О ЧИСЛАХ ШТИФЕЛЯ — УИТНИ И ПОЛУХАРАКТЕРИСТИКЕ

С. С. Подкорытов

Доказывается, что числа Штифеля — Уитни компактного гладкого подмногообразия евклидова пространства линейно зависят от характеристической функции множества его ростков (как подмножества множества всех ростков подмногообразий), а полухарактеристика компактного m-мерного v_n-подмногообразия евклидова пространства, $m+1=2n$, квадратично зависит от характеристической функции множества его ростков (считается, что фиксировано такое непрерывное отображение некоторого топологического пространства в многообразие Грассмана m-мерных линейных подпространств объемлющего пространства, что образ класса У v_n канонического расслоения при индуцированном гомоморфизме равен нулю, и под v_n-подмногообразием понимается гладкое подмногообразие, снабжённое поднятием в это пространство своего касательного гауссова отображения).

0. Введение

Цель работы — теоремы 0.1 и 0.2.

Соглашения и т. п. Многообразия и подмногообразия — гладкие без края. Коцепи, гомологии и т. д. — сингулярные с коэффициентами в поле $\mathbf{Z}_2$ ($=\{0,1\}$). Пускай $\mathbf{Z}_+=\{0,1,\dots\}$. Для множества F пускай $!\,F$ — векторное пространство всех функций $u\colon F\to\mathbf{Z}_2$.

Кобордизмы. Пусть дано число $m\in\mathbf{Z}_+$. Пускай $\mathfrak{N}_m$ — m-я группа неориентированных кобордизмов; считаем её векторным пространством над полем $\mathbf{Z}_2$. Для компактного m-мерного многообразия X пускай $\overline{X}\in\mathfrak{N}_m$ — его класс кобордантности.

Ростки. Пусть даны такие числа $m,q\in\mathbf{Z}_+$, что $m\leqslant q$. Рассмотрим множество пар (X,x), где $X\subset\mathbf{R}^q$ — m-мерное подмногообразие, $x\in X$. Такие пары (X_i,x_i), $i=0,1$, полагаем эквивалентными, если $x_0=x_1$ и существует такая окрестность $O\subset\mathbf{R}^q$ точки x_0, что $X_0\cap O=X_1\cap O$. Класс этой эквивалентности называется *ростком m-мерного подмногообразия пространства* $\mathbf{R}^q$. Пускай E^q_m — множество этих ростков.

Для m-мерного подмногообразия $X\subset\mathbf{R}^q$ и точки $z\in\mathbf{R}^q$ определяем элемент $X(z)\in E^q_m\sqcup\mathbf{R}^q$, полагая его равным классу пары (X,z), если $z\in X$, и

Спасибо Н. Ю. Нецветаеву и Ю. Корбашу за ответы на мои вопросы.

равным точке z иначе. Для m-мерного подмногообразия $X \subset \mathbf{R}^q$ определяем функцию $I(X) \in {!}\,E^q_m$, для ростка $e \in E^q_m$ полагая

$$I(X)(e) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in \{\, X(x) \mid x \in X \,\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Первый результат. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$.

0.1. Теорема. *Существует такое линейное отображение* $B\colon {!}\,E^q_m \to \mathfrak{N}_m$, *что для любого компактного m-мерного подмногообразия $X \subset \mathbf{R}^q$ имеем* $\overline{X} = B(I(X))$.

Доказательство основано на применении теоремы Тома о том, что класс кобордантности многообразия определяется его числами Штифеля — Уитни.

Полухарактеристика. *Полухарактеристикой* нечётномерного компактного многообразия X называется элемент

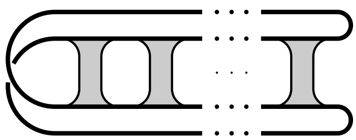
$$\kappa(X) = \frac{1}{2} \dim H^*(X) \bmod 2 \in \mathbf{Z}_2.$$

Алгебраическая степень. Пусть даны векторные пространства V и V' над полем $\mathbf{Z}_2$ и отображение $T\colon V \to V'$. Определена *степень* $\deg T \in \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ отображения T. Неравенство $\deg T \leqslant r$ ($r \in \mathbf{Z}_+$) равносильно условию

$$\sum_{t_0,\ldots,t_r \in \mathbf{Z}_2} T(a + t_0 b_0 + \ldots + t_r b_r) = 0, \qquad a, b_0, \ldots, b_r \in V.$$

Отображение T линейно, если и только если $T(0) = 0$ и $\deg T \leqslant 1$. Оно квадратично, если и только если $T(0) = 0$ и $\deg T \leqslant 2$.

Замечание. Пусть дан такой функционал $K\colon {!}\,E^3_1 \to \mathbf{Z}_2$, что для любой *кривой* (компактного одномерного подмногообразия) $X \subset \mathbf{R}^3$ имеем $\kappa(X) = K(I(X))$. Покажем[1], что $\deg K = \infty$.



Возьмём произвольное число $r \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$. Пусть $A \subset \mathbf{R}^3$ — кривая, нарисованная на чертеже жирной линией. К ней приставлены $r+1$ вложенных ручек, нарисованных серыми. Пронумеруем их от 0 до r. Для элементов $t_0, \ldots, t_r \in \mathbf{Z}_2$ пусть $X(t_0, \ldots, t_r) \subset \mathbf{R}^3$ — кривая, получающаяся из кривой A перестройкой вдоль ручек с теми номерами $s = 0, \ldots, r$, для которых $t_s = 1$. Число компонент кривой, получающейся при перестройке вдоль p ручек ($p = 0, \ldots, r+1$), равно p при $p > 0$ и 1 при $p = 0$. Поэтому

$$\sum_{t_0,\ldots,t_r \in \mathbf{Z}_2} \kappa(X(t_0, \ldots, t_r)) = 1 + \sum_{t_0,\ldots,t_r \in \mathbf{Z}_2} (t_0 + \ldots + t_r) = 1.$$

Имеются такие функции $a, b_0, \ldots, b_r \in {!}\,E^3_1$, что $I(X(t_0, \ldots, t_r)) = a + t_0 b_0 + \ldots + t_r b_r$, $t_0, \ldots, t_r \in \mathbf{Z}_2$. Имеем $\kappa(X(t_0, \ldots, t_r)) = K(a + t_0 b_0 + \ldots + t_r b_r)$, $t_0, \ldots, t_r \in \mathbf{Z}_2$. Т. о., $\deg K > r$.

Рассмотрев декартово произведение этой конструкции на многообразие $\mathbf{R}P^{2k}$ ($k \in \mathbf{Z}_+$), вложенное в евклидово пространство, получим аналогичное утверждение для $(2k+1)$-мерных подмногообразий.

[1]Следующее рассуждение мне рассказал М. Н. Гусаров.

Классы У. Если дано топологическое пространство B, то для векторного расслоения ζ над ним его *классы У* $v_i(\zeta) \in H^i(B)$, $i \in \mathbf{Z}_+$, определяются равенством $\mathrm{Sq}\, v(\zeta) = w(\zeta)$ — здесь и далее

$$\mathrm{Sq} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{Sq}^i, \qquad v(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(\zeta), \qquad w(\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i(\zeta).$$

f-подмногообразия. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$. Пускай G^q_m — многообразие m-мерных линейных подпространств пространства $\mathbf{R}^q$, γ^q_m — каноническое векторное расслоение над многообразием G^q_m.

Для m-мерного подмногообразия $X \subset \mathbf{R}^q$ его *касательное отображение* $t\colon X \to G^q_m$ определяется тем, что касательное подпространство подмногообразия X в каждой точке $x \in X$ есть $t(x)$.

Пусть даны топологическое пространство B и непрерывное отображение $f\colon B \to G^q_m$. Пару (X, g), где $X \subset \mathbf{R}^q$ — m-мерное подмногообразие, $g\colon X \to B$ — непрерывное отображение, называем *f-подмногообразием*, если $f \circ g$ — касательное отображение подмногообразия X. f-подмногообразие (X, g) называем компактным, если подмногообразие X компактно.

Их ростки. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$, топологическое пространство B и непрерывное отображение $f\colon B \to G^q_m$. Рассмотрим множество троек (X, g, x), где (X, g) — f-подмногообразие, $x \in X$. Такие тройки (X_i, g_i, x_i), $i = 0, 1$, полагаем эквивалентными, если $x_0 = x_1$ и существует такая окрестность $O \subset \mathbf{R}^q$ точки x_0, что $X_0 \cap O = X_1 \cap O$ и $g_0 | X_0 \cap O = g_1 | X_1 \cap O$. Класс этой эквивалентности называем *ростком f-подмногообразия.* Пускай E_f — множество этих ростков.

Для f-подмногообразия (X, g) и точки $z \in \mathbf{R}^q$ определяем элемент $(X, g)(z) \in E_f \sqcup \mathbf{R}^q$, полагая его равным классу тройки (X, g, z), если $z \in X$, и равным точке z иначе. Для f-подмногообразия (X, g) определяем функцию $I(X, g) \in \mathbf{!}\, E_f$, для ростка $e \in E_f$ полагая

$$I(X,g)(e) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \in \{\, (X,g)(x) \mid x \in X \,\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Второй результат. Пусть даны такие числа $m, n, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m + 1 = 2n$ и $m \leqslant q$, топологическое пространство B и непрерывное отображение $f\colon B \to G^q_m$.

0.2. Теорема. *Предположим, что $f^*(v_n(\gamma^q_m)) = 0$. Тогда существует такой квадратичный функционал $K\colon\ \mathbf{!}\, E_f \to \mathbf{Z}_2$, что для любого компактного f-подмногообразия (X, g) имеем $\kappa(X) = K(I(X, g))$.*

Предположим, что f — каноническое двулистное накрытие. Тогда f-подмногообразие — то же, что m-мерное ориентированное подмногообразие пространства $\mathbf{R}^q$. Предположим, что число n нечётно. Из леммы 0.3 (ниже) следует, что тогда $f^*(v_n(\gamma^q_m)) = 0$. В этом частном случае утверждение теоремы 0.2 доказано в [1]. Точнее, там доказано аналогичное утверждение для *рациональной* полухарактеристики. Но та отличается от нашей на число Штифеля — Уитни ([2]). Поэтому, в силу теоремы 0.1, эти два утверждения равносильны, ведь над полем $\mathbf{Z}_2$ любой линейный функционал квадратичен.

0.3. Лемма (ср. [3, Corollary 3.11]). *Пусть дано ориентируемое векторное расслоение ζ. Тогда $v_i(\zeta)=0$ при нечётных $i\in\mathbf{Z}_+$.*

Доказательство. В обозначениях характеристических классов букву ζ будем опускать. Рассуждаем по индукции. Возьмём число $k\in\mathbf{Z}_+$. Предположим, что $v_{2k'+1}=0$ при $k'<k$. Покажем, что $v_{2k+1}=0$. По определению классов У и предположению, имеем

$$w_{2k+1}=v_{2k+1}+\sum_{l=0}^{k}\operatorname{Sq}^{2l+1}v_{2(k-l)}, \tag{1}$$

$$w_{2k}=\sum_{l=0}^{k}\operatorname{Sq}^{2l}v_{2(k-l)}. \tag{2}$$

Используя соотношения Адема $\operatorname{Sq}^1\operatorname{Sq}^{2l}=\operatorname{Sq}^{2l+1}$, $l\in\mathbf{Z}_+$, из равенства (2) получаем

$$\operatorname{Sq}^1 w_{2k}=\sum_{l=0}^{k}\operatorname{Sq}^{2l+1}v_{2(k-l)}. \tag{3}$$

По формуле У, $\operatorname{Sq}^1 w_{2k}=w_{2k+1}+w_1w_{2k}=w_{2k+1}$, т. к. $w_1=0$. Отсюда и из равенств (1) и (3) получаем $v_{2k+1}=0$. $\square$

1. Предварительный материал

Стандартные пространства. Пусть дано число $q\in\mathbf{Z}_+$. Каждую точку $z\in\mathbf{R}^q$ отождествляем с последовательностью $(z_1,\dots,z_q,0,0,\dots)$. Пускай $\mathbf{R}^{q+1}_-=\{\,z\in\mathbf{R}^{q+1}:z_{q+1}\leqslant 0\,\}$. Имеем $\mathbf{R}^q=\partial\mathbf{R}^{q+1}_-$. Под сферой S^q понимается одноточечная компактификация пространства $\mathbf{R}^q$: $S^q=\mathbf{R}^q\cup\{\infty\}$. Аналогично, $D^{q+1}=\mathbf{R}^{q+1}_-\cup\{\infty\}$. Имеем $S^q\subset D^{q+1}$.

Вокруг многообразий Грассмана. Пусть даны такие числа $m,q\in\mathbf{Z}_+$, что $m\leqslant q$. Пускай $\overline{\gamma}^q_m$ — ортогональное дополнение расслоения γ^q_m при его каноническом вложении в тривиальное расслоение со слоем $\mathbf{R}^q$. Пусть $e=(0,\dots,0,1)\in\mathbf{R}^{q+1}$. Определяем вложение $s^q_m\colon G^q_m\to G^{q+1}_{m+1}$, полагая $s^q_m(F)=F+\mathbf{R}e$, $F\in G^q_m$, и сечение c^q_m расслоения $s^q_m{}^*(\gamma^{q+1}_{m+1})$, канонически отождествляя его слой над каждой точкой $F\in G^q_m$ с подпространством $s^q_m(F)$ и полагая $c^q_m(F)=e$.

Отмеченные точки. Для пространства Q с отмеченной точкой ∞ полагаем $\underline{Q}=(Q,\{\infty\})$. Точку, обозначаемую ∞, всегда считаем отмеченной. Для сохраняющего отмеченные точки отображения $a\colon Q\to Q'$ пускай $\underline{a}\colon\underline{Q}\to\underline{Q'}$ — соответствующее отображение пар.

Сужения, включения и т. п. Если даны множества Q и Q' и подмножества $P\subset Q$ и $P'\subset Q'$, то для отображения $t\colon Q\to P'$ пускай $t|P\colon P\to P'$ и $Q'|t\colon Q\to Q'$ — отображения, совпадающие с ним в каждой точке. Так же пишем для коцепей, гомологических классов и т. п., имея в виду отображения, индуцированные включениями.

Теория гомологий. В обозначениях групп/комплекса (ко)цепей употребляется буква C, групп (ко)циклов — буква Z. Для топологической пары (Q, P) пускай $H^\times(Q, P)$ — алгебра рядов $x_0 + x_1 + \dots$, где $x_i \in H^i(Q, P)$, $i \in \mathbf{Z}_+$.

Для компактного m-мерного ($m \in \mathbf{Z}_+$) многообразия-с-краем X пускай $[X] \in H_m(X, \partial X)$ — его относительный фундаментальный класс. Для числа $q \in \mathbf{Z}_+$ пускай $[\underline{S}^q] \in H_q(\underline{S}^q)$, $[\underline{D}^{q+1}] \in H_{q+1}(D^{q+1}, S^q)$ — ненулевые классы.

Подчинённые (ко)цепи. Пусть дано топологическое пространство Q и система Π множеств в нём. Пускай $C_*(\Pi)$ — подкомплекс комплекса $C_*(Q)$, порождённый сингулярными симплексами, подчинёнными системе Π, т. е. теми сингулярными симплексами $\sigma\colon \Delta^p \to Q$ ($p \in \mathbf{Z}_+$), для которых существует такое множество $R \in \Pi$, что $\sigma(\Delta^p) \subset R$ ([4, гл. III, § 7]). Соответственно понимаем обозначения $Z_*(\Pi)$, $C^*(\Pi)$ и т. д. В частности, $C^*(Q, \Pi)$ — комплекс коцепей пространства Q, равных нулю на каждом множестве $R \in \Pi$, а $H^*(Q, \Pi)$ — соответствующая алгебра когомологий. Если есть отмеченная точка $\infty \in Q$ и

$$\infty \in \bigcup_{R \in \Pi} R,$$

то пускай $\underline{\Pi} = (\Pi, \{\infty\})$, $C_*(\underline{\Pi})$ — соответствующий комплекс относительных цепей и т. д.

Операции над коцепями. Для p-мерной ($p \in \mathbf{Z}$) коцепи T имеем $\mathrm{Sq}^i T = T \cup_{p-i} T$, $i \in \mathbf{Z}_+$ ([5, гл. 18]). По естественности эти операции распространяются на коцепи, введённые в предыдущем пункте.

Плёнки. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$. Компактное подмногообразие-с-краем $Y \subset \mathbf{R}^{q+1}_-$ называем *плёнкой*, если $\partial Y \subset \mathbf{R}^q$ и $Y \cap (\mathbf{R}^q \times (-1, 0]) = \partial Y \times (-1, 0]$. $(m+1)$-мерная плёнка $Y \subset \mathbf{R}^{q+1}_-$ имеет касательное отображение $t\colon Y \to G^{q+1}_{m+1}$, определяемое так же, как для подмногообразий. Пусть даны топологическое пространство B_1 и непрерывное отображение $f_1\colon B_1 \to G^{q+1}_{m+1}$. Пару (Y, h), где $Y \subset \mathbf{R}^{q+1}_-$ — $(m+1)$-мерная плёнка, $h\colon Y \to B_1$ — непрерывное отображение, называем *f_1-плёнкой*, если $f_1 \circ h$ — касательное отображение плёнки Y.

Расслоения. Для топологического пространства B пускай ϵ_B — тривиальное расслоение над ним со слоем $\mathbf{R}$. Для многообразия-с-краем X пускай τ_X — его касательное расслоение.

Препятствие. Если дана топологическая пара (B_1, B), то для p-мерного ($p \in \mathbf{Z}_+$) векторного расслоения η над пространством B_1 и не обращающегося в нуль непрерывного сечения a расслоения $\eta|B$ пускай $o(\eta, a) \in H^p(B_1, B)$ — p-й относительный класс Штифеля — Уитни, т. е. приведённое по модулю 2 первое препятствие к непрерывному продолжению сечения a до не обращающегося в нуль сечения расслоения η.

2. Конструкция Тома

Пространство Тома. Пусть дано евклидово векторное расслоение ξ. Пусть L — его пространство, $L' \subset L$ — множество векторов длины не меньше 1. *Пространством Тома* расслоения ξ называется пространство L/L'. Полагаем $\infty = \{L'\}$.

Отображение Тома. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$. Пусть L — пространство, M — пространство Тома расслоения $\overline{\gamma}^q_m$, $r\colon L \to M$ — проекция. Имеем $L = \{\, (F,u) \in G^q_m \times \mathbf{R}^q : u \perp F \,\}$. Пусть дано компактное m-мерное подмногообразие $X \subset \mathbf{R}^q$. Пусть $t\colon X \to G^q_m$ — его касательное отображение. Пусть дано число $p > 0$. Предположив, что оно достаточно мало, определим непрерывное отображение $a\colon S^q \to M$, которое будем называть *отображением Тома с параметром* p к подмногообразию X, так. Для точки $x \in X$ и такого вектора $u \in \mathbf{R}^q$, что $u \perp t(x)$ и $|u| \leqslant 1$, положим $a(x + pu) = r(t(x), u)$. Для такой точки $z \in \mathbf{R}^q$, что $\operatorname{dist}(X, z) \geqslant p$, положим $a(z) = \infty$. Положим $a(\infty) = \infty$.

2.1. Лемма (ср. [5, 16.43]). *Пусть дан класс $f \in H^m(G^q_m)$. Пусть $k \in H^q(\underline{M})$ — его образ при изоморфизме Тома. Тогда $\langle t^*(f), [X] \rangle = \langle \underline{a}^*(k), [\underline{S}^q] \rangle$.* $\square$

Ещё два отображения Тома. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$, топологическое пространство B и непрерывное отображение $f\colon B \to G^q_m$. Пусть P — пространство Тома расслоения $f^*(\overline{\gamma}^q_m)$. Пусть даны компактное f-подмногообразие (X, g) и число $p > 0$. Предположив, что число p достаточно мало, аналогично предыдущему пункту построим отображение $a\colon S^q \to P$, которое будем называть отображением Тома с параметром p к паре (X, g).

Пусть даны топологическое пространство B_1 и непрерывное отображение $f_1\colon B_1 \to G^{q+1}_{m+1}$. Предположим, что $B \subset B_1$ и $s^q_m \circ f = f_1|B$. Пусть $\overline{\eta} = f_1^*(\overline{\gamma}^{q+1}_{m+1})$, P_1 — пространство Тома расслоения $\overline{\eta}$. Имея в виду каноническое отождествление $\overline{\gamma}^q_m = {s^q_m}^*(\overline{\gamma}^{q+1}_{m+1})$, будем считать, что $f^*(\overline{\gamma}^q_m) = \overline{\eta}|B$ и $P \subset P_1$. Пусть дана такая f_1-плёнка (Y, h), что $X = \partial Y$. Предположив, что число p достаточно мало, аналогично предыдущему пункту построим отображение $b\colon D^{q+1} \to P_1$ (здесь важно, что плёнка подходит к пространству $\mathbf{R}^q$ под прямым углом), которое будем называть отображением Тома с параметром p к паре (Y, h). Имеем $P_1|a = b|S^q$.

2.2. Лемма. *Пусть дан класс $z \in H^{m+1}(B_1, B)$. Пусть $r \in H^{q+1}(P_1, P)$ — его образ при изоморфизме Тома. Тогда $\langle (h,g)^*(z), [Y] \rangle = \langle (b,a)^*(r), [\underline{D}^{q+1}] \rangle$.*

Это доказывается аналогично лемме 2.1. $\square$

3. Доказательство теоремы 0.1

Предварительное рассуждение. Пусть даны такие числа $m, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m \leqslant q$. Пусть M — пространство Тома расслоения $\overline{\gamma}^q_m$. Пусть даны число $N \in \mathbf{Z}_+$ и компактные m-мерные подмногообразия $X_i \subset \mathbf{R}^q$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть $u_i = I(X_i)$, $i = 1, \ldots, N$, $U \subset \mathbf{!}\, E^q_m$ — подпространство, порождённое этими функциями. Возьмём число $p > 0$. Для $i = 1, \ldots, N$ пусть $t_i\colon X_i \to G^q_m$ — касательное отображение, $a_i\colon S^q \to M$ — отображение Тома с параметром p к подмногообразию X_i — считаем, что число p достаточно мало.

3.1. Утверждение. *При достаточно малом p существуют такие открытое покрытие Σ сферы S^q и билинейное отображение $A\colon U \times C^*(\underline{M}) \to C^*(\underline{\Sigma})$, что $A(u_i, V) = \underline{a}_i^*(V)|\underline{\Sigma}$, $i = 1, \ldots, N$, $V \in C^*(\underline{M})$.*

Доказательство. Для замкнутого множества $B \subset \mathbf{R}^q$ пусть $B^p = \{\, z \in \mathbf{R}^q : \operatorname{dist}(B, z) \leqslant p \,\}$. Пусть $X_0 = \varnothing$, $a_0\colon S^q \to M$ — соответствующее отображение

Тома: $a_0(S^q) = \{\infty\}$. Пусть $R_{ij} = \{\, z \in \mathbf{R}^q : X_i(z) \neq X_j(z)\,\}$, $i, j = 0, \ldots, N$. Эти множества компактны. Для точки $z \in \mathbf{R}^q$ пусть

$$Q_z = \bigcup_{i,j=0,\ldots,N : z \notin R_{ij}} R_{ij}, \qquad O_z = S^q \setminus Q_z^p.$$

Положим $\Sigma = \{\, O_z \mid z \in \mathbf{R}^q \,\}$. Т. к. $z \notin Q_z$, $z \in \mathbf{R}^q$, то

$$\bigcap_{z \in \mathbf{R}^q} Q_z = \varnothing.$$

Поэтому при достаточно малом p

$$\bigcap_{z \in \mathbf{R}^q} Q_z^p = \varnothing$$

и Σ — открытое покрытие сферы S^q.

Для точки $z \in \mathbf{R}^q$ пусть $F_z = \{\, X_i(z) \mid i = 1, \ldots, N \,\} \setminus \{z\}$. Ясно, что отображения a_i и a_j $(i, j = 0, \ldots, N)$ совпадают вне множества R_{ij}^p. Поэтому если $X_i(z) = X_j(z)$ $(z \in \mathbf{R}^q,\ i, j = 0, \ldots, N)$, то $a_i|O_z = a_j|O_z$. (В частности, если $z \notin X_i$ $(z \in \mathbf{R}^q,\ i = 0, \ldots, N)$, то $a_i(O_z) = \{\infty\}$.) Поэтому для каждого ростка $e \in F_z$ $(z \in \mathbf{R}^q)$ имеется такое отображение $r_e \colon O_z \to M$, что $a_i|O_z = r_e$ для тех $i = 1, \ldots, N$, для которых $X_i(z) = e$. Для точки $z \in \mathbf{R}^q$ определим билинейное отображение $A_z \colon U \times C^*(\underline{M}) \to C^*(\underline{O}_z)$, полагая

$$A_z(u, V) = \sum_{e \in F_z} u(e) \underline{r}_e^*(V), \qquad u \in U,\ V \in C^*(\underline{M}).$$

Имеем $A_z(u_i, V) = \underline{a}_i^*(V)|\underline{O}_z$, $i = 1, \ldots, N$, $V \in C^*(\underline{M})$, $z \in \mathbf{R}^q$. Положим $A(u, V)|\underline{O}_z = A_z(u, V)$, $u \in U$, $V \in C^*(\underline{M})$, $z \in \mathbf{R}^q$, нужно только проверить согласованность. Возьмём произвольные точки $z, z' \in \mathbf{R}^q$. Пусть $O = O_z \cap O_{z'}$. Нужно показать, что $A_z(u, V)|\underline{O} = A_{z'}(u, V)|\underline{O}$, $u \in U$, $V \in C^*(\underline{M})$. Это следует из того, что $A_z(u_i, V)|\underline{O} = \underline{a}_i^*|\underline{O} = A_{z'}(u_i, V)|\underline{O}$, $i = 1, \ldots, N$, $V \in C^*(\underline{M})$. $\square$

Используя утверждение 3.1, фиксируем величину p и выберем такие открытое покрытие Σ сферы S^q и билинейное отображение $A \colon U \times C^*(\underline{M}) \to C^*(\underline{\Sigma})$, что $A(u_i, V) = \underline{a}_i^*(V)|\underline{\Sigma}$, $i = 1, \ldots, N$, $V \in C^*(\underline{M})$. Выберем такие циклы $L \in Z_q(\underline{S}^q)$ и $\tilde{L} \in Z_q(\underline{\Sigma})$, что цикл L представляет класс $[\underline{S}^q]$ и $L = \underline{S}^q|\tilde{L}$.

3.2. Утверждение. *Существует такое линейное отображение $b \colon U \to \mathfrak{N}_m$, что $\overline{X}_i = b(u_i)$, $i = 1, \ldots, N$.*

Доказательство. Возьмём произвольный класс $f \in H^m(G_m^q)$. По теореме Тома, достаточно указать такой линейный функционал $l \colon U \to \mathbf{Z}_2$, что $\langle t_i^*(f), [X_i] \rangle = l(u_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть $k \in H^q(\underline{M})$ — образ класса f при изоморфизме Тома, $K \in Z^q(\underline{M})$ — коцикл, представляющий класс k. Положим $l(u) = \langle A(u, K), \tilde{L} \rangle$, $u \in U$. Используя лемму 2.1, получаем $\langle t_i^*(f), [X_i] \rangle = \langle \underline{a}_i^*(k), [\underline{S}^q] \rangle = \langle \underline{a}_i^*(K), L \rangle = \langle \underline{a}_i^*(K)|\underline{\Sigma}, \tilde{L} \rangle = \langle A(u_i, K), \tilde{L} \rangle = l(u_i)$, $i = 1, \ldots, N$. $\square$

Собственно доказательство теоремы 0.1. Пусть $V \subset \mathbf{!}\,E_m^q$ — подпространство, порождённое функциями $I(X)$ для всевозможных компактных m-мерных подмногообразий $X \subset \mathbf{R}^q$. Из утверждения 3.2 следует, что имеется такое линейное отображение $B_0 \colon V \to \mathfrak{N}_m$, что для любого компактного m-мерного подмногообразия $X \subset \mathbf{R}^q$ имеем $\overline{X} = B_0(I(X))$. Линейно продолжив отображение B_0 на пространство $\mathbf{!}\,E_m^q$, получим искомое отображение B. $\square$

4. Подготовка к доказательству теоремы 0.2

Полухарактеристика и кобордизм.

4.1. Лемма ([2, § 2]). *Пусть даны конечномерное векторное пространство V над полем $\mathbf{Z}_2$, симметрическая билинейная форма $b\colon V \times V \to \mathbf{Z}_2$ и такой вектор $u \in V$, что $b(u, x) = b(x, x)$, $x \in V$. Пусть r — ранг формы b. Тогда* $r \bmod 2 = b(u, u)$. $\square$

4.2. Лемма. *Пусть даны такие числа $m, n \in \mathbf{Z}_+$, что $m + 1 = 2n$, и компактное $(m+1)$-мерное многообразие-с-краем Y. Пусть $X = \partial Y$. Пусть даны такой класс $u \in H^n(Y, X)$, что $u|Y = v_n(\tau_Y)$, и непрерывное сечение a расслоения $\tau_Y|X$, в каждой точке направленное строго наружу по отношению к многообразию Y. Тогда $\kappa(X) = \langle u^2 + o(\tau_Y, a), [Y]\rangle$.*

Доказательство (по [6]). Пусть r — ранг линейного отображения $H^*(Y, X) \to H^*(Y)$, индуцированного включением. Из точности последовательности пары (Y, X) получаем $\dim H^*(X) = \dim H^*(Y) + \dim H^*(Y, X) - 2r$. По двойственности Лефшеца, $\dim H^*(Y) = \dim H^*(Y, X)$. Т. о., $\dim H^*(X) = 2(\dim H^*(Y) - r)$. Значит, $\kappa(X) = (\dim H^*(Y) - r) \bmod 2 = (\chi(Y) - r) \bmod 2$. По теореме Пуанкаре — Хопфа, $\chi(Y) \bmod 2 = \langle o(\tau_Y, a), [Y]\rangle$. Осталось показать, что $r \bmod 2 = \langle u^2, [Y]\rangle$. Рассмотрим симметрическую билинейную форму $H^*(Y, X) \times H^*(Y, X) \to \mathbf{Z}_2$, $(x, y) \mapsto \langle xy, [Y]\rangle$. Из двойственности Лефшеца следует, что её ранг равен r. Имеем $\langle ux, [Y]\rangle = \langle v_n(\tau_Y)x, [Y]\rangle = \langle x^2, [Y]\rangle$, $x \in H^*(Y, X)$, согласно У. Осталось сослаться на лемму 4.1. $\square$

Соотношение в когомологиях пространства Тома.

4.3. Лемма. *Пусть даны топологическое пространство K и такие евклидовы векторные расслоения η и $\overline{\eta}$ над ним, что расслоение $\eta \oplus \overline{\eta}$ тривиально. Пусть Q — пространство Тома раслоения $\overline{\eta}$, $a, b \in H^\times(\underline{Q})$ — образы классов $v(\eta)^2$, $w(\eta)$ (соответственно) при изоморфизме Тома. Тогда* $\operatorname{Sq} a = b$.

Доказательство. Пусть r — размерность расслоения $\overline{\eta}$, L — его пространство, $p\colon L \to K$ — проекция, $L' \subset L$ — множество векторов длины не меньше 1. Имеем $Q = L/L'$. Пусть $R\colon (L, L') \to \underline{Q}$ — проекция, $u \in H^r(\underline{Q})$ — класс Тома, $t = R^*(u)$. В обозначениях характеристических классов букву η будем опускать, а от символа $\overline{\eta}$ оставлять только черту. Используя определения изоморфизма Тома и классов У и формулы Картана, Тома и Уитни, получаем: $R^*(\operatorname{Sq} a) = \operatorname{Sq} R^*(a) = \operatorname{Sq}(tp^*(v^2)) = (\operatorname{Sq} t)p^*((\operatorname{Sq} v)^2) = tp^*(\overline{w})p^*(w^2) = tp^*(\overline{w}w^2) = tp^*(w) = R^*(b)$. Т. к. R^* — изоморфизм, то $\operatorname{Sq} a = b$. $\square$

5. Предварительные рассуждения

Пусть даны такие числа $m, n, q \in \mathbf{Z}_+$, что $m + 1 = 2n$ и $m \leqslant q$, и такие топологическое пространство B и непрерывное отображение $f\colon B \to G^q_m$, что $f^*(v_n(\gamma^q_m)) = 0$.

Дополнительные построения. Пусть K — цилиндр отображения $s^q_m \circ f$. Имеем $B, G^{q+1}_{m+1} \subset K$. Пусть $d\colon K \to G^{q+1}_{m+1}$ — каноническая деформационная ретракция, $\eta = d^*(\gamma^{q+1}_{m+1})$, $\overline{\eta} = d^*(\overline{\gamma}^{q+1}_{m+1})$. Заметив, что $\eta|B = f^*({s^q_m}^*(\gamma^{q+1}_{m+1}))$ (т. к. $d|B = s^q_m \circ f$), определим сечение $\tilde{c}$ расслоения $\eta|B$ формулой $\tilde{c} = f^*(c^q_m)$. Пусть P, Q — пространства Тома расслоений $\overline{\eta}|B$, $\overline{\eta}$ (соответственно). Имеем $P \subset Q$.

Когомологические классы и коцепи. Т. к. $\eta|B \cong f^*(\gamma^q_m) \oplus \epsilon_B$, то $v_n(\eta)|B = f^*(v_n(\gamma^q_m)) = 0$. Поэтому имеется такой класс $y \in H^n(K, B)$, что $y|K = v_n(\eta)$. Пусть $z = y^2 + o(\eta, \tilde{c}) \in H^{m+1}(K, B)$, $r \in H^{q+1}(Q, P)$ — образ класса z при изоморфизме Тома.

5.1. **Утверждение.** *Существуют такие классы $t_l \in H^{q-l}(\underline{Q})$, $l = 0, \ldots, m$, что*

$$r|\underline{Q} = \sum_{l=0}^{m} \mathrm{Sq}^{l+1} t_l.$$

Доказательство. Для числа $i \in \mathbf{Z}_+$ пусть класс $t_l \in H^{q-l}(\underline{Q})$ $(l \in \mathbf{Z})$ равен образу класса $v_i(\eta)^2$ при изоморфизме Тома, если $m - l = 2i$, и равен 0, если $m - l = 2i + 1$. Пусть $u \in H^{q+1}(\underline{Q})$ — образ класса $w_{m+1}(\eta)$ при изоморфизме Тома. Так как $y|K = v_n(\eta)$, а $o(\eta, \tilde{c})|K = w_{m+1}(\eta)$, то $z|K = v_n(\eta)^2 + w_{m+1}(\eta)$. Следовательно, $r|\underline{Q} = t_{-1} + u$. Осталось добавить, что, по лемме 4.3,

$$u = \sum_{l=-1}^{m} \mathrm{Sq}^{l+1} t_l. \quad \square$$

Выберем коцикл $R \in Z^{q+1}(Q, P)$, представляющий класс r, и такие коцепь $W \in C^q(\underline{Q})$ и коциклы $T_l \in Z^{q-l}(\underline{Q})$, $l = 0, \ldots, m$, что

$$R|\underline{Q} = \delta W + \sum_{l=0}^{m} \mathrm{Sq}^{l+1} T_l \tag{4}$$

(их существование следует из утверждения 5.1).

Полухарактеристика края плёнки. Пусть даны открытое покрытие Σ сферы S^q, цикл $L \in Z_q(\underline{S}^q)$, представляющий класс $[\underline{S}^q]$, такой цикл $\tilde{L} \in Z_q(\underline{\Sigma})$, что $L = \underline{S}^q|\tilde{L}$, и такая цепь $M \in C_{q+1}(\underline{D}^{q+1})$, что $\underline{D}^{q+1}|L = \partial M$. Тогда $(D^{q+1}, S^q)|M$ — цикл, представляющий класс $[\underline{D}^{q+1}]$.

5.2. **Предложение.** *Пусть даны число $l \in \mathbf{Z}_+$ и такие коциклы $F^0, F \in Z^{q-l}(\underline{D}^{q+1})$, что $F|\underline{\Sigma} = F^0|\underline{\Sigma}$. Тогда $\langle \mathrm{Sq}^{l+1} F, M\rangle = \langle \mathrm{Sq}^{l+1} F^0, M\rangle$.*

Доказательство. Используя теорему о покрытии, получаем $H^{q-l}(D^{q+1}, \Sigma) \cong H^{q-l}(D^{q+1}, S^q) = 0$. Поэтому имеется такая коцепь $J \in C^{q-l-1}(D^{q+1}, \Sigma)$, что $F - F^0 = \delta J|\underline{D}^{q+1}$. Пусть $t = q - 2l - 1$, $A = J \cup_t F^0 + F^0 \cup_t J \in C^q(D^{q+1}, \Sigma)$. Имеем $\delta A = \delta J \cup_t F^0 + F^0 \cup_t \delta J$ и $\mathrm{Sq}^{l+1} F = \mathrm{Sq}^{l+1} F^0 + (\delta A + \mathrm{Sq}^{l+1} \delta J)|\underline{D}^{q+1}$. Но $\langle(\delta A + \mathrm{Sq}^{l+1} \delta J)|\underline{D}^{q+1}, M\rangle = 0$, т. к. относительные коциклы δA и $\mathrm{Sq}^{l+1} \delta J$ когомологичны нулю (последний — в силу когомологической инвариантности операции Sq^{l+1}), а $(D^{q+1}, \Sigma)|\partial M = 0$. $\square$

Пусть даны компактное f-подмногообразие (X, g), такая d-плёнка (Y, h), что $X = \partial Y$ и $K|g = h|X$, и настолько малое число $p > 0$, что определены отображения Тома $a\colon S^q \to P$ и $b\colon D^{q+1} \to Q$ с параметром p к парам (X, g) и (Y, h) (соответственно). Имеем $Q|a = b|S^q$.

5.3. **Утверждение.** *Пусть для каждого $l = 0,\dots,m$ дан такой коцикл $F_l \in Z^{q-l}(\underline{D}^{q+1})$, что $F_l|\underline{\Sigma} = \underline{a}^*(T_l|\underline{P})|\underline{\Sigma}$. Тогда*

$$\kappa(X) = \langle \underline{a}^*(W|\underline{P}), L\rangle + \sum_{l=0}^{m} \langle \operatorname{Sq}^{l+1} F_l, M\rangle.$$

Доказательство. Используя леммы 4.2 и 2.2 и формулу (4), получаем

$$\kappa(X) = \langle (h,g)^*(z), [Y]\rangle = \langle (b,a)^*(r), [\underline{D}^{q+1}]\rangle = \langle (b,a)^*(R), (D^{q+1}, S^q)|M\rangle =$$
$$= \langle \underline{b}^*(R|\underline{Q}), M\rangle = \langle \underline{b}^*(\delta W), M\rangle + \sum_{l=0}^{m} \langle \operatorname{Sq}^{l+1} \underline{b}^*(T_l), M\rangle.$$

Имеем $\langle \underline{b}^*(\delta W), M\rangle = \langle \underline{a}^*(W|\underline{P}), L\rangle$ и $\underline{b}^*(T_l)|\underline{S}^q = \underline{a}^*(T_l|\underline{P})$. Осталось сослаться на предложение 5.2. $\square$

Постановка задачи. Пусть даны число $N \in \mathbf{Z}_+$ и компактные f-подмногообразия (X_i, g_i), $i = 1,\dots,N$. Пусть $u_i = I(X_i, g_i)$, $i = 1,\dots,N$, $U \subset \mathbf{!}\, E_f$ — подпространство, порождённое этими функциями. Будем *искать* такой квадратичный функционал $k\colon U \to \mathbf{Z}_2$, что $\kappa(X_i) = k(u_i)$, $i = 1,\dots,N$.

Случай наличия плёнок. Пусть для каждого $i = 1,\dots,N$ дана такая плёнка $Y_i \subset \mathbf{R}^{q+1}_-$, что $X_i = \partial Y_i$. Для каждого $i = 1,\dots,N$ выберем такое отображение $h_i\colon Y_i \to K$, что $d \circ h_i$ — касательное отображение плёнки Y_i и $K|g_i = h_i|X$ (здесь важно, что у плёнки "вертикальный" воротник). Возьмём число $p > 0$. Для $i = 1,\dots,N$ пусть $a_i\colon S^q \to P$, $b_i\colon D^{q+1} \to Q$ — отображения Тома с параметром p к парам (X_i, g_i), (Y_i, h_i) (соответственно) — считаем, что число p достаточно мало. Имеем $Q|a_i = b_i|S^q$, $i = 1,\dots,N$.

5.4. **Утверждение.** *При достаточно малом p существуют такие открытое покрытие Σ сферы S^q и билинейное отображение $A\colon U \times C^*(\underline{P}) \to C^*(\underline{\Sigma})$, что $A(u_i, V) = \underline{a}_i^*(V)|\underline{\Sigma}$, $i = 1,\dots,N$, $V \in C^*(\underline{P})$.*

Это доказывается аналогично утверждению 3.1. $\square$

Используя утверждение 5.4, фиксируем величину p и выберем такие открытое покрытие Σ сферы S^q и билинейное отображение $A\colon U \times C^*(\underline{P}) \to C^*(\underline{\Sigma})$, что $A(u_i, V) = \underline{a}_i^*(V)|\underline{\Sigma}$, $i = 1,\dots,N$, $V \in C^*(\underline{P})$. Выберем такие циклы $L \in Z_q(\underline{S}^q)$ и $\tilde{L} \in Z_q(\underline{\Sigma})$, что цикл L представляет класс $[\underline{S}^q]$ и $L = \underline{S}^q|\tilde{L}$. Выберем такую цепь $M \in C_{q+1}(\underline{D}^{q+1})$, что $\underline{D}^{q+1}|L = \partial M$.

5.5. **Утверждение.** *Существует искомый функционал k.*

Доказательство. Для каждого $l = 0,\dots,m$ определим линейные отображения $j_l\colon U \to C^*(\underline{\Sigma})$, полагая $j_l(u) = A(u, T_l|\underline{P})$, $u \in U$, и $e_l\colon Z^{q-l}(\underline{D}^{q+1}) \to C^*(\underline{\Sigma})$, полагая $e_l(F) = F|\underline{\Sigma}$, $F \in Z^{q-l}(\underline{D}^{q+1})$. Имеем $j_l(u_i) = A(u_i, T_l|\underline{P}) = \underline{a}_i^*(T_l|\underline{P})|\underline{\Sigma} = \underline{b}_i^*(T_l)|\underline{\Sigma} = e_l(\underline{b}_i^*(T_l))$, $i = 1,\dots,N$, $l = 0,\dots,m$. Поэтому $\operatorname{im} j_l \subset \operatorname{im} e_l$, $l = 0,\dots,m$. Для каждого $l = 0,\dots,m$ выберем такое линейное отображение $J_l\colon U \to Z^{q-l}(\underline{D}^{q+1})$, что $j_l = e_l \circ J_l$. Положим

$$k(u) = \langle A(u, W|\underline{P}), \tilde{L}\rangle + \sum_{l=0}^{m} \langle \operatorname{Sq}^{l+1} J_l(u), M\rangle, \qquad u \in U.$$

Возьмём произвольное $i = 1,\dots,N$. Т. к. $\langle A(u_i, W|\underline{P}), \tilde{L}\rangle = \langle \underline{a}_i^*(W|\underline{P})|\underline{\Sigma}, \tilde{L}\rangle = \langle \underline{a}_i^*(W|\underline{P}), L\rangle$, а $J_l(u_i)|\underline{\Sigma} = e_l(J_l(u_i)) = j_l(u_i) = A(u_i, T_l|\underline{P}) = \underline{a}_i^*(T_l|\underline{P})|\underline{\Sigma}$, $l = 0,\dots,m$, то, согласно утверждению 5.3, $\kappa(X_i) = k(u_i)$. $\square$

Средний случай. Предположим, что $\overline{X}_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$.

5.6. **Утверждение.** *Существует искомый функционал k.*

Доказательство. Возьмём такое число $q' \in \mathbf{Z}_+$, что $q' \geqslant q$. Согласно делаемому отождествлению, $\mathbf{R}^q \subset \mathbf{R}^{q'}$ и $G^q_m \subset G^{q'}_m$. Пусть $f' = G^{q'}_m | f$. Всякое f-подмногообразие есть одновременно f'-подмногообразие, и $E_f \subset E_{f'}$. Определим линейное отображение $J\colon \,!\, E_f \to \,!\, E_{f'}$, для функции $u \in \,!\, E_f$ и ростка $e' \in E_{f'}$ полагая

$$J(u)(e') = \begin{cases} u(e'), & \text{если } e' \in E_f, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $i = 1, \ldots, N$ пусть $u'_i = I(X_i, g_i) \in \,!\, E_{f'}$ — здесь пара (X_i, g_i) рассматривается как f'-подмногообразие. Пусть $U' \subset \,!\, E_{f'}$ — подпространство, порождённое этими функциями. Ясно, что $J(u_i) = u'_i$, $i = 1, \ldots, N$. Следовательно, $J(U) = U'$. Пусть число q' настолько велико, что для каждого $i = 1, \ldots, N$ существует такая плёнка $Y_i \subset \mathbf{R}^{q'+1}_-$, что $X_i = \partial Y_i$. Согласно утверждению 5.5, имеется такой квадратичный функционал $k'\colon U' \to \mathbf{Z}_2$, что $\kappa(X_i) = k'(u'_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Положим $k(u) = k'(J(u))$, $u \in U$. $\square$

Общий случай.

5.7. **Утверждение.** *Существует такое линейное отображение $b\colon U \to \mathfrak{N}_m$, что $\overline{X}_i = b(u_i)$, $i = 1, \ldots, N$.*

Доказательство. Пусть $u'_i = I(X_i)$, $i = 1, \ldots, N$, $U' \subset \,!\, E^q_m$ — подпространство, порождённое этими функциями. Определим отображение $p\colon E_f \to E^q_m$, для f-подмногообразия (X, g) и точки $x \in X$ полагая $p((X, g)(x)) = X(x)$. Имеется такое линейное отображение $t\colon U \to U'$, что $t(u_i) = u'_i$, $i = 1, \ldots, N$:

$$t(u)(e') = \sum_{e \in p^{-1}(e')} u(e), \qquad e' \in E^q_m,\ u \in U$$

(почти все слагаемые равны нулю). Согласно утверждению 3.2, имеется такое линейное отображение $b'\colon U' \to \mathfrak{N}_m$, что $\overline{X}_i = b'(u'_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Положим $b = b' \circ t$. $\square$

5.8. **Утверждение.** *Существует искомый функционал k.*

Доказательство. Пусть $V \subset \mathfrak{N}_m$ — подпространство, порождённое классами $\overline{X}_i$, $i = 1, \ldots, N$. Выберем такое подмножество $J \subset \{1, \ldots, N\}$, что классы $\overline{X}_j$, $j \in J$, образовывают базис подпространства V. Возьмём параллельные переносы $t_j\colon \mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$, $j \in J$. Пусть $X^0_j = t_j(X_j)$, $j \in J$. Добьёмся, чтобы подмногообразия X^0_j, $j \in J$, не пересекались друг с другом и с подмногообразиями X_i, $i = 1, \ldots, N$. Для каждого $j \in J$ определим отображение $g^0_j\colon X^0_j \to B$, полагая $g^0_j(t_j(x)) = g_j(x)$, $x \in X_j$. Пары (X^0_j, g^0_j), $j \in J$, — компактные f-подмногообразия. Пусть $a_{ij} \in \mathbf{Z}_2$, $i = 1, \ldots, N$, $j \in J$, — такие элементы, что

$$\overline{X}_i = \sum_{j \in J} a_{ij} \overline{X}_j, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Для $i = 1, \ldots, N$ пусть $A_i = \{\, j \in J : a_{ij} = 1 \,\}$ и

$$X'_i = X_i \cup \bigcup_{j \in A_i} X^0_j.$$

Для каждого $i = 1, \dots, N$ определим отображение $g'_i\colon X'_i \to B$, полагая $g'_i|X_i = g_i$ и $g'_i|X^0_j = g^0_j$, $j \in A_i$. Для каждого $i = 1, \dots, N$ пара (X'_i, g'_i) — компактное f-подмногообразие и $\overline{X}'_i = 0$. Пусть $u'_i = I(X'_i, g'_i)$, $i = 1, \dots, N$, $U' \subset {!}\,E_f$ — подпространство, порождённое этими функциями. Согласно утверждению 5.6, имеется такой квадратичный функционал $k'\colon U' \to \mathbf{Z}_2$, что $\kappa(X'_i) = k'(u'_i)$, $i = 1, \dots, N$. Согласно утверждению 5.7, имеется такое линейное отображение $b\colon U \to \mathfrak{N}_m$, что $\overline{X}_i = b(u_i)$, $i = 1, \dots, N$. Пусть $b_j\colon U \to \mathbf{Z}_2$, $j \in J$, — такие линейные функционалы, что

$$b(u) = \sum_{j \in J} b_j(u) \overline{X}_j, \qquad u \in U.$$

Имеем $a_{ij} = b_j(u_i)$, $i = 1, \dots, N$, $j \in J$. Имеется такое линейное отображение $p\colon U \to U'$, что $p(u_i) = u'_i$, $i = 1, \dots, N$:

$$p(u) = u + \sum_{j \in J} b_j(u) I(X^0_j, g^0_j), \qquad u \in U.$$

Положим

$$k(u) = k'(p(u)) - \sum_{j \in J} b_j(u) \kappa(X_j), \qquad u \in U.$$

Имеем

$$\kappa(X_i) = \kappa(X'_i) - \sum_{j \in J} a_{ij} \kappa(X_j) = k'(u'_i) - \sum_{j \in J} b_j(u_i) \kappa(X_j) = k(u_i),$$
$$i = 1, \dots, N. \quad \square$$

6. Собственно доказательство теоремы 0.2

Пусть $T = {!}{!}\,E_f$. Снабдим множество T топологией степени множества $\mathbf{Z}_2$, снабжённого дискретной топологией. Пространство T компактно. Пусть $Q \subset T$ — множество всех квадратичных функционалов $A\colon {!}\,E_f \to \mathbf{Z}_2$. Оно замкнуто. Для компактного f-подмногообразия (X, g) пусть $R(X, g) = \{\, A \in Q : \kappa(X) = A(I(X, g)) \,\}$. Нужно показать, что пересечение множеств $R(X, g)$ по всем компактным f-подмногообразиям (X, g) непусто. Эти множества замкнуты. Возьмём произвольные число $N \in \mathbf{Z}_+$ и компактные f-подмногообразия (X_i, g_i), $i = 1, \dots, N$. Пусть

$$F = \bigcap_{i=1}^{N} R(X_i, g_i).$$

Ввиду компактности, достаточно показать, что $F \neq \varnothing$. Пусть $u_i = I(X_i, g_i)$, $i = 1, \dots, N$, $U \subset {!}\,E_f$ — подпространство, порождённое этими функциями. Согласно утверждению 5.8, имеется такой квадратичный функционал $k\colon U \to \mathbf{Z}_2$, что $\kappa(X_i) = k(u_i)$, $i = 1, \dots, N$. Имеется проектор $P\colon {!}\,E_f \to U$. Имеем $k \circ P \in F$. $\square$

Литература

1. С. С. Подкорытов, *Квадратичное свойство рациональной полухарактеристики*, Записки научн. семин. ПОМИ **267** (2000), 241 — 259.
2. G. Lusztig, J. Milnor, F. P. Peterson, *Semi-characteristics and cobordism*, Topology **8** (1969), 357 — 359.
3. T. Yoshida, *Wu classes and unoriented bordism classes of certain manifolds*, Hiroshima Math. J. **10** (1980), 567 — 596.
4. А. Дольд, *Лекции по алгебраической топологии*, М., Мир, 1976.
5. Р. М. Свитцер, *Алгебраическая топология — гомотопии и гомологии*, М., Наука, 1985.
6. M. A. Kervaire, *Relative characteristic classes*, Amer. J. Math. **79** (1957), 517 — 558.