ПОРЯДОК ФУНКЦИИ НА ГРУППЕ БРУШЛИНСКОГО ДВУМЕРНОГО ПОЛИЭДРА

С. С. Подкорытов

Гомотопические классы отображений компактного полиэдра X в окружность T образуют абелеву группу $B(X)$, называемую группой Брушлинского и канонически изоморфную группе $H^1(X;\mathbb{Z})$. Функция $f\colon B(X)\to L$, где L — абелева группа, имеет ***порядок*** не выше r, если для отображения $a\colon X\to T$ величина $f([a])$ $\mathbb{Z}$-линейно выражается через характеристическую функцию $I_r(a)\colon (X\times T)^r\to\mathbb{Z}$ r-й декартовой степени графика отображения a. Гипотеза: порядок функции f равен её алгебраической степени. (Функция имеет *степень* не выше r, если равны нулю её конечные разности порядка $r+1$.) Мы доказываем эту гипотезу в случае $\dim X\leqslant 2$.

§1. Введение

Пусть X — компактный полиэдр.

Группа Брушлинского. Гомотопические классы отображений полиэдра X в окружность $T=\{\,t\in\mathbb{C}:|t|=1\,\}$ образуют абелеву группу относительно операции, определяемой поточечным умножением отображений. Эта группа называется *группой Брушлинского* полиэдра X и обозначается $B(X)$. Она канонически изоморфна группе $H^1(X;\mathbb{Z})$. Множество непрерывных отображений $X\to T$ обозначаем $T(X)$. Для отображения $a\in T(X)$ пусть $[a]\in B(X)$ — его гомотопический класс.

Порядок функции на группе Брушлинского. Имеем $\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$, $\hat{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Для отображения $a\in T(X)$ пусть $\Gamma_a\subset X\times T$ — его график, $I_r(a)\colon(X\times T)^r\to\mathbb{Z}$ ($r\in\mathbb{N}$) — характеристическая функция множества $\Gamma_a^r\subset(X\times T)^r$. Пусть E_r — группа функций $(X\times T)^r\to\mathbb{Z}$, порождённая функциями $I_r(a)$, $a\in T(X)$.

Пусть L — абелева группа. *Порядком* функции $f\colon B(X)\to L$ называем инфимум тех $r\in\mathbb{N}$, для которых существует такой гомоморфизм $h\colon E_r\to L$, что $f([a])=h(I_r(a))$ для всех $a\in T(X)$. Обозначение: $\operatorname{ord} f$. Имеем $\operatorname{ord} f\in\hat{\mathbb{N}}$. Ниже утверждение 3.1 показывает, что это определение порядка равносильно данному в [1].

Степень функции на абелевой группе. Пусть K, L — абелевы группы. *Степенью* функции $f\colon K\to L$ называется инфимум таких $r\in\mathbb{N}$, что

$$\sum_{i_0,\dots,i_r=0,1}(-1)^{i_0+\dots+i_r}f(i_0c_0+\dots+i_rc_r)=0$$

для любых $c_0,\dots,c_r\in K$. Обозначение: $\deg f$. Имеем $\deg f\in\hat{\mathbb{N}}$.

Благодарю С. В. Дужина и П. Г. Зографа за консультации.

Порядок и степень. Пусть L — абелева группа, $f\colon B(X)\to L$ — функция. Гипотеза: $\operatorname{ord} f = \deg f$. Ряд более слабых утверждений получен в [1]. Цель работы — доказать следующее утверждение.

(1.1) *Пусть* $\dim X \leqslant 2$. *Тогда* $\operatorname{ord} f = \deg f$.

§2. Многочлен U

Число элементов конечного множества S обозначаем $\#S$. Кольцо многочленов от элементов конечного множества E с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ обозначаем $\mathbb{Z}[E]$. Для $F\subset E$ пусть $\Pi(F)\in\mathbb{Z}[E]$ — произведение элементов множества F.

Пусть (P,K) — полный граф (то есть P — конечное множество, $K = \{\,\{p,q\}\mid p,q\in P : p\neq q\,\}$). Сокращение: $\overline{pq}=\{p,q\}$. Для $L\subset K$ пусть $[L]\subset P$ — множество концов рёбер из L.

Введём многочлен $U\in\mathbb{Z}[P\sqcup K]$,

$$U=\sum_{Q\subset P,L\subset K:Q\cap[L]=\varnothing}(-1)^{\#Q+\#L}\Pi(Q\sqcup L).$$

Введём кольцевой гомоморфизм $\eta\colon \mathbb{Z}[P\sqcup K]\to\mathbb{Z}[P]$, $\eta(p)=p$, $p\in P$, $\eta(k)=0$, $k\in K$.

(2.1) *Имеем*

$$\eta(U)=\prod_{p\in P}(1-p).$$

□

Для $L\subset K$ пусть $\tilde L=\{\,(p,q)\mid p,q\in P:\overline{pq}\in L\,\}$. (Так что $(P,\tilde K)$ — полный ориентированный граф.) Сокращение: $\overrightarrow{pq}=(p,q)$. Для $S\subset\tilde K$ пусть $\bar S=\{\,\overline{pq}\mid p,q\in P:\overrightarrow{pq}\in S\,\}$.

Фиксируем множества $M\subset K$ и $N\subset M$. Введём кольцевой гомоморфизм $\theta\colon\mathbb{Z}[P\sqcup K]\to\mathbb{Z}[\tilde M\sqcup N]$,

$$\theta(p)=\prod_{q\in P:\overline{pq}\in M}\overrightarrow{pq},\qquad p\in P,$$

$\theta(k)=0$, $k\in K\setminus M$, $\theta(k)=(1-\overrightarrow{pq})(1-\overrightarrow{qp})$, $k=\overline{pq}\in M\setminus N$, $\theta(k)=k$, $k\in N$.

(2.2) *Пусть* $\#M+\#N<\#P$. *Тогда* $\theta(U)=0$.

Доказательство. Очевидно,

$$\theta(U)=\sum_{S\subset\tilde M,F\subset N:\bar S\cap F=\varnothing}c_{SF}\Pi(S\sqcup F),$$

где $c_{SF}\in\mathbb{Z}$ — какие-то числа. Индукцией по $\#S+\#F$ покажем, что $c_{SF}=0$. Введём кольцевой гомоморфизм $\omega\colon\mathbb{Z}[\tilde M\sqcup N]\to\mathbb{Z}$, для $e\in\tilde M\sqcup N$ полагая $\omega(e)=1$, если $e\in S\sqcup F$, и $\omega(e)=0$ иначе. Пусть $\phi=\omega\circ\theta$. Ввиду предположения индукции, $c_{SF}=\phi(U)$. Легко видеть, что $\phi(p\,\overline{pq})=0$ для $\overline{pq}\in K$. Значит, $\phi(\Pi(Q\sqcup L))=0$ для таких $Q\subset P$, $L\subset K$, что $Q\cap[L]\neq\varnothing$. Поэтому

$$\phi(U)=\sum_{Q\subset P,L\subset K}(-1)^{\#Q+\#L}\phi(\Pi(Q\sqcup L))=\Big(\prod_{p\in P}(1-\phi(p))\Big)\Big(\prod_{k\in K}(1-\phi(k))\Big).$$

Первый сомножитель равен нулю, если существует такая вершина $p \in P$ (*источник*), что $\overrightarrow{pq} \in S$ для всех $\overline{pq} \in M$. Второй сомножитель равен нулю, если $\bar{S} \cup N \neq M$ или $F \neq \varnothing$. Так как $\#M + \#N < \#P$, то у графа (P, M) число компонент-деревьев больше $\#N$. Поэтому есть компонента-дерево, не содержащая рёбер из N. Пусть все её рёбра принадлежат множеству $\bar{S}$ — иначе $\bar{S} \cup N \neq M$. Легко понять, что тогда она содержит источник. $\square$

§3. Формальные суммы отображений

С каждым множеством Q связана абелева группа $\mathbb{Z}\langle Q\rangle$, свободно порождённая элементами $\langle q\rangle$, $q \in Q$. Для функции $f\colon Q \to L$, где L — абелева группа, вводим гомоморфизм $f^+\colon \mathbb{Z}\langle Q\rangle \to L$, $f^+(\langle q\rangle) = f(q)$, $q \in Q$.

Для элемента $A \in \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle$ пусть $[A] \in \mathbb{Z}\langle B(X)\rangle$ — его образ при гомоморфизме, индуцированном отображением $T(X) \to B(X)$, $a \mapsto [a]$. Для конечного множества $S \subset X$ пусть $A|_S \in \mathbb{Z}\langle T(S)\rangle$ — образ элемента A при гомоморфизме, индуцированном отображением $T(X) \to T(S)$, $a \mapsto a|_S$. Полагаем

$$\operatorname{ord} A = \inf\{\, \#S \mid \text{конечное } S \subset X : A|_S \neq 0 \,\} \in \hat{\mathbb{N}}.$$

Пусть L — абелева группа, $f\colon B(X) \to L$ — функция.

(3.1) *Неравенство* $\operatorname{ord} f \leqslant r$ $(r \in \mathbb{N})$ *равносильно тому, что* $f^+([A]) = 0$ *для всех* $A \in \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle$ *с* $\operatorname{ord} A > r$.

Доказательство. Пусть E_r — группа функций $(X \times T)^r \to \mathbb{Z}$, порождённая функциями $I_r(a)$, $a \in T(X)$. Имеем функцию $I_r\colon T(X) \to E_r$ и эпиморфизм $I_r^+\colon \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle \to E_r$. Введём гомоморфизм $g\colon \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle \to L$, $g(A) = f^+([A])$. Неравенство $\operatorname{ord} f \leqslant r$ равносильно существованию такого гомоморфизма $h\colon E_r \to L$, что $f([a]) = h(I_r(a))$ для всех $a \in T(X)$, то есть $g = h \circ I_r^+$. Существование такого h равносильно включению $\ker I_r^+ \subset \ker g$. Легко проверить, что $\ker I_r^+ = \{\, A \in \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle : \operatorname{ord} A > r \,\}$. Очевидно, $\ker g = \{\, A \in \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle : f^+([A]) = 0 \,\}$. $\square$

Для непрерывного отображения $g\colon X \to Y$, где Y — компактный полиэдр, пусть $g^*\colon \mathbb{Z}\langle B(Y)\rangle \to \mathbb{Z}\langle B(X)\rangle$ и $g^\#\colon \mathbb{Z}\langle T(Y)\rangle \to \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle$ — гомоморфизмы, индуцированные отображениями $[b] \mapsto [b \circ g]$ и $b \mapsto b \circ g$, соответственно.

Так как $B(X)$ и $T(X)$ — абелевы группы, то $\mathbb{Z}\langle B(X)\rangle$ и $\mathbb{Z}\langle T(X)\rangle$ — коммутативные кольца. Введённые выше гомоморфизмы $A \mapsto [A]$, $A \mapsto A|_S$, g^* и $g^\#$ кольцевые.

§4. Бабочка

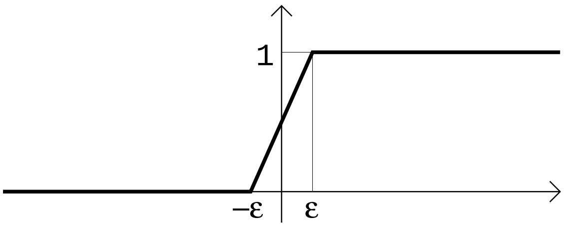
Фиксируем малое ϵ (можно положить $\epsilon = 1/20$). Пусть $\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, график которой показан на рис. 1. Для прямоугольника $P = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ введём функцию $\mu_P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

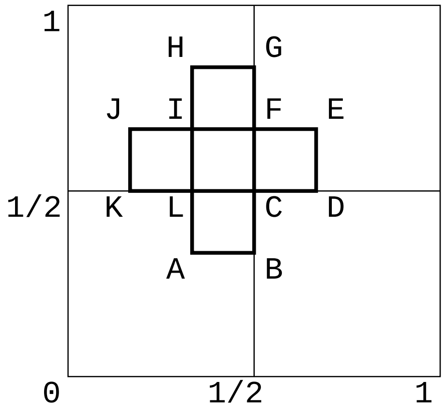
$$\mu_P(x,y) = \min(\lambda(x-a), \lambda(b-x), \lambda(y-c), \lambda(d-y)).$$

Введём функции $v_1, \ldots, v_6\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$v_1 = -\mu_{\mathrm{ABGH}}$, $v_2 = \mu_{\mathrm{CDEF}} - \mu_{\mathrm{ABCL}}$, $v_3 = \mu_{\mathrm{KDEJ}}$, $v_4 = -\mu_{\mathrm{IFGH}}$, $v_5 = 0$, $v_6 = \mu_{\mathrm{KLIJ}}$

(рис. 2).





Для $x \in \mathbb{R}$ пусть $x^\circ = \exp(2\pi i x) \in T$. Введём отображения $e \in T(T)$ и $f_1, \ldots, f_6 \in T(T^2)$, полагая $e(x^\circ) = \lambda(x - 1/2)^\circ$, $x \in [0,1]$, и $f_s(x^\circ, y^\circ) = v_s(x,y)^\circ$, $x, y \in [0,1]$, $s = 1, \ldots, 6$. Положим

$$F = \sum_{s=1}^{6} (-1)^s \langle f_s \rangle \in \mathbb{Z}\langle T(T^2) \rangle.$$

(4.1) *Отображение* $e\colon T \to T$ *гомотопно тождественному.* $\square$

(4.2) *В группе* $\mathbb{Z}\langle B(T^2) \rangle$ *имеем* $[F] = 0$. $\square$

Имеем $\mathrm{sk}_1\, T^2 = T \times 1 \cup 1 \times T \subset T^2$.

(4.3) *Отображения* $f_1, \ldots, f_6$ *равны* 1 *на* $\mathrm{sk}_1\, T^2$. $\square$

(4.4) *Пусть* $r_1, r_2\colon T^2 \to T$ *— проекции,*

$$D = F - r_1^{\#}(1 - \langle e \rangle) r_2^{\#}(1 - \langle e \rangle) \in \mathbb{Z}\langle T(T^2) \rangle.$$

Тогда $\operatorname{ord} D > 1$. $\square$

§5. Подстановка

Пусть (P, K) — полный граф с линейным порядком на P. Пусть $U \in \mathbb{Z}[P \sqcup K]$ как в §2. Пусть $V \subset T^P$ — множество точек, у которых не более 2 координат отличны от 1. Пусть $l_p\colon V \to T$, $p \in P$, — сужения проекций. Для $k = \overline{pq} \in K$, $p < q$, пусть $m_k = l_p \times l_q\colon V \to T^2$. Введём кольцевой гомоморфизм $\gamma\colon \mathbb{Z}[P \sqcup K] \to \mathbb{Z}\langle T(V) \rangle$, $\gamma(p) = \langle e \circ l_p \rangle$, $p \in P$, $\gamma(k) = m_k^{\#}(F)$, где $e \in T(T)$ и $F \in \mathbb{Z}\langle T(T^2) \rangle$ как в §4.

(5.1) *В кольце* $\mathbb{Z}\langle B(V) \rangle$ *имеем*

$$[\gamma(U)] = \prod_{p \in P} (1 - \langle [l_p] \rangle).$$

Доказательство. Введём кольцевой гомоморфизм $\kappa\colon \mathbb{Z}[P] \to \mathbb{Z}\langle B(V) \rangle$, $\kappa(p) = \langle [l_p] \rangle$, $p \in P$. Покажем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[P \sqcup K] & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{Z}\langle T(V) \rangle \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle[\,\cdot\,]} \\ \mathbb{Z}[P] & \xrightarrow{\kappa} & \mathbb{Z}\langle B(V) \rangle, \end{array}$$

где η как в §2, коммутативна. Для $p \in P$, ввиду 4.1, имеем $\kappa(\eta(p)) = \kappa(p) = \langle[l_p]\rangle = \langle[e \circ l_p]\rangle = [\gamma(p)]$. Для $k \in K$, ввиду 4.2, имеем $\kappa(\eta(k)) = 0 = [m_k^\#(F)] = [\gamma(k)]$. Диаграмма коммутативна. Теперь требуемое равенство следует из 2.1. $\square$

(5.2) $\operatorname{ord}\gamma(U) \geqslant \#P$.

Доказательство. Пусть $S \subset V$ — конечное множество с $\#S < \#P$. Выберем такое отображение $\tau\colon S \to K$, что $v_p = 1$ для $v \in S$, $p \notin \tau(v)$. Пусть $M = \tau(S)$, $N = \{\, k \in K : \#\tau^{-1}(k) > 1 \,\}$. Имеем $\#M + \#N \leqslant \#S$.

Для $\overrightarrow{pq} \in \tilde{K}$ введём отображение $b_{pq} \in T(S)$, для $v \in S$ полагая $b_{pq}(v) = e(v_p)$, если $\tau(v) = \overline{pq}$, и $b_{pq}(v) = 1$ иначе. Для $p \in P$ имеем

$$\prod_{q \in P : \overline{pq} \in M} b_{pq} = e \circ l_p|_S.$$

Введём кольцевой гомоморфизм $\xi\colon \mathbb{Z}[\tilde{M} \sqcup N] \to \mathbb{Z}\langle T(S)\rangle$, $\xi(\overrightarrow{pq}) = \langle b_{pq}\rangle$, $\overrightarrow{pq} \in \tilde{M}$, $\xi(k) = m_k^\#(F)|_S$, $k \in N$. Покажем, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}[P \sqcup K] & \xrightarrow{\ \gamma\ } & \mathbb{Z}\langle T(V)\rangle \\
{\scriptstyle\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \cdot|_S} \\
\mathbb{Z}[\tilde{M} \sqcup N] & \xrightarrow{\ \xi\ } & \mathbb{Z}\langle T(S)\rangle,
\end{array}$$

где θ как в §2, коммутативна.

Для $p \in P$ имеем

$$\xi(\theta(p)) = \prod_{q \in P : \overline{pq} \in M} \xi(\overrightarrow{pq}) = \prod_{q \in P : \overline{pq} \in M} \langle b_{pq}\rangle = \langle e \circ l_p|_S\rangle = \gamma(p)|_S.$$

Пусть $k = \overline{pq} \in M \setminus N$. Имеем $\tau^{-1}(k) = \{v\}$ для какой-то точки $v \in S$. Покажем, что $\xi(\theta(k)) = \gamma(k)|_S$. Так как $\xi(\theta(k)) = \xi((1 - \overrightarrow{pq})(1 - \overrightarrow{qp})) = (1 - \langle b_{pq}\rangle)(1 - \langle b_{qp}\rangle)$, а $\gamma(k)|_S = m_k^\#(F)|_S$, то надо проверить равенство

$$(1 - \langle b_{pq}\rangle)(1 - \langle b_{qp}\rangle) = m_k^\#(F)|_S.$$

Все отображения, входящие в формальные суммы в его левой и правой частях, равны 1 вне v. Для левой части это очевидно. Для правой это следует из того, что $m_k(S \setminus \{v\}) \subset \operatorname{sk}_1 T^2$, и 4.3. Поэтому достаточно проверить это равенство в точке v. Пусть $r_1, r_2\colon T^2 \to T$ — проекции. Имеем

$$m_k^\#(F)|_{\{v\}} - ((1 - \langle b_{pq}\rangle)(1 - \langle b_{qp}\rangle))|_{\{v\}} = m_k^\#(F - r_1^\#(1 - \langle e\rangle) r_2^\#(1 - \langle e\rangle))|_{\{v\}} = 0,$$

ввиду 4.4. Равенство проверено.

Для $k \in N$ имеем $\xi(\theta(k)) = \xi(k) = m_k^\#(F)|_S = \gamma(k)|_S$. Диаграмма коммутативна.

По 2.2, $\theta(U) = 0$. Значит, $\gamma(U)|_S = 0$. $\square$

Доказательство утверждения 1.1. По [1, теорема 4], $\operatorname{ord} f \leqslant \deg f$. Пусть $\operatorname{ord} f \leqslant r$ ($r \in \mathbb{N}$). Покажем, что $\deg f \leqslant r$. Пусть $c_0, \ldots, c_r \in B(X)$. Достаточно найти элемент $A \in \mathbb{Z}\langle T(X)\rangle$ с $[A] = (1-\langle c_0\rangle)\ldots(1-\langle c_r\rangle)$ и $\operatorname{ord} A > r$. Действительно, тогда

$$\sum_{i_0,\ldots,i_r=0,1} (-1)^{i_0+\ldots+i_r} f(i_0c_0+\ldots+i_rc_r) = f^+((1-\langle c_0\rangle)\ldots(1-\langle c_r\rangle)) = f^+([A]) = 0,$$

ввиду 3.1.

Возьмём полный граф (P,K) с $P = \{0,\ldots,r\}$. Пусть $U \in \mathbb{Z}[P \sqcup K]$, $V \subset T^P$ и т. д. как выше. Так как $\dim X \leqslant 2$, а $V = \operatorname{sk}_2 T^P$, то есть такое непрерывное отображение $g\colon X \to V$, что $[l_p \circ g] = c_p$, $p \in P$. Положим $A = g^\#(\gamma(U))$. Ввиду 5.1, имеем $[A] = g^\#([\gamma(U)]) = g^\#((1-\langle l_0\rangle)\ldots(1-\langle l_r\rangle)) = (1-\langle c_0\rangle)\ldots(1-\langle c_r\rangle)$. Легко понять, что $\operatorname{ord} A \geqslant \operatorname{ord}\gamma(U)$. По 5.2, $\operatorname{ord}\gamma(U) \geqslant r+1$. Значит, $\operatorname{ord} A > r$. $\square$

1. С. С. Подкорытов, *Порядок функции на группе Брушлинского*, Записки научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 222 — 228.