# О гомотопических инвариантах конечной степени

С. С. Подкорытов

**Аннотация**

Доказывается, что гомотопические инварианты конечной степени различают гомотопические классы отображений связного компактного клеточного пространства в нильпотентное связное клеточное пространство с конечно порождёнными гомотопическими группами.

## § 1. Введение

$\mathbf{N} = \{0, 1, \dots\}$. *Пространство* — топологическое пространство с отмеченной точкой. *Клеточное пространство* имеет отмеченную вершину. *Отображение* — непрерывное отображение, сохраняющее отмеченную точку. С учётом отмеченных точек понимаются гомотопии, обозначение $[X, Y]$ и т. п.

***Инварианты конечной степени.*** Пусть даны пространства $X$ и $Y$, абелева группа $V$ и функция $f\colon [X, Y] \to V$ (гомотопический инвариант). Определим число $\operatorname{Deg} f \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, *степень* инварианта $f$. Отображение $a\colon X \to Y$ для каждого $r \in \mathbf{N}$ определяет отображение $a^r\colon X^r \to Y^r$ (декартову степень), которое индуцирует гомоморфизм $C_0(a^r)\colon C_0(X^r) \to C_0(Y^r)$ групп (неприведённых) нульмерных цепей с коэффициентами в $\mathbf{Z}$. Пусть условие $\operatorname{Deg} f \leqslant r$ будет равносильно существованию такого гомоморфизма $l\colon \operatorname{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) \to V$, что $f([a]) = l(C_0(a^r))$ для всех отображений $a\colon X \to Y$. Нетрудно понять, что это определение корректно.

***Основные результаты.***

**1.1. Теорема.** *Пусть даны связное компактное клеточное пространство $X$, нильпотентное связное клеточное пространство $Y$ с конечно порождёнными гомотопическими группами и различные классы $u_1, u_2 \in$*

$[X,Y]$. *Тогда для некоторого простого числа $p$ существует такой инвариант конечной степени $f\colon [X,Y] \to \mathbf{Z}_p$, что $f(u_1) \neq f(u_2)$.*

Родственные утверждения были известны в некоторых случаях, когда $[X,Y]$ — абелева группа [3, 4]. Теорема 1.1 вытекает (см. § 11) из одного результата Баусфилда — Кана и теоремы 1.2.

Группу называем *$p$-конечной* ($p$ — простое число), если она конечна и её порядок — степень числа $p$.

**1.2. Теорема.** *Пусть даны простое число $p$, компактное клеточное пространство $X$ и связное клеточное пространство $Y$ с $p$-конечными гомотопическими группами. Тогда любой инвариант $f\colon [X,Y] \to \mathbf{Z}_p$ имеет конечную степень.*

По-видимому, теорему 1.2 можно вывести из теоремы сходимости Шипли [12] — которой мы, однако, не пользуемся. Наш подход основан на использовании симплициальной модели (приближённой) пространства $Y$, допускающей гармоничное (см. § 6) вложение в симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль.

***Ненильпотентные примеры.*** Следующие утверждения показывают, что условие нильпотентности в теореме 1.1 существенно.

Имея в виду, что $\pi_n(Y) = [S^n, Y]$, мы будем говорить об инвариантах конечной степени на $\pi_n(Y)$.

**1.3.** *Пусть дано пространство $Y$. Если группа $\pi_1(Y)$ совершенна, то для любой абелевой группы $V$ любой инвариант конечной степени $f\colon \pi_1(Y) \to V$ постоянен.*

Следует из лемм 12.2 и 3.6. □

**1.4.** *Пусть даны число $n > 1$ и пространство $Y$. Пусть $\pi_n(Y) \cong \mathbf{Z}^2$ и элемент $g \in \pi_1(Y)$ индуцирует на $\pi_n(Y)$ автоморфизм порядка 6. Тогда для любой абелевой группы $V$ любой инвариант конечной степени $f\colon \pi_n(Y) \to V$ постоянен.*

Следует из лемм 12.2 и 12.3 и утверждения 3.7. □

***Пример: отображения $S^{n-1}\times S^n\to S^n_{(\mathbf{Q})}$*** (ср. [5, Example 4.6]). Возьмём чётное $n>0$. Пусть $c\colon S^{n-1}\times S^n\to S^{2n-1}$ — отображение степени 1, $i=[\mathrm{id}]\in\pi_n(S^n)$, $j=i*i\in\pi_{2n-1}(S^n)$ (квадрат Уайтхеда) и $u(q)=(qj)\circ c\in[S^{n-1}\times S^n,S^n]$, $q\in\mathbf{Z}$ (композиция отображения и гомотопического класса понимается в очевидном смысле). Пусть $l\colon S^n\to S^n_{\mathbf{Q}}$ — рационализация и $\bar u(q)=l\circ u(q)\in[S^{n-1}\times S^n,S^n_{\mathbf{Q}}]$. Классы $u(q)$, $q\in\mathbf{Z}$, попарно различны; более того, классы $\bar u(q)$, $q\in\mathbf{Z}$, попарно различны (доказательство опускается).

Верно ли, что в условиях теоремы 1.1 существует такое $r\in\mathbf{N}$, что элементы множества $[X,Y]$ различаются инвариантами степени не выше $r$? Неверно, как показывает следующее утверждение.

**1.5.** *Пусть даны абелева группа $V$ и инвариант $f\colon[S^{n-1}\times S^n,S^n]\to V$ степени не выше $r\in\mathbf{N}$. Тогда $f(u(q))=f(u(0))$ при $r!\mid q$.*

Следующее утверждение показывает, что условие конечной порождённости в теореме 1.1 существенно.

**1.6.** *Пусть даны абелева группа $V$ и инвариант конечной степени $f\colon[S^{n-1}\times S^n,S^n_{\mathbf{Q}}]\to V$. Тогда $f(\bar u(q))=f(\bar u(0))$, $q\in\mathbf{Z}$.*

Следующее утверждение показывает, что в условиях теоремы 1.1 инвариантов конечной степени со значениями в $\mathbf{Q}$ не достаточно для различения рационально различных гомотопических классов.

**1.7.** *Пусть дан инвариант конечной степени $f\colon[S^{n-1}\times S^n,S^n]\to\mathbf{Q}$. Тогда $f(u(q))=f(u(0))$, $q\in\mathbf{Z}$.*

***Неуловимые элементы в $H_0(Y^X)$.*** Пространство отображений $X\to Y$ обозначаем $Y^X$. Инвариант $f\colon[X,Y]\to V$ определяет гомоморфизм $^+f\colon H_0(Y^X)\to V$, $\lfloor u\rfloor\mapsto f(u)$ (здесь $\lfloor u\rfloor$ — базисный элемент, соответствующий классу $u$). Верно ли, что в условиях теоремы 1.1 для любого ненулевого элемента $w\in H_0(Y^X)$ найдутся такие абелева группа $V$ и инвариант конечной степени $f\colon[X,Y]\to V$, что $^+f(w)\neq 0$? Неверно, как показывает следующее утверждение.

**1.8.** *Пусть даны число $n>1$, пространство $Y$ и элементы $u_1,u_2\in\pi_n(Y)$ взаимно простых конечных порядков. Пусть $w=\lfloor u_1+u_2\rfloor-\lfloor u_1\rfloor-\lfloor u_2\rfloor+\lfloor 0\rfloor$. Тогда для любых абелевой группы $V$ и инварианта конечной степени $f\colon\pi_n(Y)\to V$ имеем $^+f(w)=0$.*

Следует из лемм 12.2 и 3.8. □

Если группа $\pi_n(Y)$ периодическая и делимая, то то же верно для любых $u_1, u_2 \in \pi_n(Y)$ (следует из лемм 12.2 и 3.9). Здесь мы забываем, разумеется, об условии конечной порождённости. Пространство $Y$ при этом может быть $p$-локальным: например, $Y = \mathcal{K}(P, n)$ (пространство Эйленберга — Маклейна), где $P = \mathbf{Z}[1/p]/\mathbf{Z}$.

## § 2. Предварительный материал

Множество с отмеченным элементом называем *отрядом*, сохраняющую отмеченные элементы функцию — *архизмом*. Мы используем стандартную модельную структуру категории симплициальных отрядов (и архизмов) [9, Corollary 3.6.6]. К ней отсылают слова *расслоение*, *корасслоение* и т. д. *Расслаивающий* симплициальный архизм — расслоение. *Изотипичный* симплициальный архизм, или *изотипия* — слабая эквивалентность. *Изотипные* симплициальные отряды — слабо эквивалентные.

Абелева группа, имея отмеченный элемент 0, есть отряд; симплициальная абелева группа — симплициальный отряд.

Симплициальный отряд $T$ называем *компактным*, если он порождён конечным числом симплексов, и *постепенным*, если отряды $T_q$, $q \in \mathbf{N}$, конечны.

Для симплициальных отрядов $K$ и $T$ соответствующий функциональный симплициальный отряд ($\mathrm{hom}_*(K,T)$ по [6, Ch. VIII, 4.8]) обозначаем $T^K$. Симплициальный архизм $f\colon K \to L$ индуцирует симплициальный архизм $T^f\colon T^L \to T^K$, и т. д. Такие обозначения мы используем и в топологическом случае.

Знак $\sim$ обозначает гомотопность, знак $\simeq$ — гомотопическую эквивалентность.

***Основные гомоморфизмы.*** По умолчанию цепи и гомологии имеют коэффициенты в некотором коммутативном кольце $\mathcal{R}$; $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}$. (В § 1 неявно предполагалось $\mathcal{R} = \mathbf{Z}$.)

Для пространств $X$ и $Y$ вводим $\mathcal{R}$-гомоморфизмы

$$ {}^X_Y\mu_r\colon C_0(Y^X) \to \mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)), \qquad \lfloor a \rfloor \mapsto C_0(a^r), $$

$r \in \mathbf{N}$, и $\mathcal{R}$-гомоморфизм проекции

$$ {}^X_Y\nu\colon C_0(Y^X) \to H_0(Y^X). $$

Для симплициальных отрядов $K$ и $T$ вводим $\mathcal{R}$-гомоморфизмы

$$ {}^K_T\mu_r\colon C_0(T^K) \to \mathrm{Hom}_0(C_*(K^r), C_*(T^r)), \qquad \lfloor b\rfloor \mapsto C_*(b^r), $$

$r \in \mathbf{N}$. Здесь $\lfloor b\rfloor$ — базисная цепь, соответствующая симплексу $b \in (T^K)_0$, т. е. симплициальному архизму $b\colon K \to T$; $b^r\colon K^r \to T^r$ — декартова степень; $C_*(b^r)\colon C_*(K^r) \to C_*(T^r)$ — индуцированный $\mathcal{R}$-гомоморфизм градуированных $\mathcal{R}$-модулей цепей; $\mathrm{Hom}_0$ — $\mathcal{R}$-модуль сохраняющих градуировку $\mathcal{R}$-гомоморфизмов. Вводим $\mathcal{R}$-гомоморфизм проекции

$$ {}^K_T\nu\colon C_0(T^K) \to H_0(T^K). $$

## § 3. Групповые алгебры и плавные функции

Групповую $\mathcal{R}$-алгебру группы $G$ обозначаем $\mathcal{R}\lfloor G\rfloor$. Элементу $g \in G$ соответствует базисный элемент $\lfloor g\rfloor \in \mathcal{R}\lfloor G\rfloor$. Аугментационный идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor G\rfloor \subseteq \mathcal{R}\lfloor G\rfloor$ — ядро $\mathcal{R}$-гомоморфизма $\mathcal{R}\lfloor G\rfloor \to \mathcal{R}$, $\lfloor g\rfloor \mapsto 1$. Идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor G\rfloor^s$ $(s > 0)$ $\mathcal{R}$-порождён элементами вида $(1 - \lfloor g_1\rfloor)\ldots(1 - \lfloor g_s\rfloor)$.

Пусть дана абелева группа $V$. Функция $f\colon G \to V$ определяет гомоморфизм ${}^+f\colon \mathbf{Z}\lfloor G\rfloor \to V$, $\lfloor g\rfloor \mapsto f(g)$. Функцию $f$ называем *$r$-плавной*, если ${}^+f \mid \rceil\mathbf{Z}\lfloor G\rfloor^{r+1} = 0$, и *плавной* (или *полиномиальной*), если она $r$-плавна для какого-то $r \in \mathbf{N}$ [11, Ch. V].

Пусть дано простое число $p$.

**3.1. Лемма.** *Пусть дан конечный $\mathbf{Z}_p$-модуль $U$ размерности $m$. Тогда $\rceil\mathbf{Z}_p\lfloor U\rfloor^{(p-1)m+1} = 0$.* □

**3.2. Следствие.** *Пусть даны $\mathbf{Z}_p$-модули $U$ и $V$. Если модуль $U$ конечен, то любая функция $f\colon U \to V$ плавна.* □

**3.3. Лемма** [7, Proposition 1.2]. *Пусть даны абелевы группы $U$, $V$ и $W$, $r$-плавная функция $f\colon U \to V$ и $s$-плавная функция $g\colon V \to W$ $(r, s \in \mathbf{N})$. Тогда функция $g \circ f\colon U \to W$ $rs$-плавна.*

Следует из [11, Ch. V, Theorem 2.1]. □

Функция $f\colon U \to V$ между абелевыми группами индуцирует $\mathcal{R}$-гомоморфизм $f_{\mathcal{R}}\colon \mathcal{R}\lfloor U\rfloor \to \mathcal{R}\lfloor V\rfloor$, $\lfloor u\rfloor \mapsto \lfloor f(u)\rfloor$.

**3.4. Следствие.** *Пусть даны абелевы группы $U$ и $V$ и $r$-плавная ($r \in \mathbf{N}$) функция $f\colon U \to V$. Тогда для любого $s \in \mathbf{N}$ $\mathcal{R}$-гомоморфизм $f_{\mathcal{R}}$ отображает идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor U\rfloor^{rs+1}$ в идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor V\rfloor^{s+1}$.* □

**3.5. Лемма.** *Пусть дано множество $I$ и для каждого $i \in I$ даны абелевы группы $U_i$ и $V_i$ и $r$-плавная ($r \in \mathbf{N}$) функция $f_i\colon U_i \to V_i$. Тогда функция*

$$\prod_{i\in I} f_i\colon \prod_{i\in I} U_i \to \prod_{i\in I} V_i$$

*$r$-плавна.* □

Следующие утверждения не участвуют в доказательстве основных результатов и нужны только при рассмотрении примеров § 1.

**3.6. Лемма.** *Пусть даны совершенная группа $G$ и абелева группа $V$. Тогда любая плавная функция $f\colon G \to V$ постоянна.*

Следует из [11, Ch. III, Corollary 1.3]. □

**3.7.** *Пусть даны абелева группа $U \cong \mathbf{Z}^2$, автоморфизм $J\colon U \to U$ порядка 6, абелева группа $V$ и плавная функция $f\colon U \to V$. Пусть функция $\mathbf{Z} \times U \to V$, $(t, u) \mapsto f(J^t u - u)$, плавна. Тогда функция $f$ постоянна.*

Доказательство опускается. □

**3.8. Лемма.** *Пусть даны абелевы группы $U$ и $V$, плавная функция $f\colon U \to V$ и элементы $u_1, u_2 \in U$ взаимно простых конечных порядков. Тогда $f(u_1 + u_2) - f(u_1) - f(u_2) + f(0) = 0$.* □

**3.9. Лемма.** *Пусть даны делимая периодическая абелева группа $U$ и абелева группа $V$. Тогда любая плавная функция $f\colon U \to V$ 1-плавна.* □

**3.10. Лемма.** *Пусть даны группы $G$ и $H$. Тогда идеал $\rceil\mathcal{R}\lfloor G\times H\rfloor^s$ ($s > 1$) $\mathcal{R}$-порождён элементами вида $(1-\lfloor a_1\rfloor)\ldots(1-\lfloor a_{s-q}\rfloor)(1-\lfloor b_1\rfloor)\ldots(1-\lfloor b_q\rfloor)$, где $0 \leqslant q \leqslant s$, $a_t \in G\times 1 \subseteq G\times H$ и $b_t \in 1\times H \subseteq G\times H$.* □

**3.11. Лемма.** *Функция $F\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ $r$-плавна ($r \in \mathbf{N}$) ровно тогда, когда она задаётся многочленом степени не выше $r$.* □

## § 4. Ключ коммутативного квадрата

Пусть дано коммутативное кольцо $E$. Рассмотрим диаграмму симплициальных $E$-модулей и $E$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[d, "f'"] & W \arrow[l, "g'"] \arrow[d, "g''"'] \\ U \arrow[u, bend left, "s'"] \arrow[r, bend right, "s''"'] & V'' \arrow[l, "f''"'] \arrow[u, bend right, "t''"'] \end{tikzcd}$$

с коммутативным квадратом ($f' \circ g' = f'' \circ g''$). Набор $(s', s'', t', t'')$ называем *ключом* этого квадрата, если в диаграмме

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, bend right, "(-s', s'')"'] & V' \oplus V'' \arrow[l, "(-f', f'')"'] \arrow[r, bend right, "(t', t'')"'] & W \arrow[l, "(g', g'')"'] \end{tikzcd}$$

имеем $(-s', s'') \circ (-f', f'') + (g', g'') \circ (t', t'') = \mathrm{id}$. При этом пару $(t', t'')$ называем *полуключом.*

**4.1. Лемма.** *Пусть дан коммутативный квадрат симплициальных $E$-модулей и $E$-гомоморфизмов с полуключом*

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[d, "f'"] & W \arrow[l, "g'"] \arrow[d, "g''"'] \\ U & V'', \arrow[l, "f''"'] \arrow[u, bend right, "t''"'] \end{tikzcd}$$

*симплициальный отряд $T$ и такие симплициальные архизмы $k' \colon T \to V'$ и $k'' \colon T \to V''$, что $f' \circ k' = f'' \circ k''$. Рассмотрим симплициальный архизм $l = t' \circ k' + t'' \circ k'' \colon T \to W$. Тогда $g' \circ l = k'$ и $g'' \circ l = k''$.*

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[rr, bend left, "t'"] \arrow[dd, "f'"] & & W \arrow[ll, "g'"] \arrow[dd, "g''"'] \\ & T \arrow[ul, "k'"] \arrow[ur, "l"] \arrow[dr, "k''"] & \\ U & & V'' \arrow[ll, "f''"] \arrow[uu, bend right, "t''"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

*Сектором* симплициального $E$-гомоморфизма $h\colon \tilde W \to W$ называем такой симплициальный $E$-гомоморфизм $s\colon W \to \tilde W$, что $h \circ s = \mathrm{id}$.

**4.2. Лемма.** *Пусть дана коммутативная диаграмма симплициальных $E$-модулей и $E$-гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd}
0 & \tilde U \arrow[l] \arrow[d, "f"] & \tilde V \arrow[l, "\tilde p"'] \arrow[d, "g"] & \tilde W \arrow[l, "\tilde q"'] \arrow[d, "h"] & 0 \arrow[l] \\
0 & U \arrow[l] & V \arrow[l, "p"'] & W \arrow[l, "q"'] & 0, \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

*строки которой точны и расщепимы и где $E$-гомоморфизм $h$ имеет сектор. Тогда левый квадрат имеет ключ.*

*Доказательство.* Пусть на диаграмме ниже $(k, l)$ и $(\tilde k, \tilde l)$ — расщепления:

$$\begin{aligned}
&p \circ k = \mathrm{id}, && l \circ q = \mathrm{id}, && k \circ p + q \circ l = \mathrm{id},\\
&\tilde p \circ \tilde k = \mathrm{id}, && \tilde l \circ \tilde q = \mathrm{id}, && \tilde k \circ \tilde p + \tilde q \circ \tilde l = \mathrm{id},
\end{aligned}$$

а $s$ — сектор: $h \circ s = \mathrm{id}$. Введём симплициальные $E$-гомоморфизмы $r = \tilde q \circ s \circ l$ и $\hat k = \tilde k + r \circ (k \circ f - g \circ \tilde k)$. Тогда $(0, k, \hat k, r)$ — искомый ключ.

$$\begin{tikzcd}
0 & \tilde U \arrow[l] \arrow[d, "f"] \arrow[r, bend left=40, "\hat k"] \arrow[r, bend right, "\tilde k"'] & \tilde V \arrow[l, "\tilde p"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[r, bend right, "\tilde l"'] & \tilde W \arrow[l, "\tilde q"'] \arrow[d, "h"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & U \arrow[l] \arrow[u, bend left, "0"] \arrow[r, bend right, "k"'] & V \arrow[l, "p"'] \arrow[u, bend right, "r"'] \arrow[r, bend right, "l"'] & W \arrow[l, "q"'] \arrow[u, bend right, "s"'] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

□

**4.3. Лемма.** *Пусть даны симплициальные отряды $L$ и $M$, изотипичное корасслоение $j\colon L \to M$ и фибрантный симплициальный отряд $Q$. Тогда $Q^j\colon Q^M \to Q^L$ — изотипичное расслоение.* □

**4.4. Лемма.** *Пусть даны симплициальные отряды $Q$ и $R$, расслоение $c\colon Q \to R$ и изотипный точке симплициальный отряд $N$. Тогда $c^N\colon Q^N \to R^N$ — изотипичное расслоение.* □

**4.5. Лемма.** *Пусть $E$ — поле и даны симплициальные $E$-модули $V$ и $W$ и изотипичный расслаивающий симплициальный $E$-гомоморфизм $f\colon W \to V$. Тогда $f$ имеет сектор.* □

**4.6. Лемма.** *Пусть $E$ — поле и даны симплициальные отряды $L$ и $M$, изотипичное корасслоение $j\colon L \to M$, симплициальные $E$-модули $Q$ и $R$ и расслаивающий симплициальный $E$-гомоморфизм $c\colon Q \to R$. Тогда коммутативный квадрат симплициальных $E$-модулей и $E$-гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd} Q^L \arrow[d, "c^L"'] & Q^M \arrow[l, "Q^j"'] \arrow[d, "c^M"] \\ R^L & R^M \arrow[l, "R^j"'] \end{tikzcd}$$

*имеет ключ.*

*Доказательство.* Рассмотрим (строго) кофибрационную последовательность

$$L \xrightarrow{j} M \xrightarrow{k} N.$$

Так как корасслоение $j$ изотипично, то симплициальный отряд $N$ изотипен точке. Имеем коммутативную диаграмму симплициальных $E$-модулей и $E$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd} 0 & Q^L \arrow[l] \arrow[d, "c^L"] & Q^M \arrow[l, "Q^j"'] \arrow[d, "c^M"] & Q^N \arrow[l, "Q^k"'] \arrow[d, "c^N"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & R^L \arrow[l] & R^M \arrow[l, "R^j"'] & R^N \arrow[l, "R^k"'] & 0. \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Покажем, что строки точны и расщепимы. Рассмотрим верхнюю строку. Точность во втором и третьем членах очевидна. $Q$ — фибрант, так как это симплициальная абелева группа. По лемме 4.3, $Q^j$ — изотипичное расслоение. По лемме 4.5, $Q^j$ имеет сектор. Таким образом, эта строка точна и расщепима. То же для нижней строки. По лемме 4.4, $c^N$ — изотипичное расслоение. По лемме 4.5, $c^N$ имеет сектор. По лемме 4.2, существует искомый ключ. □

## § 5. Квазисимплициальные архизмы

Для симплициальных отрядов $K$ и $L$ *квазисимплициальный архизм* $f\colon K \dashrightarrow L$ — последовательность архизмов $f_q\colon K_q \to L_q$, $q \in \mathbf{N}$. Отряд квазисимплициальных архизмов обозначаем $\tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(K,L)$; подотряд симплициальных архизмов — $\mathrm{sAr}(K,L)$.

Для симплициальных абелевых групп $U$ и $V$ квазисимплициальный архизм $f\colon U \dashrightarrow V$ *$r$-плавен*, если архизмы $f_q\colon U_q \to V_q$ $r$-плавны.

Пусть дан симплициальный отряд $T$. Для $m,q \in \mathbf{N}$ пусть $[m|q]$ — множество нестрого возрастающих функций $[m] \to [q]$ (где $[q] = \{0,\ldots,q\}$) и

$$T(m,q) = (T(h))_{h\in[m|q]}\colon T_q \to T_m^{[m|q]}.$$

Симплициальный отряд $T$ называем *$m$-разрешимым*, если для любого $q$ архизм $T(m,q)$ инъективен.

Пусть дано простое число $p$.

**5.1. Лемма.** *Пусть даны постепенный симплициальный отряд $T$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль $U$, $m$-разрешимый ($m \in \mathbf{N}$) симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль $R$, корасслоение $d\colon T \to U$ и симплициальный архизм $k\colon T \to R$. Тогда для некоторого $r \in \mathbf{N}$ существует такой $r$-плавный квазисимплициальный архизм $w\colon U \dashrightarrow R$, что $w \circ d = k$.*

$$\begin{tikzcd} U & T \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "k"] & R \arrow[from=1-1, to=1-3, dashed, bend right, "w"'] \end{tikzcd}$$

*Доказательство.* Так как архизм $d_m\colon T_m \to U_m$ инъективен, то существует такой архизм $v\colon U_m \to R_m$, что $v \circ d_m = k_m$. По следствию 3.2, $v$ $r$-плавен для некоторого $r \in \mathbf{N}$. Возьмём $q \in \mathbf{N}$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U_q \arrow[d, "U(m,q)"'] & T_q \arrow[l, "d_q"'] \arrow[r, "k_q"] \arrow[d, "T(m,q)"] & R_q \arrow[d, "R(m,q)"] \\ U_m^{[m|q]} \arrow[rr, bend right, "v^{[m|q]}"'] & T_m^{[m|q]} \arrow[l, "d_m^{[m|q]}"'] \arrow[r, "k_m^{[m|q]}"] & R_m^{[m|q]}. \end{tikzcd}$$

По лемме 3.5, архизм $v^{[m|q]}$ $r$-плавен. Так как $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $R(m,q)$ инъективен, то есть такой $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $f\colon R_m^{[m|q]} \to R_q$, что $f\circ R(m,q) = \mathrm{id}$. Введём $r$-плавный архизм

$$w_q\colon U_q \xrightarrow{U(m,q)} U_m^{[m|q]} \xrightarrow{v^{[m|q]}} R_m^{[m|q]} \xrightarrow{f} R_q.$$

Используя диаграмму, получаем $w_q \circ d_q = k_q$. ☐

**5.2. Лемма.** *Пусть даны симплициальный отряд $M$, симплициальные абелевы группы $U$ и $V$ и $r$-плавный ($r \in \mathbf{N}$) квазисимплициальный архизм $t\colon U \dashrightarrow V$. Тогда архизм $t_\#\colon \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,U) \to \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,V)$, $f \mapsto t \circ f$, $r$-плавен.*

*Доказательство.* Это следует из леммы 3.5, так как есть коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,U) \arrow[r, "t_\#"] \arrow[d, equal] & \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(M,V) \arrow[d, equal] \\
\prod\limits_{q\in\mathbf{N},k\in M_q^\times} U_q \arrow[r, "\prod\limits_{q\in\mathbf{N},k\in M_q^\times} t_q"] & \prod\limits_{q\in\mathbf{N},k\in M_q^\times} V_q,
\end{tikzcd}$$

где $M_q^\times = M_q \setminus \{$отмеченный элемент$\}$. □

**5.3. Лемма.** *Пусть даны симплициальные отряды $M$ и $T$, симплициальные $\mathbf{Z}_p$-модули $U$ и $R$, симплициальные архизмы $d\colon T \to U$ и $k\colon T \to R$ и такой $r$-плавный ($r \in \mathbf{N}$) квазисимплициальный архизм $w\colon U \dashrightarrow R$, что $w \circ d = k$. Тогда существует такой $r$-плавный квазисимплициальный архизм $z\colon U^M \dashrightarrow R^M$, что $z \circ d^M = k^M$.*

$$\begin{tikzcd}
U^M \arrow[rr, dashed, bend right, "z"'] & T^M \arrow[l, "d^M"'] \arrow[r, "k^M"] & R^M
\end{tikzcd}$$

*Доказательство.* Возьмём $q \in \mathbf{N}$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(U^M)_q \arrow[d, "i"] & (T^M)_q \arrow[l, "(d^M)_q"'] \arrow[r, "(k^M)_q"] & (R^M)_q \arrow[d, "j"] \\
\tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, U) \arrow[rr, "w_\#"] & & \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, R),
\end{tikzcd}$$

где $i\colon (U^M)_q = \mathrm{sAr}(\Delta^q_+ \wedge M, U) \to \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, U)$ — $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм включения и аналогичное $j$. По лемме 5.2, архизм $w_\#$ $r$-плавен. Есть такой $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $f\colon \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, R) \to (R^M)_q$, что $f \circ j = \mathrm{id}$. Введём $r$-плавный архизм

$$z_q\colon (U^M)_q \xrightarrow{i} \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, U) \xrightarrow{w_\#} \tilde{\mathrm{s}}\mathrm{Ar}(\Delta^q_+ \wedge M, R) \xrightarrow{f} (R^M)_q.$$

Используя диаграмму, получаем $z_q \circ (d^M)_q = (k^M)_q$. □

## § 6. Гармоничные корасслоения

Пусть даны симплициальный отряд $T$ и симплициальная абелева группа $U$. Корасслоение $d\colon T \to U$ называем *$r$-гармоничным* ($r \in \mathbf{N}$), если для любых компактных симплициальных отрядов $L$ и $M$ и изотипичного корасслоения $j\colon L \to M$ существуют такие симплициальный архизм $x\colon T^L \to T^M$ и $r$-плавный квазисимплициальный архизм $y\colon U^L \dashrightarrow U^M$, что $d^M \circ x = y \circ d^L$ и $T^j \circ x = \mathrm{id}$.

$$\begin{tikzcd}
T^L \arrow[r, bend left, "x"] \arrow[d, "d^L"'] & T^M \arrow[l, "T^j"] \arrow[d, "d^M"] \\
U^L \arrow[r, dashed, bend right, "y"'] & U^M \arrow[l, "U^j"']
\end{tikzcd}$$

Называем корасслоение *гармоничным*, если оно $r$-гармонично для какого-то $r \in \mathbf{N}$.

*Высотой* 0-связного пространства $Y$ называем супремум тех $q \in \mathbf{N}$, для которых $\pi_q(Y) \neq 1$ (супремум пустого множества считаем равным 0).

**6.1. Лемма.** *Пусть даны простое число $p$ и связное клеточное пространство $Y$ конечной высоты с $p$-конечными гомотопическими группами. Тогда существуют постепенный симплициальный отряд $T$ с $|T| \simeq Y$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль $U$ и гармоничное корасслоение $d\colon T \to U$.*

*Доказательство.* (Индукция вдоль постниковского разложения пространства $Y$ со слоями вида $\mathcal{K}(\mathbf{Z}_p, q)$.) Пусть $n$ — высота пространства $Y$. Если $n = 0$, то $Y$ стягиваемо, положим $T = U = 0$ и всё. Иначе выберем элемент $e \in \pi_n(Y)$, неподвижный относительно канонического действия группы $\pi_1(Y)$ и имеющий порядок $p$. Существование такого элемента (см. замечание в [6, Ch. II, Example 5.2(iv)]) вытекает из известного сравнения $|\mathrm{Fix}_G X| \equiv |X| \pmod p$ для действия $p$-конечной группы $G$ на конечном множестве $X$. Пусть $\bar{Y}$ — клеточное пространство, получающееся из $Y$ «заклеиванием» элемента $e$. Имеем $\pi_q(\bar{Y}) \cong \pi_q(Y)$ при $q \neq n$ и $\pi_n(\bar{Y}) \cong \pi_n(Y)/\langle e\rangle$. Пространство $Y$ гомотопически эквивалентно гомотопическому слою некоторого отображения $\bar{Y} \to \mathcal{K}(\mathbf{Z}_p, n+1)$ [8, Lemma 4.70].

Принимаем (как предположение индукции), что есть постепенный симплициальный отряд $\bar{T}$ с $|\bar{T}| \simeq \bar{Y}$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль $\bar{U}$ и $r$-гармоничное ($r \geqslant 1$) корасслоение $\bar{d}\colon \bar{T} \to \bar{U}$.

Пусть $R$ — постепенный $(n+1)$-разрешимый симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль с $|R| \simeq \mathcal{K}(\mathbf{Z}_p, n+1)$, $Q$ — постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль, изотипный точке, и $c\colon Q \to R$ — расслаивающий симплициальный $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм (см. [2]). Существует декартов квадрат симплициальных отрядов и архизмов

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Q \arrow[d, "c"] \\ \bar{T} \arrow[r, "k"] & R, \end{tikzcd}$$

где $|T| \simeq Y$. Положим $U = \bar{U} \times Q$. Пусть $a\colon U \to \bar{U}$ и $b\colon U \to Q$ — симплициальные $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмы проекций. Зададим симплициальный архизм $d\colon T \to U$ условиями $a \circ d = \bar{d} \circ f$ и $b \circ d = h$. Очевидно, $d$ — корасслоение.

По лемме 5.1, для некоторого $s \geqslant 1$ есть такой $s$-плавный квазисимплициальный архизм $w\colon \bar{U} \dashrightarrow R$, что $w \circ \bar{d} = k$.

Покажем, что $d$ $rs$-гармонично. Возьмём компактные симплициальные отряды $L$ и $M$ и изотипичное корасслоение $j\colon L \to M$. Нужно найти такие симплициальный архизм $x\colon T^L \to T^M$ и $rs$-плавный квазисимплициальный архизм $y\colon U^L \dashrightarrow U^M$, что $d^M \circ x = y \circ d^L$ и $T^j \circ x = \mathrm{id}$. Так как $\bar{d}$ $r$-гармонично, то есть такие симплициальный архизм $\bar{x}\colon \bar{T}^L \to \bar{T}^M$ и $r$-плавный квазисимплициальный архизм $\bar{y}\colon \bar{U}^L \dashrightarrow \bar{U}^M$, что $\bar{d}^M \circ \bar{x} = \bar{y} \circ \bar{d}^L$ и $\bar{T}^j \circ \bar{x} = \mathrm{id}$.

Имеем коммутативный квадрат симплициальных $\mathbf{Z}_p$-модулей и $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов с полуключом

$$\begin{tikzcd} Q^L \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[d, "c^L"'] & Q^M \arrow[l, "Q^j"] \arrow[d, "c^M"'] \\ R^L & R^M \arrow[l, "R^j"] \arrow[u, bend right, "t''"'] \end{tikzcd}$$

(полуключ есть по лемме 4.6). Введём симплициальный архизм

$$u = t' \circ h^L + t'' \circ k^M \circ \bar{x} \circ f^L \colon T^L \to Q^M.$$

Так как $c^L \circ h^L = k^L \circ f^L = k^L \circ \bar{T}^j \circ \bar{x} \circ f^L = R^j \circ k^M \circ \bar{x} \circ f^L$, то, по лемме 4.1, $Q^j \circ u = h^L$ и $c^M \circ u = k^M \circ \bar{x} \circ f^L$.

Зададим нужный симплициальный архизм $x$ условиями $f^M \circ x = \bar{x} \circ f^L$ и $h^M \circ x = u$:

$$\begin{tikzcd}
T^M \arrow[rr, "h^M"] \arrow[dd, "f^M"'] & & Q^M \arrow[dd, "c^M"] \\
& T^L \arrow[ul, "x"'] \arrow[ur, "u"] \arrow[dl, "\bar{x}\circ f^L"'] & \\
\bar{T}^M \arrow[rr, "k^M"] & & R^M.
\end{tikzcd}$$

Так можно сделать, поскольку квадрат здесь декартов, а условия согласованы: $k^M \circ \bar{x} \circ f^L = c^M \circ u$. Имеем $T^j \circ x = \mathrm{id}$, так как $f^L \circ T^j \circ x = \bar{T}^j \circ f^M \circ x = \bar{T}^j \circ \bar{x} \circ f^L = f^L$ и $h^L \circ T^j \circ x = Q^j \circ h^M \circ x = Q^j \circ u = h^L$.

По лемме 5.3, есть такой $s$-плавный квазисимплициальный архизм $z\colon \bar{U}^M \dashrightarrow R^M$, что $z \circ \bar{d}^M = k^M$. Введём квазисимплициальный архизм

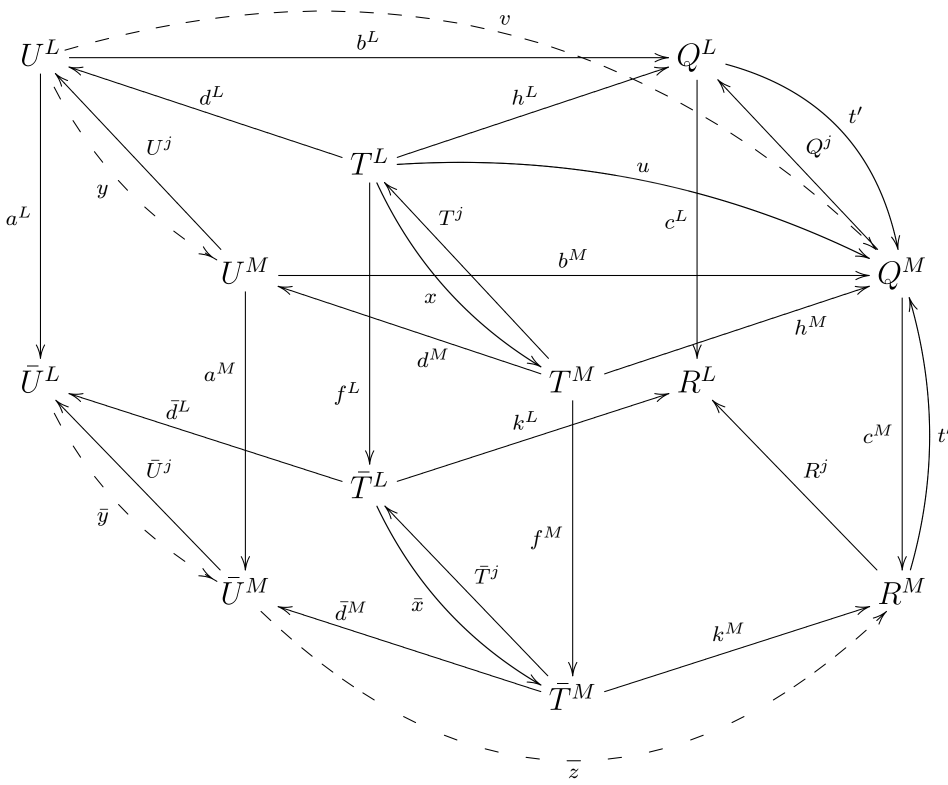
$$v = t' \circ b^L + t'' \circ z \circ \bar{y} \circ a^L \colon U^L \dashrightarrow Q^M.$$

По лемме 3.3, он $rs$-плавен.

Зададим нужный квазисимплициальный архизм $y$ условиями $a^M \circ y = \bar{y} \circ a^L$ и $b^M \circ y = v$:

$$\begin{tikzcd}
U^M \arrow[rr, "b^M"] \arrow[dd, "a^M"'] & & Q^M \\
& U^L \arrow[ul, dashed, "y"'] \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[dl, dashed, "\bar{y}\circ a^L"'] & \\
\bar{U}^M. & &
\end{tikzcd}$$

Так можно сделать, поскольку $(a^M, b^M)\colon U^M \to \bar{U}^M \times Q^M$ — изоморфизм. Очевидно, $y$ $rs$-плавен. Имеем $d^M \circ x = y \circ d^L$, так как $a^M \circ d^M \circ x = \bar{d}^M \circ f^M \circ x = \bar{d}^M \circ \bar{x} \circ f^L = \bar{y} \circ \bar{d}^L \circ f^L = \bar{y} \circ a^L \circ d^L = a^M \circ y \circ d^L$ и $b^M \circ d^M \circ x = h^M \circ x = u = t' \circ h^L + t'' \circ k^M \circ \bar{x} \circ f^L = t' \circ h^L + t'' \circ z \circ \bar{d}^M \circ \bar{x} \circ f^L = t' \circ h^L + t'' \circ z \circ \bar{y} \circ \bar{d}^L \circ f^L = t' \circ b^L \circ d^L + t'' \circ z \circ \bar{y} \circ a^L \circ d^L = v \circ d^L = b^M \circ y \circ d^L$.



(На этой диаграмме прямые стрелки составляют коммутативную поддиаграмму.) □

## § 7. Две фильтрации модуля $C_0(U^K)$

**7.1. Лемма.** *Пусть дан конечный набор абелевых групп $U_i$, $i \in I$. Пусть*

$$U_J = \bigoplus_{i \in J} U_i, \qquad J \subseteq I,$$

*$U = U_I$ и $p_J \colon U \to U_J$ — проекции. Тогда для $r \in \mathbf{N}$ в $\mathcal{R}$-алгебре $\mathcal{R}\lfloor U \rfloor$ имеем*

$$\bigcap_{J \subseteq I \,:\, |J| \leqslant r} \ker(p_J)_{\mathcal{R}} \subseteq \rceil \mathcal{R}\lfloor U \rfloor^{r+1}.$$

*Доказательство.* Пусть $s_J \colon U_J \to U$ — канонические вложения и $q_J = s_J \circ p_J \colon U \to U$. Пусть $|I| > r$ (иначе утверждение тривиально). Для

$u \in U$ имеем (ср. [1, лемма 5.5])

$$\lfloor u\rfloor - \sum_{J\subseteq I\,:\,|J|\leqslant r} (-1)^{r-|J|}\binom{|I|-|J|-1}{r-|J|}\lfloor q_J(u)\rfloor =$$

$$= \sum_{J\subseteq I}\Big(\sum_{M\subseteq I\,:\,M\supseteq J,\,|M|>r}(-1)^{|M|-|J|}\Big)\lfloor q_J(u)\rfloor =$$

$$= \sum_{M\subseteq I\,:\,|M|>r}\Big(\sum_{J\subseteq M}(-1)^{|M|-|J|}\lfloor q_J(u)\rfloor\Big) =$$

$$= \sum_{M\subseteq I\,:\,|M|>r}\prod_{i\in M}(\lfloor q_{\{i\}}(u)\rfloor - 1) \in \rceil\mathcal{R}\lfloor U\rfloor^{r+1}.$$

Следовательно, для $w \in \mathcal{R}\lfloor U\rfloor$ имеем

$$w - \sum_{J\subseteq I\,:\,|J|\leqslant r}(-1)^{r-|J|}\binom{|I|-|J|-1}{r-|J|}(q_J)_{\mathcal{R}}(w) \in \rceil\mathcal{R}\lfloor U\rfloor^{r+1}.$$

Если

$$w \in \bigcap_{J\subseteq I\,:\,|J|\leqslant r}\ker(p_J)_{\mathcal{R}},$$

то, так как $\ker(p_J)_{\mathcal{R}} = \ker(q_J)_{\mathcal{R}}$, получаем $w \in \rceil\mathcal{R}\lfloor U\rfloor^{r+1}$. □

Для симплициальной абелевой группы $V$ введём в модуле $C_0(V) = \mathcal{R}\lfloor V_0\rfloor$ фильтрацию $C_0^{\rceil s}(V) = \rceil\mathcal{R}\lfloor V_0\rfloor^s$, $s \in \mathbf{N}$.

**7.2. Следствие.** *Пусть даны компактный симплициальный отряд $K$, поле $E$, симплициальный $E$-модуль $U$ и число $r \in \mathbf{N}$. Рассмотрим $\mathcal{R}$-гомоморфизм*

$$C_0(U^K) \xrightarrow{{}^K_U\mu_r} \mathrm{Hom}_0(C_*(K^r), C_*(U^r)).$$

*Тогда* $\ker {}^K_U\mu_r \subseteq C_0^{\rceil r+1}(U^K)$.

*Доказательство.* Возьмём элемент $B \in \ker {}^K_U\mu_r$ и покажем, что $B \in C_0^{\rceil r+1}(U^K)$.

Есть такое $n \in \mathbf{N}$, что симплициальный отряд $K$ порождён конечным набором симплексов $g_i \in K_n$, $i \in I$. Введём $E$-гомоморфизм $h\colon (U^K)_0 \to$

$U_n^I$, $b \mapsto (b(g_i))_{i\in I}$. Он инъективен, поэтому есть такой $E$-гомоморфизм $f\colon U_n^I \to (U^K)_0$, что $f \circ h = \mathrm{id}$. Достаточно показать, что $h_{\mathcal{R}}(B) \in {\rceil\mathcal{R}\lfloor U_n^I\rfloor^{r+1}}$. Действительно, тогда $B = f_{\mathcal{R}}(h_{\mathcal{R}}(B)) \in {\rceil\mathcal{R}\lfloor (U^K)_0\rfloor^{r+1}} = C_0^{\rceil r+1}(U^K)$.

Для $J \subseteq I$ пусть $p_J\colon U_n^I \to U_n^J$ — проекция. Возьмём $J \subseteq I$ с $|J| \leqslant r$. По лемме 7.1, достаточно проверить, что $(p_J)_{\mathcal{R}}(h_{\mathcal{R}}(B)) = 0$.

Выберем такие функцию $t\colon J \to \{1,\dots,r\}$ и симплекс $k = (k_1,\dots,k_r) \in K_n^r$, что $k_{t(i)} = g_i$, $i \in J$. Имеем $E$-гомоморфизм $U_n^t\colon U_n^r \to U_n^J$, $\mathcal{R}$-гомоморфизм $(U_n^t)_{\mathcal{R}}\colon C_n(U^r) = \mathcal{R}\lfloor U_n^r\rfloor \to \mathcal{R}\lfloor U_n^J\rfloor$ и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}\lfloor (U^K)_0\rfloor \arrow[r, "h_{\mathcal{R}}"] \arrow[d, "{}^K_U\mu_r"'] & \mathcal{R}\lfloor U_n^I\rfloor \arrow[d, "(p_J)_{\mathcal{R}}"] \\
\mathrm{Hom}_0(C_*(K^r), C_*(U^r)) \arrow[r, "v\mapsto (U_n^t)_{\mathcal{R}}(v(\lfloor k\rfloor))"] & \mathcal{R}\lfloor U_n^J\rfloor.
\end{tikzcd}$$

Так как ${}^K_U\mu_r(B) = 0$, то $(p_J)_{\mathcal{R}}(h_{\mathcal{R}}(B)) = 0$. □

## § 8. Симплициальная аппроксимация

**8.1. Лемма.** *Пусть даны компактный симплициальный отряд $K$, симплициальный отряд $W$ и отображение $f\colon |K| \to |W|$. Тогда существуют такие компактный симплициальный отряд $L$, изотипия $e\colon L \to K$ и симплициальный архизм $g\colon L \to W$, что $f \circ |e| \sim |g|$.*

См. [10, Corollary 4.8]. □

Для симплициальных отрядов $L$ и $T$ функция геометрической реализации $|?|\colon (T^L)_0 \to |T|^{|L|}$ индуцирует $\mathcal{R}$-гомоморфизм $\|?\|\colon H_0(T^L) \to H_0(|T|^{|L|})$.

**8.2. Лемма.** *Пусть даны компактный симплициальный отряд $K$, симплициальный отряд $T$ и число $r \in \mathbf{N}$. Тогда для любого $A \in \ker {}^{|K|}_{|T|}\mu_r$ существуют компактный симплициальный отряд $L$, изотипия $e\colon L \to K$*

*и такой элемент* $B \in \ker {}^L_T\mu_r$*, что* $H_0(|T|^{|e|})({}^{|K|}_{|T|}\nu(A)) = \|{}^L_T\nu(B)\|$*:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_0(C_*(L^r), C_*(T^r)) & \underset{B}{C_0(T^L)} \arrow[l, "{}^L_T\mu_r"'] \arrow[r, "{}^L_T\nu"] & H_0(T^L) \arrow[d, "\|?\|"] \\
 & & H_0(|T|^{|L|}) \\
\mathrm{Hom}(C_0(|K|^r), C_0(|T|^r)) & \overset{A}{C_0(|T|^{|K|})} \arrow[l, "{}^{|K|}_{|T|}\mu_r"'] \arrow[r, "{}^{|K|}_{|T|}\nu"] & H_0(|T|^{|K|}). \arrow[u, "H_0(|T|^{|e|})"']
\end{tikzcd}$$

*Доказательство.* Имеем

$$A = \sum_{i=1}^{m} v_i \lfloor a_i \rfloor,$$

где $m \in \mathbf{N}$, $v_i \in \mathcal{R}$ и $a_i \in |T|^{|K|}$. Для $x \in |K|$ введём эквивалентность $c(x)$ на множестве $I = \{1, \ldots, m\}$: $c(x) = \{\, (i, j) : a_i(x) = a_j(x) \,\}$. Пусть $E = \{\, c(x) : x \in |K| \,\}$.

Эквивалентность на $I$ называем *нейтральной*, если

$$\sum_{i \in J} v_i = 0$$

для каждого её класса $J \subseteq I$. Покажем, что для любых $h_1, \ldots, h_r \in E$ эквивалентность $h = h_1 \cap \ldots \cap h_r$ нейтральна. Для каждого $s = 1, \ldots, r$ имеем $h_s = c(x_s)$ для некоторой точки $x_s \in |K|$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_r) \in |K|^r$. В $C_0(|T|^r)$ имеем

$$\sum_{i \in I} v_i \lfloor a_i^r(x) \rfloor = {}^{|K|}_{|T|}\mu_r(A) = 0.$$

Так как для $i, j \in I$

$$a_i^r(x) = a_j^r(x) \iff (i, j) \in h,$$

то это значит, что эквивалентность $h$ нейтральна.

Каждой эквивалентности $h$ на $I$ соответствует симплициальный подотряд $V(h) \subseteq T^m$ (диагональ):

$$V(h)_q = \{\, (t_1, \ldots, t_m) \in T_q^m : t_i = t_j \text{ для всех } (i, j) \in h \,\}.$$

Пусть
$$W=\bigcup_{h\in E}V(h)\subseteq T^m.$$
Имеем отображения $a=(a_1,\dots,a_m)\colon |K|\to|T|^m$ и $\tilde a=d^{-1}\circ a\colon |K|\to |T^m|$, где $d\colon |T^m|\to|T|^m$ — каноническое биективное отображение. Для $x\in|K|$ имеем $\tilde a(x)\in|V(c(x))|$. Поэтому $\operatorname{im}\tilde a\subseteq|W|$. Используя лемму 8.1, находим такие компактный симплициальный отряд $L$, изотипию $e\colon L\to K$ и симплициальный архизм $b=(b_1,\dots,b_m)\colon L\to T^m$, что $\operatorname{im}b\subseteq W$ и $\tilde a\circ|e|\sim|b|$. Положим
$$B=\sum_{i=1}^m v_i\lfloor b_i\rfloor.$$
Имеем $a_i\circ|e|\sim|b_i|$. Поэтому $H_0(|T|^{|e|})(^{|K|}_{|T|}\nu(A))=\|^L_T\nu(B)\|$. Покажем, что ${}^K_T\mu_r(B)=0$. Для $k=(k_1,\dots,k_r)\in K^r_q$ $(q\in\mathbf{N})$ имеем
$${}^K_T\mu_r(B)(\lfloor k\rfloor)=\sum_{i=1}^m v_i\lfloor b^r_i(k)\rfloor.$$
Возьмём $s=1,\dots,r$. Так как $\operatorname{im}b\subseteq W$, то есть такое $h_s\in E$, что $b(k_s)\in V(h_s)$. Поэтому функция $i\mapsto b_i(k_s)$ подчинена эквивалентности $h_s$ (т. е. постоянна на её классах). Так как $b^r_i(k)=(b_i(k_1),\dots,b_i(k_r))$, то функция $i\mapsto b^r_i(k)$ подчинена эквивалентности $h=h_1\cap\ldots\cap h_r$. Так как эквивалентность $h$ нейтральна, получаем ${}^K_T\mu_r(B)(\lfloor k\rfloor)=0$. □

## § 9. Включение $\ker{}^X_Y\mu_r\subseteq\ker{}^X_Y\nu$ при больших $r$

**9.1. Лемма.** *Пусть даны пространства $X$, $Y$, $\tilde X$ и $\tilde Y$, причём $X\simeq\tilde X$ и $Y\simeq\tilde Y$. Тогда для любого $r\in\mathbf{N}$ есть равносильность*
$$\ker{}^X_Y\mu_r\subseteq\ker{}^X_Y\nu\iff\ker{}^{\tilde X}_{\tilde Y}\mu_r\subseteq\ker{}^{\tilde X}_{\tilde Y}\nu.$$
*Доказательство.* Есть гомотопические эквивалентности $k\colon X\to\tilde X$ и $h\colon\tilde Y\to Y$. Имеем коммутативную диаграмму $\mathcal{R}$-модулей и $\mathcal{R}$-гомоморфизмов
$$\begin{CD}
\operatorname{Hom}(C_0(\tilde X^r),C_0(\tilde Y^r)) @<{{}^{\tilde X}_{\tilde Y}\mu_r}<< C_0(\tilde Y^{\tilde X}) @>{{}^{\tilde X}_{\tilde Y}\nu}>> H_0(\tilde Y^{\tilde X})\\
@VVV @VV{C_0(h^k)}V @VV{H_0(h^k)}V\\
\operatorname{Hom}(C_0(X^r),C_0(Y^r)) @<{{}^X_Y\mu_r}<< C_0(Y^X) @>{{}^X_Y\nu}>> H_0(Y^X),
\end{CD}$$

где вертикальные стрелки индуцированы отображениями $k$ и $h$. Так как $H_0(h^k)$ — изоморфизм, получаем импликацию $\Rightarrow$. Импликация $\Leftarrow$ получается так же. $\square$

Пусть дано простое число $p$. Пусть $\mathcal{R} = \mathbf{Z}_p$.

**9.2.** *Пусть даны компактное клеточное пространство $X$ и связное клеточное пространство $Y$ конечной высоты с $p$-конечными гомотопическими группами. Тогда для любого достаточно большого $r \in \mathbf{N}$ в диаграмме*

$$\operatorname{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)) \xleftarrow{{}^X_Y\mu_r} C_0(Y^X) \xrightarrow{{}^X_Y\nu} H_0(Y^X)$$

*имеем* $\ker {}^X_Y\mu_r \subseteq \ker {}^X_Y\nu$.

*Доказательство.* По лемме 6.1, для некоторого $s \in \mathbf{N}$ есть постепенный симплициальный отряд $T$ с $|T| \simeq Y$, постепенный симплициальный $\mathbf{Z}_p$-модуль $U$ и $s$-гармоничное корасслоение $d\colon T \to U$. Имеем $X \simeq |K|$ для некоторого компактного симплициального отряда $K$. Очевидно, $(U^K)_0$ — конечный $\mathbf{Z}_p$-модуль. По лемме 3.1, $C_0^{]t+1}(U^K) = 0$ для некоторого $t \in \mathbf{N}$. Возьмём $r \geqslant st$ и покажем, что в диаграмме

$$\operatorname{Hom}(C_0(|K|^r), C_0(|T|^r)) \xleftarrow{{}^{|K|}_{|T|}\mu_r} C_0(|T|^{|K|}) \xrightarrow{{}^{|K|}_{|T|}\nu} H_0(|T|^{|K|})$$

имеем $\ker {}^{|K|}_{|T|}\mu_r \subseteq \ker {}^{|K|}_{|T|}\nu$. Этого достаточно, по лемме 9.1.

Возьмём элемент $A \in \ker {}^{|K|}_{|T|}\mu_r$ и покажем, что $A \in \ker {}^{|K|}_{|T|}\nu$. По лемме 8.2, есть компактный симплициальный отряд $L$, изотипия $e\colon L \to K$ и такой элемент $B \in \ker {}^L_T\mu_r$, что $H_0(|T|^{|e|})({}^{|K|}_{|T|}\nu(A)) = \|{}^L_T\nu(B)\|$. Так как $|e|$ — гомотопическая эквивалентность, то $H_0(|T|^{|e|})$ — изоморфизм. Поэтому достаточно показать, что ${}^L_T\nu(B) = 0$.

Пусть симплициальный отряд $M$ — (приведённый) цилиндр симплициального архизма $e$. Имеем гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K \arrow[dr, "i"'] & & L \arrow[ll, "e"'] \arrow[dl, "j"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

где $i$ и $j$ — канонические корасслоения. По определению цилиндра, $i$ — изотипия. Так как $e$ — изотипия, то $j$ — тоже изотипия. Так как $d$ $s$-гармонично, то есть коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
T^L \arrow[r, "x"'] \arrow[d, "d^L"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & T^M \arrow[r, "T^j"'] \arrow[d, "d^M"] & T^L \\
U^L \arrow[r, dashed, "y"] & U^M,
\end{tikzcd}$$

где $x$ — симплициальный архизм и $y$ — $s$-плавный квазисимплициальный архизм. Имеем коммутативную диаграмму $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_0(C_*(L^r), C_*(T^r)) \arrow[d] & \overset{B}{C_0(T^L)} \arrow[l, "{}^L_T\mu_r"'] \arrow[r, "C_0(x)"] \arrow[d, "C_0(d^L)"] & \overset{B_1}{C_0(T^M)} \arrow[r, "C_0(T^i)"] \arrow[d, "C_0(d^M)"] & \overset{B_2}{C_0(T^K)} \arrow[d, "C_0(d^K)"] \\
\mathrm{Hom}_0(C_*(L^r), C_*(U^r)) & \underset{B'}{C_0(U^L)} \arrow[l, "{}^L_U\mu_r"'] \arrow[r, "C_0(y)"] & \underset{B'_1}{C_0(U^M)} \arrow[r, "C_0(U^i)"] & \underset{B'_2}{C_0(U^K)},
\end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки индуцированы корасслоением $d$; $B_1, \ldots, B'_2$ — образы элемента $B$ в соответствующих модулях. Так как ${}^L_T\mu_r(B) = 0$, то ${}^L_U\mu_r(B') = 0$. По следствию 7.2, $B' \in C_0^{\rceil r+1}(U^L)$. Так как $r \geqslant st$, а архизм $y_0$ $s$-плавен, то, по следствию 3.4, $B'_1 \in C_0^{\rceil t+1}(U^M)$. Так как $(U^i)_0$ — гомоморфизм, то $B'_2 \in C_0^{\rceil t+1}(U^K)$. Но $C_0^{\rceil t+1}(U^K) = 0$. Значит, $B'_2 = 0$. Так как $d$ — корасслоение, то $C_0(d^K)$ — мономорфизм. Значит, $B_2 = 0$.

Имеем коммутативную диаграмму $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\underset{B}{C_0(T^L)} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "C_0(x)"'] & & \overset{B}{C_0(T^L)} \arrow[rr, "{}^L_T\nu"] & & H_0(T^L) \\
& \underset{B_1}{C_0(T^M)} \arrow[ur, "C_0(T^j)"] \arrow[rr, "{}^M_T\nu"] \arrow[dr, "C_0(T^i)"'] & & H_0(T^M) \arrow[ur, "H_0(T^j)"] \arrow[dr, "H_0(T^i)"'] & \\
& & \underset{B_2}{C_0(T^K)} \arrow[rr, "{}^K_T\nu"] & & H_0(T^K). \arrow[uu, "H_0(T^e)"']
\end{tikzcd}$$

Так как $B_2 = 0$, то ${}^L_T\nu(B) = 0$. $\square$

Можно рассмотреть фильтрацию комплекса $C_*(Y^X)$ ядрами $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизмов

$$C_q(Y^X) \xrightarrow{i_q} C_0(Y^{\Delta^q_+\wedge X}) \xrightarrow{{}^{\Delta^q_+\wedge X}_{\;\;Y}\mu_r} \mathrm{Hom}(C_0((\Delta^q_+\wedge X)^r), C_0(Y^r)),$$

где $i_q$ — очевидные изоморфизмы. Интересно, сходится ли эта фильтрация.

## § 10. Вывод теоремы 1.2 из утверждения 9.2

**10.1. Лемма.** *Пусть даны пространства $X$, $Y$, $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, отображения $k\colon X\to\tilde{X}$ и $h\colon\tilde{Y}\to Y$, абелева группа $V$ и инвариант $f\colon[X,Y]\to V$. Рассмотрим инвариант $\tilde{f}\colon[\tilde{X},\tilde{Y}]\to V$, $\tilde{u}\mapsto f(h\circ\tilde{u}\circ k)$. Тогда* $\mathrm{Deg}\,\tilde{f}\leqslant\mathrm{Deg}\,f$.

*Доказательство.* Возьмём $r\in\mathbf{N}$. Отображения $k$ и $h$ индуцируют гомоморфизм

$$t\colon\ \mathrm{Hom}(C_0(\tilde{X}^r), C_0(\tilde{Y}^r)) \to \mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r)).$$

Имеем $t(C_0(\tilde{a}^r)) = C_0((h\circ\tilde{a}\circ k)^r)$, $\tilde{a}\in\tilde{Y}^{\tilde{X}}$. Пусть $\mathrm{Deg}\,f\leqslant r$. Есть такой гомоморфизм $l\colon\ \mathrm{Hom}(C_0(X^r), C_0(Y^r))\to V$, что $f([a]) = l(C_0(a^r))$, $a\in Y^X$. Введём гомоморфизм $\tilde{l} = l\circ t\colon\ \mathrm{Hom}(C_0(\tilde{X}^r), C_0(\tilde{Y}^r))\to V$. Для $\tilde{a}\in\tilde{Y}^{\tilde{X}}$ имеем $\tilde{f}([\tilde{a}]) = f([h\circ\tilde{a}\circ k]) = l(C_0((h\circ\tilde{a}\circ k)^r)) = l(t(C_0(\tilde{a}^r))) = \tilde{l}(C_0(\tilde{a}^r))$. Таким образом, $\mathrm{Deg}\,\tilde{f}\leqslant r$. □

***Доказательство теоремы 1.2.*** Сперва пусть $Y$ имеет конечную высоту. Достаточно показать, что «универсальный» инвариант $F\colon[X,Y]\to H_0(Y^X;\mathbf{Z}_p)$, $u\mapsto\lfloor u\rfloor$, имеет конечную степень. Для $r\in\mathbf{N}$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_0(X^r;\mathbf{Z}), C_0(Y^r;\mathbf{Z})) \arrow[d, "m'"'] & C_0(Y^X;\mathbf{Z}) \arrow[l, "{}^X_Y\tilde{\mu}_r"'] \arrow[d, "m"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(C_0(X^r;\mathbf{Z}_p), C_0(Y^r;\mathbf{Z}_p)) & C_0(Y^X;\mathbf{Z}_p) \arrow[l, "{}^X_Y\mu_r"'] \arrow[r, "{}^X_Y\nu"] & H_0(Y^X;\mathbf{Z}_p),
\end{tikzcd}$$

где $m$ и $m'$ — гомоморфизмы приведения по модулю $p$; волна над $\mu$ в верхней строке означает «над $\mathbf{Z}$». По утверждению 9.2, при достаточно больших $r$ имеем $\ker{}^X_Y\mu_r \subseteq \ker{}^X_Y\nu$. Тогда есть такой $\mathbf{Z}_p$-гомоморфизм $t\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(C_0(X^r;\mathbf{Z}_p), C_0(Y^r;\mathbf{Z}_p)) \to H_0(Y^X;\mathbf{Z}_p)$, что $t\circ{}^X_Y\mu_r = {}^X_Y\nu$. Для $a \in Y^X$ имеем $F([a]) = ({}^X_Y\nu\circ m)(\lfloor a\rfloor) = (t\circ m'\circ{}^X_Y\tilde{\mu}_r)(\lfloor a\rfloor) = (t\circ m')(C_0(a^r;\mathbf{Z}))$. Таким образом, $\operatorname{Deg} F \leqslant r$.

Общий случай сводится к рассмотренному. Есть связное клеточное пространство $\bar{Y}$ конечной высоты с $p$-конечными гомотопическими группами и $(\dim X + 1)$-связное отображение $h\colon Y \to \bar{Y}$ ($\bar{Y}$ получается из $Y$ «заклеиванием» старших гомотопических групп). Индуцированная функция $h_\#\colon [X,Y] \to [X,\bar{Y}]$ биективна. Введём инвариант $\bar{f} = f\circ h_\#^{-1}\colon [X,\bar{Y}] \to \mathbf{Z}_p$. По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} f \leqslant \operatorname{Deg}\bar{f}$. По доказанному выше, $\operatorname{Deg}\bar{f} < \infty$. $\square$

## § 11. Вывод теоремы 1.1 из теоремы 1.2

**11.1. Лемма** [6, Ch. VI, Proposition 8.6]. *Пусть даны связное компактное клеточное пространство $X$, нильпотентное связное клеточное пространство $Y$ с конечно порождёнными гомотопическими группами и различные классы $u_1, u_2 \in [X,Y]$. Тогда для некоторого простого числа $p$ существуют такие связное клеточное пространство $\bar{Y}$ с $p$-конечными гомотопическими группами и отображение $h\colon Y \to \bar{Y}$, что $h\circ u_1 \neq h\circ u_2$ в $[X,\bar{Y}]$.* $\square$

***Доказательство теоремы 1.1.*** По лемме 11.1, для некоторого простого числа $p$ есть такие связное клеточное пространство $\bar{Y}$ с $p$-конечными гомотопическими группами и отображение $h\colon Y \to \bar{Y}$, что классы $\bar{u}_i = h\circ u_i$, $i = 1,2$, различны. Есть такой инвариант $\bar{f}\colon [X,\bar{Y}] \to \mathbf{Z}_p$, что $\bar{f}(\bar{u}_1) \neq \bar{f}(\bar{u}_2)$. По теореме 1.2, $\operatorname{Deg}\bar{f} < \infty$. Введём инвариант $f = \bar{f}\circ h_\#\colon [X,Y] \to \mathbf{Z}_p$. По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} f < \infty$. Имеем $f(u_1) = \bar{f}(\bar{u}_1) \neq \bar{f}(\bar{u}_2) = f(u_2)$. $\square$

## § 12. Свойства инвариантов конечной степени

Пусть $\mathcal{E} = \{0,1\} \subseteq \mathbf{Z}$. Для $e = (e_1,\dots,e_n) \in \mathcal{E}^n$ пусть $|e| = e_1 + \ldots + e_n$.

Пусть дан букет пространств $W = T_1 \vee \ldots \vee T_n$. Пусть $\mathrm{in}^W_k\colon T_k \to W$ — включения. Для $e \in \mathcal{E}^n$ пусть $M^W_e = m_1 \vee \ldots \vee m_n\colon W \to W$, где $m_k\colon T_k \to T_k$ — отображение тождественное, если $e_k = 1$, и постоянное иначе.

**12.1. Лемма.** *Пусть даны пространства $X$ и $Y$, абелева группа $V$, инвариант $f\colon [X,Y] \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$, букет пространств*

$W = T_1 \vee \ldots \vee T_{r+1}$ *и отображения* $k\colon X \to W$ *и* $h\colon W \to Y$*. Тогда*

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

*Доказательство.* Введём инвариант $\tilde{f}\colon [W, W] \to V$, $\tilde{u} \mapsto f(h \circ \tilde{u} \circ k)$. Нужно показать, что

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} \tilde{f}([M_e^W]) = 0.$$

По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} \tilde{f} \leqslant r$, т. е. есть такой гомоморфизм $l\colon \operatorname{Hom}(C_0(W^r), C_0(W^r)) \to V$, что $\tilde{f}([\tilde{a}]) = l(C_0(\tilde{a}^r))$ для любого $\tilde{a} \in W^W$ (здесь и ниже $\mathcal{R} = \mathbf{Z}$). Поэтому достаточно показать, что

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} C_0((M_e^W)^r) = 0.$$

Возьмём точку $w = (w_1, \ldots, w_r) \in W^r$. Есть такое $s \in \{1, \ldots, r+1\}$, что $\{w_1, \ldots, w_r\} \cap T_s \subseteq \{w_0\}$, где $w_0 \in W$ — вершина букета. Точка $(M_e^W)^r(w) \in W^r$ не зависит от $s$-й компоненты набора $e$. Так как $C_0((M_e^W)^r)(\lfloor w \rfloor) = \lfloor (M_e^W)^r(w) \rfloor$, то отсюда следует, что

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} C_0((M_e^W)^r)(\lfloor w \rfloor) = 0,$$

что и нужно. □

***Отображения $S^n \to Y$.*** В этом пункте мы используем мультипликативную запись для гомотопических групп.

**12.2. Лемма.** *Пусть даны число $n \geqslant 1$, пространство $Y$, абелева группа $V$ и инвариант $f\colon \pi_n(Y) \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$. Тогда $f$ $r$-плавен.*

*Доказательство.* Возьмём элементы $u_1, \ldots, u_{r+1} \in \pi_n(Y)$. Нужно показать, что ${}^+f((1 - \lfloor u_1 \rfloor) \ldots (1 - \lfloor u_{r+1} \rfloor)) = 0$. Введём букет $W = S^n \vee \ldots \vee S^n$, $r+1$ слагаемых. Пусть $k\colon S^n \to W$ — отображение с $[k] = [\mathrm{in}_1^W] \ldots [\mathrm{in}_{r+1}^W]$ в $\pi_n(W)$ и $h\colon W \to Y$ — отображение с $[h \circ \mathrm{in}_s^W] = u_s$ в $\pi_n(Y)$. По лемме 12.1,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Это и есть нужное соотношение, так как $[h \circ M_e^W \circ k] = u_1^{e_1} \ldots u_{r+1}^{e_{r+1}}$ в $\pi_n(Y)$. □

Умножение Уайтхеда обозначаем знаком $*$.

**12.3. Лемма.** *Пусть даны числа $m, n \geqslant 1$, пространство $Y$ и инвариант $f\colon \pi_{m+n-1}(Y) \to V$ степени не выше $r \in \mathbf{N}$. Тогда функция $b\colon \pi_m(Y) \times \pi_n(Y) \to V$, $(u, v) \mapsto f(u * v)$, $r$-плавна.*

*Доказательство.* Пусть $r > 0$ (иначе утверждение тривиально). Возьмём элементы $u_1, \ldots, u_p \in \pi_m(Y)$ и $v_1, \ldots, v_q \in \pi_n(Y)$, где $p, q \geqslant 0$ и $p+q = r+1$. По лемме 3.10, достаточно показать, что ${}^{+}b((1-\lfloor\hat{u}_1\rfloor)\ldots(1-\lfloor\hat{u}_p\rfloor)(1-\lfloor\hat{v}_1\rfloor)\ldots(1-\lfloor\hat{v}_q\rfloor)) = 0$, где $\hat{u}_s = (u_s, 1) \in \pi_m(Y) \times \pi_n(Y)$ и $\hat{v}_s = (1, v_s) \in \pi_m(Y) \times \pi_n(Y)$. Введём букет $W = S^m \vee \ldots \vee S^m \vee S^n \vee \ldots \vee S^n$, $p$ раз $S^m$ и $q$ раз $S^n$. Пусть $k\colon S^{m+n-1} \to W$ — отображение с $[k] = ([\mathrm{in}_1^W]\ldots[\mathrm{in}_p^W]) * ([\mathrm{in}_{p+1}^W]\ldots[\mathrm{in}_{r+1}^W])$ в $\pi_{m+n-1}(W)$ и $h\colon W \to Y$ — отображение с $[h \circ \mathrm{in}_s^W] = u_s$ в $\pi_m(Y)$ для $s = 1, \ldots, p$ и $[h \circ \mathrm{in}_{p+t}^W] = v_t$ в $\pi_n(Y)$ для $t = 1, \ldots, q$. По лемме 12.1,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Это и есть нужное соотношение, так как $[h \circ M_e^W \circ k] = (u_1^{e_1} \ldots u_p^{e_p}) * (v_1^{e_{p+1}} \ldots v_q^{e_{r+1}})$ в $\pi_{m+n-1}(Y)$ и, следовательно, $f([h \circ M_e^W \circ k]) = b(u_1^{e_1} \ldots u_p^{e_p}, v_1^{e_{p+1}} \ldots v_q^{e_{r+1}}) = b(\hat{u}_1^{e_1} \ldots \hat{u}_p^{e_p} \hat{v}_1^{e_{p+1}} \ldots \hat{v}_q^{e_{r+1}})$. $\square$

***Отображения $S^{n-1} \times S^n \to S^n_{(\mathbf{Q})}$.*** В этом пункте доказываются утверждения 1.5 — 1.7 и используются объёкты, введённые в соответствующем пункте § 1. Для элементов $u \in \pi_p(Y)$ и $v \in \pi_q(Y)$ класс $(u, v) \in [S^p \vee S^q, Y]$ определяется очевидным образом.

Пусть $x\colon S^n \vee S^{2n-1} \to S^n \times S^{2n-1}$ — каноническое вложение букета в произведение. Рассмотрим отображение $(\mathrm{pr}_2, c)\colon S^{n-1} \times S^n \to S^n \times S^{2n-1}$, где $\mathrm{pr}_2\colon S^{n-1} \times S^n \to S^n$ — проекция, а $c\colon S^{n-1} \times S^n \to S^{2n-1}$ — отображение, введённое в § 1. Существует (и единственно с точностью до гомотопии) такое отображение $b\colon S^{n-1} \times S^n \to S^n \vee S^{2n-1}$, что $x \circ b \sim (\mathrm{pr}_2, c)$. Для $p, q \in \mathbf{Z}$ введём классы

$$v(p,q)\colon S^{n-1} \times S^n \xrightarrow{\quad b \quad} S^n \vee S^{2n-1} \overset{(pi,qj)}{\rightsquigarrow} S^n$$

(волнистая стрелка изображает гомотопический класс) и $\bar{v}(p,q) = l \circ v(p,q) \in [S^{n-1} \times S^n, S^n_{\mathbf{Q}}]$. Очевидно, $v(0,q) = u(q)$ и $\bar{v}(0,q) = \bar{u}(q)$. Имеем $v(p,q) = v(p,0)$ при $p \mid q$ (доказательство опускается) и $\bar{v}(p,q) = \bar{v}(p,0)$ при $p \neq 0$ [5, Example 4.6].

*Доказательство утверждения 1.5.* Возьмём $q \in \mathbf{Z}$. Введём букет $W = S^n \vee \ldots \vee S^n \vee S^{2n-1}$, $r$ раз $S^n$. Пусть $d\colon S^n \vee S^{2n-1} \to W$ — отображение с $[d] = ([\mathrm{in}_1^W] + \ldots + [\mathrm{in}_r^W], [\mathrm{in}_{r+1}^W])$. Пусть $k = d \circ b\colon S^{n-1} \times S^n \to W$. Пусть $h\colon W \to S^n$ — отображение с $[h] = (i, \ldots, i, qj)$. По лемме 12.1,

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{r+1}} (-1)^{|e|} f([h \circ M_e^W \circ k]) = 0.$$

Так как $[h \circ M_e^W \circ k] = v(e_1 + \ldots + e_r, e_{r+1}q)$, имеем

$$\sum_{e' \in \mathcal{E}^r} (-1)^{|e'|} \sum_{e'' \in \mathcal{E}} (-1)^{e''} f(v(|e'|, e''q)) = 0.$$

Пусть $r! \mid q$. При $e' \neq (0, \ldots, 0)$ внутренняя сумма равна нулю, так как тогда $|e'| \mid q$ и, следовательно, класс $v(|e'|, e''q)$ не зависит от $e''$. Остаётся $f(v(0,0)) - f(v(0,q)) = 0$, т. е. $f(u(q)) = f(u(0))$. □

*Доказательство утверждения 1.6.* Пусть $\operatorname{Deg} f \leqslant r \in \mathbf{N}$. Возьмём $q \in \mathbf{Z}$. Как в доказательстве утверждения 1.5, получаем

$$\sum_{e' \in \mathcal{E}^r} (-1)^{|e'|} \sum_{e'' \in \mathcal{E}} (-1)^{e''} f(\bar{v}(|e'|, e''q)) = 0.$$

При $e' \neq (0, \ldots, 0)$ класс $\bar{v}(|e'|, e''q)$ не зависит от $e''$. Как в доказательстве утверждения 1.5, получаем $f(\bar{u}(q)) = f(\bar{u}(0))$. □

*Доказательство утверждения 1.7.* Пусть $\operatorname{Deg} f \leqslant r \in \mathbf{N}$. Введём инвариант $\tilde{f}\colon \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Q}$, $\tilde{u} \mapsto f(\tilde{u} \circ c)$. По лемме 10.1, $\operatorname{Deg} \tilde{f} \leqslant r$. По лемме 12.2, $\tilde{f}$ плавен. Введём функцию $F\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $q \mapsto f(u(q))$. Имеем $F(q) = \tilde{f}(qj)$. Поэтому $F$ плавна, т. е., по лемме 3.11, задаётся многочленом. По утверждению 1.5, $F(q) = F(0)$ при $r! \mid q$. Значит, $F$ постоянна. □

## Литература


[1] М. Н. Гусаров, Об $n$-эквивалентности узлов и инвариантах конечной степени, Записки науч. семин. ПОМИ **208** (1993), 152 — 173.

[2] А. Дуади, Комплексы Эйленберга — Маклейна, Математика **5** (1961), №2, 11 — 19.

[3] С. С. Подкорытов, Об отображениях сферы в односвязное пространство, Записки науч. семин. ПОМИ **329** (2005), 159 — 194.

[4] С. С. Подкорытов, Порядок гомотопического инварианта в стабильном случае, Мат. сб. **202** (2011), №8, 95 — 116.

[5] M. Arkowitz, G. Lupton, On finiteness of subgroups of self-homotopy equivalences, Contemp. Math. **181** (1995), 1 — 25.

[6] A. K. Bousfield, D. M. Kan, Homotopy limits, completions and localizations, Lect. Notes Math. 304, Springer-Verlag, 1972.

[7] A. Dress, Operations in representation rings, Proc. Symp. Pure Math. XXI (1971), 39 — 45.

[8] A. Hatcher, Algebraic topology, Camb. Univ. Press, 2002.

[9] M. Hovey, Model categories, Math. Surveys Monographs 63, AMS, 1999.

[10] J. F. Jardine, Simplicial approximation, Theory Appl. Categ. **12** (2004), №2, 34 — 72.

[11] I. B. S. Passi, Group rings and their augmentation ideals, Lect. Notes Math. 715, Springer-Verlag, 1979.

[12] B. E. Shipley, Convergence of the homology spectral sequence of a cosimplicial space, Amer. J. Math. **118** (1996), №1, 179 — 207.

`ssp@pdmi.ras.ru`
`http://www.pdmi.ras.ru/~ssp`