Об алгебре мёбиусова венка

С. С. Подкорытов

Аннотация

Коммутативная алгебра над полем естественно определяет представление категории конечных множеств и сюръективных отображений; мы рассматриваем сужение этого представления на подкатегорию множеств мощности не более r. Для каждого r мы указываем две неизоморфные алгебры, определяющие изоморфные представления этой подкатегории.

Пусть Ω_r $(r = 0, 1, \ldots, \infty)$ — категория, объекты которой — множества $\langle p \rangle = \{1, \ldots, p\}$, $p = 1, 2, \ldots$, $p \leqslant r$, а морфизмы — сюръективные отображения. Пусть $\boldsymbol{k}$ — поле; мы подразумеваем его, говоря о векторных пространствах, тензорных произведениях и т. д. Под *алгеброй* мы понимаем коммутативную неунитальную $\boldsymbol{k}$-алгебру. Алгебра A определяет функтор $L^r(A) \colon \Omega_r \to \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod}$ (*представление* категории Ω_r), который посылает объект $\langle p \rangle$ в векторное пространство $A^{\otimes p}$, а морфизм $s \colon \langle p \rangle \to \langle q \rangle$ — в линейное отображение

$$A^{\otimes p} \to A^{\otimes q}, \qquad a_1 \otimes \ldots \otimes a_p \mapsto m_1 \otimes \ldots \otimes m_q,$$

где

$$m_j = \prod_{i \in s^{-1}(j)} a_i$$

(вариант функтора Лодэ [4, Proposition 6.4.4]).

Следует ли изоморфность алгебр A и B из изоморфности представлений $L^r(A)$ и $L^r(B)$? Да, если $r = \infty$, поле $\boldsymbol{k}$ алгебраически замкнуто и алгебры конечномерны ([1], ср. [2]). Цель работы — показать, что это неверно для сколь угодно большого конечного r. Для каждого $r = 1, 2, \ldots$ и произвольного поля $\boldsymbol{k}$ мы указываем две неизоморфные конечномерные алгебры A и B с изоморфными представлениями $L^r(A)$ и $L^r(B)$. Эти алгебры получаются из алгебр Стэнли — Рейснера определённых графов («венков») взятием однородных компонент степени 1 и 2.

Функтор L^r. Сопоставление $A \mapsto L^r(A)$ очевидным образом ковариантно, так что мы имеем функтор $L^r\colon \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Alc} \to \mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod})$, где $\boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Alc}$ — категория алгебр, а $\mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod})$ — категория функторов $\Omega_r \to \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod}$ (представлений).

Категория действия $M \mathbin{\backslash\backslash} S$. Пусть моноид M действует на множестве S слева. Для $s, t \in S$ пусть $M(s,t) = \{m : m \cdot s = t\} \subseteq M$. Определена категория $M \mathbin{\backslash\backslash} S$, где $\operatorname{Ob} M \mathbin{\backslash\backslash} S = S$, для каждых $s, t \in S$ задана биекция

$$M(s,t) \to \operatorname{Mor}_{M\backslash\backslash S}(s,t), \qquad m \mapsto m|_{s\to t},$$

$1_s = 1|_{s\to s}$ и композиция морфизмов даётся умножением в моноиде M.

Имеем не обязательно коммутативную унитальную $\boldsymbol{k}$-алгебру $\boldsymbol{k}[M]$. Для $s, t \in S$ имеем подпространство $\boldsymbol{k}[M(s,t)] \subseteq \boldsymbol{k}[M]$.

Рассмотрим линейную категорию $\boldsymbol{k}[M \mathbin{\backslash\backslash} S]$. Для $s, t \in S$ зададим линейное отображение

$$\boldsymbol{k}[M(s,t)] \to \operatorname{Mor}_{\boldsymbol{k}[M\backslash\backslash S]}(s,t), \qquad X \mapsto X\|_{s\to t},$$

правилом $[m] \mapsto [m|_{s\to t}]$. Очевидно, $1\|_{s\to s} = 1_s$ $(s \in S)$. Если $X \in \boldsymbol{k}[M(s,t)]$, $Y \in \boldsymbol{k}[M(t,u)]$ $(s,t,u \in S)$, то $YX \in \boldsymbol{k}[M(s,u)]$ и

$$(YX)\|_{s\to u} = Y\|_{t\to u} \circ X\|_{s\to t}.$$

Моноид W_n и элементы T_n и Z_n. Введём мультипликативный подмоноид $\boldsymbol{V} = \{1, -1, 0\} \subseteq \mathbb{Z}$ и его подмоноиды $\boldsymbol{U} = \{1, -1\}$ и $\boldsymbol{E} = \{1, 0\}$. Элементы 1 и -1 будем обозначать также $+$ и $-$ (соответственно).

Пусть $W_n \subseteq \boldsymbol{V}^{2n+1}$ — подмоноид, образованный наборами

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_{2n+1}),$$

в которых $w_{2i+1} \in \boldsymbol{U}$ $(i = 0, \ldots, n)$ и $w_j w_{j+1} \in \boldsymbol{E}$ $(j = 1, \ldots, 2n)$.

Пусть $g_i, h_i \in W_n$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$g_i = (+, \ldots, +, \underset{2i}{0}, +, \ldots, +), \qquad h_i = (-, \ldots, -, \underset{2i}{0}, +, \ldots, +)$$

и $T_n, Z_n \in \boldsymbol{k}[W_n]$:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} (1-[g_1])\dots(1-[g_{i-1}])[h_i], \qquad Z_n = (1-[g_1])\dots(1-[g_n]).$$

Используя коммутативность моноида W_n и соотношения $g_i^2 = h_i^2 = g_i$ и $g_i h_i = h_i$, получаем

$$T_n^2 = 1 - Z_n.$$

Два действия моноида $\boldsymbol{W_n}$ и их категории. Моноид W_n действует на множестве $\boldsymbol{U}$ слева по правилу $w \cdot s = w_1 w_{2n+1} s$. Так как $T_n \in \boldsymbol{k}[W_n(s,-s)]$, $Z_n \in \boldsymbol{k}[W_n(s,s)]$ для каждого $s \in \boldsymbol{U}$, то в категории $\boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U}]$ имеем

$$T_n\|_{-s\to s} \circ T_n\|_{s\to -s} = 1_s - Z_n\|_{s\to s}. \tag{1}$$

Рассмотрим одноэлементное множество $\{\star\}$ с левым действием моноида W_n. Отображение $\boldsymbol{U} \to \{\star\}$ индуцирует функторы $\omega_n \colon W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U} \to W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\}$ и $\boldsymbol{k}[\omega_n] \colon \boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U}] \to \boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\}]$. Для любых $s, t \in \boldsymbol{U}$ и $X \in \boldsymbol{k}[W_n(s,t)]$ имеем

$$\boldsymbol{k}[\omega_n] \colon X\|_{s\to t} \mapsto X\|_{\star\to\star}. \tag{2}$$

Графы. Под *графом* мы понимаем пару $G = (G_1, G_2)$, где G_1 — множество, а $G_2 \subseteq G_1 \times G_1$ — рефлексивное симметричное отношение. *Вершины* графа G — элементы множества G_1; *рёбра* — множества $\{x, y\}$, где $(x,y) \in G_2$, $x \neq y$.

Морфизм графов $f \colon G \to H$ — пара $f = (f_1, f_2)$, где $f_p \colon G_p \to H_p$, $p = 1, 2,$ — такие отображения, что $f_2(x,y) = (f_1(x), f_1(y))$, $(x,y) \in G_2$. Графы и их морфизмы образуют категорию **Graph**.

Кофунктор $\boldsymbol{Q}$: алгебра графа. Пусть дан граф G. Симметрическая группа Σ_2 действует на множестве $G_2 \subseteq G_1 \times G_1$ перестановками координат. Имеем проекцию

$$\boldsymbol{k}^{G_2} \to (\boldsymbol{k}^{G_2})_{\Sigma_2}, \qquad u \mapsto \bar{u}.$$

Пусть $A^\bullet$ — градуированная алгебра, сосредоточенная в степенях 1 и 2:

$$A^1 = \boldsymbol{k}^{G_1}, \qquad A^2 = (\boldsymbol{k}^{G_2})_{\Sigma_2},$$

в которой если $a, b \in A^1$, то $ab = \bar{u} \in A^2$, где $u \in \boldsymbol{k}^{G_2}$, $u(x, y) = a(x)b(y)$.

Положим $Q^\bullet(G) = A^\bullet$. Пусть $Q(G)$ — та же алгебра без градуировки. Сопоставление $G \mapsto Q(G)$ очевидным образом контравариантно, так что мы имеем кофунктор $Q\colon \mathbf{Graph} \to \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Alc}$. Нам понадобятся следующие его свойства.

1°. Если граф G конечен, то алгебра $Q(G)$ конечномерна.

2°. Если морфизмы графов $f_i\colon G_i \to H$, $i \in I$, образуют *покрытие*, т. е.

$$\bigcup_{i\in I} \operatorname{Im} f_{i\,p} = H_p, \qquad p = 1, 2,$$

то линейное отображение

$$(Q(f_i))_{i\in I}\colon Q(H) \to \prod_{i\in I} Q(G_i)$$

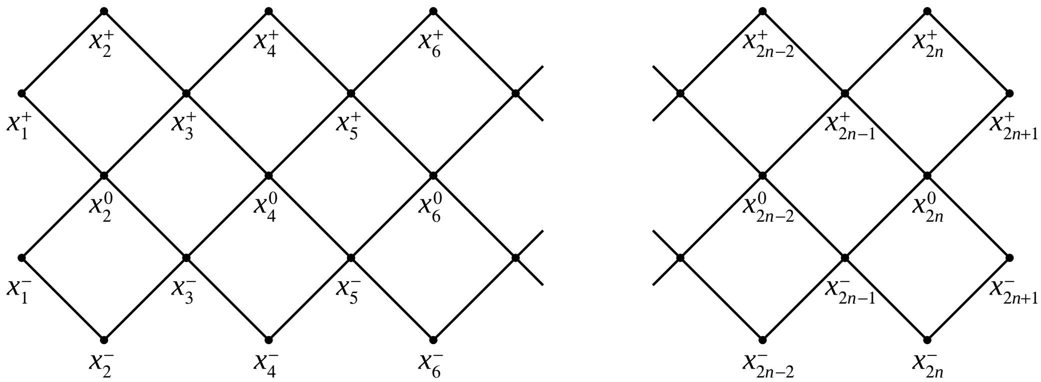
инъективно.

3°. Если конечные графы G и H неизоморфны, то алгебры $Q(G)$ и $Q(H)$ тоже неизоморфны. Это следует из теоремы Губеладзе [3, Theorem 3.1], но в нужном нам частном случае достаточно совсем простых соображений.

Назовём граф G *допустимым*, если для любых различных $x, y \in G_1$ существует такое $z \in G_1$, что $(x, z) \notin G_2$ и $(y, z) \in G_2$. (Например, допустим любой граф без треугольников и висячих вершин.) Покажем, что допустимый граф G восстанавливается по алгебре $Q(G)$.

Пусть дана градуированная алгебра $A^\bullet$, сосредоточенная в степенях 1 и 2. Рассмотрим проективное пространство $P(A^1)$. Пусть $[\,]\colon A^1 \setminus \{0\} \to P(A^1)$ — проекция. Введём на $P(A^1)$ симметричное отношение $\#$ (*зависимость*): $[a] \# [b] \Leftrightarrow ab \neq 0$, и предпорядок $\lesssim$: $p \lesssim q \Leftrightarrow p^\# \subseteq q^\#$, где $r^\# = \{s : r \# s\}$. Пусть $R \subseteq P(A^1)$ — множество *минимальных* точек, т. е. таких точек p, что $\{s : s \lesssim p\} = \{p\}$. Если $A^\bullet = Q^\bullet(G)$ для некоторого графа G, то есть инъективное отображение $e\colon G_1 \to P(A^1)$, $x \mapsto [\delta_x]$, где $\delta_x \in A^1 = \boldsymbol{k}^{G_1}$, $\delta_x(y)$ равно 1 при $y = x$ и 0 иначе. Обратный образ отношения $\#$ при отображении e равен G_2. Нетрудно проверить, что если граф G допустим, то $\operatorname{Im} e = R$. Остаётся добавить, что градуированная алгебра $A^\bullet$ восстанавливается по неградуированной алгебре $A = Q(G)$: $A^\bullet$ канонически изоморфна градуированной алгебре $B^\bullet$ с компонентами B^1 и B^2, где $B^2 = \{b : bA = 0\} \subseteq A$, а $B^1 = A/B^2$ (так что $B^2 = A^2$, а $B^1 \cong A^1$), и умножением, индуцированным умножением в A.

Граф B_n. Пусть B_n — показанный на рисунке граф с вершинами x_j^v, где $j = 1, \ldots, 2n+1$, $v \in \boldsymbol{V}$, причём $v \in \boldsymbol{U}$, если j нечётно.



Моноид W_n действует на графе B_n слева по правилу $w \cdot x_j^v = x_j^{w_j v}$. Пусть $w_* \colon B_n \to B_n$ — действие элемента $w \in W_n$. Граф B_n с действием моноида W_n задаёт функтор

$$\underline{B}_n \colon W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\} \to \mathbf{Graph}, \qquad \star \mapsto B_n, \qquad w|_{\star \to \star} \mapsto w_*.$$

Так как $\mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod})$ — линейная категория, то кофунктор

$$W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\} \xrightarrow{\underline{B}_n} \mathbf{Graph} \xrightarrow{Q} \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Alc} \xrightarrow{L^r} \mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod})$$

продолжается до линейного кофунктора

$$b_n^r \colon \boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\}] \to \mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod}).$$

Лемма. *Имеем* $b_n^{n-1}(Z_n\|_{\star \to \star}) = 0$.

Доказательство. Возьмём $p = 1, \ldots, n-1$. Моноид W_n действует на графе B_n слева. Индуцированное правое действие на векторном пространстве $Q(B_n)^{\otimes p}$ делает его правым $\boldsymbol{k}[W_n]$-модулем. Нужно показать, что $Q(B_n)^{\otimes p} Z_n = 0$.

Для $i = 1, \ldots, n$ пусть F_i — подграф графа B_n, порождённый вершинами x_j^v с $|j - 2i| \leqslant 1$, и пусть $e_i \colon F_i \to B_n$ — морфизм включения. Так как подграфы F_i покрывают граф B_n, то (по свойству 2°) линейное отображение

$$(Q(e_i))_{i=1}^n \colon Q(B_n) \to \bigoplus_{i=1}^n Q(F_i)$$

инъективно. Возводя его в тензорную степень p, получаем инъективное линейное отображение

$$E_p\colon Q(B_n)^{\otimes p} \to \bigoplus_{i_1,\dots,i_p} S_{i_1\dots i_p}, \qquad S_{i_1\dots i_p} = Q(F_{i_1}) \otimes \ldots \otimes Q(F_{i_p}).$$

Подграфы F_i инвариантны относительно действия моноида W_n. Индуцированное правое действие на векторных пространствах $S_{i_1\dots i_p}$ делает их правыми $\boldsymbol{k}[W_n]$-модулями. Отображение E_p — гомоморфизм $\boldsymbol{k}[W_n]$-модулей. Так как оно инъективно, то достаточно показать, что $S_{i_1\dots i_p} Z_n = 0$.

Элемент g_i действует тривиально на подграфах $F_{i'}$, $i' \neq i$. Поэтому если i отлично от $i_1, \dots, i_p$, то g_i действует тривиально на $S_{i_1\dots i_p}$ и, следовательно, $S_{i_1\dots i_p} Z_n = 0$. Так как $p < n$, то такое i найдётся для любых $i_1, \dots, i_p$. □

Графы $\boldsymbol{C_n^s}$ (венки). Пусть $n \geqslant 2$. Для $s \in \boldsymbol{U}$ пусть C_n^s — граф, получающийся из графа B_n отождествлениями вершины x_{2n+1}^v с вершиной x_1^{sv} для каждого $v \in \boldsymbol{U}$. Пусть $f_n^s\colon B_n \to C_n^s$ — морфизм проекции. Мы называем C_n^+ *простым*, а C_n^- *мёбиусовым венками.*

Графы C_n^s, $s \in \boldsymbol{U}$, неизоморфны (рёбра, содержащие вершины валентности 2, образуют в C_n^+ два цикла, а в C_n^- один). Они конечны и допустимы, и поэтому (см. свойства 1° и 3°) их алгебры $Q(C_n^s)$ конечномерны и неизоморфны. Покажем, что представления $L^{n-1}(Q(C_n^s))$, $s \in \boldsymbol{U}$, изоморфны.

Для $s, t \in \boldsymbol{U}$ и $w \in W_n(s,t)$ зададим морфизм $w_*\colon C_n^s \to C_n^t$ условием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} B_n \arrow[r, "f_n^s"] \arrow[d, "w_*"'] & C_n^s \arrow[d, "w_*"] \\ B_n \arrow[r, "f_n^t"] & C_n^t. \end{tikzcd}$$

Таким образом определён функтор

$$\underline{C}_n\colon W_n \setminus\!\!\setminus \boldsymbol{U} \to \mathbf{Graph}, \qquad s \mapsto C_n^s, \qquad w|_{s\to t} \mapsto w_*.$$

Морфизмы f_n^s, $s \in \boldsymbol{U}$, образуют морфизм функторов $f_n\colon \underline{B}_n \circ \omega_n \to \underline{C}_n$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Graph} & \\
W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\} \arrow[ur, "\underline{B}_n"] \arrow[urr, Rightarrow, "f_n"] & & W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U}. \arrow[ul, "\underline{C}_n"'] \arrow[ll, "\omega_n"]
\end{tikzcd}$$

Так как $\mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod})$ — линейная категория, то кофунктор

$$W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U} \xrightarrow{\underline{C}_n} \mathbf{Graph} \xrightarrow{Q} \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Alc} \xrightarrow{L^r} \mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod})$$

продолжается до линейного кофунктора

$$c_n^r\colon \boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U}] \to \mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod}).$$

Морфизм f_n индуцирует морфизм кофункторов

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Fun}(\Omega_r, \boldsymbol{k}\text{-}\mathbf{Mod}) & \\
\boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \{\star\}] \arrow[ur, "b_n^r"] & & \boldsymbol{k}[W_n \mathbin{\backslash\!\backslash} \boldsymbol{U}], \arrow[ul, "c_n^r"'] \arrow[ll, "{\boldsymbol{k}[\omega_n]}"] \arrow[ull, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

т. е. для любых $s, t \in \boldsymbol{U}$ и $X \in \boldsymbol{k}[W_n(s,t)]$ мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
L^r(Q(B_n)) & L^r(Q(C_n^s)) \arrow[l, "L^r(Q(f_n^s))"'] \\
L^r(Q(B_n)) \arrow[u, "b_n^r(X\|_{\star\to\star})"] & L^r(Q(C_n^t)) \arrow[l, "L^r(Q(f_n^t))"'] \arrow[u, "c_n^r(X\|_{s\to t})"']
\end{tikzcd}$$

(использовано правило (2)). Так как морфизм f_n^s — покрытие, то (по свойству 2°) гомоморфизм $Q(f_n^s)\colon Q(C_n^s) \to Q(B_n)$ инъективен и, следовательно, морфизм $L^r(Q(f_n^s))$ пообъектно инъективен.

Теперь пусть $r = n-1$, $s = t$ и $X = Z_n$. По лемме, $b_n^{n-1}(Z_n\|_{\star\to\star}) = 0$. Значит, $c_n^{n-1}(Z_n\|_{s\to s}) = 0$ (в силу коммутативности диаграммы и указанной пообъектной инъективности). Покажем, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} L^{n-1}(Q(C_n^+)) \arrow[r, bend left, "c_n^{n-1}(T_n\|_{-\to+})"] & L^{n-1}(Q(C_n^-)) \arrow[l, bend left, "c_n^{n-1}(T_n\|_{+\to-})"] \end{tikzcd}$$

стрелки взаимно обратны. Для каждого $s \in \boldsymbol{U}$ имеем

$$\begin{aligned} c_n^{n-1}(T_n\|_{s\to -s}) \circ c_n^{n-1}(T_n\|_{-s\to s}) = c_n^{n-1}(T_n\|_{-s\to s} \circ T_n\|_{s\to -s}) = \\ = c_n^{n-1}(1_s - Z_n\|_{s\to s}) = 1_{L^{n-1}(Q(C_n^s))} - c_n^{n-1}(Z_n\|_{s\to s}) = 1_{L^{n-1}(Q(C_n^s))} \end{aligned}$$

(использовано равенство (1)).

Я благодарю И. С. Баскова, из моих разговоров с которым получилась эта работа.

Литература

[1] С. С. Подкорытов, Коммутативные алгебры и представления категории конечных множеств, Записки науч. семин. ПОМИ **388** (2011), 189 — 195.

[2] W. Dreckmann, Linearization reflects isomorphism, препринт (2012), `https://www.idmp.uni-hannover.de/fileadmin/institut/IDMP-Studium-Mathematik/downloads/Dreckmann/lincat.pdf`.

[3] J. Gubeladze, The isomorphism problem for commutative monoid rings, J. Pure Appl. Algebra **129** (1998), 35 — 65.

[4] J.-L. Loday, Cyclic homology, Springer-Verlag, 1992.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН

`ssp@pdmi.ras.ru`
`http://www.pdmi.ras.ru/~ssp`