О ГОМОТОПИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ОКРУЖНОСТЬ

С. С. Подкорытов

Гомотопические классы отображений пространства X в окружность T образуют абелеву группу $B(X)$ (*группа Брушлинского*). Отображение $f\colon B(X)\to C$, где C — абелева группа, имеет *порядок* не выше r, если для непрерывного отображения $a\colon X\to T$ величина $f([a])$ $\mathbb{Z}$-линейно выражается через характеристическую функцию $I_r(a)\colon (X\times T)^r\to\mathbb{Z}$ r-й декартовой степени графика отображения a. Доказывается, что порядок отображения f равен его алгебраической степени. (Отображение между абелевыми группами имеет *степень* не выше r, если равны нулю его конечные разности порядка $r+1$.)

§1. Введение

Пусть даны топологические пространства X, Y. Пусть $Y(X)$ — множество непрерывных отображений $X\to Y$, $[X,Y]$ — множество их гомотопических классов. Для $a\in Y(X)$ пусть $[a]\in[X,Y]$ — его гомотопический класс. Для $r\in\mathbb{N}$ $(=\{0,1,\dots\})$ и $a\in Y(X)$ пусть $I_r(a)\colon (X\times Y)^r\to\mathbb{Z}$ — характеристическая функция множества Γ_a^r, где $\Gamma_a\subset X\times Y$ — график отображения a. Пусть D_r — подгруппа группы функций $(X\times Y)^r\to\mathbb{Z}$, порождённая функциями $I_r(a)$, $a\in Y(X)$.

Пусть даны абелева группа C и отображение $f\colon [X,Y]\to C$. Пусть $\operatorname{ord} f\in\hat{\mathbb{N}}$ $(=\mathbb{N}\cup\{\infty\})$ — инфимум тех $r\in\mathbb{N}$, для которых существует такой гомоморфизм $h\colon D_r\to C$, что $f([a])=h(I_r(a))$ для всех $a\in Y(X)$.

Пусть $T=\{\,z\in\mathbb{C}:|z|=1\,\}$. Цель работы — найти $\operatorname{ord} f$ для произвольного f при $Y=T$.

Поточечное умножение отображений делает множество $B(X)=[X,T]$ абелевой группой (*группа Брушлинского*). Она канонически изоморфна группе $H^1(X;\mathbb{Z})$ (если X — клеточное пространство).

Для отображения $g\colon E\to F$ между абелевыми группами пусть $\deg g\in\hat{\mathbb{N}}$ — инфимум тех $r\in\mathbb{N}$, для которых

$$\sum_{q_0,\dots,q_r=0,1}(-1)^{q_0+\dots+q_r}g(q_0d_0+\dots+q_rd_r)=0$$

при любых $d_0,\dots,d_r\in E$.

1.1. Теорема. *Пусть даны топологическое пространство X, абелева группа C и отображение $f\colon B(X)\to C$. Тогда* $\operatorname{ord} f=\deg f$.

Более слабые результаты получены в [1, 2].

Пример. Пусть $q\colon B(X)\to\pi^1_{\mathrm{s}}(X)$ — отображение стабилизации. Если $X=T^n$, $n\leqslant 4$, то $\deg q=n$. По теореме 1.1, тогда $\operatorname{ord} q=n$.

§2. Предварительный материал

Симметрические степени. Для абелевой группы E пусть $E^{(r)}$ ($r \in \mathbb{N}$) — её r-я симметрическая степень, т. е. факторгруппа группы $E^{\otimes r}$ по перестановкам. Для гомоморфизма $h\colon E \to F$ между абелевыми группами пусть $h^{(r)}\colon E^{(r)} \to F^{(r)}$ — индуцированный гомоморфизм. Имеем $E^{(0)} = \mathbb{Z}$, $E^{(1)} = E$.

$$\bigoplus_{r\in\mathbb{N}} E^{(r)}$$

— коммутативное кольцо.

Свободные абелевы группы. Для множества C абелева группа $\langle C\rangle$ свободно порождена элементами 'c', $c \in C$. Для элемента (*набора*) $X \in \langle C\rangle$ пусть $X_c \in \mathbb{Z}$, $c \in C$, — его коэффициенты (*веса*). Имеем подгруппу $\langle C\rangle_\Delta \subset \langle C\rangle$, образованную наборами с нулевой суммой весов. Для отображения $g\colon C \to D$ между множествами пусть $\langle g\rangle\colon \langle C\rangle \to \langle D\rangle$ — индуцированный гомоморфизм. Для отображения $f\colon C \to E$, где E — абелева группа, зададим гомоморфизм $f^+\colon \langle C\rangle \to E$ правилом $f^+(\text{'}c\text{'}) = f(c)$, $c \in C$. Если C — абелева группа, то $\langle C\rangle$ — коммутативное кольцо.

Для $U \in \langle Y(X)\rangle$, где X, Y — топологические пространства, пусть $[U] \in \langle [X,Y]\rangle$ — образ набора U при гомоморфизме, индуцированном отображением $Y(X) \to [X,Y]$, $a \mapsto [a]$. Для $P \subset X$ аналогично определяется набор $U|_P \in \langle Y(P)\rangle$.

Симплициальный случай. Для симплициального множества F пусть $\langle F\rangle$ — симплициальная абелева группа с $\langle F\rangle_n = \langle F_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, и очевидными структурными гомоморфизмами. Есть симплициальная подгруппа $\langle F\rangle_\Delta \subset \langle F\rangle$. Для симплициального отображения $k\colon F \to G$ между симплициальными множествами пусть $\langle k\rangle\colon \langle F\rangle \to \langle G\rangle$ — индуцированный симплициальный гомоморфизм. Зададим симплициальное отображение $e^F\colon F \to \langle F\rangle$ правилом $e^F_n(x) = \text{'}x\text{'}$, $x \in F_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Комплексы. *Комплекс* K — конечное множество геометрических симплексов в $\mathbb{R}^\infty$, каждый снабжён линейным порядком на множестве своих вершин, обычные условия: содержит все грани своих симплексов и т. д. *Тело* $|K|$ комплекса K — объединение его симплексов. *Полиэдр* Q — тело какого-нибудь комплекса; этот комплекс называем *триангуляцией* полиэдра Q. Симплекс $z \in K$ порождает подкомплекс $\overline{z} \subset K$, который тоже можно назвать симплексом; имеем $|\overline{z}| = z$. Звезда и линк: $\operatorname{st} z, \operatorname{lk} z \subset K$. Для подкомплекса $L \subset K$ пусть $O(L) = \{\, z \in K : \overline{z} \cap L \neq \varnothing \,\}$. $K \setminus O(L)$ — подкомплекс. Для подкомплексов $E_1, \dots, E_r \subset K$ ($r \in \mathbb{N}$) пусть $E_* \subset K$ — их объединение.

Комплекс K порождает симплициальное множество, которое тоже обозначается K. Для симплициального множества F пусть $F(K)$ — множество симплициальных отображений $K \to F$. Для отображения $a \in F(K)$ пусть $|a| \in |F|(|K|)$ — его геометрическая реализация. Для набора $U \in \langle F(K)\rangle$ и подкомплекса $L \subset K$ пусть $U|_L \in \langle F(L)\rangle$ — образ набора U при гомоморфизме, индуцированном отображением $F(K) \to F(L)$, $a \mapsto a|_L$. Аналогично определяется набор $|U| \in \langle |F|(|K|)\rangle$.

Пусть дана симплициальная абелева группа G. $G(K)$ — абелева группа. Для $a \in G(K)$ пусть $S(a) = \{ z \in K : a|_{\overline{z}} \neq 0 \,\}$. $K \setminus S(a)$ — подкомплекс. Для набора $U \in \langle G(K)\rangle$ пусть

$$S(U) = \bigcup_{a\in G(K):U_a\neq 0} S(a).$$

Подразделения. Пусть дан комплекс K.

Пусть δK — барицентрическое подразделение комплекса K, снабжённое таким порядком: чем больше размерность симплекса, тем старше его барицентр. Пусть $\phi_K\colon \delta K \to K$ — симплициальное отображение, посылающее барицентр симплекса в его старшую вершину. Пусть $\delta' K$ — барицентрическое подразделение комплекса K, снабжённое противоположным порядком. Пусть $\phi'_K\colon \delta' K \to K$ — симплициальное отображение, посылающее барицентр симплекса в его младшую вершину.

Пусть $\Delta K = \delta'\delta K$, $\Phi_K = \phi_K \circ \phi'_{\delta K}\colon \Delta K \to K$. При отображении Φ_K образ звезды любой вершины есть симплекс. Это отображение *простое*, т. е. для любого подкомплекса $L \subset K$ его сокращение $\Phi_K^{-1}(L) \to L$ — гомотопическая эквивалентность. Отображение $|\Phi_K|\colon |K| = |\Delta K| \to |K|$ гомотопно тождественному.

Пусть $\Phi_K^i = \Phi_K \circ \ldots \circ \Phi_{\Delta^{i-1}K}\colon \Delta^i K \to K$.

Индуцированные отображения. Непрерывное отображение $g\colon X \to Y$ между топологическими пространствами индуцирует гомоморфизм $B(g)\colon B(Y) \to B(X)$. Для топологического пространства Z имеем отображения композиции $g^Z_\#\colon X(Z) \to Y(Z)$ и $g^\#_Z\colon Z(Y) \to Z(X)$. Это обозначение используем и в симплициальном случае.

§3. r-складные наборы

Топологический случай. Пусть даны топологические пространства X, Y. Набор $U \in \langle Y(X)\rangle$ *r-складен* ($r \in \mathbb{Z}$), если $U|_P = 0$ для любого $P \subset X$ с $\#P \leqslant r$. (Если $r < 0$, то любой набор r-складен; набор 0-складен, если сумма его весов равна нулю.)

3.1. Лемма. *Пусть даны абелева группа C и отображение $f\colon [X,Y] \to C$. Тогда неравенство $\operatorname{ord} f \leqslant r$ ($r \in \mathbb{N}$) равносильно тому, что $f^+([U]) = 0$ для всех r-складных наборов $U \in \langle Y(X)\rangle$.*

Доказательство. Пусть D_r как в §1. Зададим гомоморфизм $R\colon \langle Y(X)\rangle \to D_r$ правилом $R(‘a’) = I_r(a)$, $a \in Y(X)$. R — эпиморфизм. Набор $U \in \langle Y(X)\rangle$ r-складен, если и только если $R(U) = 0$. Введём гомоморфизм $F\colon \langle Y(X)\rangle \to C$, $F(U) = f^+([U])$. Неравенство $\operatorname{ord} f \leqslant r$ значит, что существует такой гомоморфизм $h\colon D_r \to C$, что $f([a]) = h(I_r(a))$ для всех $a \in Y(X)$, т. е. $F = h\circ R$. Такой гомоморфизм h существует, если и только если $\ker R \subset \ker F$, т. е. $f^+([U]) = 0$ для всех r-складных наборов $U \in \langle Y(X)\rangle$. $\square$

3.2. Лемма. *Пусть даны топологическое пространство Z и r-складный ($r \in \mathbb{Z}$) набор $U \in \langle Y(X)\rangle$. Тогда: а) для непрерывного отображения $g\colon Y \to Z$ набор $\langle g^X_\#\rangle(U) \in \langle Z(X)\rangle$ r-складен; б) для непрерывного отображения $g\colon Z \to X$ набор $\langle g^\#_Y\rangle(U) \in \langle Y(Z)\rangle$ r-складен.* $\square$

Симплициальный случай. Пусть даны комплекс K и симплициальное множество F. Набор $U \in \langle F(K)\rangle$ *r-складен* ($r \in \mathbb{Z}$), если $U|_Z = 0$ для любого подкомплекса $Z \subset K$, порождённого не более чем r симплексами.

3.3. Лемма. *Пусть дан r-складный ($r \in \mathbb{Z}$) набор $U \in \langle F(K)\rangle$. Тогда набор $|U| \in \langle |F|(|K|)\rangle$ тоже r-складен.* $\square$

Пусть дано покрытие $\mathcal{E}$ комплекса K подкомплексами. Набор $U \in \langle F(K)\rangle$ *$(\mathcal{E}, r)$-складен* ($r \in \mathbb{Z}$), если $U|_Z = 0$ для любого объединения $Z \subset K$ не более чем r элементов покрытия $\mathcal{E}$. $(\mathcal{E}, r)$-складность сильнее r-складности.

§4. Гомоморфизм j_r

Пусть даны комплекс K и симплициальное множество F. Пусть $e = e^F : F \to \langle F\rangle$. Для $r \in \mathbb{N}$ зададим гомоморфизм $j_r\colon \langle F(K)\rangle \to \langle F\rangle(K)^{(r)}$ правилом $j_r(\text{‘}a\text{’}) = (e \circ a)^r$, $a \in F(K)$.

4.1. Лемма. *Набор $U \in \langle F(K)\rangle$ r-складен ($r \in \mathbb{N}$), если и только если $j_r(U) = 0$.*

Доказательство. Для комплекса L зададим гомоморфизм $J_L\colon \langle F(L)\rangle \to \langle F\rangle(L)^{\otimes r}$ правилом $J_L(\text{‘}a\text{’}) = (e \circ a)^{\otimes r}$, $a \in F(L)$.

Имеем $\ker j_r = \ker J_K$. Это следует из равенств $j_r = p \circ J_K$, $q \circ j_r = r!J_K$, где $p\colon \langle F\rangle(K)^{\otimes r} \to \langle F\rangle(K)^{(r)}$ — проекция, а гомоморфизм $q\colon \langle F\rangle(K)^{(r)} \to \langle F\rangle(K)^{\otimes r}$ задан правилом

$$q(u_1 \dots u_r) = \sum_{g \in \Sigma_r} u_{g(1)} \otimes \dots \otimes u_{g(r)}, \qquad u_1, \dots, u_r \in \langle F\rangle(K).$$

Для комплекса L введём мономорфизм

$$i_L\colon \langle F\rangle(L) \to \bigoplus_{z \in L} \langle F\rangle(\overline{z}), \qquad i_L(u) = (u|_{\overline{z}})_{z \in L},$$

и композицию

$$P_L\colon \langle F(L)\rangle \xrightarrow{\ J_L\ } \langle F\rangle(L)^{\otimes r} \xrightarrow{\ i_L^{\otimes r}\ } \big(\textstyle\bigoplus_{z \in L} \langle F\rangle(\overline{z})\big)^{\otimes r} \xrightarrow{\ c\ } \textstyle\bigoplus_{z_1,\dots,z_r \in L} \bigotimes_{s=1}^{r} \langle F\rangle(\overline{z_s}),$$

где c — изоморфизм дистрибутивности. Пусть $P_{L\, z_1 \dots z_r}$, $z_1, \dots, z_r \in L$, — компоненты гомоморфизма P_L. Имеем

$$P_{L\, z_1 \dots z_r}(\text{‘}b\text{’}) = \bigotimes_{s=1}^{r} (e \circ b|_{\overline{z_s}}), \qquad b \in F(L).$$

Имеем $\ker J_L = \ker P_L$. Поэтому достаточно показать, что $P_K(U) = 0$, если и только если набор U r-складен.

Возьмём симплексы $z_1, \dots, z_r \in K$. Пусть $Z \subset K$ — порождённый ими подкомплекс. Достаточно показать, что $P_{K\, z_1 \dots z_r}(U) = 0$, если и только если $U|_Z = 0$. В силу естественности гомоморфизма P_L относительно L, $P_{K\, z_1 \dots z_r}(U) = P_{Z\, z_1 \dots z_r}(U|_Z)$. Это даёт импликацию “если”. Чтобы доказать импликацию “только если”, достаточно показать, что $P_{Z\, z_1 \dots z_r}$ — мономорфизм.

Введём инъективное отображение

$$k\colon F(Z) \to \prod_{s=1}^{r} F(\overline{z_s}), \qquad k(b) = (b|_{\overline{z_s}})_{s=1}^{r}.$$

Для $z \in K$ зададим гомоморфизм $h_z \colon \langle F(\overline{z})\rangle \to \langle F\rangle(\overline{z})$ правилом $h_z(\text{‘}b\text{’}) = e \circ b$, $b \in F(K)$. Это изоморфизм. Введём композицию

$$m \colon \langle F(Z)\rangle \xrightarrow{\langle k\rangle} \left\langle \prod_{s=1}^{r} F(\overline{z_s})\right\rangle \xrightarrow{l} \bigotimes_{s=1}^{r} \langle F(\overline{z_s})\rangle \xrightarrow{\bigotimes_{s=1}^{r} h_{z_s}} \bigotimes_{s=1}^{r} \langle F\rangle(\overline{z_s}),$$

где l — стандартный изоморфизм: $l(\text{‘}(b_1,\dots,b_r)\text{’}) = \text{‘}b_1\text{’} \otimes \ldots \otimes \text{‘}b_r\text{’}$, $b_s \in F(\overline{z_s})$, $s = 1,\dots,r$. m — мономорфизм. Имеем

$$m(\text{‘}b\text{’}) = \bigotimes_{s=1}^{r} (e \circ b|_{\overline{z_s}}), \qquad b \in F(L),$$

т. е. $m = P_{Z\, z_1 \ldots z_r}$. Таким образом, $P_{Z\, z_1 \ldots z_r}$ — мономорфизм. $\square$

Пусть дана симплициальная абелева группа G. Пусть $e = e^G$ и $j_r \colon \langle G(K)\rangle \to \langle G\rangle(K)^{(r)}$ — соответствующий гомоморфизм.

4.2. Лемма. *Пусть даны наборы $X, Y \in \langle G(K)\rangle$. Предположим, что набор X $(r-1)$-складен, набор Y $(s-1)$-складен ($r, s \in \mathbb{N}$) и $S(X) \cap S(Y) = \varnothing$. Тогда набор XY $(r+s-1)$-складен и*

$$j_{r+s}(XY) = \frac{(r+s)!}{r!s!} j_r(X) j_s(Y).$$

Доказательство. Пусть $P = \{\, a \in G(K) : S(a) \subset S(X)\,\}$, $Q = \{\, b \in G(K) : S(b) \subset S(Y)\,\}$. Имеем

$$X = \sum_{a \in P} X_a \text{‘}a\text{’}, \qquad Y = \sum_{b \in Q} Y_b \text{‘}b\text{’}, \qquad XY = \sum_{a \in P,\ b \in Q} X_a Y_b \text{‘}a+b\text{’}.$$

Так как $S(X) \cap S(Y) = \varnothing$, то для $a \in P$, $b \in Q$ имеем $e \circ (a+b) = e \circ a + e \circ b - e \circ 0$. Для $t \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} j_t(XY) &= \sum_{a \in P,\ b \in Q} X_a Y_b (e \circ (a+b))^t = \sum_{a \in P,\ b \in Q} X_a Y_b (e \circ a + e \circ b - e \circ 0)^t = \\ &= \sum_{u,v,w \in \mathbb{N} : u+v+w=t} \frac{t!}{u!v!w!} \Big(\sum_{a \in P} X_a (e \circ a)^u\Big)\Big(\sum_{b \in Q} Y_b (e \circ b)^v\Big)(-e \circ 0)^w = \\ &= \sum_{u,v,w \in \mathbb{N} : u+v+w=t} \frac{t!}{u!v!w!} j_u(X) j_v(Y) (-e \circ 0)^w. \end{aligned}$$

По лемме 4.1, $j_u(X) = 0$ при $u < r$ и $j_v(Y) = 0$ при $v < s$. Поэтому $j_t(XY) = 0$ при $t < r+s$ и

$$j_{r+s}(XY) = \frac{(r+s)!}{r!s!} j_r(X) j_s(Y).$$

По лемме 4.1, набор XY $(r+s-1)$-складен. $\square$

4.3. Следствие. *Пусть даны наборы $X_1, \dots, X_p \in \langle G(K)\rangle$ ($p \in \mathbb{N}$). Предположим, что при каждом q набор X_q $(r_q - 1)$-складен ($r_q \in \mathbb{N}$) и $S(X_q) \cap S(X_{q'}) = \varnothing$ для любых различных q, q'. Пусть $X = X_1 \ldots X_p$, $r = r_1 + \ldots + r_p$. Тогда набор X $(r-1)$-складен и*

$$j_r(X) = \frac{r!}{r_1! \ldots r_p!} j_{r_1}(X_1) \ldots j_{r_p}(X_p).$$

$\square$

§5. Симплициальные группы M, P, $\tilde{M}$

Материал этого параграфа следует из соответствия Дольда — Кана и теоремы Дольда — Тома.

Пусть дан комплекс K. Пусть $Q = |K|$.

Пусть M — классифицирующее пространство группы $\mathbb{Z}$. M — симплициальная абелева группа. Отображение $a \in M(K)$ — то же, что 1-коцикл на K со значениями в $\mathbb{Z}$.

Пусть $\eta\colon |M| \to T$ — гомотопическая эквивалентность. Для $a \in M(K)$ пусть $[\![a]\!] = [\eta \circ |a|] \in B(Q)$. Для набора $U \in \langle M(K)\rangle$ пусть $[\![U]\!] \in \langle B(Q)\rangle$ — его образ при индуцированном кольцевом гомоморфизме.

Имеем симплициальное отображение $e = e^M\colon M \to \langle M\rangle$.

Зададим симплициальный гомоморфизм $f\colon \langle M\rangle \to \mathbb{Z}\times M$ правилом $f_n(\text{‘}m\text{’}) = (1, m)$, $m \in M_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $P = \ker f$, $k\colon P \to \langle M\rangle$ — включение. Группа P стягиваема. Группа $\langle M\rangle$ расщепляется: есть симплициальные гомоморфизмы $g\colon \mathbb{Z}\times M \to \langle M\rangle$ с $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times M}$ и $l\colon \langle M\rangle \to P$ с $l \circ k = \mathrm{id}_P$, причём $k \circ l + g \circ f = \mathrm{id}_{\langle M\rangle}$.

Есть такие отображения $h_z\colon P(\overline{z}) \to P(K)$, $z \in K$, что для любого $t \in P(K)$

$$t = \sum_{z\in K} h_z(t|_{\overline{z}})$$

и $S(h_z(u)) \subset \operatorname{st} z$ для любого $u \in P(\overline{z})$, $z \in K$.

Пусть $q\colon \tilde{M} \to M$ — универсальное накрытие. $\tilde{M}$ — тоже симплициальная абелева группа; q — симплициальный гомоморфизм. Группа $\tilde{M}$ стягиваема. Отображение $a \in \tilde{M}(K)$ — то же, что 0-коцепь на K со значениями в $\mathbb{Z}$.

Имеем симплициальное отображение $\tilde{e} = e^{\tilde{M}}\colon \tilde{M} \to \langle\tilde{M}\rangle$. Имеем $e\circ q = \langle q\rangle\circ\tilde{e}$.

Есть симплициальный гомоморфизм $\tilde{k}\colon P \to \langle\tilde{M}\rangle$ с $\langle q\rangle \circ \tilde{k} = k$.

§6. Подъём вдоль j_1

Пусть дан комплекс K. Пусть $K^* = K \cup \{\varnothing\}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Для $x, y \in K^*$ имеем $x\cap y \in K^*$. Для $z \in K^*$ пусть $c_z = 1-\chi(\operatorname{lk} z)$, где χ — эйлерова характеристика и $\operatorname{lk}\varnothing = K$.

6.1. Лемма. *Для $x, y \in K^*$ имеем*

$$\sum_{z\in K^*: z\cap x = y} c_z = \begin{cases} 1 & \textit{при } x = y,\\ 0 & \textit{иначе.}\end{cases}$$

$\square$

Для комплекса L введём гомоморфизм $p_L = (\tilde{e}^L_\#)^+\colon \langle\tilde{M}(L)\rangle \to \langle\tilde{M}\rangle(L)$.

6.2. Лемма. *Пусть даны подкомплекс $D \subset K$ и отображение $u \in \langle\tilde{M}\rangle_\vartriangle(L) \subset \langle\tilde{M}\rangle(L)$ с $S(u) \subset D$. Тогда существует такой набор $U \in \langle\tilde{M}(K)\rangle_\vartriangle$, что $p_K(U) = u$ и $S(U) \subset O(D)$.*

Доказательство. Для $z \in K^*$ зададим гомоморфизм $E_z\colon \tilde{M}(\overline{z}) \to \tilde{M}(K)$ условиями $E_z(v)|_{\overline{z}} = v$ и $S(E_z(v)) \subset O(\overline{z})$ (“продолжение нулём”). Для $x, z \in K^*$ имеем $E_z(v)|_{\overline{x}} = E_{z\cap x}(v|_{\overline{z\cap x}})|_{\overline{x}}$, $v \in \tilde{M}(\overline{z})$, и, следовательно, $\langle E_z\rangle(V)|_{\overline{x}} =$

$\langle E_{z\cap x}\rangle(V|_{\overline{z\cap x}})|_{\overline{x}}$, $V \in \langle \tilde M(\overline{z})\rangle$. Для $z \in K$ $p_{\overline{z}}$ — изоморфизм. Для $z \in K^*$ введём гомоморфизм $R_z\colon \langle\tilde M\rangle(\overline{z}) \to \langle \tilde M(\overline{z})\rangle$, полагая $R_z = p_{\overline{z}}^{-1}$ при $z \in K$ и $R_\varnothing = 0$. Для $x, z \in K^*$ имеем $R_z(v)|_{\overline{z\cap x}} = R_{z\cap x}(v|_{z\cap x})$, $v \in \langle\tilde M\rangle_\vartriangle(\overline{z})$. Положим

$$U = \sum_{z\in K^*} c_z\langle E_z\rangle(R_z(u|_{\overline{z}})).$$

Имеем $S(U) \subset O(D)$. Покажем, что $p_K(U) = u$. Возьмём $x \in K$. Достаточно показать, что $p_K(U)|_{\overline{x}} = u|_{\overline{x}}$. Имеем

$$U|_{\overline{x}} = \sum_{z\in K^*} c_z\langle E_z\rangle(R_z(u|_{\overline{z}}))|_{\overline{x}} = \sum_{z\in K^*} c_z\langle E_{z\cap x}\rangle(R_{z\cap x}(u|_{\overline{z\cap x}}))|_{\overline{x}} =$$
$$= \sum_{y\in K^*}\Big(\sum_{z\in K^*: z\cap x = y} c_z\Big)\langle E_y\rangle(R_y(u|_{\overline{y}}))|_{\overline{x}} = \langle E_x\rangle(R_x(u|_{\overline{x}}))|_{\overline{x}} = R_x(u|_{\overline{x}}),$$

по лемме 6.1. Имеем $p_K(U)|_{\overline{x}} = p_{\overline{x}}(U|_{\overline{x}}) = p_{\overline{x}}(R_x(u|_{\overline{x}})) = u|_{\overline{x}}$. $\square$

Пусть $M(K)_0 = \{\, a \in M(K) : [\![a]\!] = 0\,\}$. Имеем $\langle M(K)_0\rangle \subset \langle M(K)\rangle$.

6.3. Лемма. *Пусть даны подкомплекс $D \subset K$ и отображение $t \in P(K)$ с $S(t) \subset D$. Тогда существует такой 0-складный набор $X \in \langle M(K)_0\rangle$, что $j_1(X) = k\circ t$ и $S(X) \subset O(D)$.*

Доказательство. По лемме 6.2, есть такой набор $U \in \langle\tilde M(K)\rangle_\vartriangle$, что $p_K(U) = \tilde k\circ t$ и $S(U) \subset O(D)$. Положим $X = \langle q^K_{\#}\rangle(U)$. Имеем $S(X) \subset O(D)$ и $j_1(X) = (e^K_{\#})^+(X) = (e^K_{\#})^+(\langle q^K_{\#}\rangle(U)) = ((e\circ q)^K_{\#})^+(U) = ((\langle q\rangle\circ\tilde e)^K_{\#})^+(U) = \langle q\rangle\circ(\tilde e^K_{\#})^+(U) = \langle q\rangle\circ p_K(U) = \langle q\rangle\circ\tilde k\circ t = k\circ t$. $\square$

§7. Построение r-складного набора

7.1. Утверждение. *Пусть даны полиэдр Q и элементы $d_0,\dots,d_r \in B(Q)$ ($r\in\mathbb{Z}$, $r \geqslant -1$). Тогда существуют триангуляция K полиэдра Q и r-складный набор $U \in \langle M(K)\rangle$ с $[\![U]\!] = (1 - `d_0\text{'})\dots(1 - `d_r\text{'})$.*

Доказательство. Случай $r = -1$ тривиален. Пусть $r \geqslant 0$ и построены триангуляция L полиэдра Q и $(r-1)$-складный набор $V \in \langle M(K)\rangle$ с $[\![V]\!] = (1 - `d_0\text{'})\dots(1 - `d_{r-1}\text{'})$.

Положим $K = \Delta^3 L$. Пусть

$$\mathcal{E} = \{\, (\Phi^3_L)^{-1}(\overline{x}) \mid x \in L\,\}, \qquad \mathcal{F} = \{\, (\Phi^2_{\Delta L})^{-1}(\overline{y}) \mid y \in \Delta L\,\}.$$

Это покрытия комплекса K стягиваемыми подкомплексами. Следующие факты следуют из свойства операции Δ.

Для любого $z \in K$ существует $F \in \mathcal{F}$ с $O(\operatorname{st} z) \subset F$.
Для любого $F \in \mathcal{F}$ существует $E \in \mathcal{E}$ с $O(F) \subset E$.
Для любых $F, F' \in \mathcal{F}$ с $F\cap F' \neq \varnothing$ существует $E \in \mathcal{E}$ с $F\cup F' \subset E$.

Пусть $\tilde V = \langle(\Phi^3_L)^{\#}_M\rangle(V) \in \langle M(K)\rangle$. Набор $\tilde V$ $(\mathcal{E}, r-1)$-складен. Имеем $[\![\tilde V]\!] = (1 - `d_0\text{'})\dots(1 - `d_{r-1}\text{'})$.

Выберем отображение $a^* \in M(K)$ с $[\![a^*]\!] = d_r$. Пусть $\hat U = \tilde V(1 - `a^*\text{'})$. Набор $\hat U$ $(\mathcal{E}, r-1)$-складен. Имеем $[\![\hat U]\!] = (1 - `d_0\text{'})\dots(1 - `d_r\text{'})$.

Введём подгруппу $D = \{\, j_r(Z) \mid Z \in \langle M(K)\rangle : [\![Z]\!] = 0 \,\} \subset \langle M\rangle(K)^{(r)}$. Достаточно показать, что $j_r(\hat{U}) \in D$. Действительно, тогда есть $Z \in \langle M(K)\rangle$ с $j_r(Z) = j_r(\hat{U})$ и $[\![Z]\!] = 0$. Положив $U = \hat{U} - Z$, получим $j_r(U) = 0$ и $[\![U]\!] = (1 - \text{‘}d_0\text{’}) \dots (1 - \text{‘}d_r\text{’})$. По лемме 4.1, набор U будет r-складен, и утверждение доказано.

Пусть $c\colon K \to \mathbb{Z} \times M$ — симплициальное отображение, посылающее всё в вершину $(1,0)$, $i\colon M \to \mathbb{Z}\times M$ — каноническое вложение. Для $a \in M(K)$ имеем $f \circ e \circ a = c + i \circ a$, и, следовательно, $f \circ e \circ (a + a^*) = f \circ e \circ a + i \circ a^*$. В группе $(\mathbb{Z} \times M)(K)^{(r)}$ имеем

$$\sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (f\circ e\circ a)^r = \sum_{a\in M(K)} \tilde{V}_a((f\circ e\circ a)^r - (f\circ e\circ(a+a^*))^r) =$$

$$= -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)} \tilde{V}_a (f\circ e\circ a)^s (i\circ a^*)^{r-s} =$$

$$= -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}(f_\#^K)^{(s)}\Big(\sum_{a\in M(K)} \tilde{V}_a (e\circ a)^s\Big)(i\circ a^*)^{r-s} =$$

$$= -\sum_{s=0}^{r-1}\binom{r}{s}(f_\#^K)^{(s)}(j_s(\tilde{V}))(i\circ a^*)^{r-s} = 0,$$

так как $j_s(\tilde{V}) = 0$ при $s < r$, по лемме 4.1.

Так как $\mathrm{id}_{\langle M\rangle} - k\circ l = g\circ f$, то для $a \in M(K)$ имеем $e\circ a - k\circ l\circ e\circ a = g\circ f\circ e\circ a$. Возводя в степень r и суммируя по $a \in M(K)$, в группе $\langle M\rangle(K)^{(r)}$ получаем

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (e\circ a)^{r-s}(k\circ l\circ e\circ a)^s =$$

$$= \sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (g\circ f\circ e\circ a)^r = (g_\#^K)^{(r)}\Big(\sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (f\circ e\circ a)^r\Big) = 0.$$

Значит,

$$j_r(\hat{U}) = \sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (e\circ a)^r = \sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (e\circ a)^{r-s}(k\circ l\circ e\circ a)^s.$$

Для $a \in M(K)$ имеем

$$k\circ l\circ e\circ a = \sum_{z\in K} k\circ h_z(l\circ e\circ a|_{\overline{z}}).$$

Введём на множестве K какой-нибудь линейный порядок. Для $z_1, \dots, z_s \in K$ ($s \in \mathbb{N}$) пусть $m_{z_1\dots z_s}$ — число наборов, получающихся перестановками элементов из набора $(z_1, \dots, z_s)$, и

$$R_{z_1\dots z_s} = m_{z_1\dots z_s}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K)} \hat{U}_a (e\circ a)^{r-s}\prod_{t=1}^{s}(k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ a|_{\overline{z_t}})) \in \langle M\rangle(K)^{(r)}.$$

Имеем
$$j_r(\hat{U}) = \sum_{s=1}^{r}(-1)^{s-1} \sum_{z_1,\dots,z_s\in K:z_1\leqslant\dots\leqslant z_s} R_{z_1\dots z_s}.$$

Возьмём $s=1,\dots,r$ и $z_1,\dots,z_s\in K$. Достаточно показать, что $R_{z_1\dots z_s}\in D$. Возможны два случая.

Случай, когда $z_t, z_{t'}\in E$ для некоторых различных t, t' и некоторого $E\in\mathcal{E}$ (например, когда $z_t = z_{t'}$ для некоторых различных t, t'). Покажем, что тогда $R_{z_1\dots z_s}=0$. Есть такие $E_1,\dots,E_{s-1}\in\mathcal{E}$, что $z_1,\dots,z_s\in E_*$. Для $b\in M(E_*)$ пусть

$$R(b) = m_{z_1\dots z_s}\binom{r}{s}\sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\hat{U}_a(e\circ a)^{r-s}\prod_{t=1}^{s}(k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ b|_{\overline{z_t}}))\in\langle M\rangle(K)^{(r)}.$$

Имеем
$$R_{z_1\dots z_s} = \sum_{b\in M(E_*)} R(b).$$

Возьмём $b\in M(E_*)$. Достаточно показать, что $R(b)=0$.

Покажем, что набор
$$W = \sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\hat{U}_a\text{‘}a\text{’}$$

$(\mathcal{E}, r-s)$-складен. Возьмём $E'_1,\dots,E'_{r-s}\in\mathcal{E}$. Зададим гомоморфизм $p\colon \langle M(E_*\cup E'_*)\rangle\to\langle M(E'_*)\rangle$, для $a\in M(E_*\cup E'_*)$ полагая $p(\text{‘}a\text{’}) = \text{‘}a|_{E'_*}\text{’}$ при $a|_{E_*}=b$ и $p(\text{‘}a\text{’})=0$ иначе. Имеем $W|_{E'_*} = p(\hat{U}|_{E_*\cup E'_*})$. Но $\hat{U}|_{E_*\cup E'_*}=0$, так как набор $\hat{U}$ $(\mathcal{E}, r-1)$-складен. Таким образом, $W|_{E'_*}=0$, что и требуется.

Имеем

$$R(b) = m_{z_1\dots z_s}\binom{r}{s}j_{r-s}(W)\prod_{t=1}^{s}(k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ b|_{\overline{z_t}}))=0,$$

так как $j_{r-s}(W)=0$, по лемме 4.1.

Противный случай. В этом случае симплексы $z_1,\dots,z_s$ различны, и $m_{z_1,\dots,z_s} = s!$. Для каждого $t=1,\dots,s$ выберем $F_t\in\mathcal{F}$ с $O(\operatorname{st} z_t)\subset F_t$ и $E_t\in\mathcal{E}$ с $O(F_t)\subset E_t$. Введём подкомплекс $C = K\setminus O(F_*)$. Имеем $E_*\cup C = K$ и $F_*\cap C=\varnothing$. Подкомплексы $F_1,\dots,F_s$ попарно не пересекаются. Действительно, пусть $F_t\cap F_{t'}\neq\varnothing$ для каких-то различных t, t'. Тогда есть $E\in\mathcal{E}$ с $F_t, F_{t'}\subset E$. Тогда $z_t, z_{t'}\in E$, что невозможно в рассматриваемом случае.

Для $b\in M(E_*)$ пусть

$$R(b) = \frac{r!}{(r-s)!}\sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\hat{U}_a(e\circ a)^{r-s}\prod_{t=1}^{s}(k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ b|_{\overline{z_t}}))\in\langle M\rangle(K)^{(r)}.$$

Имеем
$$R_{z_1\dots z_s} = \sum_{b\in M(E_*)} R(b).$$

Возьмём $b\in M(E_*)$. Достаточно показать, что $R(b)\in D$.

Покажем, что набор

$$W=\sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\hat U_a\text{`}a\text{'}$$

$(\mathcal{E},r-s-1)$-складен. Возьмём $E'_1,\dots,E'_{r-s-1}\in\mathcal{E}$. Рассуждая как в первом случае, получаем $W|_{E'_*}=0$, что и требуется.

Так как подкомплексы $F_1,\dots,F_s$ стягиваемы и не пересекаются друг с другом и с C, то есть такое отображение $b^\circ\in M(E_*)$, что $b^\circ|_{F_*}=0$ и $b^\circ|_{E_*\cap C}=b|_{E_*\cap C}$. Введём обозначение: для подкомплекса $H\subset K$ с $E_*\subset H$ и отображения $a\in M(H)$ с $a|_{E_*}=b$ пусть $a^\circ\in M(H)$ — отображение с $a^\circ|_{E_*}=b^\circ$ и $a^\circ|_{H\cap C}=a|_{H\cap C}$.

Покажем, что набор

$$W^\circ=\sum_{a\in M(K):a|_{E_*}=b}\hat U_a\text{`}a^\circ\text{'}$$

$(\mathcal{E},r-s-1)$-складен. Возьмём $E'_1,\dots,E'_{r-s-1}\in\mathcal{E}$. Зададим гомоморфизм $p^\circ\colon\langle M(E_*\cup E'_*)\rangle\to\langle M(E'_*)\rangle$, для $a\in M(E_*\cup E'_*)$ полагая $p^\circ(\text{`}a\text{'})=\text{`}a^\circ|_{E'_*}\text{'}$ при $a|_{E_*}=b$ и $p^\circ(\text{`}a\text{'})=0$ иначе. Имеем $W^\circ|_{E'_*}=p^\circ(\hat U|_{E_*\cup E'_*})$. Но $\hat U|_{E_*\cup E'_*}=0$, так как набор $\hat U$ $(\mathcal{E},r-1)$-складен. Таким образом, $W^\circ|_{E'_*}=0$, что и требуется.

Покажем, что $j_{r-s}(W)=j_{r-s}(W^\circ)$. Возьмём подкомплекс $Z\subset K$, порождённый не более чем $r-s$ симплексами. Ввиду леммы 4.1, достаточно показать, что $W|_Z=W^\circ|_Z$. Если $Z\subset C$, то это следует из того, что $a|_C=a^\circ|_C$ для всех $a\in M(K)$. Иначе $Z=\overline{z}\cup Z'$, где $z\in E_*$ — симплекс, а $Z'\subset K$ — подкомплекс, порождённый не более чем $r-s-1$ симплексами. Покажем, что тогда $W|_Z=0$. Так как все отображения, входящие в набор W, на $\overline{z}$ совпадают с b, то достаточно показать, что $W|_{Z'}=0$. Но это следует из $(r-s-1)$-складности набора W. Аналогично, $W^\circ|_Z=0$.

По лемме 6.3, для каждого $t=1,\dots,s$ есть 0-складный набор $X_t\in\langle M(K)_0\rangle$ с $j_1(X_t)=k\circ h_{z_t}(l\circ e\circ b|_{\overline{z_t}})$ и $S(X_t)\subset F_t$. Имеем

$$R(b)=\frac{r!}{(r-s)!}j_{r-s}(W)\prod_{t=1}^{s}j_1(X_t)=\frac{r!}{(r-s)!}j_{r-s}(W^\circ)\prod_{t=1}^{s}j_1(X_t)=j_r(W^\circ X_1\dots X_s),$$

по следствию 4.3. Так как набор X_1 0-складен и принадлежит подкольцу $\langle M(K)_0\rangle$, то $[\![X_1]\!]=0$. Значит, $[\![W^\circ X_1\dots X_s]\!]=0$. Таким образом, $R(b)\in D$. $\square$

§8. Доказательство теоремы 1.1

По [1, теорема 4], $\operatorname{ord}f\leqslant\deg f$. Пусть $\operatorname{ord}f\leqslant r$ ($r\in\mathbb{N}$). Покажем, что $\deg f\leqslant r$. Возьмём $d_0,\dots,d_r\in B(X)$. Пусть Q — полиэдр, гомеоморфный тору T^{r+1}, $p_0,\dots,p_r\colon Q\to T$ — проекции. Есть такое непрерывное отображение $g\colon X\to Q$, что $[p_s\circ g]=d_s$, $s=0,\dots,r$. По утверждению 7.1, есть триангуляция K полиэдра Q и r-складный набор $U\in\langle M(K)\rangle$ с $[\![U]\!]=(1-\text{`}[p_0]\text{'})\dots(1-\text{`}[p_r]\text{'})$. Пусть $V=\langle g_T^{\#}\circ\eta_{\#}^{Q}\rangle(|U|)\in\langle T(X)\rangle$. По леммам 3.3 и 3.2, набор V r-складен. Имеем $[V]=[\langle g_T^{\#}\circ\eta_{\#}^{Q}\rangle(|U|)]=\langle B(g)\rangle([\langle\eta_{\#}^{Q}\rangle(|U|)])=\langle B(g)\rangle([\![U]\!])=(1-\text{`}d_0\text{'})\dots(1-\text{`}d_r\text{'})$. Теперь

$$\sum_{q_0\dots,q_r=0,1}(-1)^{q_0+\dots+q_r}f(q_0d_0+\ldots+q_rd_r)=f^+((1-\text{`}d_0\text{'})\dots(1-\text{`}d_r\text{'}))=f^+([V])=0,$$

по лемме 3.1, что и требуется. $\square$

Литература

1. С. С. Подкорытов, *Порядок функции на группе Брушлинского*, Записки научн. семин. ПОМИ **261** (1999), 222 — 228.
2. С. С. Подкорытов, *Порядок функции на группе Брушлинского двумерного полиэдра*, Записки научн. семин. ПОМИ **353** (2008), 181 — 190.