ЗЕРКАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. С. Подкорытов

Дается ответ на вопрос о том, при каких m и n существуют зеркальные конфигурации из m точек и n прямых в $\mathbb{R}P^3$. Попутно дается новое доказательство незеркальности некоторых поверхностей степени 4.

О. Я. Виро в работе [1] предложил рассматривать смешанные конфигурации точек и прямых в $\mathbb{R}P^3$ и ввел понятие зеркальной конфигурации.

Пусть $\mathbb{R}G_1(P^3)$ обозначает пространство прямых пространства $\mathbb{R}P^3$.

Определение. Конфигурацией называется неупорядоченный набор точек и прямых $\{p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}P^3;\ l_1, \dots, l_n \in \mathbb{R}G_1(P^3)\}$. Конфигурация называется неособой, если выполнены такие условия:

ее точки попарно различны;

никакие три ее точки не лежат на одной прямой;

никакие четыре ее точки не лежат в одной плоскости;

ее прямые попарно не пересекаются;

никакая ее точка не лежит ни на какой ее прямой;

никакие две ее точки не лежат в одной плоскости ни с какой ее прямой.

Определение. Жесткой изотопией называется набор непрерывных отображений $\{q_1, \dots, q_m \colon [0,1] \to \mathbb{R}P^3;\ m_1, \dots, m_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}G_1(P^3)\}$ такой, что при всех t конфигурация $\{q_1(t), \dots, q_m(t);\ m_1(t), \dots, m_n(t)\}$ является неособой.

Фиксируем зеркальную симметрию $s\colon \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$, $s((x_0 : x_1 : x_2 : x_3)) = (-x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$.

Определение. Неособая конфигурация $\{p_1, \dots, p_m;\ l_1, \dots, l_n\}$ называется зеркальной, если существует жесткая изотопия $\{q_1, \dots, q_m \colon [0,1] \to \mathbb{R}P^3;\ m_1, \dots, m_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}G_1(P^3)\}$ такая, что $q_k(0) = s(p_k)$, $m_k(0) = s(l_k)$ и существуют перестановки $f\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$, $g\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ такие, что $q_k(1) = p_{f(k)}$, $m_k(1) = l_{g(k)}$.

Главный результат предлагаемой работы — ответ на один из вопросов, поставленных в работе [2].

Теорема 1. *Зеркальные конфигурации из m точек и n прямых в $\mathbb{R}P^3$ существуют только при следующих значениях m и n:*

$m = 0$ *или* 1, $n \not\equiv 3 \pmod 4$;

$m = 2$ *или* 3, $n \equiv 0$ *или* $1 \pmod 4$;

$m \geqslant 4$, $m \equiv 0$ *или* $1 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 2$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Доказательство теоремы 1 состоит из двух частей — построение зеркальных конфигураций приведено в п. 1, доказательство незеркальности конфигураций использует предложения А, Б, В, доказанные в пп. 2, 3, и приведено в п. 4. Доказательство незеркальности использует введенное Виро понятие коэффициента зацепления тройки прямых, для случая $n \equiv 3 \pmod 4$ приводится данное им доказательство.

Вторая часть предлагаемой работы — элементарное доказательство известного результата В. М. Харламова, см. [4].

Определение. Неособая алгебраическая поверхность в $\mathbb{R}P^3$ называется зеркальной, если она жестко изотопна своему зеркальному отражению.

Поверхность в $\mathbb{R}P^3$ будем называть нестягиваемой, если она не стягиваема по $\mathbb{R}P^3$ в точку.

Теорема 2 (Харламов). *Неособая поверхность степени 4 в $\mathbb{R}P^3$, нестягиваемая и имеющая $M \geqslant 5$ компонент, незеркальна.*

Харламов нашел аналогию между такими поверхностями и конфигурациями из $M-1$ точек и одной прямой. Это позволило ему получить элементарное доказательство для случаев $M = 5, 6, 7, 8$. Приводимое доказательство охватывает оставшиеся случаи $M = 9, 10$. Оно использует конструкцию и рассуждение Харламова и для $M = 5, 6$ повторяет его доказательство. Доказательство теоремы 2 использует предложения А, Б, В и приведено в п. 5.

1. Конструкции

В аффинной части пространства введем систему координат $Oxyz$, которую будем считать ортогональной.

Есть две конструкции.

Конструкция 1. $m \equiv 0$ *или* $1 \pmod 4$, $n \equiv 0 \pmod 2$.

Пусть $m = 4m'' + e$, $e = 0$ или 1. Для $k = 1, \dots, m''$ выберем числа a_k, b_k, c_k и в качестве точек конфигурации возьмем точки (a_k, b_k, c_k), $(-a_k, -b_k, c_k)$, $(-b_k, a_k, -c_k)$, $(b_k, -a_k, -c_k)$. Если $e = 1$, то добавим точку O. Пусть $n = 2n'$. Для $k = 1, \dots, n'$ выберем числа p_k, q_k, $p_k^2 + q_k^2 > 0$, r_k и в качестве прямых конфигурации возьмем прямые $p_k x + q_k y = 0$, $z = r_k$ и $-q_k x + p_k y = 0$, $z = -r_k$. Легко видеть, что при общем выборе параметров конфигурация будет неособой. Она переходит в себя после зеркального отражения относительно плоскости Oxy и поворота на угол $\dfrac{\pi}{2}$ вокруг оси Oz.

Конструкция 2. $m < 4$, $n \equiv 0$ *или* $1 \pmod 4$.

Пусть $R, r > 0$. Выберем на плоскости Oxy треугольник такой, что продолжения его сторон не пересекают окружность $x^2 + y^2 = R^2 + r^2$. В качестве точек конфигурации возьмем любые m из его вершин. Пусть $n = n_0 + e$, $n_0 \equiv 0 \pmod 4$, $e = 0$ или 1. В качестве прямых конфигурации возьмем для $k = 1, \dots, n_0$ прямые

$$x \cos \frac{2\pi k}{n_0} + y \sin \frac{2\pi k}{n_0} = R, \quad -x \sin \frac{2\pi k}{n_0} + y \cos \frac{2\pi k}{n_0} = r + (-1)^k z.$$

Если $e = 1$, то добавим прямую Oz. Построенная конфигурация является неособой и переходит в себя после зеркального отражения относительно плоскости Oxy и жесткой изотопии, при которой точки конфигурации неподвижны, а прямые поворачиваются на угол $\dfrac{2\pi}{n_0}$ вокруг оси Oz.

Обозначения, используемые в пп. 2, 3. Скалярное произведение векторов $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^4$ обозначается (x_1, x_2). Единичная сфера пространства $\mathbb{R}^4$ обозначается S^3. Для стандартного накрытия $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ используется обозначение $x \mapsto \pm x$.

2. Три предложения

Рассмотрим зеркальную конфигурацию из m точек $\{p_1, \dots p_m \in \mathbb{R}P^3\}$. Выберем жесткую изотопию $\{q_1, \dots q_m \colon [0,1] \to \mathbb{R}P^3\}$ и перестановку $f \colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$ такие, что $q_k(0) = s(p_k)$, $q_k(1) = p_{f(k)}$.

Предложение А. *Если перестановка f имеет цикл длины $d \geqslant 4$, то $d \equiv 0 \pmod 4$.*

Предложение Б. *Если $m \geqslant 6$, то перестановка f не имеет циклов длины $d < 4$, за исключением, возможно, одного единичного цикла.*

Предложение В. *Перестановка f не имеет циклов длины $d \equiv 0 \pmod 8$.*

Замечание. Я не знаю примеров того, чтобы перестановка f имела цикл длины $d > 4$.

Определим отображение $S \colon S^3 \to S^3$ формулой $S((x_0, x_1, x_2, x_3)) = (-x_0, x_1, x_2, x_3)$. Тогда $\pm S(x) = s(\pm x)$.

Рассмотрим стандартное накрытие $S^3 \to \mathbb{R}P^3$. Выберем прообразы $P_1, \dots, P_m$ точек конфигурации, $\pm P_k = p_k$. Выберем непрерывные поднятия $Q_1, \dots, Q_m \colon [0,1] \to S^3$ отображений q_k, $\pm Q_k(t) = q_k(t)$, такие, что $Q_k(0) = S(P_k)$. Существуют числа $(k) = \pm 1$ такие, что $Q_k(1) = (k) P_{f(k)}$.

Для любых различных $k_1, \dots, k_4$ векторы $P_{k_1}, \dots, P_{k_4}$ линейно независимы. Пусть $(k_1 \dots k_4) = \operatorname{sign} \det(P_{k_1}, \dots, P_{k_4})$. Символ $(k_1 \dots k_4)$ принимает значения ± 1 и меняет знак при перестановке любых двух аргументов.

Из определения жесткой изотопии следует, что для любых различных $k_1, \dots, k_4$ при всех t векторы $Q_{k_1}(t), \dots, Q_{k_4}(t)$ линейно независимы.

Поэтому $\operatorname{sign} \det(Q_{k_1}(0), \dots, Q_{k_4}(0) = \operatorname{sign} \det(Q_{k_1}(1), \dots, Q_{k_4}(1)$. Следовательно, так как зеркальная симметрия обращает ориентацию пространства $\mathbb{R}^4$, для любых различных $k_1, \dots, k_4$

$$(1) \qquad (k_1 \dots k_4) = -(k_1) \dots (k_4)(f(k_1) \dots f(k_4)).$$

Пусть запись $f \colon (k_{11} \dots k_{1d_1}) \dots (k_{z1} \dots k_{zd_z})$ означает, что $k_{ij} \in \{1, \dots, m\}$ попарно различны и $f(k_{ij}) = k_{i(j+1)}$ при $j < d_i$, $f(k_{id_i}) = k_{i1}$.

Доказательство предложения А. Пусть $f \colon (k_1 \dots k_d)$. Применяя формулу (1) d раз, получаем $(k_1 \dots k_4) = (-1)^d (k_1 \dots k_4)$, то есть $d \equiv 0 \pmod 2$. Пусть $d = 2d'$. Применяя формулу (1) d' раз, получаем $(k_1 k_2 k_{d'+1} k_{d'+2}) = (-1)^{d'} (k_{d'+1} k_{d'+2} k_1 k_2)$, откуда $d' \equiv 0 \pmod 2$.

Доказательство предложения Б. Пусть z_1, z_2, z_3 — число циклов перестановки f длины 1, 2, 3 соответственно, Z — число циклов перестановки f длины $d \geqslant 4$. Покажем, что тогда

(1) $z_1 \leqslant 4$;
(2) $z_2 \leqslant 2$;

$(2')$ если $z_2 = 1$, то $z_1 \leqslant 3$;
$(2'')$ если $z_2 = 2$, то $z_1 = 0$;
(3) $z_3 \leqslant 1$;
$(3')$ если $z_3 = 1$, то $z_1 \leqslant 1$, $z_2 = 0$;
(4) если $Z > 0$, то $z_1 \leqslant 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$.

Легко видеть, что из этого следует требуемое утверждение.

(1) Пусть $f\colon (k_1)\dots(k_5)$. Для некоторого i $(k_1)\dots\widehat{(k_i)}\dots(k_5) = 1$. Согласно формуле (1), $(k_1\dots\widehat{k_i}\dots k_5) = -(k_1\dots\widehat{k_i}\dots k_5)$, что невозможно.

(2) Пусть $f\colon (k_{11}k_{12})\dots(k_{31}k_{32})$. Для некоторого i $(k_{11})(k_{12})\dots\widehat{(k_{i1})(k_{i2})}(k_{31})(k_{32}) = 1$. Согласно формуле (1), $(k_{11}k_{12}\dots\widehat{k_{i1}k_{i2}}\dots k_{31}k_{32}) = -(k_{12}k_{11}\dots\widehat{k_{i2}k_{i1}}\dots k_{32}k_{31})$, что невозможно.

$(2')$ Пусть $f\colon (k_{11}k_{12})(k_2)\dots(k_5)$. Согласно формуле (1), $(k_2\dots k_5) = -(k_2)\dots(k_5)(k_2\dots k_5)$, то есть $(k_2)\dots(k_5) = -1$. Поэтому для некоторых i, j, $i \neq j$, $(k_{11})(k_{12})(k_i)(k_j) = -1$. Согласно формуле (1), $(k_{11}k_{12}k_ik_j) = (k_{12}k_{11}k_ik_j)$, что невозможно.

$(2'')$ Пусть $f\colon (k_{11}k_{12})(k_{21}k_{22})(k_3)$. Применяя формулу (1) 2 раза, получаем $(k_{11}k_{12}k_{21}k_3) = (k_{21})(k_{22})(k_{11}k_{12}k_{21}k_3)$, откуда $(k_{21})(k_{22}) = 1$. Аналогично, $(k_{11})(k_{12}) = 1$. С другой стороны, согласно формуле (1), $(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22}) = -(k_{11})(k_{12})(k_{21})(k_{22})(k_{12}k_{11}k_{22}k_{21})$, откуда $(k_{11})(k_{12})(k_{21})(k_{22}) = -1$. Противоречие.

(3) Пусть $f\colon (k_{11}\dots k_{13})(k_{21}\dots k_{23})$. Применяя формулу (1) 3 раза, получаем $(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22}) = -(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22})$, что невозможно.

$(3')$ Пусть $f\colon (k_{11}\dots k_{13})(k_2)(k_3)$. Применяя формулу (1) 3 раза, получаем $(k_{11}\dots k_{13}k_2) = -(k_{11})\dots(k_{13})(k_2)(k_{11}\dots k_{13}k_2)$, то есть $(k_{11})\dots(k_{13})(k_2) = -1$. Аналогично, $(k_{11})\dots(k_{13})(k_3) = -1$. Таким образом, $(k_2) = (k_3)$. С другой стороны, применяя формулу (1) 3 раза, получаем $(k_{11}k_{12}k_2k_3) = -(k_2)(k_3)(k_{11}k_{12}k_2k_3)$, то есть $(k_2)(k_3) = -1$. Противоречие.

Пусть $f\colon (k_{11}\dots k_{13})(k_{21}k_{22})$. Применяя формулу (1) 6 раз, получаем $(k_{11}\dots k_{13}k_{21}) = (k_{21})(k_{22})(k_{11}\dots k_{13}k_{21})$, то есть $(k_{21})(k_{22}) = 1$. С другой стороны, применяя формулу (1) 3 раза, получаем $(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22}) = -(k_{21})(k_{22})(k_{11}k_{12}k_{22}k_{21})$, откуда $(k_{21})(k_{22}) = -1$. Противоречие.

(4) Рассмотрим цикл $f\colon (k_{11}\dots k_{1d})$, $d \geqslant 4$. Пусть, согласно предложению А, $d = 2d'$, $d' \equiv 0 \pmod 2$.

Пусть $f\colon (k_2)(k_3)$. Применяя формулу (1) d' раз, получаем $(k_{11}k_{1d'}k_2k_3) = (k_{1d'}k_{11}k_2k_3)$, что невозможно.

Пусть $f\colon (k_{21}k_{22})$. Применяя формулу (1) d' раз, получаем $(k_{11}k_{1d'}k_{21}k_{22}) = (k_{1d'}k_{11}k_{21}k_{22})$, что невозможно.

Пусть $f\colon (k_{21}\dots k_{23})$. Применяя формулу (1) $3d'$ раз, получаем $(k_{11}k_{1d'}k_{21}k_{22}) = (k_{1d'}k_{11}k_{21}k_{22})$, что невозможно.

Утверждение. *Существует вектор $x_0 \in S^3$ такой, что*

$$\operatorname{sign}(P_k, x_0) = (k)\operatorname{sign}(P_{f(k)}, x_0) \qquad (2)$$

Доказательство приведено в следующем пункте.

Доказательство предложения B. Пусть $f\colon (k_1\dots k_d)$, $d = 4d''$. Для всех i $(P_{k_i}, x_0) \neq 0$ — иначе для всех i имело бы место $(P_{k_i}, x_0) = 0$, что, так как $d \geqslant 4$, противоречит свойству линейной независимости. Перемножая равенство (2) для $k = k_1, \dots, k_d$, получаем $(k_1)\dots(k_d) = 1$. Применяя формулу (1) d'' раз, получаем $(k_1 k_{d''+1} k_{2d''+1} k_{3d''+1}) = (-1)^{d''} (k_{d''+1} k_{2d''+1} k_{3d''+1} k_1)$, откуда $d'' \equiv 1 \pmod 2$.

3. Доказательство утверждения

Лемма. *Пусть* $Q_1, \dots Q_m \colon [0,1] \to S^3$, $m \geqslant 4$, *— непрерывные отображения такие, что для любых различных* $k_1, \dots k_4$ *при всех* t *векторы* $Q_{k_1}(t), \dots, Q_{k_4}(t)$ *линейно независимы. Тогда существует изотопия* $H(t) \colon S^3 \to S^3$, $t \in [0,1]$, $H(0) = \mathrm{id}$, *такая, что для любого* $x \in S^3$ *при всех* t $\operatorname{sign}(Q_k(0), x) = \operatorname{sign}(Q_k(t), H(t)(x))$.

Доказательство утверждения. Если $m < 4$, то выберем x_0 такой, что $(P_k, x_0) = 0$. Пусть $m \geqslant 4$. Согласно лемме, существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $H \colon S^3 \to S^3$ такой, что любого $x \in S^3$ $\operatorname{sign}(S(P_k), x) = (k) \operatorname{sign}(P_{f(k)}, H(x))$. Воспользуемся теоремой Лефшеца о неподвижной точке: выберем x_0 такой, что $H(S(x_0)) = x_0$. Тогда $\operatorname{sign}(P_k, x_0) = \operatorname{sign}(S(P_k), S(x_0)) = (k) \operatorname{sign}(P_{f(k)}, H(S(x_0))) = (k) \operatorname{sign}(P_{f(k)}, x_0))$.

Идею доказательства леммы предложил О. Я. Виро.

Доказательство леммы.

Для $x_0, x_1 \in S^3$, $x_0 \neq -x_1$, определим отображение $a(x_0, x_1) \colon [0,1] \to S^3$ формулой $a(x_0, x_1)(s) = r((1-s)x_0 + s x_1)$, где $r \colon \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to S^3$ — радиальная проекция: $r(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

Пусть $I = \{(i_1, \dots, i_n) = i,$ для всех k $i_k = \pm 1$ или $0\}$. Введем на множестве I частичный порядок, положив для $i, j \in I$ $j \leqslant i$, если для всех k $j_k = i_k$ или 0. Для $i \in I$, $t \in [0,1]$ определим подмножества S^3

$$e_i(t) = \{x \in S^3 \mid \text{для всех } k \ \operatorname{sign}(Q_k(t), x) = i_k\},$$
$$E_i(t) = \bigcup_{j \leqslant i} e_j(t), \qquad F_i(t) = \bigcup_{j < i} e_j(t).$$

Пусть $i \in I$, $t \in [0,1]$.

1. Если $x \in E_i(t)$, то $-x \notin E_i(t)$. Действительно, так как $n \geqslant 4$, в силу условия линейной независимости для некоторого k $(Q_k(t), x) \neq 0$, следовательно, $\operatorname{sign}(Q_k(t), x) = i_k$ и, следовательно, неверно, что $\operatorname{sign}(Q_k(t), -x) = i_k$ или 0.

2. Пусть $x_0, x_1 \in e_i(t)$, $s \in [0,1]$. Тогда, как следует из 1, $x_0 \neq -x_1$ и $a(x_0, x_1)(s) \in e_i(t)$.

3. Если $e_i(t) = \varnothing$, то $E_i(t) = \varnothing$. Действительно, пусть $x_0 \in E_i(t)$. Пусть $K = \{k \mid (Q_k, x_0) = 0\}$. В силу условия линейной независимости $|K| < 4$ и, следовательно, векторы $Q_k(t)$, $k \in K$, линейно независимы. Поэтому в S^3 сколь угодно близко к x_0 найдется точка x такая, что для $k \in K$ $(Q_k(t), x) = i_k$. Если выбрать x достаточно близко к x_0, то для $k \notin K$ будем иметь $\operatorname{sign}(Q_k(t), x) = \operatorname{sign}(Q_k(t), x_0) = i_k$ и, таким образом, $x \in e_i(t)$.

4. Пусть $x_0 \in e_i(t)$. Рассмотрим конус $G = {\{*\} \sqcup F_i(t) \times [0,1]} \big/ {(x,0) = *}$. Используя 1, определим отображение $A \colon G \to S^3$ формулами $A(*) = x_0$ и $A(x,s) = a(x_0, x)(s)$. Тогда, как легко убедиться, A есть гомеоморфизм на $E_i(t)$.

Пусть $i \in I$, $[t_1, t_2] \subset [0,1]$. Про непрерывное отображение $s \colon [t_1, t_2] \to S^3$ такое, что при всех t $s(t) \in e_i(t)$, будем условно говорить: сечение $s \colon [t_1, t_2] \to e_i$.

Пусть $i \in I$.

5. Пусть $t_0 \in [0,1]$, $e_i(t_0) \neq \varnothing$. Покажем, что существуют окрестность $[t_-, t_+] \subset [0,1]$ точки t_0 и сечение $x\colon [t_-, t_+] \to e_i$.

Пусть $x_0 \in e_i(t_0)$, $K = \{k \mid i_k = 0\}$. Для $k \in K$ $(Q_k(t_0), x_0) = 0$; в силу условия линейной независимости $|K| < 4$ и, следовательно, векторы $Q_k(t_0)$, $k \in K$, линейно независимы. Поэтому существуют окрестность $[t_-, t_+] \subset [0,1]$ точки t_0 и непрерывное отображение $x\colon [t_-, t_+] \to S^3$ такое, что $x(t_0) = x_0$ и для $k \in K$ при всех t $(Q_k(t), x(t)) = 0$. По соображениям непрерывности, при t, достаточно близких к t_0, для $k \notin K$ $\operatorname{sign}(Q_k(t), x(t)) = i_k$ и, таким образом, $x(t) \in e_i(t)$; сузим соответствующим образом окрестность $[t_-, t_+] \ni t_0$.

6. Либо при всех t $e_i(t) = \varnothing$, либо при всех t $e_i(t) \neq \varnothing$. Действительно, множество $\{t \mid e_i(t) \neq \varnothing\}$, с одной стороны, как следует из 5, открыто, с другой стороны, согласно 3, совпадает с множеством $\{t \mid E_i(t) \neq \varnothing\}$, которое, конечно, замкнуто.

7. Пусть $i \in I$, $e_i(0) \neq \varnothing$. Покажем, что существует сечение $c\colon [0,1] \to e_i$.

Пусть t_0 есть верхняя грань тех $T \in [0,1]$, для которых существует сечение $b\colon [0,T] \to e_i$. Согласно 6, $e_i(t_0) \neq \varnothing$; используя 5., выберем окрестность $[t_-, t_+] \subset [0,1]$ точки t_0 и сечение $x\colon [t_-, t_+] \to e_i$. Построим сечение $c\colon [0, t_+] \to e_i$. Если $t_0 = 0$, положим $c = x$. Если $t_0 > 0$, то выберем T, $t_- < T \leqslant t_0$, и сечение $b\colon [0,T] \to e_i$, и, используя 2, положим

$$c(t) = \begin{cases} b(t) & \text{при } t \in [0, t_-], \\ a(b(t), x(t))(\dfrac{t - t_-}{T - t_-}) & \text{при } t \in [t_-, T], \\ x(t) & \text{при } t \in [T, t_+]. \end{cases}$$

По выбору t_0, $t_+ \leqslant t_0$; значит, $t_+ = 1$, и c есть искомое сечение.

Построим искомую изотопию H по индукции. Предположим, что для некоторого подмножества $J \subset I$ такого, что для $i, j \in I$, $j \leqslant i$, $i \in J$ влечет $j \in J$, определена гомотопия $H(t)\colon \bigcup_{j \in J} E_j(0) \to S^3$, $t \in [0,1]$, такая, что для $j \in J$ при всех t $H(t)$ гомеоморфно отображает $E_j(0)$ на $E_j(t)$. (База $J = \varnothing$ тривиальна.) Легко видеть, что при всех t $H(t)$ инъективно. Если $J = I$, то, как легко видеть, H есть искомая изотопия. Пусть $J \neq I$, $i \in I \setminus J$ — минимальный элемент. Продолжим H до гомотопии $H(t)\colon \bigcup_{j \in J \cup \{i\}} E_j(0) \to S^3$, $t \in [0,1]$, так, чтобы при всех t $H(t)$ гомеоморфно отображало $E_i(0)$ на $E_i(t)$. Если $e_i(0) = \varnothing$, то, как следует из 6 и 3, при всех t $E_i(t) = \varnothing$, и делать ничего не нужно. Пусть $e_i(0) \neq \varnothing$. Используя 7, выберем сечение $c\colon [0,1] \to e_i$. В силу инъективности, при всех t $H(t)$ гомеоморфно отображает $F_i(0)$ на $F_i(t)$. Используя 4, определим $H(t)$ на $E_i(0)$ равенствами $H(t)(c(0)) = c(t)$ и $H(t)(a(c(0), x)(s)) = a(c(t), H(t)(x))(s)$, $x \in F_i(0)$, $s \in [0,1]$.

4. Запреты

Следуя Виро, неособой тройке прямых $\{l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{R}G_1(P^3)\}$ сопоставим коэффициент зацепления $(l_1 l_2 l_3) = \pm 1$ следующим образом. Ориентируем прямые l_1, l_2, l_3 произвольным образом. Так как они не стягиваемы по $\mathbb{R}P^3$ в точку, то их попарные рациональные коэффициенты зацепления отличны от 0. Положим

$$(l_1 l_2 l_3) = \operatorname{sign}(\operatorname{lk}(l_1, l_2; \mathbb{Q}) \operatorname{lk}(l_1, l_3; \mathbb{Q}) \operatorname{lk}(l_2, l_3; \mathbb{Q})).$$

Легко видеть, что результат не зависит от выбора ориентаций.

Коэффициент зацепления тройки прямых сохраняется при жесткой изотопии и меняет знак при зеркальном отражении.

Есть пять серий запретов.

Серия 1 (Виро). $n \equiv 3 \pmod 4$.

Так как при таких n число троек прямых конфигурации, равное $\binom{n}{3}$, нечетно, то произведение их коэффициентов зацепления меняет знак при зеркальном отражении.

Серия 2. $m \equiv 2$ *или* $3 \pmod 4$, $n \equiv 2 \pmod 4$.

Так как при таких m и n число троек прямых, одна из которых соединяет две точки конфигурации, а две другие принадлежат конфигурации (такие тройки являются неособыми), равное $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$, нечетно, то произведение их коэффициентов зацепления меняет знак при зеркальном отражении.

Серия 3. $m \equiv 4, 5, 6$ *или* $7 \pmod 8$, $n \equiv 1 \pmod 2$.

Так как при таких m и n число троек прямых, две из которых соединяют в две пары четыре точки конфигурации, а третья принадлежит конфигурации (такие тройки являются неособыми), равное $3\binom{m}{4}n$, нечетно, то произведение их коэффициентов зацепления меняет знак при зеркальном отражении.

Серия 4. $m \geqslant 6$, $m \equiv 2$ *или* $3 \pmod 4$.

Следует из предложений А, Б.

Серия 5. $m \geqslant 6$, $n \equiv 1 \pmod 2$.

Из предложений А, Б, В следует, что при $m \geqslant 6$ некоторые $d \equiv 4 \pmod 8$ точек конфигурации и ее прямые образуют зеркальную конфигурацию, что невозможно при $n \equiv 1 \pmod 2$ (серия 3).

5. Незеркальность поверхностей

Пусть $X \subset \mathbb{R}P^3$ — неособая поверхность степени 4, нестягивамая и имеющая $M \geqslant 5$ компонент. Допустим, что поверхность X зеркальна. Фиксируем непрерывное семейство поверхностей $Y(t) \subset \mathbb{R}P^3$, $t \in [0,1]$, задаваемое жесткой изотопией, такое, что $Y(0) = s(X)$, $Y(1) = X$.

Поверхность X имеет только одну нестягиваемую компоненту. Действительно, пусть поверхность X имеет две нестягиваемые компоненты. Любая плоскость пересекает их, поэтому пересечение плоскости, пересекающей три другие компоненты поверхности X, с поверхностью X имеет больше четырех компонент, что невозможно в силу неравенства Харнака.

Пусть $M = m + 1$. Пусть X_0 — нестягиваемая, $X_1, \ldots, X_m$ — остальные компоненты поверхности X. Пусть $Y_0(t), Y_1(t), \ldots, Y_m(t)$, $t \in [0,1]$, — компоненты поверхности $Y(t)$, причем $Y_0(0) = s(X_0)$, $Y_k(0) = s(X_k)$ и $Y_0(t)$, $Y_k(t)$ непрерывно зависят от t. Тогда $Y_0(1) = X_0$ и существует перестановка $f\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ такая, что $Y_k(1) = X_{f(k)}$.

Для $k = 1, \ldots, m$ выберем точки $p_k \in X_k$ и непрерывные отображения $q_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}P^3$ такие, что $q_k(t) \in Y_k(t)$ и $q_k(0) = s(p_k)$, $q_k(1) = p_{f(k)}$.

Конфигурация точек $\{p_1, \ldots, p_m\}$ является неособой. Действительно, плоскость, содержащая четыре точки конфигурации, пересекает компоненту X_0, поэтому ее пересечение с поверхностью X имеет больше четырех компонент, что невозможно в силу неравенства Харнака. Аналогично, при всех t конфигурация точек $\{q_1(t),\dots,q_m(t)\}$ является неособой.

Существует подмножество $K\subset\{1,\dots,m\}$, пусть $|K|=n$, такое, что $f(K)=K$, причем $n\equiv 4 \pmod 8$ или $n=5$. Действительно, при $m=4$ или 5 это утверждение тривиально, при $m\geqslant 6$ — следует из предложений А, Б, В.

Множество $\{\{k_{11},k_{12}\},\{k_{21},k_{22}\}\}$, где $k_{ij}\in\{1,\dots,m\}$ попарно различны, будем называть схемой. Следуя Харламову, покажем, что каждой схеме $\{\{k_{11},k_{12}\},\{k_{21},k_{22}\}\}$ можно сопоставить число $(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22})=\pm1$ так, что будет выполняться

$$(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22}) = -(f(k_{11})f(k_{12})f(k_{21})f(k_{22})). \tag{3}$$

Тогда, перемножая это равенство для всех схем, составленных из элементов подмножества K, приходим к противоречию, так как число таких схем, равное $3\binom{n}{4}$, нечетно.

Пусть $A=p_{k_{11}}$, $B=p_{k_{12}}$, $C=p_{k_{21}}$, $D=p_{k_{22}}$.

Прямая AB имеет с учетом кратности по две точки пересечения с компонентами $X_{k_{11}}$ и $X_{k_{12}}$ и поэтому, в силу теоремы Безу, не пересекает компоненту X_0. То же верно для прямых CD и AC.

Покажем, что прямые AC и CD изотопны в дополнении компоненты X_0. В силу неравенства Харнака пересечение плоскости ABC с компонентой X_0 связно. Поэтому, поворачивая прямую AB в плоскости ABC, ее можно совместить с прямой AC, не задевая компоненту X_0. Так же можно совместить прямую AC с прямой CD.

Поэтому прямые AC и CD можно ориентировать так, чтобы для любой петли $l\subset X_0$ выполнялось $\operatorname{lk}(AB,l;\mathbb{Q})=\operatorname{lk}(CD,l;\mathbb{Q})$. Так как компонента X_0 нестягиваема, то это можно сделать ровно двумя способами, отличающимися обращением ориентации обеих прямых.

Прямые AB и CD не пересекаются. Действительно, иначе содержащая их плоскость пересекала бы компоненту X_0, поэтому ее пересечение с поверхностью X имело бы больше четырех компонент, что невозможно в силу неравенства Харнака.

Положим $(k_{11}k_{12}k_{21}k_{22})=\operatorname{sign}\operatorname{lk}(AB,CD;\mathbb{Q})$. Формула (3) следует из того, что коэффициент зацепления меняет знак при зеркальном отражении, и соображений непрерывности.

Я благодарен И. В. Итенбергу, который предложил мне эту задачу.

Литература

1. О. Я. Виро, *Топологические задачи о прямых и точках трехмерного пространства*, ДАН СССР **284** (1985), no. 5, 1049–1052.
2. О. Я. Виро, Ю. В. Дроботухина, *Конфигурации скрещивающихся прямых*, Алгебра и анализ **1** (1989), no. 4, 222–246.
3. A. Borobia, *Mirror property for nonsingular mixed configurations of one line and K points in $\mathbb{R}^3$*, Real Algebraic Geometry, Proceedings (M. Coste, L. Mahe, M.-F. Roy, eds.), Lect. Notes in Math., vol. 1524, Springer, 1992, pp. 140–144.
4. V. M. Kharlamov, *Non-amphicheiral surfaces of degree 4 in $\mathbb{R}P^3$*, Topology and Geometry—Rohlin Seminar (O. Ya. Viro, ed.), Lect. Notes in Math., vol. 1346, Springer, 1988, pp. 349–356.