] \\
D(L) \arrow[ur, "V"] \arrow[r, "k_\#"] & \langle G\rangle(L) \arrow[r, "?|_{\bar{\bar y}}"] & \langle G\rangle(\bar{\bar y})
\end{tikzcd}$$

(привлекаем (15.1)). Имеем $J_y(`u\circ e'|_{\bar{\bar y}} - P(u)|_{\bar{\bar y}}) = J_y(`u\circ e'|_{\bar{\bar y}} - V(l\circ j\circ u\circ e)|_{\bar{\bar y}}) = j\circ u\circ e|_{\bar{\bar y}} - k\circ l\circ j\circ u\circ e|_{\bar{\bar y}} = 1+g\circ f\circ j\circ u\circ e|_{\bar{\bar y}} = 1+g\circ q\circ u\circ e|_{\bar{\bar y}}$. Введём гомоморфизм $a_y\colon G_K\to\langle G_T\rangle$ (в аддитивную группу), $a_y(v) = (\langle t_y\rangle\circ J_y^{-1})((g\circ q\circ v\circ e)_y)$. Имеем

$$M(`u')\|_T = \prod_{y\in T}(1+a_y(u\|_K)).$$

Так как $\eta(U)>\#T$, то, по (8.1), $M(U)\|_T=0$.

Противный случай. Есть разные симплексы $y_0,y_1\in T$ с $\rho_L(y_0,y_1)<b_4$. Для каждого $y\in T\setminus\{y_1\}$ рассмотрим симплекс $x\in K$, натянутый на множество $e(O_L(y,b_5))$. Пусть $S\subset K$ — множество этих симплексов.

Имеем $\#S < s - 1$. Для каждого $y \in T$ существует такой $y' \in T \setminus \{y_1\}$, что $O_L(y, 2b_2) \subset O_L(y', b_5)$: можно положить y' равным y_0 при $y = y_1$ и y иначе (используем, что $b_5 \geqslant 2b_2 + b_4$). Поэтому для любого $y \in T$ существует такой $x \in S$, что $e(O_L(y, 2b_2)) \subset \bar{\bar{x}}$. Пусть $e' \colon \overline{O_L(T, b_1)} \to \bar{S}$ — сокращение морфизма e (используем, что $b_1 \leqslant 2b_2$).

Возьмём множество $Z \subset L$, $\epsilon_L(Z) \geqslant b_3$. Покажем, что $e_Z(\bar{T}) \subset \bar{S}$. Достаточно проверить, что $e_Z(y) \in \bar{S}$ для $y \in T$. Если $y \notin O_L(Z, b_2)$, то $e_Z(y) = e(y) \in \bar{S}$. Иначе $y \in O_L(z, b_2)$ для какого-то $z \in Z$, и $e_Z(y) = e_z(y) \in \bar{\bar{x}}$, где $x \in K$ — симплекс, натянутый на $e(O_L(z, b_2))$. Но $e(O_L(z, b_2)) \subset e(O_L(y, 2b_2))$, поэтому $e_Z(y) \in \bar{S}$. Пусть $\tilde{e}_Z \colon \bar{T} \to \bar{S}$ — сокращение морфизма e_Z.

Введём аддитивный гомоморфизм $\tilde{M} \colon \langle G(\bar{S}) \rangle \to \langle G(\bar{T}) \rangle$,

$$\tilde{M}(‘\tilde{u}’) = \sum_{Z \subset O_L(T, b_1) \,:\, \epsilon_L(Z) \geqslant b_3} (-1)^{\#Z} ‘\tilde{u} \circ \tilde{e}_Z’ \prod_{z \in Z} (V \circ h_z)(l \circ j \circ \tilde{u} \circ e'|_{\bar{\bar{z}}})|_{\bar{T}}.$$

Покажем, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\langle G(K) \rangle \arrow[r, "M"] \arrow[d, "?|_{\bar{S}}"'] & \langle G(L) \rangle \arrow[d, "?|_{\bar{T}}"'] \\
\langle G(\bar{S}) \rangle \arrow[r, "\tilde{M}"] & \langle G(\bar{T}) \rangle
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Имеем

$$M(‘u’)|_{\bar{T}} = \sum_{Z \subset L \,:\, \epsilon_L(Z) \geqslant b_3} (-1)^{\#Z} ‘u \circ e_Z’|_{\bar{T}} \prod_{z \in Z} P_z(u)|_{\bar{T}}.$$

Слагаемые с $Z \not\subset O_L(T, b_1)$ равны нулю (если $z \in Z \setminus O_L(T, b_1)$, то $P_z(u)|_{\bar{T}} = 0$, так как $P_z(u) \in \langle G(L) \rangle_{\triangle}$, а $\Sigma(P_z(u)) \subset O_L(z, b_1)$, но $O_L(z, b_1) \cap \bar{T} = \varnothing$). Получаем

$$M(‘u’)|_{\bar{T}} = \sum_{Z \subset O_L(T, b_1) \,:\, \epsilon_L(Z) \geqslant b_3} (-1)^{\#Z} ‘u \circ e_Z’|_{\bar{T}} \prod_{z \in Z} (V \circ h_z)(l \circ j \circ u \circ e|_{\bar{\bar{z}}})|_{\bar{T}} = \\ = \tilde{M}(‘u’|_{\bar{S}}).$$

Так как $\theta(U) > \#S$, то $U\|_S = 0$. Значит, $U|_{\bar{S}} = 0$. Получаем $M(U)|_{\bar{T}} = \tilde{M}(U|_{\bar{S}}) = 0$. Значит, $M(U)\|_T = 0$. □

(15.5) *Для $U \in \langle G(K)\rangle$ имеем $\eta(M(U)) \geqslant \min(\eta(U), r)$.*

Доказательство. Введём аддитивный гомоморфизм $N\colon \langle G_K\rangle \to \langle G_L\rangle$,

$$N(‘v’) = \sum_{Z\subset L\,:\,\epsilon_L(Z)\geqslant b_3} (-1)^{\#Z}‘v \circ e_Z’ \prod_{z\in Z} (V \circ h_z)((l \circ j \circ v \circ e)_z)\|_L.$$

Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\langle G(K)\rangle \arrow[r, "M"] \arrow[d, "?\|_K"'] & \langle G(L)\rangle \arrow[d, "?\|_L"'] \\
\langle G_K\rangle \arrow[r, "N"] & \langle G_L\rangle
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Достаточно показать, что гомоморфизм N r-строг. Для $z \in L$ введём гомоморфизм $t_z\colon G_K \to G(\bar{\bar{z}})$, $t_z(v) = (v\circ e)_z$, и аддитивный гомоморфизм $B_z\colon \langle G(\bar{\bar{z}})\rangle \to \langle G(L)\rangle$, $B_z(‘v’) = (V \circ h_z)(l \circ j \circ v)$. Имеем гомоморфизмы $e^{\#}_Z\colon G_K \to G_L$ и $?\|_L\colon G(L) \to G_L$. Имеем (для $v \in G_K$)

$$N(‘v’) = \sum_{Z\subset L\,:\,\epsilon_L(Z)\geqslant b_3} (-1)^{\#Z} \langle e^{\#}_Z\rangle(‘v’) \prod_{z\in Z} (B_z \circ \langle t_z\rangle)(‘v’)\|_L.$$

В силу (9.1), (9.2), достаточно показать, что гомоморфизмы B_z r-строги. Гомоморфизм B_z равен композиции

$$\langle G(\bar{\bar{z}})\rangle \xrightarrow{J_z} \langle G\rangle(\bar{\bar{z}}) \xrightarrow{l_\#} D(\bar{\bar{z}}) \xrightarrow{h_z} D(L) \xrightarrow{V} \langle G(L)\rangle,$$

где J_z — сведение. Для $s \in \mathbf{N}$ имеем: $J_z(\langle G(\bar{\bar{z}})\rangle^s_\triangle) = \langle G\rangle^s_\triangle(\bar{\bar{z}})$; $l_\#(\langle G\rangle^s_\triangle(\bar{\bar{z}})) = D^{(s)}(\bar{\bar{z}})$ (так как l тождественен на D); $h_z(D^{(s)}(\bar{\bar{z}})) \subset D^{(s)}(L)$ при $s \leqslant r$ (свойство дробления h); $V(D^{(s)}(L)) \subset \langle G(L)\rangle^s_\triangle$ при $s \leqslant r$, по (15.3). Таким образом, $B_z(\langle G(\bar{\bar{z}})\rangle^s_\triangle) \subset \langle G(L)\rangle^s_\triangle$ при $s \leqslant r$, что и требуется. □

Пусть $Q = |K|$ $(= |L|)$.

(15.6) *Для $U \in \langle G(K)\rangle$ имеем $[|M(U)|] = [|U|]$ в кольце $\langle [Q, |G|]\rangle$.*

Доказательство. Возьмём $u \in G(K)$, $z \in L$. Имеем $P_z(u) \in \langle G(L)\rangle_\triangle$. По построению отображения P_z, все сечения, входящие в формальную сумму $P_z(u)$, поднимаются в $\tilde{G}$. По (13.1), пространство $|\tilde{G}|$ стягиваемо. Поэтому $[|P_z(u)|] = 0$. Применяя кольцевой гомоморфизм $[|?|]\colon \langle G(L)\rangle \to \langle [Q, |G|]\rangle$ к равенству, которым введён гомоморфизм M, получаем $[|M(‘u’)|] = [|‘u \circ e’|] = [|‘u’|]$, так как отображение $|e|\colon Q \to Q$ гомотопно тождественному. □

16. Основная процедура

Пусть даны полиэдр K, $\dim K \leqslant m$ ($m \in \mathbf{N}$), и $(n-1)$-связное ($n \in \mathbf{N}$) симплициальное множество E с одной вершиной, причём $m \leqslant 2n-1$. Пусть $Q = |K|$, $G = FE$.

(16.1) *Пусть дан элемент $U \in \langle G(K)\rangle$ с $\eta(U) \geqslant s$ ($s \in \mathbf{N}$). Тогда существуют полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle G(L)\rangle$ с $\theta(V) \geqslant s$ и $[|V|] = [|U|]$ в $\langle [Q, |G|]\rangle$.*

Доказательство. Чтобы получить нужную пару (L, V), возьмём пару (K, U) и s раз применим пару (Δ^c, M) операций § 15. Величину r берём не меньшей s. Нужные свойства следуют из (15.4), (15.5), (15.6). $\square$

17. Функция θ: топологический вариант

Пусть даны пространства X, Y. Для $A \in \langle C(X,Y)\rangle$ пусть $\theta(A) = \inf\{\#V :$ конечное $V \subset X,\ A|_V \neq 0\} \in \hat{\mathbf{N}}$.

Пусть даны ещё пространства X', Y' и непрерывные отображения $g\colon X' \to X$, $h\colon Y \to Y'$. Введём отображение $t\colon C(X,Y) \to C(X',Y')$, $t(a) = h \circ a \circ g$. Имеем гомоморфизм $\langle t\rangle\colon \langle C(X,Y)\rangle \to \langle C(X',Y')\rangle$.

(17.1) *Для $A \in \langle C(X,Y)\rangle$ имеем $\theta(\langle t\rangle(A)) \geqslant \theta(A)$.*

Доказательство. Возьмём конечное $V' \subset X'$, $\#V' < \theta(A)$, и покажем, что $\langle t\rangle(A)|_{V'} = 0$. Пусть $V = g(V') \subset X$. Имеем $\#V < \theta(A)$. Поэтому $A|_V = 0$. Пусть $\tilde{g}\colon V' \to V$ — сокращение отображения g. Введём отображение $\tilde{t}\colon C(V,Y) \to C(V',Y')$, $\tilde{t}(\tilde{a}) = h \circ \tilde{a} \circ \tilde{g}$. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} C(X,Y) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "?|_V"'] & C(X',Y') \arrow[d, "?|_{V'}"] \\ C(V,Y) \arrow[r, "\tilde{t}"] & C(V',Y') \end{tikzcd}$$

коммутативна. Имеем $\langle t\rangle(A)|_{V'} = \langle \tilde{t}\rangle(A|_V) = 0$. $\square$

Характеризация порядка. Пусть даны абелева группа U и отображение $f\colon [X,Y] \to U$. Введём гомоморфизм $\bar{f}\colon \langle [X,Y]\rangle \to U$, $\bar{f}(`w') = f(w)$.

(17.2) *Условие* $\operatorname{ord} f \leqslant r$ *($r \in \mathbf{N}$) равносильно тому, что* $\bar{f}([A]) = 0$ *для любого* $A \in \langle C(X,Y)\rangle$ *с* $\theta(A) > r$.

Доказательство. Пусть E_r, I_r, D_r как в § 1. Введём гомоморфизм $h\colon \langle C(X,Y)\rangle \to D_r$, $h(\text{‘}a\text{’}) = I_r(a)$. Он сюръективен. Легко понять, что для $A \in \langle C(X,Y)\rangle$ условия $h(A) = 0$ и $\theta(A) > r$ равносильны. Введём гомоморфизм $\tilde{f}\colon \langle C(X,Y)\rangle \to U$, $\tilde{f}(A) = \bar{f}([A])$. Условие $\operatorname{ord} f \leqslant r$ равносильно существованию гомоморфизма $l\colon D_r \to U$ с $l \circ h = \tilde{f}$, которое равносильно условию $\tilde{f}|\ker h = 0$, т. е. тому, что $\bar{f}([A]) = 0$ для любого $A \in \langle C(X,Y)\rangle$ с $\theta(A) > r$. □

18. Геометрическая реализация и симплициальная аппроксимация

Пусть даны полиэдр K и симплициальное множество E. Пусть $Q = |K|$.

(18.1) *Для* $U \in \langle E(K)\rangle$ *имеем* $\theta(|U|) = \theta(U)$. □

(18.2) *Пусть дан элемент* $B \in \langle C(Q,|E|)\rangle$. *Тогда существуют полиэдр* L *с телом* Q *и элемент* $V \in \langle E(L)\rangle$ *с* $\theta(V) \geqslant \theta(B)$ *и* $[|V|] = [B]$ *в* $\langle [Q,|E|]\rangle$.

Доказательство. Есть такие конечное множество I, отображение $k\colon I \to C(Q,|E|)$ и элемент $g \in \langle I\rangle$, что $\langle k\rangle(g) = B$. Пусть $b_i = k(i)$, $i \in I$. Для $q \in Q$ введём эквивалентность $R_q = \{(i,j) : b_i(q) = b_j(q)\}$ на I. Для конечного $W \subset Q$ пусть

$$R_W = \bigcap_{q \in W} R_q.$$

Отображение $i \mapsto b_i|_W$ подчинено эквивалентности R_W (т. е. постоянно на её классах). Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p_W"'] & C(Q,|E|) \arrow[d, "?|_W"] \\ I/R_W \arrow[r, "k_W"] & C(W,|E|), \end{tikzcd}$$

где p_W — проекция. Отображение k_W инъективно. Имеем $\langle k_W\rangle(\langle p_W\rangle(g)) = \langle k\rangle(g)|_W = B|_W$. Если $\#W < \theta(B)$, то $B|_W = 0$ и, значит, $\langle p_W\rangle(g) = 0$.

Имеем непрерывное отображение $b = (b_i)_{i\in I}\colon Q \to |E|^I$. Пусть $h\colon |E^I| \to |E|^I$ — каноническая непрерывная биекция. Так как I конечно, а пространство Q хаусдорфово и компактно, то отображение $c = h^{-1}\circ b\colon Q \to |E^I|$ непрерывно.

Каждой эквивалентности R на I соответствует симплициальное подмножество $D(R) \subset E^I$, $D(R)_n = \{(e_i)_{i\in I} \in E^I_n : (i,j) \in R \Rightarrow e_i = e_j\}$ (диагональ). Для $q \in Q$ имеем $c(q) \in |D(R_q)| \subset |E^I|$. Введём симплициальное подмножество $M \subset E^I$,

$$M = \bigcup_{q\in Q} D(R_q).$$

Имеем $c(Q) \subset |M| \subset |E^I|$. Пусть $c'\colon Q \to |M|$ — сокращение отображения c. По теореме о симплициальной аппроксимации, есть полиэдр L с телом Q и такое сечение $u' \in M(L)$, что отображение $|u'|\colon Q \to |M|$ гомотопно отображению c'. Пусть $u \in E^I(L)$ — расширение сечения u'. Имеем $u = (u_i)_{i\in I}$, $u_i \in E(L)$. Отображение $|u_i|\colon Q \to |E|$ гомотопно отображению b_i. Введём отображение $l\colon I \to E(L)$, $l(i) = u_i$. Пусть $V = \langle l\rangle(g)$. Имеем $[|V|] = [B]$.

Для $y \in L$, $\dim y = s$, имеем $u_s(y) \in M_s$, т. е. есть такая точка $q = q_y \in Q$, что $u_s(y) \in D(R_q)_s$, т. е. $u_i|_{\bar y} = u_j|_{\bar y}$ при $(i,j) \in R_q$, т. е. отображение $i \mapsto u_i|_{\bar y}$ подчинено эквивалентности R_q.

Возьмём множество $T \subset L$. Пусть $W = \{q_y : y \in T\}$. Имеем $\#W \leqslant \#T$. Отображение $i \mapsto u_i\|_T$ подчинено эквивалентности R_W. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_W"'] & E(L) \arrow[d, "?\|_T"] \\
I/R_W \arrow[r, "l_T"] & E_T.
\end{tikzcd}$$

Имеем $V\|_T = \langle l\rangle(g)\|_T = \langle l_T\rangle(\langle p_W\rangle(g))$. Если $\#T < \theta(B)$, то $\#W < \theta(B)$, $\langle p_W\rangle(g) = 0$ и $V\|_T = 0$. Таким образом, $\theta(V) \geqslant \theta(B)$. $\square$

19. Подгруппы в $\langle[Q, |G|]\rangle$.

Пусть даны полиэдральное тело Q, $\dim Q \leqslant m$ ($m \in \mathbf{N}$), и $(n-1)$-связное ($n \in \mathbf{N}$) симплициальное множество E с одной вершиной, причём $m \leqslant 2n-1$. Пусть $G = FE$. Введём подгруппы $P, M_s, J_s \subset \langle C(Q, |G|)\rangle$, $s \in \mathbf{N}$:

пусть $P = \langle C(Q, |G_{(m)}|)\rangle$ (считаем $C(Q, |G_{(m)}|) \subset C(Q, |G|)$), $M_s = \{B : \theta(B) \geqslant s\}$, J_s порождена всеми элементами вида $(‘b_1’ - 1)\ldots(‘b_k’ - 1)$, где $k \in \mathbf{N}$, $b_l \in C(Q, |\gamma_{s_l} G|) \subset C(Q, |G|)$ и $s_1 + \ldots + s_k \geqslant s$. ($M_s$ и J_s — идеалы. Гипотеза: $M_s \subset J_s$.) Для подгруппы $S \subset \langle C(Q, |G|)\rangle$ пусть $[S] \subset \langle [Q, |G|]\rangle$ — её образ при гомоморфизме $[?]\colon \langle C(Q, |G|)\rangle \to \langle [Q, |G|]\rangle$.

(19.1) *Для $s \in \mathbf{N}$ имеем $[M_s] = [P \cap M_s] = [J_s]$.*

Доказательство. Включение $[M_s] \subset [J_s]$. Возьмём элемент $B \in M_s$. Имеем $\theta(B) \geqslant s$. По (18.2), есть полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle G(L)\rangle$ с $\theta(V) \geqslant s$ и $[|V|] = [B]$. Достаточно показать, что $|V| \in J_s$. По (7.2), $\eta(V) \geqslant s$. Пусть $I_s \subset \langle G(L)\rangle$, как в § 7, — подгруппа, порождённая всеми элементами вида $(‘v_1’ - 1)\ldots(‘v_k’ - 1)$, где $k \in \mathbf{N}$, $v_l \in (\gamma_{s_l} G)(L) \subset G(L)$ и $s_1 + \ldots + s_k \geqslant s$. По (7.1), $V \in I_s$. Очевидно, $|V| \in J_s$.

Включение $[P \cap M_s] \supset [J_s]$. Возьмём элемент $B \in \langle C(Q, |G|)\rangle$, $B = (‘b_1’ - 1)\ldots(‘b_k’ - 1)$, где $k \in \mathbf{N}$, $b_l \in C(Q, |\gamma_{s_l} G|) \subset C(Q, |G|)$ и $s_1 + \ldots + s_k \geqslant s$. Такие элементы порождают подгруппу J_s, поэтому достаточно показать, что $[B] \in [P \cap M_s]$. Пусть K — какой-нибудь полиэдр с телом Q. Так как $\gamma_s G$ — множества Кана, то есть сечения $u_l \in (\gamma_{s_l} G)(K)$ с $[|u_l|] = [b_l]$ в $[Q, |G|]$. Пусть $U = (‘u_1’ - 1)\ldots(‘u_k’ - 1) \in \langle G(L)\rangle$. Имеем $[|U|] = [B]$ в $\langle [Q, |G|]\rangle$. По (7.1), $\eta(U) \geqslant s$. По (16.1), есть полиэдр L с телом Q и элемент $V \in \langle G(L)\rangle$ с $\theta(V) \geqslant s$ и $[|V|] = [|U|]$ в $\langle [Q, |G|]\rangle$. Очевидно, $|V| \in P$. По (18.1), $\theta(|V|) \geqslant s$. Таким образом, $[B] = [|V|]$ и $|V| \in P \cap M_s$. □

20. Переход от $[Q, |G|]$ к $[X, Y]$

Пусть даны конечное клеточное пространство X, $\dim X \leqslant m$ ($m \in \mathbf{N}$), и $(n-1)$-связное ($n \in \mathbf{N}$) клеточное пространство Y, причём $m < 2n - 1$. Введём подгруппы $L_s \subset \langle C(X, Y)\rangle$, $s \in \mathbf{N}$: $L_s = \{A\colon \theta(A) \geqslant s\}$. Пусть $B = (B_s)_{s=1}^{\infty}$ — фильтрация Кёртиса группы $[X, Y]$. Для $s \in \mathbf{N}$ введём подгруппу $H_s \subset \langle [X, Y]\rangle$, порождённую всеми элементами вида $(‘w_1’ - 1)\ldots(‘w_k’ - 1)$, где $k \in \mathbf{N}$, $w_l \in B_{s_l}$ и $s_1 + \ldots + s_k \geqslant s$. (Это идеал.) Для подгруппы $R \subset \langle C(X, Y)\rangle$ пусть $[R] \subset \langle [X, Y]\rangle$ — её образ при гомоморфизме $[?]\colon \langle C(X, Y)\rangle \to \langle [X, Y]\rangle$.

(20.1) *Для $s \in \mathbf{N}$ имеем $[L_s] = H_s$.*

Доказательство. Есть полиэдральное тело Q, $\dim Q \leqslant m$, и гомотопическая эквивалентность $g\colon Q \to X$. Пусть $g'\colon X \to Q$ — гомотопически обратное отображение. Есть симплициальное множество E с одной вершиной и гомотопическая эквивалентность $k\colon Y \to |E|$. Пусть $G = FE$, $i\colon E \to G$ — каноническое симплициальное отображение. По теореме Фрейденталя, оно $(2n-1)$-связно. Отображение $h = |i| \circ k\colon Y \to |G|$ тоже $(2n-1)$-связно. Так как $m \leqslant 2n-1$, есть такое отображение $h'\colon |G_{(m)}| \to Y$, что отображение $h \circ h'$ гомотопно включению $|G_{(m)}| \to |G|$. Введём отображение $t\colon C(X,Y) \to C(Q,|G|)$, $t(a) = h \circ a \circ g$. Так как $m < 2n-1$, оно индуцирует изоморфизм $\bar{t}\colon [X,Y] \to [Q,|G|]$. Введём отображение $t'\colon C(Q,|G_{(m)}|) \to C(X,Y)$, $t'(b) = h' \circ b \circ g'$. Для $b \in C(Q,|G_{(m)}|) \subset C(Q,|G|)$ имеем $[t'(b)] = \bar{t}^{-1}([b])$. Нетрудно понять, что

$$\bar{t}(B_s) = \{[b] \in [Q,|G|] : b \in C(Q,|\gamma_s G|) \subset C(Q,|G|)\}, \qquad s \in \mathbf{N}. \qquad (*)$$

Пусть $P, M_s, J_s \subset \langle C(Q,|G|)\rangle$ как в § 19. Имеем гомоморфизмы $\langle t\rangle : \langle C(X,Y)\rangle \to \langle C(Q,|G|)\rangle$ и $\langle t'\rangle\colon P = \langle C(Q,|G_{(m)}|)\rangle \to \langle C(X,Y)\rangle$. По (17.1), $\langle t\rangle(L_s) \subset M_s$ и $\langle t'\rangle(P \cap M_s) \subset L_s$. Имеем кольцевой изоморфизм $\langle\bar{t}\rangle\colon \langle[X,Y]\rangle \to \langle[Q,|G|]\rangle$. Из $(*)$ следует, что $\langle\bar{t}\rangle(H_s) = [J_s]$. Используя (19.1), получаем $\langle\bar{t}\rangle([L_s]) = [\langle t\rangle(L_s)] \subset [M_s] = [J_s] = \langle\bar{t}\rangle(H_s)$, откуда $[L_s] \subset H_s$, и $[L_s] \supset [\langle t'\rangle(P \cap M_s)] = \langle\bar{t}^{-1}\rangle([P \cap M_s]) = \langle\bar{t}\rangle^{-1}([J_s]) = H_s$. □

Доказательство теоремы (1.1). Введём гомоморфизм $\bar{f}\colon \langle[X,Y]\rangle \to U$, $\bar{f}(‘w’) = f(w)$. По (17.2), условие $\operatorname{ord} f < s$ ($s \in \mathbf{N}_+$) равносильно условию $\bar{f}|[L_s] = 0$. Очевидно, условие $\deg_B f < s$ равносильно условию $\bar{f}|H_s = 0$. Но $[L_s] = H_s$, по (20.1). □

Литература

[1] E. B. Curtis, Some relations between homotopy and homology, Ann. Math. **82** (1965), no. 3, 386 — 413.

[2] J. W. Milnor, On the construction FK, препринт, 1956, воспр. в кн. J. F. Adams, Algebraic topology. A student’s guide, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 4, Camb. Univ. Press, 1972.

[3] I. B. S. Passi, Group rings and their augmentation ideals, Lect. Notes Math. 715, Springer, 1979.

ssp@pdmi.ras.ru
http://www.pdmi.ras.ru/~ssp