Коммутативные алгебры и представления категории конечных множеств

С. С. Подкорытов

Аннотация

Доказывается, что две конечномерные коммутативные алгебры над алгебраически замкнутым полем изоморфны ровно тогда, когда изоморфны определяемые ими представления категории конечных множеств и сюръективных отображений.

Пусть Ω — категория, объекты которой — множества $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbf{N}$ $(= \{0, 1, \dots\})$, а морфизмы — сюръективные отображения. Пусть $\boldsymbol{k}$ — поле. Если A — [коммутативная] алгебра [над $\boldsymbol{k}$, возможно, без единицы], то определим функтор $L_A \colon \Omega \to \boldsymbol{k}\textbf{-Mod}$ («представление категории Ω»), для $n \in \mathbf{N}$ полагая $L_A(\underline{n}) = A^{\otimes n}$, а для морфизма $h \colon \underline{m} \to \underline{n}$ полагая $L_A(h) \colon x_1 \otimes \dots \otimes x_m \mapsto y_1 \otimes \dots \otimes y_n$, где

$$y_j = \prod_{i \in h^{-1}(j)} x_i.$$

Функтор L_A — вариант функтора Лодэ [1].

Теорема. *Пусть поле $\boldsymbol{k}$ алгебраически замкнуто, A и B — конечномерные алгебры. Предположим, что функторы L_A и L_B изоморфны. Тогда алгебры A и B изоморфны.*

Существенно ли условие конечномерности, неясно. Условие алгебраической замкнутости существенно: утверждение теоремы неверно при $\boldsymbol{k} = \mathbf{R}$. Действительно, возьмём неизоморфные алгебры $A = \mathbf{R}[X]/(X^2 - 1)$ и $B = \mathbf{R}[Y]/(Y^2 + 1)$. Имеем базисы $\{X^e\}_{e=0,1}$ $(= \{1, X\})$ в A и $\{Y^e\}_{e=0,1}$ в B. Линейные отображения $s_n \colon A^{\otimes n} \to B^{\otimes n}$,

$$X^{e_1} \otimes \dots \otimes X^{e_n} \mapsto k_{e_1 + \dots + e_n} Y^{e_1} \otimes \dots \otimes Y^{e_n}, \qquad e_1, \dots, e_n = 0, 1,$$

где $k_m = (-1)^{[m/2]}$, составляют изоморфизм функторов $s \colon L_A \to L_B$.

1. Предварительные сведения и построения

Алгебра многочленов. Если V — векторное пространство [над $\boldsymbol{k}$], то симметрическая группа $\Sigma_n = \operatorname{Aut}\underline{n}$ действует [слева] на $V^{\otimes n}$ по правилу $g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{g^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{g^{-1}(n)}$. Симметрические степени $S^n(V) = (V^{\otimes n})_{\Sigma_n}$ составляют симметрическую алгебру

$$S(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(V),$$

умножение в которой индуцировано умножением тензоров: $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{x \otimes y}$, $x \in V^{\otimes m}$, $y \in V^{\otimes n}$ (черта обозначает проекцию $V^{\otimes n} \to S^n(V)$).

Для векторного пространства U полагаем $\boldsymbol{k}[U] = S(U^*)$. Точке $u \in U$ соответствует отображение вычисления $\boldsymbol{k}[U] \to \boldsymbol{k}$, $f \mapsto f(u)$, — сохраняющий единицу гомоморфизм алгебр, определяемый условием $v(u) = \langle v, u\rangle$ при $v \in U^* = S^1(U^*) \subseteq \boldsymbol{k}[U]$. Для многочлена $f \in \boldsymbol{k}[U]$ и множества $X \subseteq U$ имеем функцию $f \mid X \colon X \to \boldsymbol{k}$, $u \mapsto f(u)$. Идеалу $P \subseteq \boldsymbol{k}[U]$ соответствует множество

$$Z(P) = \{\, u : f(u) = 0 \text{ для всех } f \in P \,\} \subseteq U.$$

Симметричные тензоры, изоморфизм θ. Полагаем $D^n(U) = (U^{\otimes n})^{\Sigma_n}$,

$$\hat{D}(U) = \prod_{n=0}^{\infty} D^n(U).$$

Спаривание

$$\boldsymbol{\langle} -, - \boldsymbol{\rangle} \colon (U^*)^{\otimes n} \times U^{\otimes n} \to \boldsymbol{k}, \tag{1}$$

$\boldsymbol{\langle} v_1 \otimes \ldots \otimes v_n, u_1 \otimes \ldots \otimes u_n \boldsymbol{\rangle} = \langle v_1, u_1\rangle \ldots \langle v_n, u_n\rangle$, индуцирует спаривание

$$\boldsymbol{(} -, - \boldsymbol{)} \colon S^n(U^*) \times D^n(U) \to \boldsymbol{k}, \tag{2}$$

$\boldsymbol{(}\overline{z}, w\boldsymbol{)} = \boldsymbol{\langle} z, w \boldsymbol{\rangle}$, где $w \in D^n(U) \subseteq U^{\otimes n}$, $z \in (U^*)^{\otimes n}$. Суммируя по $n \in \mathbf{N}$, получаем спаривание

$$\boldsymbol{(} -, - \boldsymbol{)} \colon \boldsymbol{k}[U] \times \hat{D}(U) \to \boldsymbol{k}.$$

Введём линейное отображение

$$\theta \colon \hat{D}(U) \to \boldsymbol{k}[U]^*, \quad \langle \theta(W), f\rangle = \boldsymbol{(} f, W \boldsymbol{)}.$$

Если U конечномерно, то спаривания (1), (2) совершенны, а θ — изоморфизм.

Функтор T_A***.*** Пусть $\Sigma \subseteq \Omega$ — подкатегория изоморфизмов. Имеем $\Sigma = \Sigma_0 \sqcup \Sigma_1 \sqcup \ldots$. Векторное пространство A определяет функтор $T_A \colon \Sigma \to \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod}$, $T_A(\underline{n}) = A^{\otimes n}$ (с обычным действием группы Σ_n). Если A — алгебра, то $T_A = L_A|_\Sigma$.

Кронекерово умножение, изоморфизм κ***.*** Если группа G действует на векторных пространствах X и Y, то она действует на пространстве $\mathrm{Hom}(X, Y)$ по правилу $(gt)(x) = g(t(g^{-1}x))$. При этом $\mathrm{Hom}(X, Y)^G = \mathrm{Hom}_G(X, Y)$.

Пусть A и B — векторные пространства. Кронекерово умножение $\mathrm{Hom}(A, B)^{\otimes n} \to \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, B^{\otimes n})$, $w \mapsto [w]$ (обозначение), сохраняет действие группы Σ_n и поэтому индуцирует линейное отображение подпространств $D^n(B^A) \to \mathrm{Hom}_{\Sigma_n}(A^{\otimes n}, B^{\otimes n})$ (мы используем сокращение $B^A = \mathrm{Hom}(A, B)$). Так как

$$\mathrm{Hom}_\Sigma(T_A, T_B) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Sigma_n}(A^{\otimes n}, B^{\otimes n}),$$

то эти отображения составляют линейное отображение

$$\kappa \colon \hat{D}(B^A) \to \mathrm{Hom}_\Sigma(T_A, T_B).$$

Если A и B конечномерны, то κ — изоморфизм.

Морфизмы $T_A \to T_B$ ***и функционалы на*** $\boldsymbol{k}[B^A]$***, изоморфизм*** ξ***.*** Для конечномерных векторных пространств A и B введём изоморфизм ξ, который вместе с введёнными выше даёт коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_\Sigma(T_A, T_B) \arrow[d, "\xi"] \\
\hat{D}(B^A) \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[r, "\theta"'] & \boldsymbol{k}[B^A]^*.
\end{tikzcd}$$

Пример. Линейное отображение $u \colon A \to B$ индуцирует морфизм функторов $T_u \colon T_A \to T_B$, $(T_u)_n = u^{\otimes n}$. Имеем $\langle \xi(T_u), f \rangle = f(u)$, $f \in \boldsymbol{k}[B^A]$.

Антисимметризация. Для векторного пространства V введём оператор $\mathrm{alt}_n\colon V^{\otimes n} \to V^{\otimes n}$,

$$\mathrm{alt}_n(w) = \sum_{g \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}\, g\; gw.$$

2. Определитель

Пусть A и B — векторные пространства одинаковой конечной размерности m, $U = B^A$. Выберем базисы $e_1, \dots, e_m \in A$ и $f_1, \dots, f_m \in B$. Пусть

$$E = \mathrm{alt}_m(e_1 \otimes \ldots \otimes e_m) \in A^{\otimes m}, \quad F = \mathrm{alt}_m(f_1 \otimes \ldots \otimes f_m) \in B^{\otimes m}.$$

Введём базисы $\check{f}^1, \dots, \check{f}^m \in B^*$, $\langle \check{f}^j, f_i \rangle = \delta_i^j$ (δ_i^j — символ Кронекера) и $l_i^j \in U^*$, $i, j = 1, \dots, m$, $\langle l_i^j, u \rangle = \langle \check{f}^j, u(e_i) \rangle$. Пусть

$$H = \sum_{g \in \Sigma_m} \mathrm{sgn}\, g\; l^1_{g^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes l^m_{g^{-1}(m)} \in (U^*)^{\otimes m}.$$

Тогда $\overline{H} \in \boldsymbol{k}[U]$ — определитель, так что

$$\overline{H}(u) = \det u, \qquad u \in U. \tag{3}$$

Имеем $\langle\!\langle \check{f}^1 \otimes \ldots \otimes \check{f}^m, [v](E) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle H, v \rangle\!\rangle$, $v \in U^{\otimes m}$. Отсюда

$$\langle\!\langle (\check{f}^1 \otimes \ldots \otimes \check{f}^m)^{\otimes r}, [w](E^{\otimes r}) \rangle\!\rangle = \langle\!\langle H^{\otimes r}, w \rangle\!\rangle, \qquad w \in U^{\otimes mr}, \quad r \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Для $w \in D^{mr}(U)$ имеем

$$[w](E^{\otimes r}) = (\!(\overline{H}^r, w)\!) F^{\otimes r}. \tag{5}$$

Действительно, тензор $E^{\otimes r}$ принадлежит образу оператора $\mathrm{alt}_m^{\otimes r}\colon A^{\otimes mr} \to A^{\otimes mr}$. Образ оператора $\mathrm{alt}_m^{\otimes r}\colon B^{\otimes mr} \to B^{\otimes mr}$ порождён тензором $F^{\otimes r}$, так как образ оператора $\mathrm{alt}_m\colon B^{\otimes m} \to B^{\otimes m}$ порождён тензором F. Отображение $[w]\colon A^{\otimes mr} \to B^{\otimes mr}$ сохраняет действие группы Σ_{mr} и, значит, коммутирует с $\mathrm{alt}_m^{\otimes r}$. Поэтому $[w](E^{\otimes r}) = tF^{\otimes r}$ для некоторого $t \in \boldsymbol{k}$. Из формулы (4) получаем $t = \langle\!\langle H^{\otimes r}, w \rangle\!\rangle = (\!(\overline{H}^r, w)\!)$.

Для морфизма $s\colon T_A \to T_B$ имеем

$$s_{mr}(E^{\otimes r}) = \langle \xi(s), \overline{H}^r \rangle F^{\otimes r}, \qquad r \in \mathbf{N}. \tag{6}$$

Это следует из формулы (5): если $s = \kappa(W)$, $W \in \hat{D}(U)$, то $s_{mr} = [W_{mr}]$, а $\langle \xi(s), \overline{H}^r \rangle = (\!(\overline{H}^r, W_{mr})\!)$.

3. Гомоморфизмы $A \to B$ и морфизмы $L_A \to L_B$

Пусть A и B — конечномерные алгебры, $U = B^A$.

Идеал мультипликативности. Возьмём $x, y \in A$ и $p \in B^*$. Введём линейную форму $I^p_{x,y} \in U^*$,

$$\langle I^p_{x,y}, u \rangle = \langle p, u(xy) \rangle, \qquad u \in U$$

(используется умножение в A) и тензор $J^p_{x,y} \in (U^*)^{\otimes 2}$,

$$\left\langle\!\left\langle J^p_{x,y}, u \otimes v \right\rangle\!\right\rangle = \langle p, u(x)v(y) \rangle, \qquad u, v \in U$$

(используется умножение в B). Пусть

$$g^p_{x,y} = \overline{J^p_{x,y}} - I^p_{x,y} \in \boldsymbol{k}[U].$$

Имеем

$$g^p_{x,y}(u) = \langle p, u(x)u(y) - u(xy) \rangle, \qquad u \in U.$$

Пусть $M \subseteq \boldsymbol{k}[U]$ — идеал, порождённый многочленами $g^p_{x,y}$, $x, y \in A$, $p \in B^*$.

Лемма 1. *Множество $Z(M) \subseteq U$ совпадает с множеством гомоморфизмов алгебр $A \to B$.* $\square$

Заметим, что $\mathrm{Hom}_\Omega(L_A, L_B) \subseteq \mathrm{Hom}_\Sigma(T_A, T_B)$.

Лемма 2. *Пусть $s \in \mathrm{Hom}_\Sigma(T_A, T_B)$. Тогда условия $s \in \mathrm{Hom}_\Omega(L_A, L_B)$ и $\xi(s) \perp M$ равносильны.*

Этим устанавливается изоморфизм $\mathrm{Hom}_\Omega(L_A, L_B) \to (\boldsymbol{k}[U]/M)^*$.

Доказательство. Для $n \in \mathbf{N}$ определим морфизм $\tau_n \colon \underline{n+2} \to \underline{n+1}$ правилами $1 \mapsto 1$ и $i \mapsto i-1$, $i > 1$. Категория Ω получается из категории Σ присоединением морфизмов τ_n. Поэтому условие $s \in \mathrm{Hom}_\Omega(L_A, L_B)$ равносильно коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd} A^{\otimes(n+2)} \arrow[r, "s_{n+2}"] \arrow[d, "L_A(\tau_n)"'] & B^{\otimes(n+2)} \arrow[d, "L_B(\tau_n)"] \\ A^{\otimes(n+1)} \arrow[r, "s_{n+1}"] & B^{\otimes(n+1)}, \end{tikzcd}$$

$n \in \mathbf{N}$. Введём невязку

$$r_n = L_B(\tau_n) \circ s_{n+2} - s_{n+1} \circ L_A(\tau_n) \colon A^{\otimes(n+2)} \to B^{\otimes(n+1)}.$$

Для $z \in A$, $q \in B^*$ введём линейную форму $l_z^q \in U^*$, $\langle l_z^q, u\rangle = \langle q, u(z)\rangle$, $u \in U$. Эти формы порождают пространство U^*. Для $n \in \mathbf{N}$, $x, y, z_1, \dots, z_n \in A$, $p, q_1, \dots, q_n \in B^*$ пусть

$$G_{x,y,z_1,\dots,z_n}^{p,\ q_1,\dots,q_n} = g_{x,y}^p l_{z_1}^{q_1} \dots l_{z_n}^{q_n} \in \boldsymbol{k}[U].$$

Эти многочлены линейно порождают идеал M. Поэтому достаточно показать, что

$$\bigl\langle p^\sim, r_n(x^\sim)\bigr\rangle = \langle \xi(s), G_{x,y,z_1,\dots,z_n}^{p,\ q_1,\dots,q_n}\rangle,$$

где $x^\sim = x \otimes y \otimes z_1 \otimes \dots \otimes z_n$, $p^\sim = p \otimes q_1 \otimes \dots \otimes q_n$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\bigl\langle p^\sim, [w_1](L_A(\tau_n)(x^\sim))\bigr\rangle &= \bigl\langle I_{x,y}^p \otimes l^\sim, w_1\bigr\rangle, \qquad w_1 \in U^{\otimes(n+1)},\\
\bigl\langle p^\sim, L_B(\tau_n)([w_2](x^\sim))\bigr\rangle &= \bigl\langle J_{x,y}^p \otimes l^\sim, w_2\bigr\rangle, \qquad w_2 \in U^{\otimes(n+2)},
\end{aligned}$$

где $l^\sim = l_{z_1}^{q_1} \otimes \dots \otimes l_{z_n}^{q_n}$ (прямая проверка). По построению,

$$G_{x,y,z_1,\dots,z_n}^{p,\ q_1,\dots,q_n} = \overline{J_{x,y}^p \otimes l^\sim} - \overline{I_{x,y}^p \otimes l^\sim}.$$

Имеем $s = \kappa(W)$ для некоторой последовательности $W \in \hat{D}(U)$, так что $s_n = [W_n]$. Имеем

$$\begin{aligned}
\bigl\langle p^\sim, r_n(x^\sim)\bigr\rangle &= \bigl\langle p^\sim, L_B(\tau_n)([W_{n+2}](x^\sim))\bigr\rangle - \bigl\langle p^\sim, [W_{n+1}](L_A(\tau_n)(x^\sim))\bigr\rangle = \\
&= \bigl\langle J_{x,y}^p \otimes l^\sim, W_{n+2}\bigr\rangle - \bigl\langle I_{x,y}^p \otimes l^\sim, W_{n+1}\bigr\rangle = \\
&= \langle \theta(W), G_{x,y,z_1,\dots,z_n}^{p,\ q_1,\dots,q_n}\rangle = \langle \xi(s), G_{x,y,z_1,\dots,z_n}^{p,\ q_1,\dots,q_n}\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы. Пусть $s \colon L_A \to L_B$ — изоморфизм функторов. Тогда $s_1 \colon A \to B$ — изоморфизм векторных пространств. Пусть $m = \dim A = \dim B$. Выберем базисы в пространствах A и B и введём тензоры E, F и H как в § 2. Нужно найти такой гомоморфизм алгебр $u \colon A \to B$, что $\det u \neq 0$. Допустим, что такого не существует. Тогда, по формуле (3) и лемме 1, $\overline{H} \mid Z(M) = 0$. По теореме Гильберта о нулях, $\overline{H}^r \in M$ при некотором $r \in \mathbf{N}$. По формуле (6) и лемме 2, $s_{mr}(E^{\otimes r}) = \langle \xi(s), \overline{H}^r\rangle F^{\otimes r} = 0$. Но $E^{\otimes r} \neq 0$, а s_{mr} — изоморфизм векторных пространств. Противоречие. $\square$

Литература

[1] Hochschild homology, статья в английской Википедии.

ssp@pdmi.ras.ru
http://www.pdmi.ras.ru/~ssp