Прямые гомотопические инварианты

С. С. Подкорытов

Аннотация

Пусть даны пространства X, Y и абелева группа M. Мы называем гомотопический инвариант $f\colon [X,Y] \to M$ прямым, если существует такой гомоморфизм $F\colon L(X,Y) \to M$, что $f([a]) = F(\langle a \rangle)$ для всех $a \in C(X,Y)$. Здесь $\langle a \rangle\colon \langle X \rangle \to \langle Y \rangle$ — гомоморфизм свободных абелевых групп, индуцированный отображением a, $L(X,Y)$ — группа «допустимых» гомоморфизмов. Мы предъявляем прямой инвариант гомологической природы, через который выражаются все прямые инварианты.

§ 1. Введение

Мы определяем прямые гомотопические инварианты отображений и даём их характеризацию, которая сводит их к классической теории гомологий. Прямой инвариант — вариант понятия гомотопического инварианта степени не выше 1 [4, 3, 12, 5]. Этот вариант отличается простотой гомологической характеризации. Гомотопические инварианты конечной степени — гомотопический аналог инвариантов Васильева [3].

Группа $L(X,Y)$. Для множества X пусть $\langle X \rangle$ — (свободная) абелева группа с базисом $X^\sharp \subseteq \langle X \rangle$, снабжённым биекцией $X \to X^\sharp$, $x \mapsto {<}x{>}$. Для множеств X, Y пусть $L(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle)$ — подгруппа, порождённая всеми такими гомоморфизмами u, что $u(X^\sharp) \subseteq Y^\sharp \cup \{0\}$. (Элементы этой подгруппы можно охарактеризовать как гомоморфизмы, ограниченные относительно ℓ_1-нормы.) Отображение $a\colon X \to Y$ индуцирует гомоморфизм $\langle a \rangle \in L(X,Y)$, $\langle a \rangle({<}x{>}) = {<}a(x){>}$.

Прямые гомотопические инварианты. Пусть даны пространства X, Y, абелева группа M и отображение $f\colon [X,Y] \to M$ (гомотопический инвариант). Инвариант f называем *прямым*, если существует такой гомоморфизм $F\colon L(X,Y) \to M$, что $f([a]) = F(\langle a \rangle)$ для всех $a \in C(X,Y)$.

(Если группа M делима, то в этом определении можно заменить $L(X,Y)$ на $\operatorname{Hom}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle)$, так как тогда любой гомоморфизм $L(X,Y) \to M$ продолжается на группу $\operatorname{Hom}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle)$. В общем случае эта замена неадекватна. Например, если X и Y — окружности, то инвариант «степень» $[X,Y] \to \mathbb{Z}$ прям, по теореме 1.1 (или по следствию 6.8). В то же время, по [7, § 94], любой гомоморфизм $\operatorname{Hom}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle) \to \mathbb{Z}$ пропускается через гомоморфизм сужения $\operatorname{Hom}(\langle X \rangle, \langle Y \rangle) \to \operatorname{Hom}(\langle T \rangle, \langle Y \rangle)$ для некоторого конечного множества $T \subseteq X$ и, следовательно, не может определять непостоянный гомотопический инвариант.)

Главный инвариант* $\boldsymbol{h\colon [X,Y]\to[SX,SY]}$*. Для пространства X пусть SX — комплекс его сингулярных цепей. Пусть даны пространства X, Y. Пусть $[SX,SY]$ — группа гомотопических классов морфизмов $SX\to SY$. Есть (неестественно) расщепимая точная естественная последовательность

$$0\longrightarrow\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}(H_{i-1}X,H_iY)\longrightarrow[SX,SY]\longrightarrow\prod_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(H_iX,H_iY)\longrightarrow 0$$

(«теорема об универсальных коэффициентах», ср. [6, теорема 5.5.3]). Для $a\in C(X,Y)$ пусть $Sa\colon SX\to SY$ — индуцированный морфизм, $[Sa]\in[SX,SY]$ — его гомотопический класс. Инвариант $h\colon [X,Y]\to[SX,SY]$, $[a]\mapsto[Sa]$, называем *главным*.

Основной результат. Пространство называем *полноценным*, если оно гомотопически эквивалентно клеточному пространству, и *финитарным*, если оно слабо гомотопически эквивалентно компактному клеточному пространству.

1.1. Теорема. *Пусть даны полноценные пространства X, Y, причём X финитарно, абелева группа M и инвариант $f\colon [X,Y]\to M$. Пусть $h\colon [X,Y]\to[SX,SY]$ — главный инвариант. Инвариант f прям, если и только если существует такой гомоморфизм $d\colon [SX,SY]\to M$, что $f=d\circ h$.*

Теорема вытекает из предложений 7.3 и 12.2. $\square$

Теорема говорит, что главный инвариант — «универсальный» прямой инвариант. Более слабый и несколько сложнее формулируемый результат — [2, теорема II]. Если группа M делима, то достаточность («если») легко вытекает из подходящей формы теоремы Дольда — Тома (см. § 7), необходимость («только если») — из [2, теорема II] (а любая абелева группа — подгруппа делимой). Условия полноценности и финитарности существенны, см. §§ 13, 14.

В § 15 рассматриваются K-прямые инварианты со значениями в модулях над коммутативным кольцом K (при $K=\mathbb{Z}$ это, по определению, то же, что прямые инварианты).

§ 2. Обозначения

Вопросительный знак. Выражение $[?]$ обозначает отображение $a\mapsto[a]$ между множествами, указываемыми в контексте. Аналогично понимаются $\langle ?\rangle$ и т. п. Это обозначение используется и для функторов.

Множества и абелевы группы. Для множества X пусть $c_X\colon X\to\langle X\rangle$ — каноническое отображение $x\mapsto$ <x>. Для $v\in\langle X\rangle$, $x\in X$ пусть $v/x\in\mathbb{Z}$ — коэффициент перед <x> в v. Для абелевой группы T отображение $a\colon X\to T$ даёт гомоморфизм $a^+\colon\langle X\rangle\to T$, <$x$> $\mapsto a(x)$. T^X — группа всех отображений $X\to T$.

Симплициальные множества. Для симплициальных множеств U, V пусть $\mathrm{Si}(U,V)$ — множество симплициальных отображений, $[U,V]$ — множество их гомотопических классов (симплициальные отображения гомотопны, если их можно связать цепочкой гомотопий). Функтор $\langle ? \rangle$ применяется к симплициальным множествам почленно и даёт симплициальные абелевы группы. Есть каноническое симплициальное отображение $c_U : U \to \langle U \rangle$. Для симплициальной абелевой группы Z симплициальное отображение $s\colon U \to Z$ даёт симплициальный гомоморфизм $s^+ : \langle U \rangle \to Z$. Для симплициального множества T симплициальное отображение $s\colon U \to V$ индуцирует отображения $s^T_\# \colon \mathrm{Si}(T,U) \to \mathrm{Si}(T,V)$, $s^\#_T \colon \mathrm{Si}(V,T) \to \mathrm{Si}(U,T)$ и $s^T_* \colon [T,U] \to [T,V]$, $s^*_T \colon [V,T] \to [U,T]$. Это обозначение используется и в топологическом случае.

§ 3. Перенос прямых инвариантов

3.1. Лемма. *Пусть даны пространства X, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, Y, непрерывные отображения $r\colon X \to \tilde{X}$ и $s\colon \tilde{Y} \to Y$, абелева группа M и прямой инвариант $f\colon [X,Y] \to M$. Тогда инвариант $\tilde{f}\colon [\tilde{X},\tilde{Y}] \to M$, $\tilde{f}([\tilde{a}]) = f([s \circ \tilde{a} \circ r])$, $\tilde{a} \in C(\tilde{X},\tilde{Y})$, прям.*

Доказательство. Есть такой гомоморфизм $F\colon L(X,Y) \to M$, что $f([a]) = F(\langle a \rangle)$, $a \in C(X,Y)$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
C(\tilde{X},\tilde{Y}) \arrow[rr, "\langle ? \rangle"] \arrow[dr, "K"] \arrow[dd, "{[?]}"'] & & L(\tilde{X},\tilde{Y}) \arrow[d, "T"] \arrow[dd, bend left, "\tilde{F}"] \\
& C(X,Y) \arrow[r, "\langle ? \rangle"] \arrow[d, "{[?]}"'] & L(X,Y) \arrow[d, "F"] \\
{[\tilde{X},\tilde{Y}]} \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{f}"'] & {[X,Y]} \arrow[r, "f"] & M,
\end{tikzcd}$$

где отображения K, k и гомоморфизм T индуцированы парой (r,s): $K(\tilde{a}) = s \circ \tilde{a} \circ r$, $k([\tilde{a}]) = [s \circ \tilde{a} \circ r]$ и $T(\tilde{u}) = \langle s \rangle \circ \tilde{u} \circ \langle r \rangle$, а $\tilde{F} = F \circ T$. Инвариант $\tilde{f}$ прям. $\square$

§ 4. Главный инвариант $h\colon [|U|,|V|] \to [S|U|, S|V|]$

Геометрическая реализация $|Z|$ симплициальной абелевой группы Z имеет структуру абелевой группы. $|Z|$ — топологическая абелева группа, если Z счётна; в общем случае это группа категории компактно порождённых хаусдорфовых пространств. Для симплициального множества T поэтому $C(|T|,|Z|)$ и $[|T|,|Z|]$ — абелевы группы относительно поточечного сложения. Разумеется, $\mathrm{Si}(T,Z)$ и $[T,Z]$ — тоже абелевы группы.

4.1 Лемма. *Пусть даны симплициальные множества U, V. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
{[U,V]} \arrow[rr, "(c_V)_*^U"] \arrow[dd, "i"'] & & {[U,\langle V\rangle]} \arrow[dl, "e"] \arrow[dd, "j"] \\
& {[S|U|,S|V|]} \arrow[dr, "E"] & \\
{[|U|,|V|]} \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "|c_V|_*^{|U|}"] & & {[|U|,|\langle V\rangle|]},
\end{tikzcd}
$$

где $i\colon [s]\mapsto[|s|]$ (отображение, индуцированное отображением геометрической реализации), j такое же, h — главный инвариант, e, E — некоторые изоморфизмы.

Это вариант теоремы Дольда — Тома [8, § 4.K].

Доказательство. Пусть $\triangle$ — функтор сингулярного симплициального множества. Для симплициального множества T пусть $k_T\colon T\to\triangle|T|$ — каноническая слабая эквивалентность. Если T — симплициальная абелева группа, то k_T — симплициальный гомоморфизм. Имеем коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "c_V"] \arrow[dd, "k_V"'] & & \langle V\rangle \arrow[dl, "\langle k_V\rangle"] \arrow[dd, "k_{\langle V\rangle}"] \\
& \langle\triangle|V|\rangle \arrow[dr, "m"] & \\
\triangle|V| \arrow[ur, "c_{\triangle|V|}"] \arrow[rr, "\triangle|c_V|"] & & \triangle|\langle V\rangle|,
\end{tikzcd}
$$

где $m=(\triangle|c_V|)^+$. $k_{\langle V\rangle}$, $\langle k_V\rangle$ и, следовательно, m — слабые эквивалентности. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
{[U,V]} \arrow[rr, "(c_V)_*^U"] \arrow[dd, "(k_V)_*^U"'] \arrow[ddd, bend right, "i"'] & & {[U,\langle V\rangle]} \arrow[dl, "\langle k_V\rangle_*^U"] \arrow[dd, "(k_{\langle V\rangle})_*^U"'] \arrow[ddd, bend left, "j"] \\
& {[U,\langle\triangle|V|\rangle]} \arrow[dr, "m_*^U"] & \\
{[U,\triangle|V|]} \arrow[ur, "(c_{\triangle|V|})_*^U"] \arrow[rr, "(\triangle|c_V|)_*^U"] & & {[U,\triangle|\langle V\rangle|]} \\
{[|U|,|V|]} \arrow[u, "p"'] \arrow[rr, "|c_V|_*^{|U|}"] & & {[|U|,|\langle V\rangle|]}, \arrow[u, "q"]
\end{tikzcd}
$$

где верхняя часть получается применением функтора $[U,?]$ к предыдущей диаграмме, p, q — биекции сопряжения функторов $|?|$ и $\triangle$. $\langle k_V\rangle_*^U$, m_*^U и q — изоморфизмы.

Найдём такой изоморфизм $P\colon [S|U|,S|V|]\to[U,\langle\triangle|V|\rangle]$, что $P\circ h=(c_{\triangle|V|})_*^U\circ p$. Тогда останется положить $e=P^{-1}\circ\langle k_V\rangle_*^U$, $E=q^{-1}\circ m_*^U\circ P$.

Для симплициального множества T пусть AT — его комплекс цепей, так что $(AT)_n=\langle T_n\rangle$, $n\geqslant 0$. Тогда $SX=A\triangle X$ для любого пространства X. Симплициальное отображение $s\colon T\to\langle W\rangle$ даёт морфизм $v\colon AT\to AW$, $v_n=s_n^+$, $n\geqslant 0$. Это правило даёт изоморфизм $d\colon [T,\langle W\rangle]\to[AT,AW]$ (соответствие Дольда — Кана). Берём $T=\triangle|U|$, $W=\triangle|V|$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[|U|,|V|]} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "h"'] \arrow[rr, bend left, "p"] & {[\triangle|U|,\triangle|V|]} \arrow[r, "(k_U)^*_{\triangle|V|}"] \arrow[d, "(c_{\triangle|V|})^{\triangle|U|}_*"'] & {[U,\triangle|V|]} \arrow[d, "(c_{\triangle|V|})^U_*"] \\
{[A\triangle|U|,A\triangle|V|]} \arrow[rr, bend right, "P"'] & {[\triangle|U|,\langle\triangle|V|\rangle]} \arrow[l, "d"'] \arrow[r, "(k_U)^*_{\langle\triangle|V|\rangle}"] & {[U,\langle\triangle|V|\rangle],}
\end{tikzcd}$$

где отображение b определяется функтором $\triangle$, а $P=(k_U)^*_{\langle\triangle|V|\rangle}\circ d^{-1}$. Так как $(k_U)^*_{\langle\triangle|V|\rangle}$ — изоморфизм, то P тоже. $\square$

§ 5. Теория Нёбелинга — Бергмана

Под *кольцом* мы понимаем (неунитальное) коммутативное кольцо; соответственно понимается *подкольцо*. Следующие факты следуют из [11, Theorem 2 и её доказательство], ср. [7, § 97].

5.1. Лемма. *Пусть дано кольцо E без кручения, порождённое идемпотентами. Тогда E — свободная абелева группа.* $\square$

Пример: кольцо $B(X)$ ограниченных функций $X\to\mathbb{Z}$, где X — любое множество.

5.2. Лемма. *Пусть даны кольцо E без кручения и подкольцо $F\subseteq E$, оба порождённые идемпотентами. Тогда абелева группа E/F свободна.* $\square$

При $F=0$ получаем лемму 5.1.

§ 6. Отображения в пространство со сложением

Пусть даны пространство X и хаусдорфово пространство T.

Для множества $V\subseteq T$ введём гомоморфизм $s_V: L(X,T)\to\mathbb{Z}^X$, $s_V(u)(x)=I_V^+(u({<}x{>}))$, $x\in X$, где $I_V\colon T\to\mathbb{Z}$ — характеристическая функция множества V.

Подгруппа $R \subseteq L(X,T)$. Для $p \in X$, $q \in T$ пусть $R(p,q) \subseteq L(X,T)$ — подгруппа, образованная всеми такими гомоморфизмами u, что для любой достаточно малой (открытой) окрестности V точки q функция $s_V(u)$ постоянна в некоторой окрестности точки p. Пусть $R \subseteq L(X,T)$ — пересечение подгрупп $R(p,q)$, $p \in X$, $q \in T$.

6.1. Лемма. *Для $a \in C(X,T)$ имеем $\langle a \rangle \in R$.*

Доказательство. Возьмём $p \in X$, $q \in T$ и покажем, что $\langle a \rangle \in R(p,q)$. Если $a(p) = q$, то для любой окрестности V точки q, беря окрестность $U = a^{-1}(V)$ точки p, получаем $s_V(\langle a \rangle)|_U = 1$. В противном случае выберем непересекающиеся окрестности W точки q и W_1 точки $a(p)$. Рассмотрим окрестность $U = a^{-1}(W_1)$ точки p. Для любого $V \subseteq W$ имеем $s_V(\langle a \rangle)|_U = 0$. □

6.2. Лемма. *Абелева группа $L(X,T)/R$ свободна.*

Доказательство. Пусть O_T — множество всех открытых множеств пространства T. Рассмотрим кольцо $E = B(X \times X \times O_T)$. Для $p \in X$, $q \in T$ пусть $I(p,q) \subseteq E$ — идеал, образованный всеми такими функциями f, что для любой достаточно малой окрестности V точки q функция $X \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto f(p,x,V)$, равна нулю в некоторой окрестности точки p. Пусть $I \subseteq E$ — пересечение идеалов $I(p,q)$, $p \in X$, $q \in T$. Кольцо E/I не имеет кручения и порождено идемпотентами. По лемме 5.1, E/I — свободная абелева группа. Введём гомоморфизм $k\colon L(X,T) \to E$, $k(u)(p,x,V) = s_V(u)(x) - s_V(u)(p)$, $p,x \in X$, $V \in O_T$, $u \in L(X,T)$. Имеем $k^{-1}(I(p,q)) = R(p,q)$ и, значит, $k^{-1}(I) = R$. Поэтому k индуцирует мономорфизм $L(X,T)/R \to E/I$. Значит, абелева группа $L(X,T)/R$ свободна. □

Множество Q и гомоморфизмы $e(D,a)$. Пусть Q — множество всех пар (D,a), где $D \subseteq X$ — замкнутое множество, $a \in C(D,T)$. Для $(D,a) \in Q$ введём гомоморфизм $e(D,a) \in L(X,T)$, для $x \in X$ полагая

$$e(D,a)({<}x{>}) = \begin{cases} {<}a(x){>} & \text{при } x \in D, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

6.3. Лемма. *Пусть даны пара $(D,a) \in Q$ и точки $p \in X$, $q \in T$. Если $e(D,a) \notin R(p,q)$, то $p \in D$ и $a(p) = q$.*

Доказательство. Пусть $u = e(D,a)$. *Случай $p \notin D$.* Рассмотрим окрестность $U = X \setminus D$ точки p. Имеем $s_V(u)|_U = 0$ для любого $V \subseteq T$. Значит, $u \in R(p,q)$. *Случай $p \in D$, $a(p) \neq q$.* Выберем непересекающиеся окрестности W точки q и W_1 точки $a(p)$. Есть такая окрестность U точки p, что $a(D \cap U) \subseteq W_1$. Имеем $s_V(u)|_U = 0$ для любого $V \subseteq W$. Значит, $u \in R(p,q)$. □

Подгруппа $K \subseteq L(X,T)$. Пусть $K \subseteq L(X,T)$ — подгруппа, порождённая гомоморфизмами $e(D,a)$, $(D,a) \in Q$.

6.4. Лемма. *Абелева группа $L(X,T)/K$ свободна.*

Доказательство. Введём мономорфизм $j\colon L(X,T) \to B(X \times T)$, $j(u)(x,t) = u(<x>)/t$. Для $(D_i, a_i) \in Q$, $i = 1,2$, имеем $j(e(D_1,a_1))j(e(D_2,a_2)) = j(e(D,a))$, где $D = \{x \in D_1 \cap D_2 : a_1(x) = a_2(x)\}$, $a = a_1|_D = a_2|_D$. В частности, $j(e(D,a))$, $(D,a) \in Q$, — идемпотенты. Поэтому $j(K)$ — подкольцо, порождённое идемпотентами. По лемме 5.2, абелева группа $B(X \times T)/j(K)$ свободна. Так как j индуцирует мономорфизм $L(X,T)/K \to B(X \times T)/j(K)$, то абелева группа $L(X,T)/K$ свободна. $\square$

6.5. Лемма. *Абелева группа $L(X,T)/(K \cap R)$ свободна.*

Доказательство. В цепочке $L(X,T) \supseteq K \supseteq K \cap R$ фактор $L(X,T)/K$ свободен по лемме 6.4, фактор $K/(K \cap R)$ — как подгруппа свободной (по лемме 6.2) группы $L(X,T)/R$. $\square$

Гомоморфизм $G\colon L(X,T) \to T^X$. Пусть на T задана структура абелевой группы так, что $(*)$ для любого замкнутого множества $D \subseteq X$ множество $C(D,T)$ становится абелевой группой относительно поточечного сложения[1]. Введём гомоморфизм $G\colon L(X,T) \to T^X$, $G(u)(x) = r(u(<x>))$, $x \in X$, $u \in L(X,T)$, где $r = \mathrm{id}^+\colon \langle T \rangle \to T$.

6.6. Лемма. $G(K \cap R) \subseteq C(X,T)$.

Доказательство. Возьмём $u \in K \cap R$ и покажем, что $G(u) \in C(X,T)$. Так как $u \in K$, имеем

$$u = \sum_{i\in I} u_i, \qquad\qquad u_i = k_i e(D_i, a_i),$$

где I — конечное множество, $k_i \in \mathbb{Z}$, $(D_i, a_i) \in Q$. Для $J \subseteq I$ пусть

$$u_J = \sum_{i\in J} u_i, \qquad\qquad D_J = \bigcap_{i\in J} D_i \subseteq X$$

(так что $D_\varnothing = X$) и

$$b_J = \sum_{i\in J} k_i a_i|_{D_J} \in C(D_J, T), \qquad\qquad k_J = \sum_{i\in J} k_i.$$

Возьмём $p \in X$ и проверим, что $G(u)$ непрерывно в точке p. Пусть $N = \{i \in I : p \notin D_i\}$. Для $q \in T$ пусть $I(q) = \{i \in I : p \in D_i,\ a_i(p) = q\}$. Имеем

$$u = u_N + \sum_{q\in T} u_{I(q)}$$

[1]Условие $(*)$ выполнено, если T — топологическая абелева группа или если $X = |U|$, $T = |Z|$, где U и Z — симплициальные множество и абелева группа.

(почти все слагаемые равны нулю). Очевидно, $G(u_N)$ равно нулю в некоторой окрестности точки p. Возьмём $q \in T$. Достаточно показать, что $G(u_{I(q)})$ непрерывно в точке p. Пусть $t_0 = G(u_{I(q)}) \in T$. Имеем $t_0 = k_{I(q)}q$. Пусть дана окрестность W точки t_0. Нужно найти такую окрестность U точки p, что $G(u_{I(q)})(U) \subseteq W$.

Пусть $E = \{J \subseteq I(q) : k_J = k_{I(q)}\}$. Для $J \in E$ имеем $p \in D_J$ и $b_J(p) = t_0$. Есть такая окрестность U_1 точки p, что $b_J(D_J \cap U_1) \subseteq W$ для всех $J \in E$.

По лемме 6.3, $u_i \in R(p,q)$ при $i \in I \setminus I(q)$. Так как $u \in R(p,q)$, то $u_{I(q)} \in R(p,q)$. Поэтому есть такая окрестность $V \subseteq T$ точки q, что функция $s_V(u_{I(q)})$ постоянна в некоторой окрестности U_2 точки p.

Есть такая окрестность U_3 точки p, что $a_i(D_i \cap U_3) \subseteq V$ для всех $i \in I(q)$. Для $x \in X$ пусть $J(x) = \{i \in I(q) : x \in D_i\}$. Для $x \in U_2 \cap U_3$ имеем $k_{J(x)} = s_V(u_{I(q)})(x) = s_V(u_{I(q)})(p) = k_{I(q)}$, т. е. $J(x) \in E$.

Положим $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Возьмём $x \in U$. Имеем $G(u_{I(q)})(x) = b_{J(x)}(x) \in W$, так как $J(x) \in E$. $\square$

6.7. Лемма. *Существует такой гомоморфизм $g\colon L(X,T) \to C(X,T)$, что $g(\langle a \rangle) = a$ для всех $a \in C(X,T)$.*

Доказательство. Имеем $G(\langle a \rangle) = a$ для всех $a \in T^X$. Так как $G(K \cap R) \subseteq C(X,T)$ (по лемме 6.6), а абелева группа $L(X,T)/(K \cap R)$ свободна (по лемме 6.5), то есть такой гомоморфизм $g\colon L(X,T) \to C(X,T)$, что $g(u) = G(u)$ для $u \in K \cap R$. Для $a \in C(X,T)$ имеем $\langle a \rangle \in K$ (так как $\langle a \rangle = e(X,a)$) и $\langle a \rangle \in R$ (по лемме 6.1). Получаем $g(\langle a \rangle) = G(\langle a \rangle) = a$. $\square$

6.8. Следствие. *Если* $(*)$ $[X,T]$ *— абелева группа относительно поточечного сложения*[2], *то инвариант* $\mathrm{id}\colon [X,T] \to [X,T]$ *прям.*

Доказательство. По лемме 6.7, есть такой гомоморфизм $g\colon L(X,T) \to C(X,T)$, что $g(\langle a \rangle) = a$ для всех $a \in C(X,T)$. Введём гомоморфизм $F\colon L(X,T) \to [X,T]$, $u \mapsto [g(u)]$. Для $a \in C(X,T)$ имеем $[a] = [g(\langle a \rangle)] = F(\langle a \rangle)$. $\square$

§ 7. Достаточность в теореме 1.1

Доказательство достаточности в теореме 1.1 основано на следствии 6.8. В случае делимой группы M его очень легко изменить и обойтись леммой 7.1 (тогда материал §§ 5, 6 не нужен).

7.1. Лемма (ср. [4, лемма 1.2]). *Пусть даны пространства X, T и на T введена структура абелевой группы так, что* $(*)$ *множества $C(X,T)$ и $[X,T]$ становятся абелевыми группами относительно поточечного сложения*[3]. *Пусть даны делимая абелева группа M и гомоморфизм $f\colon [X,T] \to M$. Тогда f — прямой инвариант.*

[2] См. сноску 1.
[3] См. сноску 1.

Доказательство. Введём гомоморфизм $G\colon L(X,T)\to T^X$, $G(u)(x)=r(u(\mathord{<}x\mathord{>}))$, $x\in X$, $u\in L(X,T)$, где $r=\mathrm{id}^+\colon\langle T\rangle\to T$. Пусть $D\subseteq L(X,T)$ — подгруппа, порождённая гомоморфизмами $\langle a\rangle$, $a\in C(X,T)$. Очевидно, $G(\langle a\rangle)=a$ для $a\in C(X,T)$. Значит, $G(D)\subseteq C(X,T)$. Введём гомоморфизм $F_0\colon D\to M$, $u\mapsto f([G(u)])$. Так как группа M делима, есть такой гомоморфизм $F\colon L(X,T)\to M$, что $F|_D=F_0$. Для $a\in C(X,T)$ имеем $f([a])=f([G(\langle a\rangle)])=F_0(\langle a\rangle)=F(\langle a\rangle)$. □

7.2. Утверждение. *Пусть даны симплициальные множества U, V. Тогда главный инвариант $h\colon[|U|,|V|]\to[S|U|,S|V|]$ прям.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[|U|,|V|]} \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "|c_V|_*^{|U|}"'] & {[S|U|,S|V|]} \arrow[d, "E"] \\
& {[|U|,|\langle V\rangle|],}
\end{tikzcd}$$

где E — изоморфизм из леммы 4.1. По следствию 6.8, инвариант $\mathrm{id}\colon[|U|,|\langle V\rangle|]\to[|U|,|\langle V\rangle|]$ прям. Значит, по лемме 3.1, инвариант $|c_V|_*^{|U|}$ прям. Так как E — изоморфизм, h тоже прям. □

7.3. Предложение. *Пусть даны пространства X, Y, причём Y полноценно. Тогда главный инвариант $h\colon[X,Y]\to[SX,SY]$ прям.*

Доказательство. Есть гомологические эквивалентности $r\colon|U|\to X$, $s\colon Y\to|V|$, где U, V — симплициальные множества. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & {[SX,SY]} \arrow[d, "l"] \\
{[|U|,|V|]} \arrow[r, "\tilde h"] & {[S|U|,S|V|],}
\end{tikzcd}$$

где $\tilde h$ — главный инвариант, отображение k и изоморфизм l индуцированы парой (r,s). По утверждению 7.2, $\tilde h$ прям. По лемме 3.1, инвариант $\tilde h\circ k$ прям. Так как $h=l^{-1}\circ\tilde h\circ k$, то h тоже прям. □

§ 8. Сведение $Z\colon\langle\mathrm{Si}(U,V)\rangle_0\to\mathrm{Si}(U,\langle V\rangle_0)$

Для множества X пусть $\langle X\rangle_0\subseteq\langle X\rangle$ — ядро гомоморфизма $\langle X\rangle\to\mathbb{Z}$, $\mathord{<}x\mathord{>}\mapsto 1$. К симплициальным множествам функтор $\langle ?\rangle_0$ применяется почленно.

Пусть даны симплициальные множества U, V. Каноническое симплициальное отображение $c=c_V\colon V\to\langle V\rangle$ даёт отображение $c_\#^U\colon\mathrm{Si}(U,V)\to$

$\mathrm{Si}(U,\langle V\rangle)$ и гомоморфизм $(c^U_\#)^+\colon \langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle \to \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle)$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle_0 \arrow[r, "Z"] \arrow[d] & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle_0) \arrow[d] \\
\langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle \arrow[r, "(c^U_\#)^+"] & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle),
\end{tikzcd}$$

где вертикальные стрелки индуцированы каноническим включением $\langle ?\rangle_0 \to \langle ?\rangle$, Z — новый гомоморфизм, называемый *сведе́нием.*

§ 9. Сюръективность сведения

Цель этого параграфа — лемма 9.1. Мы следуем [4, §§ 12, 13].

Продолжение симплициальных отображений. Для $n \geqslant 0$ пусть Δ^n — комбинаторный стандартный n-симплекс (симплициальное множество), $\partial\Delta^n$ — его край.

Пусть дано стягиваемое фибрантное симплициальное множество W. Для каждого $n \geqslant 0$ выберем такое отображение $e_n\colon \mathrm{Si}(\partial\Delta^n, W) \to \mathrm{Si}(\Delta^n, W)$, что $e_n(q)|_{\partial\Delta^n} = q$ для любого $q \in \mathrm{Si}(\partial\Delta^n, W)$.

Пусть дано симплициальное множество U. Для каждого симплициального подмножества $A \subseteq U$ введём отображение $E_A\colon \mathrm{Si}(A, W) \to \mathrm{Si}(U, W)$, $x \mapsto t$, где $t|_A = x$ и $t \circ p = e_n(t \circ p|_{\partial\Delta^n})$ для характеристического отображения $p\colon \Delta^n \to U$ каждого невырожденного симплекса вне A. Очевидно,

(1) $E_A(x)|_A = x$;

(2) $E_A(x)|_B = E_{A\cap B}(x|_{A\cap B})|_B$,

где $A, B \subseteq U$ — симплициальные подмножества, $x \in \mathrm{Si}(A, W)$.

Кольцо $\langle Q\rangle$ и его единица I. Пусть Q — система симплициальных подмножеств в U, состоящая из всех подмножеств, изоморфных симплексам Δ^n, $n \geqslant 0$, и пустого подмножества. Предположим, что симплициальное множество U *полиэдрально*, т. е. Q — его замкнутое относительно пересечений покрытие, и *компактно*, т. е. порождено конечным числом симплексов. Q конечна.

Введём умножение в $\langle Q\rangle$, полагая $<A><B> = <A \cap B>$ для $A, B \in Q$. Кольцо $\langle Q\rangle$ имеет единицу I. Действительно, гомоморфизм $e\colon \langle Q\rangle \to \mathbb{Z}^Q$,

$$e(<A>)(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \supseteq B, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$A, B \in Q$, — изоморфизм («верхняя унитреугольная матрица»), сохраняющий умножение. Значит, $I = e^{-1}(1)$ — единица.

Гомоморфизм $\boldsymbol{K}$**:** $\mathbf{Si}(\boldsymbol{U}, \langle \boldsymbol{W}\rangle_{\mathbf{0}}) \to \langle \mathbf{Si}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W})\rangle_{\mathbf{0}}$**.** Для симплициального множества T пусть $Z_T\colon \langle \mathrm{Si}(T, W)\rangle_0 \to \mathrm{Si}(T, \langle W\rangle_0)$ — сведение. Для симплициальных множеств $T \supseteq A$ пусть $r_A^T\colon \mathrm{Si}(T, W) \to \mathrm{Si}(A, W)$, $s_A^T\colon \mathrm{Si}(T, \langle W\rangle_0) \to \mathrm{Si}(A, \langle W\rangle_0)$ — отображения сужения. s_A^T — гомоморфизм. При $T = U$ в этих обозначениях соответствующий индекс опускаем.

Заметим, что Z_A — изоморфизм для $A \in Q$. Введём отображение $k\colon Q \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Si}(U, \langle W\rangle_0), \langle \mathrm{Si}(U, W)\rangle_0)$, $A \mapsto \langle E_A\rangle_0 \circ Z_A^{-1} \circ s_A$:

$$k(A)\colon\ \mathrm{Si}(U, \langle W\rangle_0) \xrightarrow{s_A} \mathrm{Si}(A, \langle W\rangle_0) \xrightarrow{Z_A^{-1}} \langle \mathrm{Si}(A, W)\rangle_0 \xrightarrow{\langle E_A\rangle_0} \langle \mathrm{Si}(U, W)\rangle_0.$$

Пусть $K = k^+(I)$.

9.1. Лемма. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & \langle \mathrm{Si}(U, W)\rangle_0 \arrow[d, "Z"] \\
\mathrm{Si}(U, \langle W\rangle_0) \arrow[ur, "K"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{Si}(U, \langle W\rangle_0)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Возьмём $A, B \in Q$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Si}(A, \langle W\rangle_0) \arrow[r, "Z_A^{-1}"] \arrow[dd, "s_C^A"] & \langle \mathrm{Si}(A, W)\rangle_0 \arrow[r, "\langle E_A\rangle_0"] \arrow[dd, "\langle r_C^A\rangle_0"] & \langle \mathrm{Si}(U, W)\rangle_0 \arrow[d, "\langle r_B\rangle_0"] \\
\mathrm{Si}(U, \langle W\rangle_0) \arrow[ur, "s_A"] \arrow[dr, "s_C"'] & & & \langle \mathrm{Si}(B, W)\rangle_0 \\
 & \mathrm{Si}(C, \langle W\rangle_0) \arrow[r, "Z_C^{-1}"] & \langle \mathrm{Si}(C, W)\rangle_0 \arrow[r, "\langle E_C\rangle_0"] & \langle \mathrm{Si}(U, W)\rangle_0, \arrow[u, "\langle r_B\rangle_0"']
\end{tikzcd}$$

где $C = A \cap B$ (коммутативность «пятиугольника» следует из свойства (2) семейства E). Значит, $\langle r_B\rangle_0 \circ k(A) = \langle r_B\rangle_0 \circ k(A \cap B)$. Значит, $\langle r_B\rangle_0 \circ k^+(X) = \langle r_B\rangle_0 \circ k^+(X{<}B{>})$ для $X \in \langle Q\rangle$. Имеем $\langle r_B\rangle_0 \circ K = \langle r_B\rangle_0 \circ k^+(I) = \langle r_B\rangle_0 \circ k^+(I{<}B{>}) = \langle r_B\rangle_0 \circ k^+({<}B{>}) = \langle r_B\rangle_0 \circ k(B) = \langle r_B\rangle_0 \circ \langle E_B\rangle_0 \circ Z_B^{-1} \circ s_B = Z_B^{-1} \circ s_B$, так как $r_B \circ E_B = \mathrm{id}$, по свойству (1) семейства E. Получаем $s_B \circ Z \circ K = Z_B \circ \langle r_B\rangle_0 \circ K = s_B$. Так как B произвольно, $Z \circ K = \mathrm{id}$. $\square$

§ 10. Кодекартов квадрат

Пусть даны симплициальные множества U, V, причём U полиэдрально и компактно, а V фибрантно. Каноническое симплициальное отображение $c = c_V\colon V \to \langle V\rangle$ индуцирует отображения $c_\#^U\colon \mathrm{Si}(U, V) \to \mathrm{Si}(U, \langle V\rangle)$ и $c_*^U\colon [U, V] \to [U, \langle V\rangle]$. Рассмотрим коммутативный квадрат абелевых групп и гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle \arrow[r, "(c^U_\#)^+"] \arrow[d, "\langle p\rangle"'] & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle) \arrow[d, "q"] \\
\langle [U,V]\rangle \arrow[r, "(c^U_*)^+"] & {[U,\langle V\rangle],}
\end{tikzcd}$$

где $p = [?]\colon \mathrm{Si}(U,V) \to [U,V]$, $q = [?]$ (проекции).

10.1. Лемма. *Этот квадрат кодекартов.*

Доказательство. Так как $\langle p\rangle$ и q — эпиморфизмы, достаточно показать, что $\mathrm{Ker}\, q = (c^U_\#)^+(\mathrm{Ker}\langle p\rangle)$.

Пусть дано разложение

$$V = \coprod_{i\in I} V_i.$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}\langle \mathrm{Si}(U,V_i)\rangle \arrow[rrr, "\bigoplus_{i\in I}((c_i)^U_\#)^+"] \arrow[dr] \arrow[ddd, "\bigoplus_{i\in I}\langle p_i\rangle"'] & & & \bigoplus_{i\in I}\mathrm{Si}(U,\langle V_i\rangle) \arrow[dl, "E"] \arrow[ddd, "\bigoplus_{i\in I} q_i"] \\
& \langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle \arrow[r, "(c^U_\#)^+"] \arrow[d, "\langle p\rangle"'] & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle) \arrow[d, "q"] & \\
& \langle [U,V]\rangle \arrow[r, "(c^U_*)^+"] & {[U,\langle V\rangle]} & \\
\bigoplus_{i\in I}\langle [U,V_i]\rangle \arrow[ur] \arrow[rrr, "\bigoplus_{i\in I}((c_i)^U_*)^+"] & & & \bigoplus_{i\in I}[U,\langle V_i\rangle], \arrow[ul, "e"']
\end{tikzcd}$$

где c_i, p_i, q_i — аналоги стрелок c, p, q при замене V на V_i, а наклонные стрелки индуцированы включениями $V_i \to V$. Так как U компактно, E и e — изоморфизмы. Поэтому достаточно показать, что $\mathrm{Ker}\, q_i = ((c_i)^U_\#)^+(\mathrm{Ker}\langle p_i\rangle)$ при каждом $i \in I$. Эта редукция позволяет считать, что V 0-связно.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle_0 \arrow[rrr, "Z"] \arrow[dr, "I"] \arrow[ddd, "\langle p\rangle_0"'] & & & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle_0) \arrow[dl, "j^U_\#"] \arrow[ddd, "q_0"] \\
& \langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle \arrow[r, "(c^U_\#)^+"] \arrow[d, "\langle p\rangle"'] & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle) \arrow[d, "q"] & \\
& \langle [U,V]\rangle \arrow[r, "(c^U_*)^+"] & {[U,\langle V\rangle]} & \\
\langle [U,V]\rangle_0 \arrow[ur, "i"] \arrow[rrr, "z"] & & & {[U,\langle V\rangle_0],} \arrow[ul, "j^U_*"']
\end{tikzcd}$$

где $q_0 = [?]$ (проекция), Z — сведение, z — гомоморфизм, определяемый условием коммутативности внешнего квадрата, I, i — гомоморфизмы включения, $j\colon \langle V\rangle_0 \to \langle V\rangle$ — симплициальный гомоморфизм включения. Очевидно, $\operatorname{Ker} q = j^U_\#(\operatorname{Ker} q_0)$. Поэтому достаточно проверить, что $\operatorname{Ker} q_0 = Z(\operatorname{Ker}\langle p\rangle_0)$.

Так как V фибрантно и 0-связно, есть сюръективное симплициальное отображение $f\colon W \to V$, где W — стягиваемое фибрантное симплициальное множество. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle \mathrm{Si}(U,W)\rangle_0 \arrow[r, "\tilde Z"] \arrow[d, "\langle f^U_\#\rangle_0"'] & \mathrm{Si}(U,\langle W\rangle_0) \arrow[d, "(\langle f\rangle_0)^U_\#"] \\
\langle \mathrm{Si}(U,V)\rangle_0 \arrow[r, "Z"] \arrow[d, "\langle p\rangle_0"'] & \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle_0) \arrow[d, "q_0"] \\
\langle [U,V]\rangle_0 \arrow[r, "z"] & {[U,\langle V\rangle_0],}
\end{tikzcd}$$

где $f^U_\#\colon \mathrm{Si}(U,W) \to \mathrm{Si}(U,V)$ — отображение, $\langle f\rangle_0\colon \langle W\rangle_0 \to \langle V\rangle_0$ — симплициальный гомоморфизм, индуцированные отображением f, $\tilde Z$ — сведение. Так как $\langle f\rangle_0$ сюръективен, то он — расслоение. Поэтому $\operatorname{Ker} q_0 \subseteq \operatorname{Im}(\langle f\rangle_0)^U_\#$. По лемме 9.1, $\tilde Z$ сюръективно. Так как W стягиваемо, $\operatorname{Im}\langle f^U_\#\rangle_0 \subseteq \operatorname{Ker}\langle p\rangle_0$. Таким образом, $\operatorname{Ker} q_0 \subseteq Z(\operatorname{Ker}\langle p\rangle_0)$. Обратное включение очевидно. $\square$

§ 11. Гомоморфизм $P : \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle) \to L(|U|,|V|)$

Для $n \geqslant 0$ пусть $\boldsymbol{\Delta}^n$ — геометрический стандартный n-симплекс, $\mathring{\boldsymbol{\Delta}}^n$ — его внутренность. Для симплициального множества U и точки $z \in \boldsymbol{\Delta}^n$ определено отображение $z_U\colon U_n \to |U|$. Отображение $\boldsymbol{\Delta}^n \times U_n \to |U|$, $(z,u) \mapsto z_U(u)$, — каноническое спаривание геометрической реализации.

Пусть даны симплициальные множества U, V. Введём гомоморфизм $\tilde P :$ $\mathrm{Si}(U,\langle V\rangle) \to \mathrm{Hom}(\langle |U|\rangle, \langle |V|\rangle)$. Для $t \in \mathrm{Si}(U,\langle V\rangle)$ и $x \in |U|$, $x = z_U(u)$, где $z \in \boldsymbol{\Delta}^n$, $u \in U_n$, $n \geqslant 0$, положим $\tilde P(t)(\text{<}x\text{>}) = \langle z_V\rangle(t_n(u))$:

$$u \in U_n \xrightarrow{t_n} \langle V\rangle_n = \langle V_n\rangle \xrightarrow{\langle z_V\rangle} \langle |V|\rangle.$$

Это определение корректно.

Предположим, что U компактно.

11.1. Лемма. $\operatorname{Im}\tilde P \subseteq L(|U|,|V|)$.

Доказательство. Пусть $U^\times_n \subseteq U_n$ $(n \geqslant 0)$ — множество невырожденных симплексов. Для $n \geqslant 0$, $u \in U^\times_n$ введём гомоморфизм $I_u\colon \langle V_n\rangle \to L(|U|,|V|)$. Для $v \in V_n$, $x \in |U|$ положим

$$I_u(\text{<}v\text{>})(\text{<}x\text{>}) = \begin{cases} \text{<}z_V(v)\text{>}, & \text{если } x = z_U(u) \text{ для } z \in \mathring{\boldsymbol{\Delta}}^n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это равенство сохраняется при замене $<v>$ на $w \in \langle V_n \rangle$ и $<z_V(v)>$ на $\langle z_V \rangle(w)$. Достаточно показать, что

$$\tilde{P}(t) = \sum_{n \geqslant 0,\, u \in U_n^\times} I_u(t_n(u)), \qquad t \in \mathrm{Si}(U, \langle V \rangle).$$

Обе части при вычислении на $<x>$, где $x = z_U(u)$, $z \in \mathring{\boldsymbol{\Delta}}^n$, $u \in U_n^\times$, $n \geqslant 0$, дают $\langle z_V \rangle(t_n(u))$. $\square$

Лемма 11.1 позволяет ввести гомоморфизм $P : \mathrm{Si}(U, \langle V \rangle) \to L(|U|, [V|)$, $P(t) = \tilde{P}(t)$.

11.2. Лемма. *Диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Si}(U,V) \arrow[r, "c^U_\#"] \arrow[d, "|?|"'] & \mathrm{Si}(U,\langle V \rangle) \arrow[d, "P"] \\
C(|U|,|V|) \arrow[r, "\langle ? \rangle"] & L(|U|,|V|),
\end{tikzcd}$$

где $c = c_V : V \to \langle V \rangle$ — каноническое симплициальное отображение, коммутативна.

Доказательство. Для $s \in \mathrm{Si}(U, V)$ и $x \in |U|$, $x = z_U(u)$, где $z \in \boldsymbol{\Delta}^n$, $u \in U_n$, $n \geqslant 0$, имеем $(P \circ c^U_\#)(s)(<x>) = P(c \circ s)(<x>) = \langle z_V \rangle((c \circ s)_n(u)) = <z_V(s_n(u))> = <|s|(z_U(u))> = <|s|(x)> = \langle |s| \rangle(<x>)$. $\square$

§ 12. Необходимость в теореме 1.1

12.1. Утверждение. *Пусть даны симплициальные множества U, V, причём U полиэдрально и компактно, а V фибрантно, абелева группа M и прямой инвариант $f : [|U|, |V|] \to M$. Пусть $h : [|U|, |V|] \to [S|U|, S|V|]$ — главный инвариант. Тогда существует такой гомоморфизм $d : [S|U|, S|V|] \to M$, что $f = d \circ h$.*

Доказательство. Так как f прям, есть такой гомоморфизм $F : L(|U|, |V|) \to M$, что $f([a]) = F(\langle a \rangle)$ для $a \in C(|U|, |V|)$. Рассмотрим диаграмму абелевых групп и гомоморфизмов

$$\begin{tikzcd}
\langle C(|U|,|V|) \rangle \arrow[rrr, "k^+"] \arrow[ddd, "\langle r \rangle"'] & & & L(|U|,|V|) \arrow[ddd, "F"] \\
& \langle \mathrm{Si}(U,V) \rangle \arrow[ul, "\langle I \rangle"] \arrow[r, "(c^U_\#)^+"] \arrow[d, "\langle p \rangle"'] & \mathrm{Si}(U,\langle V \rangle) \arrow[ur, "P"'] \arrow[d, "q"] & \\
& \langle [U,V] \rangle \arrow[dl, "\langle i \rangle"'] \arrow[r, "(c^U_*)^+"] & {[U,\langle V \rangle]} \arrow[dr, dashed, "\tilde{d}"] & \\
\langle [|U|,|V|] \rangle \arrow[rrr, "f^+"] & & & M.
\end{tikzcd}$$

Здесь внутренний квадрат как в § 10, $r = [?]\colon C(|U|,|V|) \to [|U|,|V|]$ (проекция), $k = \langle ?\rangle\colon C(|U|,|V|) \to L(|U|,|V|)$, $I = |?|\colon \mathrm{Si}(U,V) \to C(|U|,|V|)$ (отображение геометрической реализации) $i\colon [U,V] \to [|U|,|V|]$, $[s] \mapsto [|s|]$, P как в § 11. По лемме 11.2, верхняя трапеция коммутативна. Сплошные стрелки определены и образуют коммутативную поддиаграмму. Так как, по лемме 10.1, внутренний квадрат кодекартов, условие коммутативности диаграммы определяет пунктирную стрелку $\tilde d$.

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle [U,V]\rangle \arrow[rr, "(c^U_*)^+"] \arrow[dd, "\langle i\rangle"'] & & {[U,\langle V\rangle]} \arrow[dl, "\tilde d"'] \arrow[dd, "e"] \\
& M & \\
\langle [|U|,|V|]\rangle \arrow[ur, "f^+"] \arrow[rr, "h^+"] & & {[S|U|,S|V|],} \arrow[ul, "d"']
\end{tikzcd}$$

где e — изоморфизм из леммы 4.1, $d = \tilde d \circ e^{-1}$. Квадрат коммутативен, по лемме 4.1. Имеем $\tilde d \circ (c^U_*)^+ = f^+ \circ \langle i\rangle$. Так как V фибрантно, i — биекция и, следовательно, $\langle i\rangle$ — изоморфизм. Получаем $f^+ = d \circ h^+$ (так что диаграмма коммутативна). Значит, $f = d \circ h$. $\square$

12.2. Предложение. *Пусть даны пространства X, Y, причём X полноценно и финитарно, абелева группа M и прямой инвариант $f\colon [X,Y] \to M$. Пусть $h\colon [X,Y] \to [SX,SY]$ — главный инвариант. Тогда существует такой гомоморфизм $d\colon [SX,SY] \to M$, что $f = d \circ h$.*

Доказательство. Есть гомотопическая эквивалентность $r\colon X \to |U|$ и слабая гомотопическая эквивалентность $s\colon |V| \to Y$, где U, V — симплициальные множества, причём U полиэдрально и компактно, а V фибрантно. Будем строить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
{[|U|,|V|]} \arrow[rr, "\tilde h"] \arrow[dd, "k"'] \arrow[dr, "\tilde f"'] & & {[S|U|,S|V|]} \arrow[dl, "\tilde d"] \arrow[dd, "l"] \\
& M & \\
{[X,Y]} \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & {[SX,SY].} \arrow[ul, "d"']
\end{tikzcd}$$

Пусть k — биекция, l — изоморфизм, индуцированные парой (r,s), $\tilde h$ — главный инвариант. Квадрат коммутативен. По лемме 3.1, инвариант $\tilde f = f \circ k$ прям. По утверждению 12.1, есть такой гомоморфизм $\tilde d$, что $\tilde f = \tilde d \circ \tilde h$. Положим $d = \tilde d \circ l^{-1}$. Так как k — биекция, получаем $f = d \circ h$ (так что диаграмма коммутативна). $\square$

§ 13. Три контрпримера

Гавайская серьга. Покажем, что условие полноценности пространства Y в теореме 1.1 и предложении 7.3 существенно. Пусть X — одноточечная компактификация луча $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ (окружность), Y — пространства $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ (гавайская серьга [8, пример 1.25]). Зададим отображение $m \in C(X, Y)$, полагая

$$m(x) = \left[\frac{x+1}{2}\right] + (-1)^{[x/2]}\{-x\}$$

для $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$. Здесь $[t]$ — целая, $\{t\}$ — дробная часть числа $t \in \mathbb{R}$. Элемент группы $\pi_1(Y, \infty)$, представляемый петлёй m, есть (разумно понимаемое) бесконечное произведение коммутаторов

$$\prod_{p=0}^{\infty} [u_{2p}, u_{2p+1}], \qquad (*)$$

где u_q — элемент, реализуемый замыканием интервала $(q, q+1)$. Пусть $e \in H_1(X)$ — базисный элемент. Как в [10, стр. 76] получаем, что элемент $m_*(e) \in H_1(Y)$ имеет бесконечный порядок. Поэтому есть такой гомоморфизм $k\colon H_1(Y) \to \mathbb{Q}$, что $k(m_*(e)) = 1$. Введём гомоморфизм $d\colon [SX, SY] \to \mathbb{Q}$, полагая $d([v]) = k(v_*(e))$ для морфизма $v\colon SX \to SY$. Пусть $h\colon [X, Y] \to [SX, SY]$ — главный инвариант. Покажем, что *инвариант $d \circ h$ — а значит, и h — непрям.*

Для $y \in Y$, $i = 0, 1$ положим $y_{(i)} \in Y$ равным ∞ при $i = 1$ и y иначе. Для $i, j = 0, 1$ введём отображение $r_{ij} \in C(Y, Y)$, для $y \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ полагая $r_{ij}(y)$ равным $y_{(j)}$, если $[y]$ нечётно, и $y_{(i)}$ иначе. Для элементов z_{ij}, $i, j = 0, 1$, произвольной абелевой группы пусть $\vee_{ij} z_{ij} = z_{00} - z_{10} - z_{01} + z_{11}$. Очевидно, $\vee_{ij}\langle r_{ij}\rangle = 0$ в $L(Y, Y)$. Полагая $a_{ij} = r_{ij} \circ m \in C(X, Y)$, получаем $\vee_{ij}\langle a_{ij}\rangle = 0$ в $L(X, Y)$. Поэтому $\vee_{ij} f([a_{ij}]) = 0$ для любого прямого инварианта f. Покажем, что это не так для инварианта $d \circ h$. Имеем $a_{00} = m$; отображение a_{11} постоянно. Легко видеть, что отображения a_{10} и a_{01} гомотопны постоянному (это «формально следует» из представления $(*)$ и равенства $r_{10\,*}(u_{2p}) = r_{01\,*}(u_{2p+1}) = 1$). Получаем $\vee_{ij}(d \circ h)([a_{ij}]) = (d \circ h)([m]) = k(m_*(e)) = 1$. $\square$

Используя [9, Theorem 2], пространства X, Y в этом примере легко сделать односвязными.

Варшавская окружность. Покажем, что условие полноценности пространства X в теореме 1.1 и предложении 12.2 существенно. Пусть X — варшавская окружность [8, упражнение 7 в § 1.3], Y — единичная окружность в $\mathbb{C}$. Y — топологическая абелева группа. Группа $[X, Y]$ нетривиальна, по [8, упражнение 7 в § 1.3, предложение 1.30], и не имеет кручения, по [1, теорема 1 в § 56-III]. Поэтому есть ненулевой гомоморфизм $f\colon [X, Y] \to \mathbb{Q}$. По лемме 7.1, f — прямой инвариант. Так как X слабо гомотопически эквивалентно точке [8, упражнение 10 в § 4.1], а Y 0-связно, то главный инвариант $h\colon [X, Y] \to [SX, SY]$ постоянен. Поэтому *не существует такого гомоморфизма $d\colon [SX, SY] \to \mathbb{Q}$, что $f = d \circ h$.* $\square$

Бесконечное дискретное пространство. Покажем, что условие финитарности пространства X в теореме 1.1 и предложении 12.2 существенно (см. также § 14).

Заметим, что для бесконечного множества X подгруппа $B(X) \subseteq \mathbb{Z}^X$ не есть прямое слагаемое, так как группа $\mathbb{Z}^X$ редуцирована, а группа $\mathbb{Z}^X/B(X)$ делима и нетривиальна.

Пусть X, Y — дискретные пространства, X бесконечно, а $Y = \{y_0, y_1\}$. Введём функцию $k\colon Y \to \mathbb{Z}$, $y_i \mapsto i$, $i = 0, 1$. Рассмотрим инвариант $f\colon [X, Y] \to B(X)$, $[a] \mapsto k \circ a$, $a \in C(X, Y)$.

Инвариант f прям, так как для гомоморфизма $F\colon L(X, Y) \to B(X)$, $F(u)(x) = k^+(u(<x>))$, $x \in X$, $u \in L(X, Y)$, имеем $f([a]) = F(\langle a\rangle)$, $a \in C(X, Y)$.

Пусть $h\colon [X, Y] \to [SX, SY]$ — главный инвариант. Покажем, что *не существует такого гомоморфизма* $d\colon [SX, SY] \to B(X)$, *что* $f = d \circ h$. Допустим, что такой d существует.

Введём гомоморфизм $l\colon \mathbb{Z}^X \to \mathrm{Hom}(\langle X\rangle, \langle Y\rangle)$, $l(v)(<x>) = v(x)(<y_1> - <y_0>)$, $x \in X$, $v \in \mathbb{Z}^X$. Имеем $l(f([a])) = \langle a\rangle - \langle a_0\rangle$, $a \in C(X, Y)$, где $a_0\colon X \to Y$, $x \mapsto y_0$. Очевидно, есть такой изоморфизм $e\colon \mathrm{Hom}(\langle X\rangle, \langle Y\rangle) \to [SX, SY]$, что $e(\langle a\rangle) = h([a])$, $a \in C(X, Y)$. Введём композицию

$$r\colon \mathbb{Z}^X \xrightarrow{l} \mathrm{Hom}(\langle X\rangle, \langle Y\rangle) \xrightarrow{e} [SX, SY] \xrightarrow{d} B(X).$$

Для $a \in C(X, Y)$ имеем $r(f([a])) = (d \circ e \circ l \circ f)([a]) = d(e(\langle a\rangle - \langle a_0\rangle)) = d(h([a]) - h([a_0])) = f([a]) - f([a_0]) = f([a])$. Так как элементы $f([a])$, $a \in C(X, Y)$, порождают группу $B(X)$, то получаем, что $r|_{B(X)} = \mathrm{id}$, что невозможно. □

§ 14. Инварианты отображений $\mathbb{R}\boldsymbol{P}^\infty \to \mathbb{R}\boldsymbol{P}^\infty$

Здесь мы покажем, что условие финитарности пространства X в теореме 1.1 и предложении 12.2 существенно даже в случае делимой группы M. (Возможно, в случае делимой группы M и/или (одно)связного пространства Y условие финитарности можно заменить на условие слабой гомотопической эквивалентности конечномерному клеточному пространству.)

Пусть даны пространства X, Y. Множество $E \subseteq X$ называем Y*-представительным*, если любые совпадающие на E отображения $a, b \in C(X, Y)$ гомотопны. Называем X Y*-унитарным*, если любое его конечное покрытие содержит Y-представительное множество.

14.1. Лемма. *Пусть дана делимая абелева группа M. Если X Y-унитарно, то любой инвариант $f\colon [X, Y] \to M$ прям.*

Доказательство. Пусть $r = [?]\colon C(X, Y) \to [X, Y]$ (проекция), $k = \langle ?\rangle\colon C(X, Y) \to L(X, Y)$. Нужно установить существование гомоморфизма F, дающего коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle C(X,Y)\rangle \arrow[r, "k^+"] \arrow[d, "\langle r\rangle"'] & L(X,Y) \arrow[d, "F"] \\
\langle [X,Y]\rangle \arrow[r, "f^+"] & M.
\end{tikzcd}$$

Так как M делима, достаточно показать, что $\operatorname{Ker} k^+ \subseteq \operatorname{Ker}\langle r\rangle$. Возьмём элемент $w \in \operatorname{Ker} k^+$ и покажем, что $w \in \operatorname{Ker}\langle r\rangle$. Есть такие конечное множество I, отображение $l\colon I \to C(X,Y)$ и элемент $v \in \langle I\rangle$, что $\langle l\rangle(v) = w$. Пусть $a_i = l(i)$, $i \in I$. Для эквивалентности d на I пусть $p_d\colon I \to I/d$ — проекция. Пусть N — множество всех таких эквивалентностей d на I, что $\langle p_d\rangle(v) = 0$ в $\langle I/d\rangle$.

Возьмём $x \in X$. Введём эквивалентность $d(x) = \{(i,j) : a_i(x) = a_j(x)\}$ на I. Покажем, что $d(x) \in N$. Имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_{d(x)}"'] & C(X,Y) \arrow[d, "e_x"] \\
I/d(x) \arrow[r, "l_x"] & Y,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\langle C(X,Y)\rangle \arrow[r, "k^+"] \arrow[d, "\langle e_x\rangle"'] & L(X,Y) \arrow[dl, "h_x"] \\
\langle Y\rangle, &
\end{tikzcd}$$

где отображение l_x определяется условием коммутативности диаграммы, e_x — отображение вычисления в точке x, h_x — гомоморфизм вычисления на элементе $<x>$. Получаем $\langle l_x\rangle(\langle p_{d(x)}\rangle(v)) = \langle e_x\rangle(\langle l\rangle(v)) = \langle e_x\rangle(w) = h_x(k^+(w)) = 0$. Так как l_x инъективно, то $\langle p_{d(x)}\rangle(v) = 0$, что и нужно.

Для эквивалентности d на I пусть $E_d = \{x \in X : (i,j) \in d \Rightarrow a_i(x) = a_j(x)\}$. Так как $x \in E_{d(x)}$ для любой точки $x \in X$, то E_d, $d \in N$, — покрытие пространства X. Так как X Y-унитарно, есть такое $d \in N$, что E_d Y-представительно. Для $(i,j) \in d$ отображения a_i и a_j совпадают на E_d и, следовательно, гомотопны. Значит, есть отображение m, дающее коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "l"] \arrow[d, "p_d"'] & C(X,Y) \arrow[d, "r"] \\
I/d \arrow[r, "m"] & {[X,Y].}
\end{tikzcd}$$

Получаем $\langle r\rangle(w) = \langle r\rangle(\langle l\rangle(v)) = \langle m\rangle(\langle p_d\rangle(v)) = 0$, так как $d \in N$. □

Далее пусть X и Y гомеоморфны пространству $\mathbb{R}P^\infty$.

14.2. Лемма. *X Y-унитарно.*

Доказательство. Пусть $H^\bullet$ — $\mathbb{Z}_2$-когомологии. Пусть $g \in H^1X$ и $h \in H^1Y$ — (единственные) ненулевые классы.

Покажем, что (∗) множество $E \subseteq X$ Y-представительно, если $g|_U \neq 0$ для любой его окрестности U. Если отображения $a, b \in C(X, Y)$ совпадают на E, то они гомотопны на некоторой его окрестности U. Тогда $a^*(h)|_U = b^*(h)|_U$. Так как $g|_U \neq 0$, гомоморфизм $?|_U \colon H^1X \to H^1U$ инъективен. Значит, $a^*(h) = b^*(h)$. Так как $Y — \mathcal{K}(\mathbb{Z}_2, 1)$, то a и b гомотопны, что и нужно.

Покажем, что X Y-унитарно. Пусть $X = E_1 \cup \ldots \cup E_n$, где множества E_i не Y-представительны. По (∗), каждое E_i имеет окрестность U_i с $g|_{U_i} = 0$. Так как $U_1 \cup \ldots \cup U_n = X$, получаем $g^n = 0$, что не так. □

Имеем $[X, Y] = \{u_0, u_1\}$, где u_0 — класс постоянного отображения, u_1 — гомеоморфизма. Рассмотрим инвариант $f \colon [X, Y] \to \mathbb{Q}$, $u_i \mapsto i$, $i = 0, 1$. По леммам 14.2 и 14.1, f прям. Пусть $h \colon [X, Y] \to [SX, SY]$ — главный инвариант. Используя изоморфизм

$$[SX, SY] \longrightarrow \prod_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(H_iX, H_iY), \qquad [v] \mapsto v_*,$$

получаем $2h(u_0) = 2h(u_1)$. Значит, *не существует такого гомоморфизма* $d \colon [SX, SY] \to \mathbb{Q}$, *то* $f = d \circ h$. □

§ 15. *K*-прямые инварианты

Пусть дано унитальное кольцо K. K*-модули* понимаются в унитальном смысле.

***K*-модуль $L_K(X, Y)$.** Для множества X пусть $\langle X \rangle_K$ — (свободный) K-модуль с базисом $X^\sharp_K \subseteq \langle X \rangle_K$, снабжённым биекцией $X \to X^\sharp_K$, $x \mapsto {<}x{>}_K$. Для множеств X, Y пусть $L_K(X, Y) \subseteq \operatorname{Hom}_K(\langle X \rangle_K, \langle Y \rangle_K)$ — K-подмодуль, порождённый всеми такими K-гомоморфизмами u, что $u(X^\sharp_K) \subseteq Y^\sharp_K \cup \{0\}$. Отображение $a \colon X \to Y$ индуцирует K-гомоморфизм $\langle a \rangle_K \in L_K(X, Y)$, $\langle a \rangle_K({<}x{>}_K) = {<}a(x){>}_K$.

***K*-прямые инварианты.** Пусть даны пространства X, Y и K-модуль M. Инвариант $f \colon [X, Y] \to M$ называем K*-прямым*, если существует такой K-гомоморфизм $\tilde{F} \colon L_K(X, Y) \to M$, что $f([a]) = \tilde{F}(\langle a \rangle_K)$ для всех $a \in C(X, Y)$.

15.1. Предложение. *Инвариант* $f \colon [X, Y] \to M$ K*-прям, если и только если он прям.*

Доказательство в § 16.

***K*-главный инвариант $\tilde{h} \colon [X, Y] \to [S_KX, S_KY]_K$.** Пусть S_KX — K-комплекс сингулярных цепей пространства X с коэффициентами в K, $[S_KX, S_KY]_K$ — K-модуль K-гомотопических классов K-морфизмов $S_KX \to S_KY$. Для $a \in C(X, Y)$ пусть $S_Ka \colon S_KX \to S_KY$ — индуцированный K-морфизм, $[S_Ka]_K \in [S_KX, S_KY]_K$ — его K-гомотопический класс. Инвариант $\tilde{h} \colon [X, Y] \to [S_KX, S_KY]_K$, $[a] \mapsto [S_Ka]_K$, называем K*-главным.*

15.2. Теорема. *Предположим, что X, Y полноценны и X финитарно. Инвариант $f\colon [X,Y] \to M$ K-прям, если и только если существует такой K-гомоморфизм $\tilde{d}\colon [S_K X, S_K Y]_K \to M$, что $f = \tilde{d} \circ \tilde{h}$.*

Доказательство в § 16. При $K = \mathbb{Z}$ получаем теорему 1.1.

§ 16. *K*-прямые инварианты: доказательства

Пусть даны множества X, Y. Введём гомоморфизм $e\colon L(X,Y) \to L_K(X,Y)$, для $u \in L(X,Y)$ задав $e(u)$ как K-гомоморфизм, дающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\langle X\rangle \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i_X"'] & \langle Y\rangle \arrow[d, "i_Y"] \\
\langle X\rangle_K \arrow[r, "e(u)"] & \langle Y\rangle_K,
\end{tikzcd}$$

где i_X — гомоморфизм ${<}x{>} \mapsto {<}x{>}_K$, i_Y такое же.

Для абелевой группы A, K-модуля M и гомоморфизма $t\colon A \to M$ вводим K-гомоморфизм $t^{(K)}\colon K \otimes A \to M$, $1 \otimes a \mapsto t(a)$.

16.1. Лемма. $e^{(K)}\colon K \otimes L(X,Y) \to L_K(X,Y)$ — *K-изоморфизм.*

Доказательство. Для $w \in \langle Y\rangle_K$, $y \in Y$ пусть $w/y \in K$ — коэффициент перед ${<}y{>}_K$ в w. Для $v \in L_K(X,Y)$, $k \in K \setminus \{0\}$ введём гомоморфизм $v_k \in L(X,Y)$,

$$v_k({<}x{>}) = \sum_{y \in Y : v({<}x{>}_K)/y = k} {<}y{>}, \qquad x \in X.$$

Как нетрудно проверить, отображение $d\colon L_K(X,Y) \to K \otimes L(X,Y)$,

$$d(v) = \sum_{k \in K \setminus \{0\}} k \otimes v_k,$$

— K-гомоморфизм. Используя это, получаем $e^{(K)} \circ d = \mathrm{id}$, $d \circ e^{(K)} = \mathrm{id}$. $\square$

Доказательство предложения 15.1. Необходимость. Пусть f K-прям. Есть такой K-гомоморфизм $\tilde{F}\colon L_K(X,Y) \to M$, что $f([a]) = \tilde{F}(\langle a\rangle_K)$, $a \in C(X,Y)$. Введём гомоморфизм $F = \tilde{F} \circ e$:

$$\begin{tikzcd}
C(X,Y) \arrow[rr, "\langle ?\rangle_K"] \arrow[dr, "\langle ?\rangle"'] \arrow[dd, "{[?]}"'] & & L_K(X,Y) \arrow[dd, "\tilde{F}"] \\
& L(X,Y) \arrow[ur, "e"'] \arrow[dr, "F"] & \\
{[X,Y]} \arrow[rr, "f"] & & M.
\end{tikzcd}$$

Диаграмма коммутативна. Получаем $f([a]) = F(\langle a \rangle)$, $a \in C(X,Y)$. Значит, f прям.

Достаточность. Пусть f прям. Есть такой гомоморфизм $F\colon L(X,Y) \to M$, что $f([a]) = F(\langle a \rangle)$, $a \in C(X,Y)$. По лемме 16.1, $e^{(K)}$ — K-изоморфизм. Введём гомоморфизм $\tilde{F} = F^{(K)} \circ (e^{(K)})^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
C(X,Y) \arrow[rr, "\langle ? \rangle_K"] \arrow[dr, "\langle ? \rangle"'] \arrow[dd, "{[?]}"'] & & L_K(X,Y) \arrow[dd, bend left=60, "\tilde{F}"] \\
& L(X,Y) \arrow[ur, "e"] \arrow[r, "1\otimes ?"] \arrow[dr, "F"'] & K \otimes L(X,Y) \arrow[u, "e^{(K)}"'] \arrow[d, "F^{(K)}"] \\
{[X,Y]} \arrow[rr, "f"] & & M.
\end{tikzcd}$$

Диаграмма коммутативна. Получаем $f([a]) = \tilde{F}(\langle a \rangle_K)$, $a \in C(X,Y)$. Значит, f K-прям. $\square$

***Гомоморфизм* $\boldsymbol{I\colon [SX,SY] \to [S_K X, S_K Y]_K}$.** Пусть даны пространства X, Y. Морфизм $v\colon SX \to SY$ индуцирует K-морфизм

$$S_K X = K \otimes SX \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes v} K \otimes SY = S_K Y.$$

Введём гомоморфизм $I\colon [SX,SY] \to [S_K X, S_K Y]_K$, $[v] \mapsto [\mathrm{id} \otimes v]_K$.

16.2. Лемма. *Если группа $H_\bullet(X)$ конечно порождена, то K-гомоморфизм*

$$I^{(K)}\colon K \otimes [SX,SY] \to [S_K X, S_K Y]_K$$

— K-расщепляющий K-мономорфизм, т. е. существует такой K-гомоморфизм $R\colon [S_K X, S_K Y]_K \to K \otimes [SX,SY]$, что $R \circ I^{(K)} = \mathrm{id}$.

Это вариант теоремы об универсальных коэффициентах, ср. [6, теоремы 5.2.8, 5.5.10]. $\square$

Доказательство теоремы 15.2. Имеем $\tilde{h} = I \circ h$, где $h\colon [X,Y] \to [SX,SY]$ — главный инвариант. По предложению 7.3, h прям. Значит, $\tilde{h}$ прям. По предложению 15.1, $\tilde{h}$ K-прям.

Это даёт достаточность. Необходимость. Пусть f K-прям. По предложению 15.1, f прям. По предложению 12.2, есть такой гомоморфизм $d\colon [SX,SY] \to M$, что $f = d \circ h$. По лемме 16.2, есть такой K-гомоморфизм $\tilde{d}$, что $\tilde{d} \circ I^{(K)} = d^{(K)}$:

$$\begin{tikzcd}
& {[SX,SY]} \arrow[d, "d"] \arrow[dr, "1\otimes ?"] \arrow[ddr, bend left=60, "I"] & \\
{[X,Y]} \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\tilde{h}"'] & M & K \otimes [SX,SY] \arrow[l, "d^{(K)}"'] \arrow[dl, "I^{(K)}"] \\
& {[S_K X, S_K Y]_K}. \arrow[u, "\tilde{d}"'] &
\end{tikzcd}$$

Диаграмма коммутативна. В частности, $f = \tilde{d} \circ \tilde{h}$. $\square$

Литература

[1] К. Куратовский, Топология, т. 2, Мир, 1969.

[2] С. С. Подкорытов, Альтернативное доказательство слабой формы теоремы Серра, Записки науч. семин. ПОМИ **261** (1999), 210 — 221.

[3] С. С. Подкорытов, Об отображениях сферы в односвязное пространство, Записки науч. семин. ПОМИ **329** (2005), 159 — 194.

[4] С. С. Подкорытов, Порядок гомотопического инварианта в стабильном случае, Мат. сб. **202** (2011), №8, 95 — 116.

[5] С. С. Подкорытов, О гомотопических инвариантах конечной степени, Записки науч. семин. ПОМИ **415** (2013), 109 — 136.

[6] Э. Спеньер, Алгебраическая топология, Мир, 1971.

[7] Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы, т. 2, Мир, 1977.

[8] А. Хатчер, Алгебраическая топология, МЦНМО, 2011.

[9] M. G. Barratt, J. Milnor, An example of anomalous singular homology, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 293 — 297.

[10] G. Higman, Unrestricted free products, and varieties of topological groups, J. Lond. Math. Soc. **27** (1952), 73 — 81.

[11] P. Hill, The additive group of commutative rings generated by idempotents, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 499 — 502.

[12] S. S. Podkorytov, An iterated sum formula for a spheroid's homotopy class modulo 2-torsion, arXiv:math/0606528 (2006).

`ssp@pdmi.ras.ru`
`http://www.pdmi.ras.ru/~ssp`