КВАДРАТИЧНОЕ СВОЙСТВО РАЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛУХАРАКТЕРИСТИКИ

С. С. Подкорытов

Показано, что рациональная полухарактеристика компактного ориентированного n-мерного, $n \equiv 1 \pmod 4$, подмногообразия фиксированного многообразия квадратично зависит от характеристической функции множества его ростков.

Под *многообразием* понимается гладкое многообразие без края. Соответственно используется слово *подмногообразие.* Размерность многообразия указывается верхним индексом.

Для компактного ориентированного многообразия X^n, $n \equiv 1 \pmod 4)$, класс

$$\boldsymbol{k}(X) = \sum_{r \equiv 0 \pmod 2} \dim H_r(X; \mathbf{Q}) \bmod 2 \in \mathbf{Z}_2$$

называется его *(рациональной) полухарактеристикой.*

Когда T — модуль над полем $\mathbf{Z}_2$, то отображение $q\colon T \to \mathbf{Z}_2$ называется *квадратичным,* если существует такое линейное отображение $p\colon T \otimes T \to \mathbf{Z}_2$, что $q(t) = p(t \otimes t)$, $t \in T$.

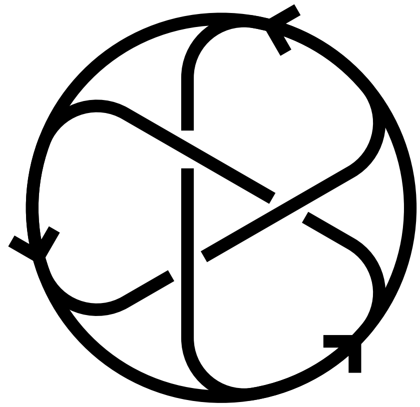
Модуль всех $\mathbf{Z}_2$-значных функций на множестве E будем обозначать $!\,E$.

n-ростком в многообразии V будем называть класс эквивалентности пар (X, x), где $X^n \subset V$ — ориентированное подмногообразие, $x \in X$: такие пары (X_j, x_j), $j = 1, 2$, считаются эквивалентными, если $x_1 = x_2$ и существует такое открытое множество $O \subset V$, содержащее эту точку, что $X_1 \cap O = X_2 \cap O$ (с учётом ориентаций). Множество n-ростков в многообразии V будем обозначать $\boldsymbol{E}_n(V)$, при этом для ориентированного подмногообразия $X^n \subset V$ пусть $\mathbf{1}(X) \in {!\,\boldsymbol{E}_n(V)}$ — характеристическая функция множества его ростков (т. е. классов пар (X, x), $x \in X$).

Цель работы — доказательство следующей теоремы.

(1) Теорема. *Пусть V — многообразие, $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда существует такое квадратичное отображение $q\colon {!\,\boldsymbol{E}_n(V)} \to \mathbf{Z}_2$, что для любого компактного ориентированного подмногообразия $X^n \subset V$ верно равенство $\boldsymbol{k}(X) = q(\mathbf{1}(X))$.*

Я благодарен О. Я. Виро и Т. Кярки за внимание к работе и интересные обсуждения.



Покажем, что слово *квадратичное* в этой формулировке нельзя заменить на слово *линейное.* На рисунке можно видеть пять ориентированных гладких окружностей $X_j \subset \mathbf{R}^3$, $j = 1, \dots, 5$, (круглая окружность, три овала и трилистник). Верны равенства

$$\sum_{j=1}^{5} \mathbf{1}(X_j) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{5} \boldsymbol{k}(X_j) = 1,$$

что противоречит линейной зависимости. Аналогичные примеры в старших размерностях получаются декартовым умножением на многообразия $\mathbf{C}P^m$, $m \equiv 0 \pmod 2$. Это подтверждает, что полухарактеристику нельзя отнести к "интегральным" инвариантам [1] (хотя она SKK-инвариант [2]).

Переформулируем теорему 1.[1]

(2) Теорема. *Пусть V — многообразие, $X_j^n \subset V$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $j = 1, \dots, N$, — такой набор компактных ориентированных подмногообразий, что*

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}(X_j)(e_1)\mathbf{1}(X_j)(e_2) = 0, \qquad e_1, e_2 \in \boldsymbol{E}_n(V).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{k}(X_j) = 0.$$

Если вещественнозначная функция подмногообразия выражается интегралом по всем парам точек подмногообразия от какой-то его характеристики в окрестности каждой пары точек, то она обладает подобным свойством (вместо сумм нужно рассматривать вещественные линейные комбинации, характеристические функции нужно считать вещественнозначными).

Доказательство равносильности теорем 1 и 2. Пусть V — многообразие, $n \equiv 1 \pmod 4$. Проверим для них равносильность утверждений теорем 1 и 2. Положим $E = \boldsymbol{E}_n(V)$. Определим линейное вложение $m\colon\, !\,E \otimes\, !\,E \to\, !(E \times E)$, полагая $m(u_1 \otimes u_2)((e_1, e_2)) = u_1(e_1)u_2(e_2)$, $e_1, e_2 \in E$, $u_1, u_2 \in\, !\,E$.

[1] О равносильности утверждений, подобных теоремам 1 и 2, и саму форму теоремы 1 мне сообщил М. Н. Гусаров.

Пусть S — модуль над полем $\mathbf{Z}_2$, свободно порождённый компактными ориентированными n-мерными подмногообразиями многообразия V. Определим линейные отображения $D\colon S \to {!}\,E \otimes {!}\,E$, полагая $D([X]) = \mathbf{1}(X) \otimes \mathbf{1}(X)$, и $K\colon S \to \mathbf{Z}_2$, полагая $K([X]) = \boldsymbol{k}(X)$, где $X^n \subset V$ — компактное ориентированное подмногообразие. Теорема 1 утверждает, что существует такое линейное отображение $p\colon {!}\,E \otimes {!}\,E \to \mathbf{Z}_2$, что $K = p \circ D$. Это равносильно включению $\ker D \subset \ker K$. Теорема 2 утверждает включение $\ker m \circ D \subset \ker K$. Но $\ker m \circ D = \ker D$. $\square$

Набросок доказательства теоремы 2. При $n = 1$ утверждение следует из того, что полухарактеристику кривой можно найти по её общему погружению в плоскость как класс суммы числа двойных точек и числа вращения, см. § 2. При $n > 1$ для нахождения полухарактеристики многообразия на нём рассматривается общая пара векторных полей (по Кошорке [3]). На кривой, образованной точками, в которых эти векторные поля коллинеарны, есть каноническая Pin^--структура, см. §§ 3, 6, 7. Полухарактеристика многообразия выражается через класс Pin^--кобордантности этой кривой (лемма 8.7). Этот факт методом Кошорке выводится из теоремы Атии о существовании пары всюду неколлинеарных векторных полей [4], см. § 8. Так всё сводится к одномерной задаче, похожей на случай $n = 1$, см. §§ 4, 9.

§ 1. Обозначения, термины и соглашения

Окружность C. Положим $C = \{\, z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \,\}$.

Кривые. *Кривой* называется одномерное многообразие. Под *римановой* кривой понимается кривая, снабжённая римановой структурой. Пусть даны компактная кривая T и погружение $f\colon T \to \mathbf{C}$. Если погружение f *самотрансверсально* (т. е. не имеет самокасаний и тройных точек), то пусть $\delta_2(f) \in \mathbf{Z}_2$ — класс числа его двойных точек. Если кривая T ориентирована, то пусть $\mathrm{g}(f)\colon T \to C$ — касательное сферическое отображение погружения f. Для гладкого отображения $g\colon T \to C$ пусть $\deg_2 g \in \mathbf{Z}_2$ — его степень. Для конечного множества D пусть $|D|_2 \in \mathbf{Z}_2$ — класс числа его элементов.

∂-многообразия. Под *∂-многообразием* понимается гладкое многообразие с краем (часто пустым). Соответственно используется слово *∂-подмногообразие.* Размерность ∂-многообразия указывается верхним индексом. Когда дано ∂-многообразие X, то ∂-подмногообразие $T \subset X$ называется *правильным,* если оно замкнуто и трансверсально подмногообразию ∂X, причём $\partial T = T \cap \partial X$.

Евклидовы пространства. Пусть дано евклидово векторное пространство G^p (верхним индексом указывается размерность). Для векторного подпространства $G_1 \subset G$ пусть $G \ominus G_1 \subset G$ — его ортогональное дополнение. Пусть $\mathrm{O}(G)$ и $\mathrm{SO}(G)$ — группы Ли ортогональных автоморфизмов пространства G, соответственно всех и сохраняющих ориентацию. Сокращение: $\mathrm{O}_p = \mathrm{O}(\mathbf{R}^p)$ и т. д. Пусть $\mathrm{P}(G)$ — многообразие, образованное ортогональными изоморфизмами $\mathbf{R}^p \to G$. На нём есть очевидные главные действия: левое — группы $\mathrm{O}(G)$ и правое — группы O_p. Если пространство G ориентировано, то пусть $\mathrm{SP}(G) \subset \mathrm{P}(G)$ — компонента, образованная изоморфизмами, сохраняющими ориентацию. Для ортогонального изоморфизма $t\colon G \to G'$ пусть

$t_*\colon \mathrm{P}(G) \to \mathrm{P}(G')$ — индуцированный им диффеоморфизм, $t_*\colon \mathrm{O}(G) \to \mathrm{O}(G')$ — изоморфизм групп Ли и т. д. Имеются вложение $\mathrm{P}(G) \to \mathrm{P}(G \oplus \mathbf{R})$, $r \mapsto r^+ = r \oplus 1$, и групповое вложение $\mathrm{O}(G) \to \mathrm{O}(G \oplus \mathbf{R})$, $v \mapsto v^+ = v \oplus 1$; здесь $1\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — единичный оператор. Пусть $\mathrm{Cliff}(G) \supset G$ — алгебра Клиффорда пространства G (с соотношениями $g^2 = -|g|^2$, $g \in G$), $\mathrm{Cliff}_0(G) \subset \mathrm{Cliff}(G)$ — подалгебра чётных элементов, $\mathrm{Spin}(G) \subset \mathrm{Cliff}_0(G)$ — спинорная группа (группа Ли относительно умножения Клиффорда). Ортогональное вложение $G \to G \oplus \mathbf{R}$, $g \mapsto (g, 0)$, индуцирует вложение алгебр Клиффорда и, как его сокращение, групповое вложение $\mathrm{Spin}(G) \to \mathrm{Spin}(G \oplus \mathbf{R})$, о котором будем писать: $V \mapsto V^+$. Пусть $\pi\colon \mathrm{Spin}(G) \to \mathrm{SO}(G)$ — стандартное групповое накрытие. Для любого элемента $V_0 \in \mathrm{Spin}(G)$ имеем $\{\, V \in \mathrm{Spin}(G) \mid \pi(V) = \pi(V_0) \,\} = \{\pm V_0\}$. Имеем $\pi(V^+) = \pi(V)^+$, $V \in \mathrm{Spin}(G)$. Предположим, что $p \equiv 2 \pmod 4$ и пространство G ориентировано. Снабдим векторное пространство $\mathrm{Cliff}_0(G)$ комплексной структурой. Выберем правый ортонормированный базис $(g_1, \dots, g_p)$ пространства G. Положим $I = g_1 \dots g_p \in \mathrm{Cliff}_0(G)$. Элемент I не зависит от выбора базиса, и $I^2 = -1$. Полагаем $iu = Iu$, $u \in \mathrm{Cliff}_0(G)$. Отметим, что $I \in \mathrm{Spin}(G)$ и $\pi(I) = -1$.

Расслоения. Под *расслоением* понимается гладкое расслоение (слои без края). Пусть даны расслоение ξ над ∂-многообразием X, точка $x \in X$ и ∂-подмногообразие $T \subset X$. Пусть $|\xi|$ — пространство расслоения ξ, ξ_x — его слой над точкой x, ξ_T — его сужение на ∂-подмногообразие T. Размерность векторного расслоения указывается верхним индексом. Пусть ϵ_X^p — тривиальное p-мерное векторное расслоение над ∂-многообразием X, $\epsilon_X^{\mathbf{C}}$ — тривиальное комплексное линейное расслоение над ним; $\epsilon_X = \epsilon_X^1$. О гладком подрасслоении ξ_1 расслоения ξ будем писать: $\xi_1 \subset \xi$. Касательное расслоение ∂-многообразия X обозначается $\tau(X)$. Вместо $\tau(X)_x$ и $\tau(X)_T$ будем писать соответственно $\tau_x(X)$ и $\tau_T(X)$. Будем считать, что $\tau(T) \subset \tau_T(X)$. Для гладкого отображения $f\colon X \to Y$ пусть $d_x f\colon \tau_x(X) \to \tau_{f(x)}(Y)$ — его дифференциал в точке $x \in X$. Символы $\ominus$, Hom и т. п. в отношении векторных расслоений обозначают послойное применение соответствующих конструкций; в частности, для евклидова векторного расслоения η^p, оказывается, $\mathrm{P}(\eta)$ — соответствующее главное O_p-расслоение. Под *сечением* понимается гладкое сечение. Пусть дано сечение u расслоения ξ; запись: $u \in \xi$. Пусть $u_x \in \xi_x$ — значение сечения u в точке x, $u_T \in \xi_T$ — его сужение на ∂-подмногообразие T. Под *морфизмом* понимается гладкий морфизм, накрывающий тождественное отображение базы. В отношении расслоений соответственно используется слово *изоморфизм.* Пусть дан морфизм $a\colon \xi \to \xi'$. Пусть $a_x\colon \xi_x \to \xi'_x$ — соответствующее отображение слоёв над точкой x, $a_T\colon \xi_T \to \xi'_T$ — сужение морфизма a на ∂-подмногообразие T. Инъективный на слоях линейный морфизм векторных расслоений называется *мономорфизмом.* Для ортогонального изоморфизма евклидовых векторных расслоений $t\colon \eta \to \eta'$ пусть $t_*\colon \mathrm{P}(\eta) \to \mathrm{P}(\eta')$, $t_*\colon \mathrm{SO}(\eta) \to \mathrm{SO}(\eta')$ — индуцированные им изоморфизмы. Для ориентированного евклидова векторного расслоения η^p, $p \equiv 2 \pmod 4$, расслоение $\mathrm{Cliff}_0(\eta)$ считается комплексным, в соответствии с концом предыдущего абзаца.

§ 2. Полухарактеристика кривых

(2.1) Лемма. *Пусть T — компактная ориентированная кривая, $f\colon T \to \mathbf{C}$ — самотрансверсальное погружение. Тогда $\boldsymbol{k}(T) = \delta_2(f) + \deg_2 \mathrm{g}(f)$.*

Доказательство. При замене погружения f на регулярно гомотопное классы $\delta_2(f)$ и $\deg_2 \mathrm{g}(f)$ не меняются. Зная классификацию погружений, можно проверить равенство для представителей всех классов регулярной гомотопности. $\square$

Доказательство теоремы 2 при $n = 1$. Рассмотрим такое гладкое отображение $F\colon V \to \mathbf{C}$, что отображения $f_j = F|X_j$, $j = 1, \dots, N$, — самотрансверсальные погружения. Пусть $c \in C$ — регулярное значение отображений $\mathrm{g}(f_j)$, $j = 1, \dots, N$. По лемме 2.1, $\boldsymbol{k}(X_j) = \delta_2(f_j) + |\mathrm{g}(f_j)^{-1}(c)|_2$, $j = 1, \dots, N$. Из предположения теоремы следует, что при суммировании по индексу j каждое из слагаемых даёт 0. $\square$

§ 3. s-морфизмы и пинорные структуры

Групповое вложение $\Delta(s)$. Для евклидовых векторных пространств F^m и G^{m+n}, $n \equiv 1 \pmod 2$, и ортогонального вложения $s\colon F \to G$ определим групповое вложение $\Delta(s)\colon \mathrm{O}(F) \to \mathrm{SO}(G)$ условиями $\Delta(s)(u)(s(f)) = s(u(f))$, $f \in F$, $u \in \mathrm{O}(F)$, и $\Delta(s)(u)(g) = (\det u)g$, $g \in G \ominus \operatorname{im} s$, $u \in \mathrm{O}(F)$.

s-морфизмы. Пусть даны евклидовы векторные расслоения ζ^m и η^{m+n}, $n \equiv 1 \pmod 2$, над ∂-многообразием T и ортогональный мономорфизм $s\colon \zeta \to \eta$. Морфизм $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$ будем называть *s-морфизмом,* если $R_t(uq) = \Delta(s_t)(u)R_t(q)$, $u \in \mathrm{O}(\zeta_t)$, $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $t \in T$ (при $m = 1$ это просто означает, что $R_t(-q) = -R_t(q)$, $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $t \in T$). Пусть $s^+\colon \zeta \oplus \epsilon_T \to \eta \oplus \epsilon_T$ — ортогональный мономорфизм, индуцированный морфизмом s. Для s-морфизма $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$ определим s^+-морфизм $R^+\colon \mathrm{P}(\zeta \oplus \epsilon_T) \to \mathrm{SO}(\eta \oplus \epsilon_T)$ условием $R^+_t(q^+) = R_t(q)^+$, $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $t \in T$.

Вложение s^n_m. Пусть $\mathrm{s}^n_m\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m+n}$ — стандартное ортогональное вложение.

Группа Ли Pin^n_m. Пусть $n \equiv 1 \pmod 2$, $n, m \geqslant 0$. Положим $\mathrm{Pin}^n_m = \{\, (a, B) \in \mathrm{O}_m \times \mathrm{Spin}_{m+n} \mid \Delta(\mathrm{s}^n_m)(a) = \pi(B) \,\}$ — с покомпонентным умножением (при $n \equiv \pm 1 \pmod 4$ это модель группы $\mathrm{Pin}^{\mp}_m$ [5]). Определим групповое накрытие $\pi\colon \mathrm{Pin}^n_m \to \mathrm{O}_m$, для элемента $A \in \mathrm{Pin}^n_m$, $A = (a, B)$, где $a \in \mathrm{O}_m$, $B \in \mathrm{Spin}_{m+n}$, полагая $\pi(A) = a$. Определим групповое вложение $\mathrm{Pin}^n_m \to \mathrm{Pin}^n_{m+1}$, для того же элемента A полагая $A \mapsto A^+ = (a^+, B^+)$. Отметим, что Pin^n_1, $n \equiv 1 \pmod 4$, — циклическая группа порядка 4.

Пинорные структуры. Pin^n*-структурой,* $n \equiv 1 \pmod 2$, $n \geqslant 0$, (или просто *пинорной структурой)* на евклидовом векторном расслоении ζ^m над ∂-многообразием T называется пара $\Sigma = (\sigma, p)$, где σ — главное Pin^n_m-расслоение над ∂-многообразием T, $p\colon \sigma \to \mathrm{P}(\zeta)$ — такой морфизм, что $p_t(QA) = p_t(Q)\pi(A)$, $A \in \mathrm{Pin}^n_m$, $Q \in \sigma_t$, $t \in T$. Pin^n-структуры $\Sigma = (\sigma, p)$ и $\Sigma' = (\sigma', p')$ на евклидовом векторном расслоении ζ называются *изоморфными,* если существует такой сохраняющий действие группы Pin^n_m изоморфизм $h\colon \sigma \to \sigma'$, что $p = p' \circ h$. Под пинорной структурой на римановом ∂-многообразии понимается пинорная структура на его касательном расслоении.

Пинорная структура Σ^-**.** Пусть даны евклидово векторное расслоение ζ^m над ∂-многообразием T и Pin^n-структура $\Sigma = (\sigma', p')$ на расслоении $\zeta \oplus \epsilon_T$. Построим Pin^n-структуру $\Sigma^- = (\sigma, p)$ на расслоении ζ. Для точки $t \in T$ положим $\sigma_t = \{\, (q, Q') \in \mathrm{P}(\zeta_t) \times \sigma'_t \mid q^+ = p'(Q') \,\}$. Гладкая структура на множестве $|\sigma|$ определяется включением $|\sigma| \to |\mathrm{P}(\zeta)| \times |\sigma|$. Морфизм $p\colon \sigma \to \mathrm{P}(\zeta)$ пусть есть проекция. Введём на расслоении σ структуру главного Pin^n_m-расслоения. Возьмём точку $t \in T$. Определим главное правое действие группы Pin^n_m на многообразии σ_t, для элемента $A \in \mathrm{Pin}^n_m$ и точки $Q \in \sigma_t$, $Q = (q, Q')$, где $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $Q' \in \sigma'_t$, полагая $QA = (q\pi(A), Q'A^+)$.

Пинорная структура $\Gamma(s, R)$**.** Пусть даны евклидовы векторные расслоения ζ^m и η^{m+n}, $n \equiv 1 \pmod 2$, над ∂-многообразием T, причём расслоение η ориентировано, ортогональный мономорфизм $s\colon \zeta \to \eta$ и s-морфизм $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$. Построим Pin^n-структуру $\Gamma(s, R) = (\sigma, p)$ на расслоении ζ. Для точки $t \in T$ положим $\sigma_t = \{\, (q, V) \in \mathrm{P}(\zeta_t) \times \mathrm{Spin}(\eta_t) \mid R_t(q) = \pi(V) \,\}$. Гладкая структура на множестве $|\sigma|$ определяется включением $|\sigma| \to |\mathrm{P}(\zeta)| \times |\mathrm{Spin}(\eta)|$. Морфизм $p\colon \sigma \to \mathrm{P}(\zeta)$ пусть есть проекция. Введём на расслоении σ структуру главного Pin^n_m-расслоения. Возьмём точку $t \in T$. Выберем такие изоморфизмы $q_0 \in \mathrm{P}(\zeta_t)$ и $r_0 \in \mathrm{SP}(\eta_t)$, что $sq_0 = r_0 \mathrm{s}^n_m$. Определим главное правое действие группы Pin^n_m на многообразии σ_t, для элемента $A \in \mathrm{Pin}^n_m$, $A = (a, B)$, где $a \in \mathrm{O}_m$, $B \in \mathrm{Spin}_{m+n}$, и точки $Q \in \sigma_t$, $Q = (q, V)$, где $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $V \in \mathrm{Spin}(\eta_t)$, полагая $QA = (qa, V(R_t(q_0)^{-1} r_0)_*(B))$. Нетрудно проверить, что это действие не зависит от выбора изоморфизмов q_0 и r_0.

(3.1) *Пусть ζ^m и η^{m+n}, $n \equiv 1 \pmod 2$, — евклидовы векторные расслоения над ∂-многообразием T, причём расслоение η ориентировано, $s\colon \zeta \to \eta$ — ортогональный мономорфизм, $R\colon \mathrm{P}(\zeta) \to \mathrm{SO}(\eta)$ — s-морфизм. Тогда Pin^n-структуры $\Gamma(s, R)$ и $\Gamma(s^+, R^+)^-$ на расслоении ζ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\Gamma(s, R) = (\sigma, p)$, $\Gamma(s^+, R^+)^- = (\sigma', p')$. Нужный изоморфизм $h\colon \sigma \to \sigma'$ определим, для точки $t \in T$ и точки $Q \in \sigma'_t$, $Q = (q, V)$, где $q \in \mathrm{P}(\zeta_t)$, $V \in \mathrm{Spin}(\eta_t)$, полагая $h_t(Q) = (q, (q^+, V^+))$. □

§ 4. Инвариант $\boldsymbol{j}$

Для компактной римановой кривой T и Pin^n-структуры, $n \equiv 1 \pmod 4$, $\Sigma = (\sigma, p)$ на ней пусть $\boldsymbol{j}(T, \Sigma) \in \mathbf{Z}_2$ — класс числа тех компонент кривой T, над которыми накрытие σ тривиально.

Конструкция $\Theta\colon (T, \eta, s, R, l, f) \mapsto g$**.** Пусть даны компактная риманова кривая T, ориентированное евклидово векторное расслоение η^p, $p \equiv 2 \pmod 4$, над ней, ортогональный мономорфизм $s\colon \tau(T) \to \eta$, s-морфизм $R\colon \mathrm{P}(\tau(T)) \to \mathrm{SO}(\eta)$, комплексно-линейный морфизм $l\colon \mathrm{Cliff}_0(\eta) \to \epsilon^{\mathbf{C}}_T$ и погружение $f\colon T \to \mathbf{C}$. Построим гладкое отображение $g\colon T \to C$. Возьмём точку $t \in T$. Выберем такие изоморфизм $q \in \mathrm{P}(\tau_t(T))$ и элемент $V \in \mathrm{Spin}(\eta_t)$, что $R_t(q) = \pi(V)$. Положим $z = l_t(V)^2 d_t f(q(1)) \in \mathbf{C}$. Легко видеть, что число z не зависит от выбора изоморфизма q и элемента V. Предположим, что $z \neq 0$ (это так во всех точках, если l — общий комплексно-линейный морфизм). Положим $g(t) = z/|z|$.

(4.1) Лемма. *Пусть* $\Theta\colon (T,\eta,s,R,l,f)\mapsto g$ *и погружение* f *самотрансверсально. Тогда* $\boldsymbol{j}(T,\Gamma(s,R))=\delta_2(f)+\deg_2 g$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(s,R)=(\sigma,p)$. Ориентируем кривую T. Определим сечение $v\in \mathrm{SO}(\eta)$, для точки $t\in T$ полагая $v_t=R_t(q)$, где $q\in \mathrm{SP}(\tau_t(T))$. Определим отображение $b\colon T\to C$, полагая $b(t)=g(t)/\mathrm{g}(f)(t)$, $t\in T$. Тогда $\deg_2 b=\deg_2 g-\deg_2 \mathrm{g}(f)$. По лемме 2.1, $\boldsymbol{k}(T)=\delta_2(f)+\deg_2 \mathrm{g}(f)$. Таким образом, нужно показать, что $\boldsymbol{j}(T,\Gamma(s,R))=\boldsymbol{k}(T)+\deg_2 b$. Возьмём компоненту $T'\subset T$. Достаточно показать, что накрытие $\sigma_{T'}$ тривиально, если и только если $\deg_2 b|T'=0$. Нетрудно понять, что первое равносильно существованию такого сечения $V'\in \mathrm{Spin}(\eta_{T'})$, что $\pi(V'_t)=v_t$, $t\in T'$. Пусть V' — такое сечение. Легко видеть, что тогда $b(t)/l_t(V'_t)^2>0$, $t\in T'$. Следовательно, $\deg_2 b|T'=0$. Обратно. Пусть $\deg_2 b|T'=0$. Выберем такое гладкое отображение $B'\colon T'\to C$, что $B'(t)^2=b(t)$, $t\in T'$. Значение нужного сечения V' в каждой точке $t\in T'$ определим дополнительным условием $B'(t)/l_t(V'_t)>0$. $\square$

§ 5. Кобордизмы

Этот параграф нужен только для доказательства леммы 8.7.

Кобордизмом называется компактное ∂-многообразие Y с разложением $\partial Y=\partial_+Y\sqcup\partial_-Y$. Под *римановым* кобордизмом понимается кобордизм, снабжённый римановой структурой.

Изоморфизмы $\mathrm{v}(Y)$ **и** $\mathrm{w}(Y)$**.** Пусть дан риманов кобордизм Y. Определим сечение $e\in\tau_{\partial Y}(Y)$: для точки $x\in\partial_\pm Y$ пусть $e_x\perp\tau_x(\partial Y)$, $|e_x|=1$ и вектор $\pm e_x$ направлен наружу. Определим ортогональные изоморфизмы $\mathrm{v}(Y)\colon \tau(\partial Y)\oplus\epsilon_{\partial Y}\to\tau_{\partial Y}(Y)$, полагая $\mathrm{v}(Y)_x((u,t))=u+te_x$, $u\in\tau_x(\partial Y)$, $t\in\mathbf{R}$, $x\in\partial X$, и $\mathrm{w}(Y)\colon\tau(\partial Y)\oplus\epsilon^2_{\partial Y}\to\tau_{\partial Y}(Y)\oplus\epsilon_{\partial Y}$, полагая $\mathrm{w}(Y)_x((u,t))=(u+t_2e_x,-t_1)$, $u\in\tau_x(\partial Y)$, $t\in\mathbf{R}^2$, $x\in\partial X$.

Пинорные структуры $\partial_\pm\Sigma$**. Группа** Π^n_m**.** Пусть даны риманов кобордизм U^{m+1} и Pin^n-структура $\Sigma=(\sigma,p)$ на нём. Тогда $\Sigma_1=(\sigma_{\partial U},\mathrm{v}(U)^{-1}_*\circ p_{\partial U})$ — Pin^n-структура на расслоении $\tau(\partial U)\oplus\epsilon_{\partial U}$. Определим Pin^n-структуры $\partial_\pm\Sigma$ на многообразиях $\partial_\pm U$ как сужения Pin^n-структуры Σ_1^-. Такие пары, как $(\partial_\pm U,\partial_\pm\Sigma)$, будем называть Pin^n*-кобордантными.* По обычной схеме строятся группы Pin^n-кобордизмов Π^n_m. Для компактного риманова многообразия T^m и Pin^n-структуры Σ на нём пусть $[T,\Sigma]\in\Pi^n_m$ — класс кобордантности пары (T,Σ).

Тонкие структуры. *Тонкой структурой* на кобордизме Y будем называть такой линейный морфизм $c\colon\tau(Y)\to\epsilon_Y$, что $c_y\neq 0$, $y\in Y$, и в точке $x\in\partial_\pm Y$ форма $\pm c_x$ принимает положительные значения на векторах, направленных наружу (и, следовательно, $\ker c_x=\tau_x(\partial Y)$).

Изоморфизм $\mathrm{W}(Y,c)$**.** Пусть даны риманов кобордизм Y и тонкая структура c на нём. Определим сечение $E\in\tau(Y)$: для точки $y\in Y$ пусть $E_y\perp\ker c_y$, $|E_y|=1$ и $c_y(E_y)>0$. Определим ортогональный изоморфизм $\mathrm{W}(Y,c)\colon \ker c\oplus\epsilon^2_Y\to\tau(Y)\oplus\epsilon_Y$, полагая $\mathrm{W}(Y,c)_y((u,t))=(u+t_2E_y,-t_1)$, $u\in\ker c_y$, $t\in\mathbf{R}^2$, $y\in Y$.

Ориентированные кобордизмы. Группа ω_n. Когда Y — ориентированный кобордизм, то многообразия $\partial_\pm Y$ считаются ориентированными — по обычному правилу (так что если кобордизм Y снабжён римановой структурой, то изоморфизм $\mathrm{v}(Y)$ сохраняет ориентацию). Если Y — ориентированный кобордизм, а c — тонкая структура на нём, то ориентированные многообразия $\partial_\pm Y$ *тонко кобордантны.* По обычной схеме строятся группы тонких ориентированных кобордизмов ω_n. (Вместо тонких структур обычно используют векторные поля.) Для ориентированного компактного многообразия X^n пусть $[X] \in \omega_n$ — его класс кобордантности.

§ 6. Особенности линейного морфизма

Конструкция $\mathrm{K}\colon (X,\lambda,\mu,a) \mapsto (T,D)$ (по [3, § 1]). Пусть даны компактное ∂-многообразие X^n, векторные расслоения λ^p и μ^q над ним и линейный морфизм $a\colon \lambda \to \mu$. Положим $T = \{\, x \in X \mid \operatorname{rg} a_x < p \,\}$. Положим $\xi = \mathrm{Hom}(\lambda,\mu)$. Для целого r пусть $\xi^r \subset \xi$ — подрасслоение, образованное линейными отображениями ранга r. Определим гладкое отображение $s\colon X \to |\xi|$, полагая $s(x) = a_x$, $x \in X$. Морфизм a будем называть *невырожденным,* если отображения s и $s|\partial X$ трансверсальны ∂-подмногообразиям $|\xi^r|$. Предположим, что морфизм a невырожден и $n < 2(q-p+2)$. Тогда $T = s^{-1}(|\xi^{p-1}|)$ и это правильное ∂-подмногообразие размерности $m = n+p-q-1$. Построим линейный изоморфизм $D\colon \mathrm{Hom}(\ker a_T, \operatorname{coker} a_T) \to \tau_T(X)/\tau(T)$. Возьмём точку $t \in T$. Положим $u = a_t \in \xi_t$. Рассмотрим такую диаграмму.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(\lambda_t,\mu_t) & \xrightarrow{\ j\ } & \tau_u(|\xi|) & \xleftarrow{\ d_t s\ } & \tau_t(X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}(\ker a_t, \operatorname{coker} a_t) & \xrightarrow{\ g\ } & \tau_u(|\xi|)/\tau_u(|\xi^{p-1}|) & \xleftarrow{\ h\ } & \tau_t(X)/\tau_t(T)
\end{array}$$

Отображение j — композиция очевидного изоморфизма $\mathrm{Hom}(\lambda_t,\mu_t) = \xi_t \to \tau_u(\xi_t)$ и включения $\tau_u(\xi_t) \to \tau_u(|\xi|)$. Первая вертикальная стрелка индуцирована включением $\ker a_t \to \lambda_t$ и проекцией $\mu_t \to \operatorname{coker} a_t$. Две другие — проекции. Отображения g и h определяются условием коммутативности диаграммы и являются изоморфизмами. Положим $D_t = h^{-1}g$.

(6.1) *Пусть* $\mathrm{K}\colon (Y,\lambda,\mu,b) \mapsto (U,E)$, $X = \partial Y$ *и* $\mathrm{K}\colon (X,\lambda_X,\mu_X,b_X) \mapsto (T,D)$. *Тогда* $T = \partial U$ *и* $JD = E_T$, *где* $J\colon \tau_T(X)/\tau(T) \to \tau_T(Y)/\tau_T(U)$ *— изоморфизм, индуцированный морфизмом включения* $\tau_T(X) \to \tau_T(Y)$. $\square$

§ 7. Особенности пары векторных полей

Изоморфизму евклидовых векторных пространств $h\colon G \to G'$ сопоставим ортогональный изоморфизм $\phi(h)\colon G \to G'$ по формуле из [6, § 4]:[2] $\phi(h) = h(h^*h)^{-1/2}$. Когда G — евклидово векторное пространство, то линейному отображению $f\colon \mathbf{C} \to G$ ранга 1 сопоставим ортогональный изоморфизм $\kappa(f)\colon \ker f \to \operatorname{im} f$, полагая $\kappa(f)(z) = kf(iz)$, $z \in \ker f$, с подходящим коэффициентом $k > 0$. Для евклидова векторного пространства E^1, изоморфизма $p \in \mathrm{P}(E)$ и векторного пространства V определим изоморфизм $\iota(p)\colon \mathrm{Hom}(E,V) \to V$, полагая $\iota(p)(u) = u(p(1))$, $u \in \mathrm{Hom}(E,V)$.

---

[2] Я узнал эту формулу от Е. В. Троицкого.

Конструкция $\mathrm{M}\colon (X,a) \mapsto (T,s,R)$**.** Пусть даны компактное риманово многообразие X^n, $n \equiv 1 \pmod 2$, и невырожденный линейный морфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbf{C}} \to \tau(X)$. Пусть $\mathrm{K}\colon (X, \epsilon_X^{\mathbf{C}}, \tau(X), a) \mapsto (T^1, D)$. Определим ортогональный мономорфизм $s\colon \tau(T) \to \tau_T(X) \oplus \epsilon_T$, полагая $s_t(f) = (f,0)$, $f \in \tau_t(T)$, $t \in T$. Построим s-морфизм $R\colon \mathrm{P}(\tau(T)) \to \mathrm{SO}(\tau_T(X) \oplus \epsilon_T)$. Возьмём точку $t \in T$. Для изоморфизма $p \in \mathrm{P}(\ker a_t)$ определим изоморфизм $I(p)$ такой коммутативной диаграммой.

$$\begin{array}{ccccc}
\tau_t(X) \ominus \operatorname{im} a_t & & \xrightarrow{I(p)} & & \tau_t(X) \ominus \tau_t(T) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\operatorname{coker} a_t & \xrightarrow{\iota(p)^{-1}} & \operatorname{Hom}(\ker a_t, \operatorname{coker} a_t) & \xrightarrow{D_t} & \tau_t(X)/\tau_t(T)
\end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки — очевидные изоморфизмы (сужения проекций). Для изоморфизмов $p \in \mathrm{P}(\ker a_t)$ и $q \in \mathrm{P}(\tau_t(T))$ построим оператор $r(p,q) \in \mathrm{O}(\tau_t(T) \oplus \mathbf{R})$, соединяя ортогональные изоморфизмы $\phi(I(p))\colon \tau_t(X) \ominus \operatorname{im} a_t \to \tau_t(X) \ominus \tau_t(T)$, $-(\kappa(a_t)p)^{-1}\colon \operatorname{im} a_t \to \mathbf{R}$ и $q\colon \mathbf{R} \to \tau_t(T)$. Для изоморфизма $q \in \mathrm{P}(\tau_t(T))$ возьмём тот изоморфизм $p \in \mathrm{P}(\ker a_t)$, при котором $\det r(p,q) = 1$, и положим $R_t(q) = r(p,q)$.

Остальная часть параграфа нужна только для доказательства леммы 8.7.

Конструкция $\mathrm{N}\colon (Y,c,b) \mapsto (U,t,S)$**.** Пусть даны риманов кобордизм Y^{n+1}, $n \equiv 1 \pmod 2$, $n > 1$, тонкая структура c на нём и невырожденный линейный морфизм $b\colon \epsilon_Y^{\mathbf{C}} \to \ker c$. Пусть $\mathrm{K}\colon (Y, \epsilon_Y^{\mathbf{C}}, \ker c, b) \mapsto (U^2, E)$. Полагая $\partial_\pm U = U \cap \partial_\pm Y$, сделаем ∂-многообразие U кобордизмом. Определим ортогональный мономорфизм $t\colon \tau(U) \to \tau_U(Y) \oplus \epsilon_U$, полагая $t_u(f) = (f,0)$, $f \in \tau_u(U)$, $u \in U$. Построим t-морфизм $S\colon \mathrm{P}(\tau(U)) \to \mathrm{SO}(\tau_U(Y) \oplus \epsilon_U)$. Возьмём точку $u \in U$. Для изоморфизма $p \in \mathrm{P}(\ker b_u)$ определим изоморфизм $I(p)$ такой коммутативной диаграммой.

$$\begin{array}{ccccc}
\ker c_u \ominus \operatorname{im} b_u & & \xrightarrow{I(p)} & & \tau_u(Y) \ominus \tau_u(U) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
\operatorname{coker} b_u & \xrightarrow{\iota(p)^{-1}} & \operatorname{Hom}(\ker b_u, \operatorname{coker} b_u) & \xrightarrow{E_u} & \tau_u(Y)/\tau_u(U)
\end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки — очевидные изоморфизмы (сужения проекций). Для изоморфизмов $p \in \mathrm{P}(\ker b_u)$ и $q \in \mathrm{P}(\tau_u(U))$ построим ортогональный изоморфизм $r(p,q)\colon \ker c_u \oplus \mathbf{R}^2 \to \tau_u(Y) \oplus \mathbf{R}$, соединяя ортогональные изоморфизмы $\phi(I(p))\colon \ker c_u \ominus \operatorname{im} b_u \to \tau_u(Y) \ominus \tau_u(U)$, $(\kappa(b_u)p)^{-1}\colon \operatorname{im} b_u \to \mathbf{R}$ и $q\colon \mathbf{R}^2 \to \tau_u(U)$, и определим оператор $s(p,q) \in \mathrm{O}(\tau_u(Y) \oplus \mathbf{R})$ формулой $s(p,q) = r(p,q)\mathrm{W}(Y,c)_u^{-1}$. Для изоморфизма $q \in \mathrm{P}(\tau_u(U))$ возьмём тот изоморфизм $p \in \mathrm{P}(\ker b_u)$, при котором $\det s(p,q) = 1$, и положим $S_u(q) = s(p,q)$.

(7.1) *Пусть* $\mathrm{N}\colon (Y,c,b)\mapsto(U,t,S)$, $X=\partial Y$ *и* $\mathrm{M}\colon (X,b_X)\mapsto(T,s,R)$. *Тогда* $T=\partial U$. *Если* $\tau_T(Y)\ominus\tau_T(X)\subset\tau_T(U)$, *то* $\mathrm{w}(Y)_T s^+ = t_T\mathrm{v}(U)$ *и диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}(\tau(T)\oplus\epsilon_T) \arrow[r, "R^+"] \arrow[d, "\mathrm{v}(U)_*"'] & \mathrm{SO}(\tau_T(X)\oplus\epsilon_T^2) \arrow[d, "(\mathrm{w}(Y)_T)_*"] \\
\mathrm{P}(\tau_T(U)) \arrow[r, "S_T"] & \mathrm{SO}(\tau_T(Y)\oplus\epsilon_T)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следует из построения и 6.1. $\square$

§ 8. Нахождение полухарактеристики многообразия

Цель этого параграфа — доказательство леммы 8.7.

Гомоморфизм j_n**.** Пусть $n\equiv 1 \pmod 4$. Формула $[T,\Sigma]\mapsto \boldsymbol{j}(T,\Sigma)$ определяет гомоморфизм $j_n\colon \Pi_1^n\to\mathbf{Z}_2$ [5].

Гомоморфизм k_n**.** Пусть $n\equiv 1 \pmod 4$. Формула $[X]\mapsto\boldsymbol{k}(X)$ определяет гомоморфизм $k_n\colon\omega_n\to\mathbf{Z}_2$ [3, Theorem 12.1].

Гомоморфизм h_n (ср. [3, Theorem 13.4]). Пусть $n\equiv 1 \pmod 2$. Построим гомоморфизм $h_n\colon\omega_n\to\Pi_1^n$. Пусть дано компактное ориентированное многообразие X^n. Снабдим его римановой структурой и выберем невырожденный линейный морфизм $a\colon\epsilon_X^{\mathbf{C}}\to\tau(X)$. Пусть $\mathrm{M}\colon (X,a)\to(T^1,s,R)$. Положим $h_n([X])=[T,\Gamma(s,R)]$. Проверим корректность. Пусть даны ориентированный кобордизм Y^{n+1} и тонкая структура c на нём; пусть ориентированные многообразия $X_\pm=\partial_\pm Y$ снабжены римановой структурой и $\mathrm{M}\colon (X_\pm,a_\pm)\mapsto(T^1_\pm,s_\pm,R_\pm)$. Покажем, что пары $(T_\pm,\Gamma(s_\pm,R_\pm))$ Pin^n-кобордантны. Пусть $n>1$ (рассмотрение случая $n=1$ опускается). Продолжим морфизмы $a_\pm$ до невырожденного линейного морфизма $b\colon\epsilon_Y^{\mathbf{C}}\to\ker c$. Продолжим риманову структуру с края на всё ∂-многообразие Y. Пусть $\mathrm{N}\colon (Y,c,b)\mapsto(U^2,t,S)$. Тогда $\partial_\pm U=T_\pm$. Будем считать, что $\tau_{\partial U}(Y)\ominus\tau_{\partial U}(X)\subset\tau_{\partial U}(U)$ (это можно было обеспечить при выборе продолжения римановой структуры, т. к. поверхность U от него не зависит). Из 7.1 (с учётом того, что изоморфизм $\mathrm{w}(Y)$ сохраняет ориентацию) и 3.1 следует, что Pin^n-структуры $\Gamma(s_\pm,R_\pm)$ и $\partial_\pm\Gamma(t,S)$ изоморфны. Корректность проверена. Аддитивность отображения h_n очевидна.

(8.1) *Любой элемент группы* ω_n, $n\equiv 1 \pmod 2$, $n\geqslant 5$, *представим односвязным многообразием.*

Доказательство. Пусть X^n — компактное ориентированное многообразие. Приклеивая к кобордизму $X\times[-1,1]$ ручки индексов 0, 1 и 2, построим односвязный ориентированный кобордизм Y. Добавляя ручки индекса 2 или 3, сделаем его эйлерову характеристику равной 0. По теореме Пуанкаре-Хопфа, кобордизм Y допускает тонкую структуру. Многообразие ∂_+Y односвязно, т. к. кобордизм Y односвязен, а "коиндексы" всех ручек не меньше 3. $\square$

(8.2) *Односвязное компактное ориентированное многообразие X^n, $n \equiv 1 \pmod 4$, с $\boldsymbol{k}(X) = 0$ допускает мономорфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbf{C}} \to \tau(X)$.* $\square$

Следует из [4, Theorem 5.1]. $\square$

(8.3) *Если компактное многообразие X^n, $n \equiv 1 \pmod 2$, допускает мономорфизм $a\colon \epsilon_X^{\mathbf{C}} \to \tau(X)$, то $h_n([X]) = 0$.* $\square$

(8.4) *Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $\ker k_n \subset \ker h_n$.*

Можно проверить, что $\ker k_1 = 0$. При $n \geqslant 5$ утверждение следует из 8.1, 8.2 и 8.3. $\square$

Положим $S^n = \{\, t \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |t| = 1 \,\}$ — со стандартной ориентацией.

(8.5) *Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $j_n \circ h_n\left([S^n]\right) = 1$.*

Доказательство. Пусть $F\colon S^n \to \mathbf{C}$ — сужение сюръективного линейного отображения $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{C}$. Определим невырожденный линейный морфизм $a\colon \epsilon_{S^n}^{\mathbf{C}} \to \tau(S^n)$, полагая $a_x = (d_x F)^*$, $x \in S^n$. Пусть $\mathrm{M}\colon (S^n, a) \mapsto (T, s, R)$ и $\Gamma(s, R) = (\sigma, p)$. Тогда T — окружность, и, как нетрудно понять, накрытие σ тривиально. $\square$

(8.6) *Пусть $n \equiv 1 \pmod 4$. Тогда $k_n = j_n \circ h_n$.*

Следует из 8.4 и 8.5. $\square$

(8.7) Лемма. *Пусть $\mathrm{M}\colon (X^n, a) \mapsto (T, s, R)$, $n \equiv 1 \pmod 4$, и многообразие X ориентировано. Тогда $\boldsymbol{k}(X) = \boldsymbol{j}(T, \Gamma(s, R))$.*

Следует из 8.6. $\square$

Вопрос. Как найти полухарактеристику многообразия по множеству критических значений его общего отображения в плоскость? (Можно учитывать какие-нибудь “метки” на этом множестве.)

§ 9. Полухарактеристика подмногообразий

Конструкция $\Phi\colon (V, A, F, L, X) \mapsto (T, f, g)$. Пусть даны риманово многообразие V, линейный морфизм $A\colon \epsilon_V^{\mathbf{C}} \to \tau(V)$, гладкое отображение $F\colon V \to \mathbf{C}$, линейный морфизм $L\colon \mathrm{Cliff}_0(\tau(V) \oplus \epsilon_V) \to \epsilon_V$ и компактное ориентированное подмногообразие $X^n \subset V$, $n \equiv 1 \pmod 4$. Пусть $p\colon \tau_X(V) \to \tau(X)$ — морфизм ортогональной проекции. Предположим, что линейный морфизм $a = pA_X$ невырожден. Пусть $\mathrm{M}\colon (X, a) \mapsto (T^1, s, R)$. Считая, что $\mathrm{Cliff}_0(\tau(X) \oplus \epsilon_X) \subset \mathrm{Cliff}_0(\tau_X(V) \oplus \epsilon_X)$ (подразумевается мономорфизм, индуцированный морфизмом включения $\tau(X) \to \tau_X(V)$), определим комплексно-линейный морфизм $l\colon \mathrm{Cliff}_0(\tau(X) \oplus \epsilon_X) \to \epsilon_X^{\mathbf{C}}$, полагая $l_x(u) = (L_x(u) - iL_x(iu))/2$, $u \in \mathrm{Cliff}_0(\tau_x(X) \oplus \mathbf{R})$, $x \in X$. Предположим, что $f = F|T$ — погружение. Пусть $\Theta\colon (T, \tau_T(X) \oplus \epsilon_T, s, R, l, f) \mapsto g$ (предположим, что это построение выполнимо).

(9.1) *Пусть $\Phi\colon (V, A, F, L, X^n) \mapsto (T^1, f, g)$. Предположим, что погружение f самотрансверсально. Тогда $\boldsymbol{k}(X) = \delta_2(f) + \deg_2 g$.*

Следует из лемм 8.7 и 4.1. $\square$

(9.2) *Пусть* $\Phi\colon (V, A, F, L, X_j) \mapsto (T_j, f_j, g_j)$, $j = 1, 2$. *Пусть* $O \subset V$ — *открытое множество. Тогда если* $X_1 \cap O = X_2 \cap O$ *(с учётом ориентаций), то* $T_1 \cap O = T_2 \cap O$ *и на этом множестве* $f_1 = f_2$ *и* $g_1 = g_2$. $\square$

(9.3) *Пусть* V — *риманово многообразие,* $X_j^n \subset V$, $n \equiv 1 \pmod 4$, $j = 1, \ldots, N$, — *набор компактных ориентированных подмногообразий. Тогда существуют такие линейный морфизм* $A\colon \epsilon_V^{\mathbf{C}} \to \tau(V)$, *гладкое отображение* $F\colon V \to \mathbf{C}$ *и линейный морфизм* $L\colon \mathrm{Cliff}_0(\tau(V) \oplus \epsilon_V) \to \epsilon_V$, *что построения* $\Phi\colon (V, A, F, L, X_j) \mapsto (T_j, f_j, g_j)$, $j = 1, \ldots, N$, *выполнимы и получающиеся погружения* f_j *самотрансверсальны.*

Достаточно взять общую тройку (A, F, L). $\square$

Доказательство теоремы 2. Снабдим многообразие V римановой структурой. Используем 9.3: пусть $\Phi\colon (V, A, F, L, X_j) \mapsto (T_j, f_j, g_j)$, $j = 1, \ldots, N$, причём погружения f_j самотрансверсальны. Пусть $c \in C$ — регулярное значение отображений g_j, $j = 1, \ldots, N$. По 9.1, $\boldsymbol{k}(X_j) = \delta_2(f_j) + |g_j^{-1}(c)|_2$, $j = 1, \ldots, N$. В силу 9.2 из предположения теоремы следует, что при суммировании по индексу j каждое из слагаемых даёт 0. $\square$

Список литературы

1. М. Ф. Атья, И. М. Зингер, *Индекс эллиптических операторов. V*, Успехи мат. наук **27** (1972), №4, стр. 179 — 188.
2. U. Karras, M. Kreck, W. D. Neumann, E. Ossa, *Cutting and pasting of manifolds; SK-groups*, Boston, Publish or Perish, Inc., 1973.
3. U. Koschorke, *Vector fields and other vector bundle morphisms — a singularity approach*, Lect. Notes Math., vol. 847, 1981.
4. M. F. Atiyah, *Vector fields on manifolds*, Arbeitsgemeinschaft Forsch. Nordrhein-Westfalen, Heft 200, 1970.
5. R. C. Kirby, L. R. Taylor, Pin *structures on low-dimensional manifolds*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. **151** (1990), pp. 177 — 242.
6. Н. Кюйпер, *Гомотопический тип унитарной группы гильбертова пространства*, в кн.: М. Атья, Лекции по K-теории, М., Мир, 1967, стр. 241 — 260.