ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СФЕРЫ В ОДНОСВЯЗНОЕ ПРОСТРАНСТВО

С. С. Подкорытов

Доказывается, что для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, существует такое $r \in \mathbb{N}$, что для любых односвязного пунктированного клеточного пространства Y и конечного множества B связанных (т. е. отображающих отмеченную точку в отмеченную точку) непрерывных отображений $a\colon S^m \to Y$ существуют такие конечное множество $E \subset S^m \times Y$ и отображение $k\colon E(r) \to \pi_m(Y)$, что для любого $a \in B$ верно равенство

$$[a] = \sum_{F \in E(r) : F \subset \Gamma(a)} k(F).$$

Здесь $E(r) = \{\, F \subset E : |F| \leqslant r \,\}$, $\Gamma(a) \subset S^m \times Y$ — график отображения a, $[a] \in \pi_m(Y)$ — его гомотопический класс.

Полагаем $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$. Для конечного множества E и числа $r \in \mathbb{N}$ полагаем $E(r) = \{\, F \subset E : |F| \leqslant r \,\}$. Для отображения $a\colon X \to Y$ полагаем: $\Gamma(a) \subset X \times Y$ — его график.

Основные термины. Пусть даны множества X, Y, число $r \in \mathbb{N}$ и абелева группа M.

Обозначение и определение. Пусть даны конечное множество B отображений $a\colon X \to Y$ и конечное множество $E \subset X \times Y$. Для отображения $k\colon E(r) \to M$ задаём отображение $k_B\colon B \to M$ формулой

$$k_B(a) = \sum_{F \in E(r) : F \subset \Gamma(a)} k(F).$$

Отображение $g\colon B \to M$ называем (E, r)-*определимым*, если существует такое отображение $k\colon E(r) \to M$, что $g = k_B$.

Определение. Пусть дано некоторое множество A отображений $a\colon X \to Y$. Отображение $f\colon A \to M$ называем r-*определимым*, если для любого конечного множества $B \subset A$ существует такое конечное множество $E \subset X \times Y$, что отображение $f|_B$ (E, r)-определимо.

Ср. понятие персептрона ограниченного порядка ([1]).

Работа частично поддержана Федеральным агентством по науке и инновациям (грант НШ-1914.2003.1) и Фондом поддержки отечественной науки.

Пример 1. Пусть A — множество всех измеримых отображений пространства X с конечной мерой в измеримое пространство Y, $p\colon (X\times Y)^r\to\mathbb{R}$ — ограниченная измеримая функция. Тогда отображение $f\colon A\to\mathbb{R}$,

$$f(a)=\int_{X^r} p(x_1,a(x_1),\dots,x_r,a(x_r))\,dx_1\dots dx_r,$$

r-определимо.

Доказательство. Для $a\in A$ зададим измеримую функцию $P_a\colon X^r\to\mathbb{R}$, полагая $P_a(x_1,\dots,x_r)=p(x_1,a(x_1),\dots,x_r,a(x_r))$. Пусть дано конечное множество $B\subset A$. Для $x\in X^r$ зададим на B отношение $R_x=\{\,(a,a'):P_a(x)=P_{a'}(x)\,\}$. Пусть $Q=\{R_x\mid x\in X^r\}$. Множества $D_R=\{\,x\in X^r\mid R_x=R\,\}$, $R\in Q$, измеримы и образуют разбиение пространства X^r. Для каждого $R\in Q$ выберем точку $x_R\in D_R$. Для $R\in Q$, $a\in B$ пусть $F(R,a)=\{\,(x_s,a(x_s))\mid s=1,\dots,r\,\}$, где $(x_1,\dots,x_r)=x_R$. Пусть

$$E=\bigcup_{R\in Q,\ a\in B}F(R,a).$$

Построим отображение $k\colon E(r)\to\mathbb{R}$. Для $F\in E(r)$ выберем, если можно, такое $a\in B$, что $F\subset\Gamma(a)$, и положим

$$k(F)=\sum_{R\in Q:F(R,a)=F}\int_{D_R}P_a(x)\,dx.$$

От выбора a результат не зависит, так как при $F\subset\Gamma(a)\cap\Gamma(a')$ условия $F(R,a)=F$ и $F(R,a')=F$ равносильны и влекут совпадение функций P_a и $P_{a'}$ в точке x_R и, следовательно, на множестве D_R. Если нужного a не существует, зададим $k(F)$ произвольно. Для $a\in B$ имеем

$$k_B(a)=\sum_{F\in E(r):F\subset\Gamma(a)}k(F)=\sum_{F\in E(r):F\subset\Gamma(a)}\ \sum_{R\in Q:F(R,a)=F}\int_{D_R}P_a(x)\,dx=\\=\sum_{R\in Q}\int_{D_R}P_a(x)\,dx=\int_{X^r}P_a(x)\,dx=f(a)$$

(используется, что $F(R,a)\subset\Gamma(a)$). $\square$

Пример 2. Пусть A — множество всех гладких вложений $a\colon S^1\to\mathbb{R}^3$, M — абелева группа. Тогда: а) любой инвариант Васильева $f\colon A\to M$ порядка не выше r $2r$-определим; б) любой r-определимый изотопический инвариант $f\colon A\to M$ — инвариант Васильева порядка не выше r.

Доказательство утверждения б). Пусть дан особый узел $a\colon S^1\to\mathbb{R}^3$ с $r+1$ двойными точками $y_0,\dots,y_r\in\mathbb{R}^3$. Для $c_0,\dots,c_r=\pm1$ пусть $a_{c_0\dots c_r}\colon S^1\to\mathbb{R}^3$ — узел, получающийся из особого узла a разрешением, направление которого в точке y_s равно c_s, $s=0,\dots,r$. Нужно показать, что

$$\sum_{c_0,\dots,c_r=\pm1}c_0\dots c_r f(a_{c_0\dots c_r})=0.$$

Для каждого $s = 0, \dots, r$ выберем окрестность V_s точки y_s — так, чтобы эти окрестности не пересекались. Пусть $U_s = a^{-1}(V_s)$, $s = 0, \dots, r$. Считаем, что отображение $a_{c_0 \dots c_r}$ на множестве U_s определяется числом c_s, а вне этих множеств совпадает с a. Пусть $B = \{a_{c_0 \dots c_r} \mid c_0, \dots, c_r = \pm 1\}$. Есть такие конечное множество $E \subset S^1 \times \mathbb{R}^3$ и отображение $k\colon E(r) \to M$, что $k_B = f|_B$. Имеем

$$\sum_{c_0,\dots,c_r=\pm1} c_0 \dots c_r f(a_{c_0 \dots c_r}) = \sum_{c_0,\dots,c_r=\pm1} c_0 \dots c_r \sum_{F \in E(r) : F \subset \Gamma(a_{c_0 \dots c_r})} k(F) =$$
$$= \sum_{F \in E(r)} \Bigl(\sum_{c_0,\dots,c_r=\pm1 : F \subset \Gamma(a_{c_0 \dots c_r})} c_0 \dots c_r \Bigr) k(F).$$

Для любого $F \in E(r)$ существует такое s, что $F \cap U_s \times \mathbb{R}^3 = \varnothing$ и, следовательно, истинность включения $F \subset \Gamma(a_{c_0 \dots c_r})$ не зависит от c_s, а значит, внутренняя сумма равна нулю. $\square$

Гауссовы диаграммы. *Стрелка (со знаком)* — тройка (x, x', c), где $x, x' \in S^1 \setminus \{x_0\}$ (здесь x_0 — отмеченная точка), $x \neq x'$ и $c = \pm 1$. *Носителем* стрелки (x, x', c) называем множество $\{x, x'\}$. *(Гауссова) диаграмма* — конечное множество стрелок с непересекающимися носителями. Объединение носителей всех стрелок диаграммы g — её *носитель* $\operatorname{supp} g$. Пусть G_r — множество всех диаграмм мощности не более r.

Считая, что $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, для отображения $a\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ полагаем: $a_г\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$, $a_в\colon S^1 \to \mathbb{R}$ — его проекции. Узел a называем *допустимым*, если $a_г$ — погружение без самокасаний и тройных точек, причём $a_г(x_0)$ — его простая точка. С допустимым узлом a связана диаграмма $\delta(a)$ — множество таких стрелок (x, x', c), что $a_г(x) = a_г(x')$, $a_в(x) < a_в(x')$ и $c = \operatorname{sgn}[da_г(x), da_г(x')]$ (d — дифференцирование вдоль S^1, квадратные скобки — стандартная форма площади на $\mathbb{R}^2$).

Доказательство утверждения а). Пусть даны абелева группа M и инвариант Васильева $f\colon A \to M$ порядка не выше r. По теореме Гусарова ([4]), существует такое отображение $p\colon G_r \to M$, что для любого допустимого узла a

$$f(a) = \sum_{g \subset \delta(a) : |g| \leqslant r} p(g).$$

(Теорема Гусарова позволяет выбрать отображение p инвариантным относительно сохраняющих отмеченную точку изотопий окружности. Это не понадобится.) Покажем, что инвариант f $2r$-определим. Пусть дано конечное множество $B \subset A$. Пусть $Z \subset S^1$ — множество тех точек x, для которых существуют узлы $a, a' \in B$ с $a(x) = a'(x)$, $da(x) \neq da'(x)$. Множество Z конечно. Есть такой изотопный тождественному диффеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, что узлы $h \circ a$, $a \in B$, допустимы и носители их диаграмм не пересекаются с Z. Вместо $h \circ a$ пишем $\tilde{a}$. Заметим, что (*) если $a \in B$, $g \subset \delta(\tilde{a})$ и отображение $a' \in B$ совпадает с a на множестве $\operatorname{supp} g$, то $g \subset \delta(\tilde{a}')$. Для $a \in B$, $g \subset \delta(\tilde{a})$ пусть $F(a, g) = \{\, (x, a(x)) \mid x \in \operatorname{supp} g \,\}$. Пусть E — объединение всех таких множеств. Оно конечно. Построим отображение $k\colon E(2r) \to M$. Для $a \in B$, $g \subset \delta(\tilde{a})$, $|g| \leqslant r$, пусть $k(F(a, g)) = p(g)$ (это корректно, так как, по (*), равенство $F(a, g) = F(a', g')$ влечёт $g = g'$). Для остальных $F \in E(2r)$ пусть

$k(F) = 0$. Для $a \in B$ имеем

$$k_B(a) = \sum_{F \in E(2r) : F \subset \Gamma(a)} k(F) =$$
$$= \sum_{g \subset \delta(\tilde{a}) : |g| \leqslant r} k(F(a, g)) = \sum_{g \subset \delta(\tilde{a}) : |g| \leqslant r} p(g) = f(\tilde{a}) = f(a)$$

(используется, что если $F(a', g) \subset \Gamma(a)$, то, по (*), $g \subset \delta(\tilde{a})$ и $F(a', g) = F(a, g)$). $\square$

Основной результат. Пространство Y называем *допустимым*, если существуют клеточное пространство Z и (слабая гомотопическая) эквивалентность $e\colon Y \to Z$. Для числа $m \in \mathbb{N}$ и пунктированного пространства Y полагаем: $\Pi_m(Y)$ — множество всех *связанных* (т. е. отображающих отмеченную точку в отмеченную точку) непрерывных отображений $a\colon S^m \to Y$, и отображение $h\colon \Pi_m(Y) \to \pi_m(Y)$, $h(a) = [a]$, называем *основным.*

Теорема. *Для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, существует такое $r \in \mathbb{N}$, что для любого односвязного допустимого пунктированного пространства Y основное отображение $h\colon \Pi_m(Y) \to \pi_m(Y)$ r-определимо.*

Более слабое утверждение получено в [2].

1. Предварительный материал

Симплициальные объекты. Множества $[p] = \{0, \dots, p\}$, $p \in \mathbb{N}$, и нестрого возрастающие отображения между ними образуют категорию. Для $i \in [p]$ полагаем: $\delta_i^p\colon [p-1] \to [p]$ — морфизм с $\operatorname{im} \delta_i^p = [p] \setminus \{i\}$. Для симплициального множества $\boldsymbol{T}$ морфизм $k\colon [q] \to [p]$ индуцирует отображение $k^\star\colon \boldsymbol{T}_p \to \boldsymbol{T}_q$.

Комбинаторный p-симплекс $\boldsymbol{\Delta}^p$ ($p \in \mathbb{N}$) — симплициальное множество с $\boldsymbol{\Delta}_q^p = \operatorname{Hom}([q], [p])$ и очевидными структурными отображениями; $\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p \subset \boldsymbol{\Delta}^p$ — его край. Морфизм $k\colon [q] \to [p]$ индуцирует симплициальное отображение $k_\triangle\colon \boldsymbol{\Delta}^q \to \boldsymbol{\Delta}^p$. Для симплициального множества $\boldsymbol{T}$ и симплекса $t \in \boldsymbol{T}_p$ ($p \in \mathbb{N}$) симплициальное отображение $[t]\colon \boldsymbol{\Delta}^p \to \boldsymbol{T}$ — комбинаторное характеристическое отображение симплекса t. Полагаем $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{\Delta}^1$.

Симплициальное отображение $\boldsymbol{f}$ называем *сюръективным*, если отображения $\boldsymbol{f}_q$, $q \in \mathbb{N}$, сюръективны, и *инъективным*, если они инъективны. Симплициальную абелеву группу $\boldsymbol{U}$ называем *свободной*, если группы $\boldsymbol{U}_q$, $q \in \mathbb{N}$, свободны, и *плоской*, если они плоски, т. е. не имеют кручения.

Пусть дана симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Пусть $\boldsymbol{V}$ — симплициальная абелева группа, у которой $\boldsymbol{V}_q$ — группа симплициальных отображений $\boldsymbol{h}\colon \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^q \to \boldsymbol{U}$, равных нулю на нижнем основании, и очевидные структурные гомоморфизмы. Полагаем $\boldsymbol{PU} = \boldsymbol{V}$ (*группа путей*). Если группа $\boldsymbol{U}$ свободна, то группа $\boldsymbol{V}$ тоже свободна. Группа $\boldsymbol{V}$ стягиваема. *Канонический* симплициальный гомоморфизм $\boldsymbol{c}\colon \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{U}$ задаётся правилом $[\boldsymbol{c}_q(\boldsymbol{h})] = \boldsymbol{h} \circ \boldsymbol{i}^1$, $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{V}_q$, $q \in \mathbb{N}$, где $\boldsymbol{i}^1\colon \boldsymbol{\Delta}^q \to \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^q$ — верхнее основание. Если группа $\boldsymbol{U}$ связна, то гомоморфизм $\boldsymbol{c}$ сюръективен.

Комплексы. Цепи и коцепи симплициальных множеств ненормализованные.

Для комплекса $A = A^*$ и числа $p \in \mathbb{Z}$ полагаем $A^{p+*} = A^{*+p} = B^*$, где B^* — комплекс с $B^q = A^{p+q}$ и $d_B = (-1)^p d_A$.

Пусть дан бикомплекс $K = K^{**}$. Дифференциалы $d'\colon K^{(p-1)q} \to K^{pq}$ (горизонтальный) и $d''\colon K^{p(q-1)} \to K^{pq}$ (вертикальный). Для $p \in \mathbb{Z}$ полагаем $K^{p*} = B^*$, где B^* — комплекс с $B^q = K^{pq}$ и $d_B = (-1)^p d''$. Полагаем: $\overline{K} = \overline{K}^*$ — диагональный комплекс, $E_*^{**}(K)$ — первая спектральная последовательность (так что $E_0^{pq}(K) = K^{pq}$, $d_0 = d''$).

Универсальные отображения. У пунктированного множества есть (очевидное) *универсальное* связанное отображение его в абелеву группу. У пунктированного симплициального множества есть *универсальное* связанное симплициальное отображение его в симплициальную абелеву группу.

Действия абелевых групп. Действие элемента u абелевой группы обозначаем $u\rangle$ или $\langle u$.

Одно конкретное обозначение. Для условия C вводим величину $[C] \in \mathbb{Z}$, равную 1 при C и 0 иначе.

2. Регулярные отображения

Отображение $f\colon U \to V$, где U, V — абелевы группы, называем *r-регулярным* ($r \in \mathbb{N}$), если для любых $u, u_0, \ldots, u_r \in U$ имеем

$$\sum_{e_0,\ldots,e_r=0,1} (-1)^{e_0+\ldots+e_r} f(u + e_0u_0 + \ldots + e_ru_r) = 0,$$

и *регулярным*, если оно r-регулярно для какого-нибудь $r \in \mathbb{N}$ (см. [5]).

Для множества T и элемента $s \in \mathbb{N}^T$ полагаем

$$s_* = \sum_{t\in T} s_t.$$

2.1. Лемма. *Пусть даны множество T, абелева группа V и число $r \in \mathbb{N}$. Пусть U — абелева группа, свободно порождённая множеством T; считаем, что $U \subset \mathbb{Z}^T$. Тогда правило*

$$f(u) = \sum_{s\in\mathbb{N}^T : s_* \leqslant r} \Bigl(\prod_{t\in T} \binom{u_t}{s_t}\Bigr) v_s, \qquad u \in U,$$

где $v_s \in V$ — какие-нибудь элементы, задаёт r-регулярное отображение $f\colon U \to V$. Так получается любое такое отображение. $\square$

2.2. Следствие. *Пусть даны абелевы группы U, V, W, r-регулярное ($r \in \mathbb{N}$) отображение $f\colon U \to V$ и эпиморфизм $p\colon W \to V$. Если группа U свободна, то существует такое r-регулярное отображение $g\colon U \to W$, что $f = p \circ g$.* $\square$

2.3. Лемма. *Пусть даны абелевы группы U, V, W, отображение $f\colon U \times V \to W$ и числа $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что для любого $v \in V$ отображение $U \to W$, $u \mapsto f(u, v)$, r-регулярно и для любого $u \in U$ отображение $V \to W$, $v \mapsto f(u, v)$, s-регулярно. Тогда отображение f $(r + s)$-регулярно.* $\square$

2.4. Лемма. *Пусть даны абелевы группы U, V, W, r-регулярное отображение $f\colon U \to V$ и s-регулярное отображение $g\colon V \to W$ $(r, s \in \mathbb{N})$. Тогда отображение $g \circ f$ rs-регулярно.* $\square$

Пусть даны множество T, абелевы группы U, V и отображения $j\colon T \to U$ и $k\colon T \to V$. Отображение k называем *r-регулярным* $(r \in \mathbb{N})$ *относительно* j, если существует такое r-регулярное отображение $f\colon U \to V$, что $k = f \circ j$, и *регулярным относительно* j, если оно r-регулярно относительно j для какого-нибудь $r \in \mathbb{N}$.

Пусть даны множество T, абелева группа U и отображение $j\colon T \to U$. Для абелевой группы V пусть $R_j(V)$ — группа всех регулярных относительно j отображений $k\colon T \to V$. R_j — аддитивный функтор из категории абелевых групп в себя (задание на морфизмах очевидное). Отображение j называем *удобным*, если функтор R_j точен.

Пусть дано пунктированное множество S. Пусть $i\colon S \to X$ — универсальное связанное отображение его в абелеву группу. Пусть ещё даны свободные абелевы группы Y, Z и связанное регулярное отображение $g\colon X \times Y \to Z$. Рассмотрим пунктированное множество $T = S \times Y$ и абелеву группу $U = X \times Y \times Z$. Зададим связанное отображение $j\colon T \to U$, полагая $j(s, y) = (i(s), y, g(i(s), y))$, $s \in S$, $y \in Y$. Такое отображение называем *особым*. Особые отображения удобны (легко проверить, используя следствие 2.2 и лемму 2.4).

Пусть даны симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$ и абелева группа M. Коцепь $X\colon \boldsymbol{U}_q \to M$ называем *[r-]регулярной*, если она — [r-]регулярное отображение. [r-]регулярные коцепи образуют подкомплекс комплекса коцепей.

Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, симплициальное отображение $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$ и абелева группа M. Коцепь $X\colon \boldsymbol{T}_q \to M$ называем *регулярной относительно* $\boldsymbol{j}$, если она — отображение, регулярное относительно $\boldsymbol{j}_q$. Регулярные относительно $\boldsymbol{j}$ коцепи образуют подкомплекс комплекса коцепей.

Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ и симплициальные отображения $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$. Отображение $\boldsymbol{k}$ называем *r-регулярным* $(r \in \mathbb{N})$ *относительно* $\boldsymbol{j}$, если для каждого $q \in \mathbb{N}$ отображение $\boldsymbol{k}_q$ r-регулярно относительно $\boldsymbol{j}_q$, и *регулярным относительно* $\boldsymbol{j}$, если оно r-регулярно относительно $\boldsymbol{j}$ для какого-нибудь $r \in \mathbb{N}$.

Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$ и симплициальное отображение $\boldsymbol{j} : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$. Отображение $\boldsymbol{j}$ называем *удобным*, если отображения $\boldsymbol{j}_q$, $q \in \mathbb{N}$, удобны, и *особым*, если они особы. Для абелевой группы M пусть ${}^{\circ}\!C^*(\boldsymbol{T}; M) \subset C^*(\boldsymbol{T}; M)$ — подкомплекс регулярных относительно $\boldsymbol{j}$ коцепей. Отображение $\boldsymbol{j}$ называем *нормальным*, если для любой абелевой группы M включение ${}^{\circ}\!C^*(\boldsymbol{T}; M) \to C^*(\boldsymbol{T}; M)$ — квазиизоморфизм.

3. Лемма о P-ацикличности

Цель §§ 3, 4, 5 — доказательство леммы 5.1 и следствия 5.2.

Функтор P. Пусть дана абелева группа U. Для (левого) U-модуля X элемент $x \in X$ называем *[r-]регулярным (относительно действия группы U)*, если отображение $U \to X$, $u \mapsto u \rangle x$, [r-]регулярно, и полагаем: $P_r(X) \subset X$ — подмодуль r-регулярных элементов, $P(X) \subset X$ — подмодуль регулярных элементов. P_r, P — функторы из категории U-модулей в себя (задание на морфизмах очевидное). Эти функторы, очевидно, аддитивны и точны слева.

Прямые действия. (Правое) действие абелевой группы U на множестве T называем *прямым*, если стабилизатор любого элемента $t \in T$ — прямое слагаемое группы U.

Если на множестве T действует абелева группа U, то $M^T = \{f\colon T \to M\}$ — U-модуль: $(u \rangle f)(t) = f(t \langle u)$, $t \in T$, $f \in M^T$, $u \in U$.

3.1. Лемма. *Пусть даны свободная абелева группа U и абелева группа M. Тогда модуль M^U (группа U действует на себе сдвигами) P_r-ацикличен для любого $r \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Инъективная резольвента

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow N' \longrightarrow 0$$

группы M даёт инъективную резольвенту

$$0 \longrightarrow M^U \longrightarrow N^U \longrightarrow N'^U \longrightarrow 0$$

модуля M^U. Как следует из следствия 2.2, функтор P_r сохраняет её точность. $\square$

3.2. Лемма. *Пусть даны прямое действие свободной абелевой группы U на множестве T и абелева группа M. Тогда U-модуль M^T P-ацикличен.*

(В частности, абелева группа M с тривиальным действием свободной абелевой группы U — P-ацикличный U-модуль.)

Доказательство. Функтор P — индуктивный предел функторов P_r, $r \in \mathbb{N}$, (связанных морфизмами включения). Поэтому достаточно показать, что морфизм производных функторов $P_r^{(n)} \to P_{r+1}^{(n)}$ $(n > 0)$, индуцированный морфизмом включения $P_r \to P_{r+1}$, равен нулю на модуле M^T. Функторы P_r, $r \in \mathbb{N}$, коммутируют с произведениями. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда группа U действует на T транзитивно, причём $T \neq \varnothing$. Так как действие прямо, то можно считать, что даны свободные абелевы группы S и T, $U = S \oplus T$ и группа U действует на T сдвигами через проекцию $U \to T$. Пусть $E \subset S$ — базис. Введём на нём линейный порядок.

Для $e \in E$ зададим U-гомоморфизм $d_e\colon M^U \to M^U$ формулой $(d_e f)(u) = f(u+e) - f(u)$ (считаем, что $S \subset U$). Пусть Q^* — неотрицательный комплекс U-модулей с

$$Q^n = \prod_{e_1,\ldots,e_n \in E: e_1 < \ldots < e_n} M^U$$

и дифференциалом $d\colon Q^{n-1} \to Q^n$, заданным формулой

$$(df)_{e_1 \ldots e_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} d_{e_k} f_{e_1 \ldots \widehat{e_k} \ldots e_n}.$$

Пусть $c\colon M^T \to Q^0 = M^U$ — U-гомоморфизм, индуцированный проекцией $U \to T$.

Для $e \in E$ зададим гомоморфизм (абелевых групп) $h_e\colon M^U \to M^U$ условием $d_e \circ h_e = \mathrm{id}$ и требованием, что для $f \in M^U$ функция $h_e f$ равна нулю на подгруппе $U_e \subset U$, $U_e = S_e \oplus T$, где $S_e \subset S$ — подгруппа, порождённая всеми элементами множества E, кроме e.

Для $e \in E$ зададим гомоморфизм $S \to S$, $s \mapsto s|_e$, для $e' \in E$ полагая $e'|_e = [e' \leqslant e]e'$. Для $e \in E$, $u \in U$, $u = (s,t)$, полагаем $u|_e = (s|_e, t)$. Зададим гомоморфизмы (абелевых групп) $h\colon Q^n \to Q^{n-1}$ формулой

$$(hf)_{e_1 \dots e_{n-1}}(u) = (-1)^{n-1} \sum_{e \in E : e > e_{n-1}} (h_e f_{e_1 \dots e_{n-1} e})(u|_e), \qquad u \in U$$

(при $n = 1$ сумма по всем $e \in E$). Пусть $g\colon M^U = Q^0 \to M^T$ — гомоморфизм (абелевых групп), индуцированный копроекцией $T \to U$. Верны равенства $g \circ c = \mathrm{id}$, $c \circ g + h \circ d = \mathrm{id}$ и $d \circ h + h \circ d = \mathrm{id}$. Значит,

$$0 \longrightarrow M^T \xrightarrow{\ c\ } Q^0 \xrightarrow{\ d\ } Q^1 \xrightarrow{\ d\ } \dots$$

— резольвента модуля M^T. Используя лемму 3.1, получаем, что она P_r-ациклична. Нетрудно видеть, что $h_e(P_r(M^U)) \subset P_{r+1}(M^U)$. Отсюда $h(P_r(Q^n)) \subset P_{r+1}(Q^{n-1})$, что и даёт нужное. $\square$

4. Регулярные когомологии

Действие абелевой группы U на симплициальном множестве $\boldsymbol{T}$ называем прямым, если для каждого $q \in \mathbb{N}$ её действие на $\boldsymbol{T}_q$ прямо.

4.1. Лемма. *Пусть свободная абелева группа U прямо действует на симплициальном множестве $\boldsymbol{T}$. Пусть дана абелева группа M. Предположим, что индуцированное действие на $H^*(\boldsymbol{T}; M)$ тривиально. Пусть ${}^{\circ}C^*(\boldsymbol{T}; M) \subset C^*(\boldsymbol{T}; M)$ — подкомплекс коцепей, регулярных относительно действия группы U. Тогда включение ${}^{\circ}C^*(\boldsymbol{T}; M) \to C^*(\boldsymbol{T}; M)$ — квазиизоморфизм.*

Это следует из леммы 3.2. $\square$

5. Регулярные когомологии симплициальной абелевой группы

Полагаем $\hat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $[\infty] = \mathbb{N}$. Множества $[p]$, $p \in \hat{\mathbb{N}}$, и нестрого возрастающие отображения между ними образуют категорию. Полагаем: $\lambda_q\colon [q] \to [\infty]$ — включения, $\mu_p\colon [\infty] \to [p]$ — ретракции, $\boldsymbol{\Delta}^\infty$ — симплициальное множество с $\boldsymbol{\Delta}^\infty_q = \mathrm{Hom}([q], [\infty])$ и очевидными структурными отображениями.

Для симплициального множества $\boldsymbol{T}$ полагаем: $\boldsymbol{T}_\infty$ — индуктивный предел последовательности

$$\boldsymbol{T}_0 \xrightarrow{\ \sigma_1^\star\ } \boldsymbol{T}_1 \xrightarrow{\ \sigma_2^\star\ } \boldsymbol{T}_2 \xrightarrow{\ \sigma_3^\star\ } \dots,$$

где $\sigma_q\colon [q] \to [q-1]$ — ретракции. Сопоставление морфизму $k\colon [q] \to [p]$ ($p, q \in \mathbb{N}$) отображения $k^\star\colon \boldsymbol{T}_p \to \boldsymbol{T}_q$ распространим на область $p, q \in \hat{\mathbb{N}}$, сохраняя контравариантность и полагая: $\mu_q^\star\colon \boldsymbol{T}_q \to \boldsymbol{T}_\infty$ — каноническое отображение члена последовательности в её предел.

Функтор $\boldsymbol{R}$. Для симплициального множества $\boldsymbol{T}$ полагаем: $\boldsymbol{RT} \subset \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{\Delta}^\infty$ — подмножество, порождённое симплексами (t, λ_q), $t \in \boldsymbol{T}_q$, $q \in \mathbb{N}$. $\boldsymbol{R}$ — функтор из категории симплициальных множеств в себя (задание на морфизмах очевидное).

Пусть дана абелева группа M. Коцепи с коэффициентами в группе M. Методом ацикличных моделей строятся естественные гомотопические эквивалентности $e\colon C^*(\boldsymbol{T}) \to C^*(\boldsymbol{RT})$, $e'\colon C^*(\boldsymbol{RT}) \to C^*(\boldsymbol{T})$ и естественные гомотопии $E\colon C^*(\boldsymbol{T}) \to C^*(\boldsymbol{T})$ между морфизмами id, $e' \circ e$ и $E'\colon C^*(\boldsymbol{RT}) \to C^*(\boldsymbol{RT})$ между морфизмами id, $e \circ e'$. Морфизм e индуцируется проекцией $\boldsymbol{RT} \to \boldsymbol{T}$, гомоморфизм $e'\colon C^q(\boldsymbol{RT}) \to C^q(\boldsymbol{T})$ задаётся правилом $e'(Y)(t) = \langle [t]^\sharp_{\boldsymbol{R}}(Y), I_q\rangle$, $t \in \boldsymbol{T}_q$, гомоморфизм $E\colon C^q(\boldsymbol{T}) \to C^{q-1}(\boldsymbol{T})$ — правилом $E(X)(s) = \langle [s]^\sharp(X), J_q\rangle$, $s \in \boldsymbol{T}_{q-1}$, гомоморфизм $E'\colon C^q(\boldsymbol{RT}) \to C^{q-1}(\boldsymbol{RT})$ — правилом $E'(Y)(s,m) = \langle [s]^\sharp_{\boldsymbol{R}}(Y), K_m\rangle$, $(s,m) \in (\boldsymbol{RT})_{q-1}$, где $I_q \in C_q(\boldsymbol{R\Delta}^q)$, $J_q \in C_q(\boldsymbol{\Delta}^{q-1})$, $K_m \in C_q(\boldsymbol{R\Delta}^{q-1})$ — какие-то цепи.

Случай симплициальной абелевой группы. Пусть дана симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Тогда $\boldsymbol{U}_\infty$ — абелева группа, для морфизма $k\colon [q] \to [p]$ $(p, q \in \hat{\mathbb{N}})$ $k^\star\colon \boldsymbol{U}_p \to \boldsymbol{U}_q$ — гомоморфизм. Если группа $\boldsymbol{U}$ свободна, то группа $\boldsymbol{U}_\infty$ тоже свободна. Группа $\boldsymbol{U}_\infty$ действует на симплициальном множестве $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{\Delta}^\infty$ по правилу $(t,h) \langle u = (t + h^\star(u), h)$, $t \in \boldsymbol{U}_q$, $h \in \mathrm{Hom}([q], [\infty])$ $(q \in \mathbb{N})$, $u \in \boldsymbol{U}_\infty$. Это действие прямо и сохраняет подмножество $\boldsymbol{RU}$. Для каждого симплекса $G \in (\boldsymbol{R\Delta}^n)_q$ $(n, q \in \mathbb{N})$ есть такие симплекс $a_G \in (\boldsymbol{RU})_q$ и гомоморфизм $b_G\colon \boldsymbol{U}_n \to \boldsymbol{U}_\infty$, что $([t]_{\boldsymbol{R}})_q(G) = a_G \langle b_G(t)$, $t \in \boldsymbol{U}_n$ (действительно, если $G = k^\star(F)$, где $k \in \mathrm{Hom}([q],[p])$ $(p \in \mathbb{N})$, $F = (f, \lambda_p) \in (\boldsymbol{R\Delta}^n)_p$, то можно положить $a_G = (0, \lambda_p \circ k)$ и $b_G = (f \circ \mu_p)^\star$).

Пусть $^\circ C^*(\boldsymbol{U}) \subset C^*(\boldsymbol{U})$ — подкомплекс регулярных коцепей, $^\circ C^*(\boldsymbol{RU}) \subset C^*(\boldsymbol{RU})$ — подкомплекс коцепей, регулярных относительно действия группы $\boldsymbol{U}_\infty$. Морфизмы e, e' и гомотопии E, E' сохраняют регулярность, т. е. у них есть сокращения $^\circ e\colon {}^\circ C^*(\boldsymbol{U}) \to {}^\circ C^*(\boldsymbol{RU})$, ... , $^\circ E'\colon {}^\circ C^*(\boldsymbol{RU}) \to {}^\circ C^*(\boldsymbol{RU})$. Для $e\colon C^q(\boldsymbol{U}) \to C^q(\boldsymbol{RU})$ это следует из равенства $(u \rangle e(X))(t,n) = X(t + n^\star(u))$, $(t,n) \in (\boldsymbol{RU})_q$, $u \in \boldsymbol{U}_\infty$, для $e'\colon C^q(\boldsymbol{RU}) \to C^q(\boldsymbol{U})$ — из равенства

$$e'(Y)(t) = \sum_{L \in (\boldsymbol{R\Delta}^q)_q} (I_q)_L Y(a_L \langle b_L(t)), \qquad t \in \boldsymbol{U}_q,$$

для $E\colon C^q(\boldsymbol{U}) \to C^{q-1}(\boldsymbol{U})$ — из равенства

$$E(X)(s) = \sum_{k \in \mathrm{Hom}([q],[q-1])} (J_q)_k X(k^\star(s)), \qquad s \in \boldsymbol{U}_{q-1},$$

(здесь $(I_q)_L \in \mathbb{Z}$ — коэффициент, с которым симплекс L входит в цепь I_q, аналогично понимается $(J_q)_k$). Для E' достаточно тех же соображений. Очевидно, $^\circ e$, $^\circ e'$ — гомотопические эквивалентности.

5.1. Лемма. *Предположим, что группа $\boldsymbol{U}$ свободна и связна. Тогда включение $^\circ C^*(\boldsymbol{U}) \to C^*(\boldsymbol{U})$ — квазиизоморфизм.*

Доказательство. Так как группа $\boldsymbol{U}$ связна, то действие группы $\boldsymbol{U}_0$ на $H^*(\boldsymbol{U})$ тривиально. Слой $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{\Delta}^\infty$ над вершиной λ_0 согласован с гомоморфизмом $\lambda_0^\star\colon \boldsymbol{U}_\infty \to \boldsymbol{U}_0$ и индуцирует изоморфизм когомологий, поэтому действие группы $\boldsymbol{U}_\infty$ на $H^*(\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{\Delta}^\infty)$ тривиально. Так как проекция $\boldsymbol{RU}\to\boldsymbol{U}$ индуцирует изоморфизм когомологий, то включение $\boldsymbol{RU}\to\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{\Delta}^\infty$ тоже так делает. Поэтому действие группы $\boldsymbol{U}_\infty$ на $H^*(\boldsymbol{RU})$ тривиально.

Рассмотрим коммутативную диаграмму комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} {}^\circ C^*(\boldsymbol{U}) & \xrightarrow{\ {}^\circ e\ } & {}^\circ C^*(\boldsymbol{RU}) \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j} \\ C^*(\boldsymbol{U}) & \xrightarrow{\ e\ } & C^*(\boldsymbol{RU}), \end{array}$$

где i, j — включения. По лемме 4.1, j — квазиизоморфизм. Так как e, ${}^\circ e$ — гомотопические эквивалентности, то i — тоже квазиизоморфизм. $\square$

Для $r\in\mathbb{N}$ пусть ${}^rC^*(\boldsymbol{U})\subset C^*(\boldsymbol{U})$ — подкомплекс, образованный r-регулярными коцепями, ${}^rH^*(\boldsymbol{U})$ — соответствующие группы когомологий.

5.2. Следствие. *Предположим, что группа $\boldsymbol{U}$ свободна и связна. Тогда: а) для любого $q\in\mathbb{Z}$ существует такое $r\in\mathbb{N}$, что индуцированный включением гомоморфизм $i\colon {}^rH^q(\boldsymbol{U})\to H^q(\boldsymbol{U})$ сюръективен; б) для любых $q\in\mathbb{Z}$, $r\in\mathbb{N}$ существует такое $s\in\mathbb{N}$, $s\geqslant r$, что ядра индуцированных включениями гомоморфизмов $i\colon {}^rH^q(\boldsymbol{U})\to H^q(\boldsymbol{U})$ и $k\colon {}^rH^q(\boldsymbol{U})\to {}^sH^q(\boldsymbol{U})$ совпадают.*

Доказательство. Достаточно применить лемму 5.1 к когомологиям с коэффициентами в группе M^T, где $T=H^q(\boldsymbol{U})$ для а) и $\ker i$ для б). $\square$

6. Спектральная последовательность Серра и её регулярный вариант

В этом параграфе доказывается лемма 9.2.

Пусть дана абелева группа M. Если в обозначении группы коцепей или когомологий группа коэффициентов не указана, то подразумевается группа M.

Морфизм $\boldsymbol{m}_\nabla$. Пусть даны симплициальные множества $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, инъективное симплициальное отображение $\boldsymbol{m}\colon\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$ и подмножество $\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{Y}$. Пусть $\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{m}^{-1}(\boldsymbol{B})\subset\boldsymbol{X}$, $\dot{\boldsymbol{Y}}=\mathbf{im}\,\boldsymbol{m}\cup\boldsymbol{B}\subset\boldsymbol{Y}$. Зададим морфизм $t\colon C^{*-1}(\dot{\boldsymbol{Y}})\to C^*(\boldsymbol{Y})$ композицией

$$C^{q-1}(\dot{\boldsymbol{Y}})\xrightarrow{\ r\ }C^{q-1}(\boldsymbol{Y})\xrightarrow{\ d_{\boldsymbol{Y}}\ }C^q(\boldsymbol{Y})\xrightarrow{\ s\ }C^q(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}}),$$

где r — гомоморфизм продолжения нулём, s — гомоморфизм обнуления на $\dot{\boldsymbol{Y}}$. Задаём морфизм $\boldsymbol{m}_\nabla\colon C^{*-1}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})\to C^*(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}})$ коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} C^{q-1}(\dot{\boldsymbol{Y}},\boldsymbol{B}) & \xrightarrow{\ \mathbf{id}^\sharp\ } & C^{q-1}(\dot{\boldsymbol{Y}}) \\ {\scriptstyle \boldsymbol{n}^\sharp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle t} \\ C^{q-1}(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\ \boldsymbol{m}_\nabla\ } & C^q(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}}), \end{array}$$

где $\boldsymbol{n}^\sharp$ — изоморфизм, индуцированный сокращением отображения $\boldsymbol{m}$.

Гомотопии. Гомотопия $\boldsymbol{H}\colon \boldsymbol{I}\times(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}})$ между симплициальными отображениями $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\colon(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}})$ определяет гомотопию $\boldsymbol{H}^{\natural}\colon C^*(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}})\to C^*(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})$ между морфизмами $\boldsymbol{f}^{\sharp},\boldsymbol{g}^{\sharp}\colon C^*(\boldsymbol{Y},\dot{\boldsymbol{Y}})\to C^*(\boldsymbol{X},\dot{\boldsymbol{X}})$.

Эквивалентности Эйленберга — Зильбера. Для каждого симплициального множества $\boldsymbol{X}$ есть естественные гомотопические эквивалентности $g_p\colon C^{p+*}((\boldsymbol{\Delta}^p,\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p)\times\boldsymbol{X})\to C^*(\boldsymbol{X})$, $g'_p\colon C^*(\boldsymbol{X})\to C^{p+*}((\boldsymbol{\Delta}^p,\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p)\times\boldsymbol{X})$ и естественные гомотопии $G_p\colon C^{p+*}((\boldsymbol{\Delta}^p,\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p)\times\boldsymbol{X})\to C^{p+*}((\boldsymbol{\Delta}^p,\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p)\times\boldsymbol{X})$ между морфизмами id, $g'_p\circ g_p$, $G'_p\colon C^*(\boldsymbol{X})\to C^*(\boldsymbol{X})$ между морфизмами id, $g_p\circ g'_p$ и $D^i_p\colon C^{p+*-1}((\boldsymbol{\Delta}^{p-1},\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{p-1})\times\boldsymbol{X})\to C^*(\boldsymbol{X})$ между морфизмами g_{p-1}, $g_p\circ(-1)^i(\delta^p_{i\,\triangle},\mathbf{id})_{\triangledown}$ (здесь $(\delta^p_{i\,\triangle},\mathbf{id})_{\triangledown}\colon C^{p+*-1}((\boldsymbol{\Delta}^{p-1},\dot{\boldsymbol{\Delta}}^{p-1})\times\boldsymbol{X})\to C^{p+*}((\boldsymbol{\Delta}^p,\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p)\times\boldsymbol{X})$).

Бикомплекс симплициального отображения. Пусть даны симплициальные множества $\boldsymbol{T}$, $\tilde{\boldsymbol{T}}$ и симплициальное отображение $\boldsymbol{f}\colon\tilde{\boldsymbol{T}}\to\boldsymbol{T}$.

Для каждого симплекса $t\in\boldsymbol{T}_p$ $(p\in\mathbb{N})$ построим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{Z}_t & \xrightarrow{\ \boldsymbol{l}_t\ } & \tilde{\boldsymbol{T}}\\ {\scriptstyle\boldsymbol{f}_t}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\boldsymbol{f}}\\ \boldsymbol{\Delta}^p & \xrightarrow{\ [t]\ } & \boldsymbol{T}\end{array}$$

и положим $\dot{\boldsymbol{Z}}_t=\boldsymbol{f}_t^{-1}(\dot{\boldsymbol{\Delta}}^p)\subset\boldsymbol{Z}_t$. Для симплекса $t\in\boldsymbol{T}_p$ $(p\in\mathbb{N},\ p\geqslant1)$ и числа $i\in[p]$ зададим симплициальное отображение $\boldsymbol{m}^i_t\colon\boldsymbol{Z}_s\to\boldsymbol{Z}_t$, где $s=\delta^{p\,\star}_i(t)\in\boldsymbol{T}_{p-1}$, условиями $\boldsymbol{f}_t\circ\boldsymbol{m}^i_t=\delta^p_{i\,\triangle}\circ\boldsymbol{f}_s$ и $\boldsymbol{l}_t\circ\boldsymbol{m}^i_t=\boldsymbol{l}_s$. Это отображение инъективно.

Построим неотрицательный бикомплекс $K=K^{**}$. Пусть

$$K^{pq}=\prod_{t\in\boldsymbol{T}_p}C^{p+q}(\boldsymbol{Z}_t,\dot{\boldsymbol{Z}}_t)$$

(при $p\geqslant0$). Зададим гомоморфизмы $d'_i\colon K^{(p-1)q}\to K^{pq}$, $i\in[p]$, правилом $(d'_iX)_t=(-1)^i\boldsymbol{m}^i_{t\,\triangledown}(X_s)$, $t\in\boldsymbol{T}_p$, где $s=\delta^{p\,\star}_i(t)\in\boldsymbol{T}_{p-1}$. Горизонтальный дифференциал $d'\colon K^{(p-1)q}\to K^{pq}$ $(p,q\in\mathbb{N})$ зададим формулой

$$d'=\sum_{i\in[p]}(-1)^id'_i.$$

Вертикальный дифференциал $d''\colon K^{p(q-1)}\to K^{pq}$ зададим правилом $(d''X)_t=dX_t$, $t\in\boldsymbol{T}_p$.

Методом ациклических моделей строятся естественные гомотопические эквивалентности $a\colon\overline{K}^*\to C^*(\tilde{\boldsymbol{T}})$, $a'\colon C^*(\tilde{\boldsymbol{T}})\to\overline{K}^*$ и естественные гомотопии $A\colon\overline{K}^*\to\overline{K}^*$ между морфизмами id, $a'\circ a$ и $A'\colon C^*(\tilde{\boldsymbol{T}})\to C^*(\tilde{\boldsymbol{T}})$ между морфизмами id, $a\circ a'$.

Вычисление групп $E^{pq}_2(K)$. Пусть дан декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc}\tilde{\boldsymbol{T}} & \xrightarrow{\ \tilde{\boldsymbol{k}}\ } & \tilde{\boldsymbol{V}}\\ {\scriptstyle\boldsymbol{f}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\boldsymbol{h}}\\ \boldsymbol{T} & \xrightarrow{\ \boldsymbol{k}\ } & \boldsymbol{V},\end{array}$$

где $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ — свободные симплициальные абелевы группы, $\boldsymbol{h}$ — сюръективный симплициальный гомоморфизм, $\boldsymbol{k}$, $\tilde{\boldsymbol{k}}$ — симплициальные отображения. Пусть $\boldsymbol{W} = \mathbf{ker}\,\boldsymbol{h}$. Группа $\boldsymbol{W}$ свободна. Предположим, что она связна.

Для каждого $q \in \mathbb{N}$ выберем такой гомоморфизм $R_q\colon \boldsymbol{V}_q \to \tilde{\boldsymbol{V}}_q$, что $\boldsymbol{h}_q \circ R_q = \mathrm{id}$. Так как группа $\boldsymbol{W}$ связна, то канонический симплициальный гомоморфизм $\boldsymbol{c}\colon \boldsymbol{PW} \to \boldsymbol{W}$ сюръективен. Для каждого $q \in \mathbb{N}$ выберем такой гомоморфизм $S_q\colon \boldsymbol{W}_q \to (\boldsymbol{PW})_q$, что $\boldsymbol{c}_q \circ S_q = \mathrm{id}$. Таким образом, для каждого симплекса $w \in \boldsymbol{W}_q$ ($q \in \mathbb{N}$) имеем гомотопию $S_q(w)\colon \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^q \to \boldsymbol{W}$ между отображениями $0, [w]\colon \boldsymbol{\Delta}^q \to \boldsymbol{W}$.

Для каждого симплекса $t \in \boldsymbol{T}_p$ ($p \in \mathbb{N}$) зададим симплициальное отображение $\boldsymbol{e}_t\colon \boldsymbol{\Delta}^p \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}_t$ условиями $\boldsymbol{f}_t \circ \boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{q}$ и $\tilde{\boldsymbol{k}} \circ \boldsymbol{l}_t \circ \boldsymbol{e}_t = [R_p(\boldsymbol{k}_p(t))] \circ \boldsymbol{q} + \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{q}'$, где $\boldsymbol{q}\colon \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{\Delta}^{p-1}$, $\boldsymbol{q}'\colon \boldsymbol{\Delta}^p \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$ — проекции, $\boldsymbol{n}\colon \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ — включение. Имеем изоморфизм пар $\boldsymbol{e}_t\colon (\boldsymbol{\Delta}^p, \dot{\boldsymbol{\Delta}}^p) \times \boldsymbol{W} \to (\boldsymbol{Z}_t, \dot{\boldsymbol{Z}}_t)$.

Для симплекса $t \in \boldsymbol{T}_p$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$) и числа $i \in [p]$ зададим симплициальное отображение $\hat{\boldsymbol{e}}_t^i\colon \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}_s$, где $s = \delta_i^{p\,\star}(t) \in \boldsymbol{T}_{p-1}$, условиями $\boldsymbol{f}_s \circ \hat{\boldsymbol{e}}_t^i = \boldsymbol{q}$, где $\boldsymbol{q}\colon \boldsymbol{\Delta}^p \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{\Delta}^p$ — проекция, и $\boldsymbol{m}_t^i \circ \hat{\boldsymbol{e}}_t^i = \boldsymbol{e}_t \circ (\delta^p_{i\,\triangle}, \mathbf{id})$ (здесь $(\delta^p_{i\,\triangle}, \mathbf{id})\colon \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{\Delta}^p \times \boldsymbol{W}$). Имеем изоморфизм пар $\hat{\boldsymbol{e}}_t^i\colon (\boldsymbol{\Delta}^{p-1}, \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{p-1}) \times \boldsymbol{W} \to (\boldsymbol{Z}_s, \dot{\boldsymbol{Z}}_s)$. Ещё зададим симплициальное отображение $\boldsymbol{H}_t^i\colon \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{Z}_s$ условиями $\boldsymbol{f}_s \circ \boldsymbol{H}_t^i = \boldsymbol{q}$ и $\tilde{\boldsymbol{k}} \circ \boldsymbol{l}_s \circ \boldsymbol{H}_t^i = [R_{p-1}(\boldsymbol{k}_{p-1}(s))] \circ \boldsymbol{q} + S_{p-1}(\delta_i^{p\,\star}(R_p(\boldsymbol{k}_p(t))) - R_{p-1}(\boldsymbol{k}_{p-1}(s))) \circ \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{n} \circ \boldsymbol{q}'$, где $\boldsymbol{q}\colon \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{\Delta}^{p-1}$, $\boldsymbol{Q}\colon \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^{p-1}$, $\boldsymbol{q}'\colon \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Delta}^{p-1} \times \boldsymbol{W} \to \boldsymbol{W}$ — проекции, $\boldsymbol{n}\colon \boldsymbol{W} \to \tilde{\boldsymbol{V}}$ — включение. Это гомотопия между отображениями $\boldsymbol{e}_s, \hat{\boldsymbol{e}}_t^i\colon (\boldsymbol{\Delta}^{p-1}, \dot{\boldsymbol{\Delta}}^{p-1}) \times \boldsymbol{W} \to (\boldsymbol{Z}_s, \dot{\boldsymbol{Z}}_s)$.

Пусть $L = L^{**}$ — неотрицательный бикомплекс с $L^{pq} = C^p(\boldsymbol{T}; C^q(\boldsymbol{W}))$ и дифференциалами $d' = d_{\boldsymbol{T}}\colon L^{(p-1)q} \to L^{pq}$ и $d'' = (-1)^p d_{\boldsymbol{W}\,\sharp}\colon L^{p(q-1)} \to L^{pq}$.

Для каждого $p \in \mathbb{N}$ зададим морфизм $b\colon K^{p*} \to L^{p*}$, полагая $b(X)(t) = g_p(\boldsymbol{e}_t^\sharp(X_t))$, $t \in \boldsymbol{T}_p$, $X \in K^{pq}$, $q \in \mathbb{N}$, морфизм $b'\colon L^{p*} \to K^{p*}$, полагая $\boldsymbol{e}_t^\sharp(b'(Y)_t) = g'_p(Y(t))$, $t \in \boldsymbol{T}_p$, $Y \in L^{pq}$, $q \in \mathbb{N}$, гомотопию $B\colon K^{p*} \to K^{p*}$ между морфизмами id, $b' \circ b$, полагая $\boldsymbol{e}_t^\sharp(B(X)_t) = G_p(\boldsymbol{e}_t^\sharp(X_t))$, $t \in \boldsymbol{T}_p$, $X \in K^{pq}$, $q \in \mathbb{N}$, и гомотопию $B'\colon L^{p*} \to L^{p*}$ между морфизмами id, $b \circ b'$, полагая $B'(Y)(t) = G'_p(Y(t))$, $t \in \boldsymbol{T}_p$, $Y \in L^{pq}$, $q \in \mathbb{N}$. Очевидно, b, b' — гомотопические эквивалентности.

Покажем, что для любого p диаграмма комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} K^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & K^{p*} \\ {\scriptstyle b}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle b} \\ L^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & L^{p*} \end{array} \tag{1}$$

гомотопически коммутативна. Для $p \in \mathbb{N}$, $p > 0$, $i \in [p]$ зададим гомотопию $F_i\colon K^{(p-1)*} \to L^{p*}$ между морфизмами $d'_i \circ b$ и $b \circ d'_i$ (здесь $d'_i\colon L^{(p-1)*} \to L^{p*}$ — морфизм, индуцированный отображением $\delta_i^{p\,\star}\colon \boldsymbol{T}_p \to \boldsymbol{T}_{p-1}$), полагая $F_i(X)(t) = g_{p-1}(\boldsymbol{H}_t^{i\,\natural}(X_s)) + D_p^i(\hat{\boldsymbol{e}}_t^{i\,\sharp}(X_s))$, $t \in \boldsymbol{T}_p$, $X \in K^{(p-1)q}$, $q \in \mathbb{N}$, где $s = \delta_i^{p\,\star}(t) \in \boldsymbol{T}_{p-1}$. Для $p \in \mathbb{N}$ нужную гомотопию $F\colon K^{(p-1)*} \to L^{p*}$ между морфизмами $b \circ d'$ и $d' \circ b$ зададим формулой

$$F = \sum_{i \in [p]} (-1)^i F_i.$$

Гомотопическая эквивалентность $b\colon E_0^{**}(K) \to E_0^{**}(L)$ индуцирует изоморфизм $E_1^{**}(K) \to E_1^{**}(L)$. Так как диаграмма (1) гомотопически коммутативна, этот изоморфизм коммутирует с дифференциалом d_1 и, следовательно, индуцирует изоморфизм $E_2^{**}(K) \to E_2^{**}(L)$. Очевидно, $E_1^{pq}(L) = C^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$ и, следовательно, $E_2^{pq}(L) = H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$. Получаем изоморфизм $Q\colon E_2^{pq}(K) \to H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$.

Регулярный вариант. Пусть даны симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$ и удобное симплициальное отображение $\boldsymbol{j}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$. Предположим, что отображение $\boldsymbol{k}$ регулярно относительно $\boldsymbol{j}$. Пусть $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} \times \tilde{\boldsymbol{V}}$, $\tilde{\boldsymbol{j}} = (\boldsymbol{j} \circ \boldsymbol{f}) \times \tilde{\boldsymbol{k}}\colon \tilde{\boldsymbol{T}} \to \tilde{\boldsymbol{U}}$. Пусть ${}^\circ C^*(\boldsymbol{T}; N) \subset C^*(\boldsymbol{T}; N)$ (N — абелева группа), ${}^\circ C^*(\tilde{\boldsymbol{T}}) \subset C^*(\tilde{\boldsymbol{T}})$ — подкомплексы регулярных относительно $\boldsymbol{j}$, $\tilde{\boldsymbol{j}}$ (соответственно) коцепей, ${}^\circ H^*(\boldsymbol{T}; N)$, ${}^\circ H^*(\tilde{\boldsymbol{T}})$ — группы когомологий этих комплексов.

Для $t \in \boldsymbol{T}_p$ и таких морфизма $m\colon [r] \to [p]$ и симплекса $\tilde{t} \in \tilde{\boldsymbol{T}}_r$, что $m^\star(t) = \boldsymbol{f}_r(\tilde{t})$, пусть $z_t(m, \tilde{t}) = z \in (\boldsymbol{Z}_t)_r$ — такой симплекс, что $(\boldsymbol{f}_t)_r(z) = m$ и $(\boldsymbol{l}_t)_r(z) = \tilde{t}$. Для таких $t \in \boldsymbol{T}_r$, $\tilde{v} \in \tilde{\boldsymbol{V}}_r$, что $\boldsymbol{k}_r(t) = \boldsymbol{h}_r(\tilde{v})$, пусть $\tilde{t}(t, \tilde{v}) = \tilde{t} \in \tilde{\boldsymbol{T}}_r$ — такой симплекс, что $\boldsymbol{f}_r(\tilde{t}) = t$ и $\tilde{\boldsymbol{k}}_r(\tilde{t}) = \tilde{v}$.

Для морфизма $m\colon [r] \to [p]$ пусть $D_m = \{\, (t, \tilde{t}) \in \boldsymbol{T}_p \times \tilde{\boldsymbol{T}}_r : m^\star(t) = \boldsymbol{f}_r(\tilde{t}) \,\}$, $e_m\colon D_m \to \boldsymbol{U}_p \times \tilde{\boldsymbol{U}}_r$ — сужение отображения $(\boldsymbol{j}_p, \tilde{\boldsymbol{j}}_r)$. Элемент $X \in K^{pq}$ называем *регулярным*, если для любого морфизма $m\colon [p+q] \to [p]$ отображение $D_m \to M$, $(t, \tilde{t}) \mapsto X_t(z_t(m, \tilde{t}))$, регулярно относительно e_m. Пусть ${}^\circ K^{**} \subset K^{**}$ — подбикомплекс, образованный регулярными элементами.

Элемент $Y \in L^{pq}$ называем *вполне регулярным*, если отображение $\boldsymbol{T}_p \times \boldsymbol{W}_q \to M$, $(t, w) \mapsto Y(t)(w)$, регулярно относительно отображения $(\boldsymbol{j}_p, \mathrm{id})\colon \boldsymbol{T}_p \times \boldsymbol{W}_q \to \boldsymbol{U}_p \times \boldsymbol{W}_q$. Пусть ${}^\circ L^{**} \subset L^{**}$ — подбикомплекс, образованный вполне регулярными элементами.

Можно проверить, что морфизмы a, a', b, b' и гомотопии A, A', B, B', F сохраняют кружки, т. е. у них есть сокращения ${}^\circ a\colon \overline{{}^\circ K}^{*} \to {}^\circ C^*(\tilde{\boldsymbol{T}})$, …, ${}^\circ F\colon {}^\circ K^{(p-1)*} \to {}^\circ L^{p*}$. Например, включение $b({}^\circ K^{pq}) \subset {}^\circ L^{pq}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ легко получить, используя, что гомоморфизм $b\colon K^{pq} \to L^{pq}$ задаётся правилом

$$b(X)(t)(w) = \sum_{\substack{m \in \mathrm{Hom}([p+q],[p]),\\ n \in \mathrm{Hom}([p+q],[q])}} c_{mn} X_t(z_t(m, \tilde{t}(m^\star(t), m^\star(R_p(\boldsymbol{k}_p(t))) + n^\star(w)))),$$

$$w \in \boldsymbol{W}_q,\ t \in \boldsymbol{T}_p,\ X \in K^{pq},$$

где $c_{mn} \in \mathbb{Z}$ — коэффициенты явной записи гомоморфизма g_p, регулярность отображения $\boldsymbol{k}$ относительно $\boldsymbol{j}$ и лемму 2.4. Так же проверяется остальное. Очевидно, ${}^\circ a$ и ${}^\circ b$ — гомотопические эквивалентности и для любого p диаграмма комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc} {}^\circ K^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & {}^\circ K^{p*} \\ {\scriptstyle {}^\circ b}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle {}^\circ b} \\ {}^\circ L^{(p-1)*} & \xrightarrow{d'} & {}^\circ L^{p*} \end{array} \tag{2}$$

гомотопически коммутативна.

Как и выше, гомотопическая эквивалентность ${}^\circ b\colon E_0^{**}({}^\circ K) \to E_0^{**}({}^\circ L)$ индуцирует изоморфизм $E_1^{**}({}^\circ K) \to E_1^{**}({}^\circ L)$. Так как диаграмма (2) гомотопически коммутативна, этот изоморфизм коммутирует с дифференциалом d_1 и, следовательно, индуцирует изоморфизм $E_2^{**}({}^\circ K) \to E_2^{**}({}^\circ L)$.

Используя лемму 2.3 и удобство отображения $\boldsymbol{j}$, легко видеть, что элемент $Y \in L^{pq}$ вполне регулярен, если и только если Y — регулярная относительно $\boldsymbol{j}$ коцепь и существует такое $s \in \mathbb{N}$, что для любого $t \in \boldsymbol{T}_p$ коцепь $Y(t) \in C^q(\boldsymbol{W})$ s-регулярна. Включение ${}^\circ L^{p*} \to {}^\circ C^p(\boldsymbol{T}; C^*(\boldsymbol{W}))$ индуцирует гомоморфизм $E_1^{pq}({}^\circ L) \to {}^\circ C^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$ (ввиду удобства отображения $\boldsymbol{j}$). Используя следствие 5.2 и удобство отображения $\boldsymbol{j}$, можно видеть, что это изоморфизм. Он, очевидно, коммутирует с d_1 и, значит, индуцирует изоморфизм $E_2^{pq}({}^\circ L) \to {}^\circ H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$.

Вместе получаем изоморфизм ${}^\circ Q\colon E_2^{pq}({}^\circ K) \to {}^\circ H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$.

Сравнение спектральных последовательностей. Предположим, что для любой абелевой группы N включение ${}^\circ C^*(\boldsymbol{T}; N) \to C^*(\boldsymbol{T}; N)$ — квазиизоморфизм. Включения индуцируют изоморфизмы $J\colon {}^\circ H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W})) \to H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W}))$. Пусть $I\colon E_2^{pq}({}^\circ K) \to E_2^{pq}(K)$ — гомоморфизм, индуцированный включением ${}^\circ K^{**} \to K^{**}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
E_2^{pq}({}^\circ K) & \xrightarrow{{}^\circ Q} & {}^\circ H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W})) \\
{\scriptstyle I}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J} \\
E_2^{pq}(K) & \xrightarrow{Q} & H^p(\boldsymbol{T}; H^q(\boldsymbol{W})).
\end{array}$$

Видно, что I — изоморфизм. Значит, по теореме о сравнении спектральных последовательностей, включение $i\colon \overline{{}^\circ K}^* \to \overline{K}^*$ — квазиизоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму комплексов и морфизмов

$$\begin{array}{ccc}
\overline{{}^\circ K}^* & \xrightarrow{{}^\circ a} & {}^\circ C^*(\tilde{\boldsymbol{T}}) \\
{\scriptstyle i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h} \\
\overline{K}^* & \xrightarrow{a} & C^*(\tilde{\boldsymbol{T}}),
\end{array}$$

где h — включение. Видно, что h — квазиизоморфизм.

7. Пространства Эйленберга — Маклейна

Пусть даны абелевы группы L, M, эпиморфизм $p\colon L \to M$ и число $n \in \mathbb{N}$. Пусть $L' = \ker p$, $i\colon L' \to L$ — включение, $P = P_*$ — комплекс с $P_n = L$, $P_{n+1} = L'$, $(\partial\colon P_{n+1} \to P_n) = i$ и $P_q = 0$ при $q \neq n, n+1$. Рассмотрим (см. [3, III.2]) симплициальную абелеву группу $\boldsymbol{V}$, у которой $\boldsymbol{V}_q$ ($q \in \mathbb{N}$) — группа морфизмов комплекса $C_*(\boldsymbol{\Delta}^q)$ в комплекс P_* и очевидные структурные гомоморфизмы. Полагаем $\mathcal{K}(p, n) = \boldsymbol{V}$. Если группа L свободна, то группа $\boldsymbol{V}$ тоже свободна. $|\boldsymbol{V}|$ — пространство Эйленберга — Маклейна типа (M, n). Зададим коцикл $Z \in C^n(\boldsymbol{V}; M)$ правилом $Z(v) = p(v(\epsilon_n))$, $v \in \boldsymbol{V}_n$, где $\epsilon_n = \mathrm{id}\colon [n] \to [n]$. Класс $z \in H^n(\boldsymbol{V}; M)$ коцикла Z называем *универсальным когомологическим классом.* Имеем изоморфизм $H_n(\boldsymbol{V}) \to M$, $x \mapsto \langle z, x\rangle$.

7.1. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, удобное симплициальное отображение $\boldsymbol{j}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$ и регулярный относительно $\boldsymbol{j}$ коцикл $Y \in C^n(\boldsymbol{T}; M)$. Тогда существует такое регулярное относительно $\boldsymbol{j}$ симплициальное отображение $\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$, что $Y = \boldsymbol{k}^\sharp(Z)$.*

Доказательство. Так как отображение $\boldsymbol{j}$ удобно, то последовательность комплексов

$$0 \longleftarrow {}^{\circ}C^*(\boldsymbol{T}; M) \xleftarrow{p_\sharp} {}^{\circ}C^*(\boldsymbol{T}; L) \xleftarrow{i_\sharp} {}^{\circ}C^*(\boldsymbol{T}; L') \longleftarrow 0,$$

где кружок обозначает регулярность относительно $\boldsymbol{j}$, точна. Поэтому есть такие коцепи $X \in {}^{\circ}C^n(\boldsymbol{T}; L)$ и $X' \in {}^{\circ}C^{n+1}(\boldsymbol{T}; L')$, что $Y = p_\sharp(X)$ и $dX = i_\sharp(X')$. Зададим морфизм $w = w_*\colon C_*(\boldsymbol{T}) \to P_*$, полагая $w_n = X$, $w_{n+1} = X'$ при очевидном отождествлении $\operatorname{Hom}(C_q(\boldsymbol{T}), N) = C^q(\boldsymbol{T}; N)$. Отображение $\boldsymbol{k}$ зададим, полагая $\boldsymbol{k}_q(t) = w \circ [t]_\sharp$, $t \in \boldsymbol{T}_q$, $q \in \mathbb{N}$. Его регулярность относительно $\boldsymbol{j}$ легко проверить, используя удобство последнего. $\square$

7.2. Следствие. *Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$ и нормальное удобное связанное симплициальное отображение $\boldsymbol{j}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$. Предположим, что $n > 0$. Тогда для любого элемента $y \in H^n(\boldsymbol{T}; M)$ существует такое регулярное относительно $\boldsymbol{j}$ связанное симплициальное отображение $\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$, что $y = \boldsymbol{k}^*(z)$.*

Доказательство. Так как отображение $\boldsymbol{j}$ нормально, то класс y представим регулярным относительно $\boldsymbol{j}$ коциклом, и лемма 7.1 даёт регулярное относительно $\boldsymbol{j}$ симплициальное отображение $\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$ с $y = \boldsymbol{k}^*(z)$. Заменим его на связанное отображение $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{o}$, где $\boldsymbol{o}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}$ — постоянное связанное симплициальное отображение. $\square$

8. Отображение $z_{\boldsymbol{T}}$

Геометрический n-симплекс: $\Delta^n = \{\, (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_n \leqslant 1 \,\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Для $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n$ полагаем: $\sigma(z) = \{0, z_1, \ldots, z_n, 1\} \subset \mathbb{R}$.

Пусть дано симплициальное множество $\boldsymbol{T}$. Для $z \in \Delta^n$ $(n \in \mathbb{N})$ задаём отображение $z_{\boldsymbol{T}}\colon \boldsymbol{T}_n \to |\boldsymbol{T}|$, полагая: $z_{\boldsymbol{T}}(t)$ — образ точки z при геометрическом характеристическом отображении $\Delta^n \to |\boldsymbol{T}|$ симплекса t.

8.1. Лемма. *Пусть даны такие точки $x \in \Delta^p$, $y \in \Delta^q$ $(p, q \in \mathbb{N})$, что $\sigma(x) \supset \sigma(y)$. Тогда $\operatorname{im} x_{\boldsymbol{T}} \supset \operatorname{im} y_{\boldsymbol{T}}$.* $\square$

8.2. Лемма. *Пусть дана такая точка $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n$ $(n \in \mathbb{N})$, что $0 < z_1 < \ldots < z_n < 1$. Тогда отображение $z_{\boldsymbol{T}}$ инъективно.* $\square$

9. Блоки

Пусть даны пунктированное симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, связанное симплициальное отображение $\boldsymbol{j}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ и сюръективный симплициальный гомоморфизм $\boldsymbol{h}\colon \tilde{\boldsymbol{V}} \to \boldsymbol{V}$. Построим коммутативную диаграмму пунктированых симплициальных множеств и связанных отображений

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{\boldsymbol{U}} & \xleftarrow{\tilde{\boldsymbol{j}}} & \tilde{\boldsymbol{T}} & \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{k}}} & \tilde{\boldsymbol{V}} \\
{\scriptstyle \boldsymbol{g}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \boldsymbol{f}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{h}} \\
\boldsymbol{U} & \xleftarrow{\boldsymbol{j}} & \boldsymbol{T} & \xrightarrow{\boldsymbol{k}} & \boldsymbol{V},
\end{array}$$

где правый квадрат декартов, $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{U} \times \tilde{\boldsymbol{V}}$, $\boldsymbol{g}$ — проекция, $\tilde{\boldsymbol{j}} = (\boldsymbol{j} \circ \boldsymbol{f}) \times \tilde{\boldsymbol{k}}$. Такую диаграмму называем *блоком.* Как хорошо известно, $|\boldsymbol{h}|$ — расслоение (в смысле Серра). Так как правый квадрат декартов, то $|\boldsymbol{f}|$ — тоже расслоение.

9.1. Лемма. *Предположим, что группы* $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ *свободны, отображение* $\boldsymbol{j}$ *особо и отображение* $\boldsymbol{k}$ *регулярно относительно* $\boldsymbol{j}$. *Тогда отображение* $\tilde{\boldsymbol{j}}$ *тоже особо.*

Легко проверить, используя лемму 2.4. □

9.2. Лемма. *Предположим, что группы* $\boldsymbol{V}$, $\tilde{\boldsymbol{V}}$ *свободны, группа* $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{h}$ *связна, отображение* $\boldsymbol{j}$ *удобно и нормально и отображение* $\boldsymbol{k}$ *регулярно относительно* $\boldsymbol{j}$. *Тогда отображение* $\tilde{\boldsymbol{j}}$ *тоже нормально.*

Это доказано в параграфе 6. □

10. Подъём в блоке

Пусть даны множества X, Y, конечное множество B отображений $a\colon X \to Y$ и конечное множество $E \subset X \times Y$. Для $a \in B$ задаём элемент $I_a \in \mathbb{Z}^E$, $(I_a)_t = [t \in \Gamma(a)]$.

10.1. Лемма. *Пусть даны абелева группа* M, *отображение* $g\colon B \to M$ *и число* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда отображение* g (E, r)*-определимо, если и только если существует такое* r*-регулярное отображение* $h\colon \mathbb{Z}^E \to M$, *что* $g(a) = h(I_a)$, $a \in B$.

Доказательство. Если отображение g (E, r)-определимо, т. е. есть такое отображение $k\colon E(r) \to M$, что $k_B = g$, то нужное отображение h зададим формулой

$$h(u) = \sum_{F \in E(r)} \Big(\prod_{t \in F} u_t\Big) k(F),$$

(по лемме 2.1, оно будет r-регулярно). Наоборот, если h — такое отображение, то, по лемме 2.1, оно задаётся правилом

$$h(u) = \sum_{s \in \mathbb{N}^E : s_* \leqslant r} \Big(\prod_{t \in E} \binom{u_t}{s_t}\Big) m_s, \qquad u \in \mathbb{Z}^E,$$

где $m_s \in M$. Для $u \in \{0, 1\}^E$

$$h(u) = \sum_{s \in \{0,1\}^E : s_* \leqslant r} \Big(\prod_{t \in E : s_t = 1} u_t\Big) m_s.$$

Нужное отображение k зададим, полагая $k(F) = m_s$, где $s_t = [t \in F]$. □

10.2. Лемма. *Пусть даны абелевы группы* M, M', *отображение* $f\colon M \to M'$, *отображение* $g\colon B \to M$ *и числа* $r, s \in \mathbb{N}$. *Предположим, что отображение* f s*-регулярно, а отображение* g (E, r)*-определимо. Тогда отображение* $g' = f \circ g$ (E, rs)*-определимо.*

Ввиду леммы 10.1, следует из леммы 2.4. □

10.3. Лемма. *Пусть даны абелева группа* M', *подгруппа* $M \subset M'$, *отображение* $g\colon B \to M$ *и число* $r \in \mathbb{N}$. *Пусть* $i\colon M \to M'$ — *включение. Предположим, что группа* M'/M *плоска и отображение* $g' = i \circ g$ (E, r)*-определимо. Тогда отображение* g (E, r)*-определимо.*

Доказательство. Есть такое отображение $k'\colon E(r)\to M'$, что $g'=k'_B$. Пусть $N'\subset M'$ — подгруппа, порождённая множеством $\operatorname{im}k'$, $N=M\cap N'$. Группа N'/N свободна, так как она плоска и конечно порождена. Поэтому есть такой гомоморфизм $p\colon N'\to N$, что $p|_N=\mathrm{id}$. Зададим отображение $k\colon E(r)\to M$ формулой $k(F)=p(k'(F))$. Легко проверить, что $g=k_B$. $\square$

Для числа $m\in\mathbb{N}$ и абелевой группы U полагаем: $\Pi'_m(U)$ — абелева группа всех связанных отображений $a\colon S^m\to U$.

10.4. Лемма. *Пусть даны число $m\in\mathbb{N}$ и плоская симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Тогда группа $\Pi'_m|\boldsymbol{U}|/\Pi_m|\boldsymbol{U}|$ плоска.*

Доказательство. Пусть дано $q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$. Симплициальный гомоморфизм $\boldsymbol{q}\colon\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{U}$ умножения на q инъективен. Значит, $|\boldsymbol{q}|$ — топологическое вложение. Поэтому если для какого-то отображения $a\in\Pi'_m|\boldsymbol{U}|$ имеем $qa\in\Pi_m|\boldsymbol{U}|$, т. е. отображение $qa=|\boldsymbol{q}|\circ a$ непрерывно, то отображение a само непрерывно, т. е. $a\in\Pi_m|\boldsymbol{U}|$. $\square$

10.5. Лемма. *Пусть даны число $m\in\mathbb{N}$, плоская симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, отображение $f\colon B\to\Pi_m|\boldsymbol{U}|$ и число $r\in\mathbb{N}$. Для $x\in S^m$ пусть $l_x\colon\Pi_m|\boldsymbol{U}|\to|\boldsymbol{U}|$ — гомоморфизм вычисления в точке x. Предположим, что для любой точки $x\in S^m$ отображение $l_x\circ f$ (E,r)-определимо. Тогда отображение f (E,r)-определимо.*

Доказательство. По лемме 10.4, группа $\Pi'_m|\boldsymbol{U}|/\Pi_m|\boldsymbol{U}|$ плоска. Пусть $i\colon\Pi_m|\boldsymbol{U}|\to\Pi'_m|\boldsymbol{U}|$ — включение. Очевидно, отображение $i\circ f$ (E,r)-определимо. По лемме 10.3, отображение f (E,r)-определимо. $\square$

10.6. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$, симплициальное отображение $\boldsymbol{j}\colon\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{U}$, отображение $f\colon B\to|\boldsymbol{T}|$ и число $r\in\mathbb{N}$. Предположим, что отображение $|\boldsymbol{j}|\circ f$ (E,r)-определимо. Тогда существуют такие число $n\in\mathbb{N}$, точка $z\in\Delta^n$ и отображение $g\colon B\to\boldsymbol{T}_n$, что $f=z_{\boldsymbol{T}}\circ g$ и отображение $\boldsymbol{j}_n\circ g$ (E,r)-определимо.*

Доказательство. Есть такое отображение $k\colon E(r)\to|\boldsymbol{U}|$, что $|\boldsymbol{j}|\circ f=k_B$. По лемме 8.1, есть такие число $n\in\mathbb{N}$ и точка $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\Delta^n$, что $\operatorname{im}z_{\boldsymbol{T}}\supset\operatorname{im}f$, $\operatorname{im}z_{\boldsymbol{U}}\supset\operatorname{im}k$ и $0<z_1<\ldots<z_n<1$. Есть такое отображение $g\colon B\to\boldsymbol{T}_n$, что $z_{\boldsymbol{T}}\circ g=f$, и такое отображение $l\colon E(r)\to\boldsymbol{U}_n$, что $z_{\boldsymbol{U}}\circ l=k$. Имеем $z_{\boldsymbol{U}}\circ\boldsymbol{j}_n\circ g=|\boldsymbol{j}|\circ z_{\boldsymbol{T}}\circ g=|\boldsymbol{j}|\circ f=k_B=(z_{\boldsymbol{U}}\circ l)_B=z_{\boldsymbol{U}}\circ l_B$. Так как, по лемме 8.2, $z_{\boldsymbol{U}}$ — мономорфизм, то $\boldsymbol{j}_n\circ g=l_B$. Значит, отображение $\boldsymbol{j}_n\circ g$ (E,r)-определимо. $\square$

10.7. Лемма. *Пусть даны симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, симплициальные отображения $\boldsymbol{j}\colon\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{k}\colon\boldsymbol{T}\to\boldsymbol{V}$, отображение $f\colon B\to|\boldsymbol{T}|$ и числа $r,s\in\mathbb{N}$. Предположим, что отображение $\boldsymbol{k}$ s-регулярно относительно $\boldsymbol{j}$ и отображение $|\boldsymbol{j}|\circ f$ (E,r)-определимо. Тогда отображение $|\boldsymbol{k}|\circ f$ (E,rs)-определимо.*

Доказательство. По лемме 10.6, есть такие число $n\in\mathbb{N}$, точка $z\in\Delta^n$ и отображение $g\colon B\to\boldsymbol{T}_n$, что $f=z_{\boldsymbol{T}}\circ g$ и отображение $\boldsymbol{j}_n\circ g$ (E,r)-определимо. Есть такое s-регулярное отображение $q\colon\boldsymbol{U}_n\to\boldsymbol{V}_n$, что $\boldsymbol{k}_n=q\circ\boldsymbol{j}_n$. Так как отображение $\boldsymbol{j}_n\circ g$ (E,r)-определимо, а отображение q s-регулярно, то, по лемме 10.2, отображение $q\circ\boldsymbol{j}_n\circ g=\boldsymbol{k}_n\circ g$ (E,rs)-определимо. Так как $z_{\boldsymbol{V}}$ — гомоморфизм, то отображение $z_{\boldsymbol{V}}\circ\boldsymbol{k}_n\circ g=|\boldsymbol{k}|\circ f$ (E,rs)-определимо. $\square$

10.8. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, пунктированное симплициальное множество $\boldsymbol{T}$, симплициальные абелевы группы $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$, связанные симплициальные отображения $\boldsymbol{j}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{V}$, отображение $e\colon B \to \Pi_m|\boldsymbol{T}|$ и числа $r, s \in \mathbb{N}$. Предположим, что группа $\boldsymbol{V}$ плоска, отображение $\boldsymbol{k}$ s-регулярно относительно $\boldsymbol{j}$ и отображение $|\boldsymbol{j}|_\sharp \circ e$ (E, r)-определимо. Тогда отображение $|\boldsymbol{k}|_\sharp \circ e$ (E, rs)-определимо.*

Доказательство. Пусть дана точка $x \in S^m$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Pi_m|\boldsymbol{U}| \arrow[d, "l'"] & \Pi_m|\boldsymbol{T}| \arrow[l, "|\boldsymbol{j}|_\sharp"'] \arrow[r, "|\boldsymbol{k}|_\sharp"] \arrow[d, "l"] & \Pi_m|\boldsymbol{V}| \arrow[d, "l''"] \\
|\boldsymbol{U}| & |\boldsymbol{T}| \arrow[l, "|\boldsymbol{j}|"'] \arrow[r, "|\boldsymbol{k}|"] & |\boldsymbol{V}|,
\end{tikzcd}$$

где l, l', l'' — отображения вычисления в точке x. Так как l' — гомоморфизм, то отображение $l' \circ |\boldsymbol{j}|_\sharp \circ e = |\boldsymbol{j}| \circ l \circ e$ (E, r)-определимо. По лемме 10.7, отображение $|\boldsymbol{k}| \circ l \circ e = l'' \circ |\boldsymbol{k}|_\sharp \circ e$ (E, rs)-определимо. По лемме 10.5, отображение $|\boldsymbol{k}|_\sharp \circ e$ (E, rs)-определимо. $\square$

10.9. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, блок*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\boldsymbol{U}} \arrow[d] & \tilde{\boldsymbol{T}} \arrow[l, "\tilde{\boldsymbol{j}}"'] \arrow[r, "\tilde{\boldsymbol{k}}"] \arrow[d, "\boldsymbol{f}"'] & \tilde{\boldsymbol{V}} \arrow[d, "\boldsymbol{h}"] \\
\boldsymbol{U} & \boldsymbol{T} \arrow[l, "\boldsymbol{j}"'] \arrow[r, "\boldsymbol{k}"] & \boldsymbol{V},
\end{tikzcd}$$

отображение $e\colon B \to \Pi_m|\boldsymbol{T}|$ и числа $r, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 1$. Предположим, что группа $\boldsymbol{V}$ плоска, $\pi_m|\boldsymbol{V}| = 0$, отображение $\boldsymbol{k}$ s-регулярно относительно $\boldsymbol{j}$ и отображение $|\boldsymbol{j}|_\sharp \circ e$ (E, r)-определимо. Тогда существует такое отображение $\tilde{e}\colon B \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{T}}|$, что $|\boldsymbol{f}|_\sharp \circ \tilde{e} = e$ и отображение $|\tilde{\boldsymbol{j}}|_\sharp \circ \tilde{e}$ (E, rs)-определимо.

Доказательство. Есть такое отображение $p\colon E(r) \to \Pi_m|\boldsymbol{U}|$, что $|\boldsymbol{j}|_\sharp \circ e = p_B$. Продолжим его нулём до отображения $\bar{p}\colon E(rs) \to \Pi_m|\boldsymbol{U}|$. Очевидно, $\bar{p}_B = p_B$. По лемме 10.8, отображение $|\boldsymbol{k}|_\sharp \circ e$ (E, rs)-определимо, т. е. есть такое отображение $q\colon E(rs) \to \Pi_m|\boldsymbol{V}|$, что $|\boldsymbol{k}|_\sharp \circ e = q_B$. Так как $|\boldsymbol{h}|$ — расслоение и $\pi_m|\boldsymbol{V}| = 0$, то $|\boldsymbol{h}|_\sharp\colon \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{V}}| \to \Pi_m|\boldsymbol{V}|$ — эпиморфизм. Выберем такое отображение $\tilde{q}\colon E(rs) \to \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{V}}|$, что $|\boldsymbol{h}|_\sharp \circ \tilde{q} = q$. Пусть $\tilde{p} = \bar{p} \times \tilde{q}\colon E(rs) \to \Pi_m|\boldsymbol{U}| \times \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{V}}| = \Pi_m|\tilde{\boldsymbol{U}}|$ (так как $\boldsymbol{U} \times \tilde{\boldsymbol{V}} = \tilde{\boldsymbol{U}}$). Используя, что правый квадрат декартов, нужное отображение $\tilde{e}$ зададим условиями $|\boldsymbol{f}|_\sharp \circ \tilde{e} = e$ и $|\tilde{\boldsymbol{k}}|_\sharp \circ \tilde{e} = \tilde{q}_B$ (легко проверить, что $|\boldsymbol{k}|_\sharp \circ e = |\boldsymbol{h}|_\sharp \circ \tilde{q}_B$). Так как $\tilde{\boldsymbol{j}} = (\boldsymbol{j} \circ \boldsymbol{f}) \times \tilde{\boldsymbol{k}}$, то $|\tilde{\boldsymbol{j}}|_\sharp \circ \tilde{e} = (|\boldsymbol{j}|_\sharp \circ |\boldsymbol{f}|_\sharp \circ \tilde{e}) \times (|\tilde{\boldsymbol{k}}|_\sharp \circ \tilde{e}) = (|\boldsymbol{j}|_\sharp \circ e) \times (|\tilde{\boldsymbol{k}}|_\sharp \circ \tilde{e}) = \bar{p}_B \times \tilde{q}_B = \tilde{p}_B$ (так как $\bar{p} \times \tilde{q} = \tilde{p}$). $\square$

11. Башня Уайтхеда

11.1. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, пунктированные пространства Y, Y', связанное непрерывное отображение $g\colon Y \to Y'$, число $r \in \mathbb{N}$, абелева группа M и r-определимое отображение $f'\colon \Pi_m(Y') \to M$. Тогда отображение $f = f' \circ g_\sharp\colon \Pi_m(Y) \to M$ r-определимо.*

Доказательство. Пусть дано конечное множество $B \subset \Pi_m(Y)$. Пусть $B' = g_\sharp(B) \subset \Pi_m(Y')$. Есть такие конечное множество $E' \subset S^m \times Y'$ и отображение $k' \colon E'(r) \to M$, что $f'|_{B'} = k'_{B'}$. Пусть $G = (\mathrm{id}, g) \colon S^m \times Y \to S^m \times Y'$,

$$L = \bigcup_{a \in B} \Gamma(a) \subset S^m \times Y,$$

$E = L \cap G^{-1}(E') \subset S^m \times Y$. Ясно, что множество E конечно. Зададим отображение $k \colon E(r) \to M$, полагая $k(F) = k'(G(F))$. Покажем, что $f|_B = k_B$. Пусть дано $a \in B$. Легко видеть, что формула $F \mapsto G(F)$ задаёт биекцию

$$\{\, F \in E(r) : F \subset \Gamma(a) \,\} \to \{\, F' \in E'(r) : F' \subset \Gamma(g \circ a) \,\}.$$

Поэтому

$$k_B(a) = \sum_{\substack{F \in E(r): \\ F \subset \Gamma(a)}} k(F) = \sum_{\substack{F \in E(r): \\ F \subset \Gamma(a)}} k'(G(F)) = \sum_{\substack{F' \in E'(r): \\ F' \subset \Gamma(g \circ a)}} k'(F') = \\ = k'_{B'}(g \circ a) = f'(g \circ a) = f(a).$$

□

11.2. Лемма. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$ и плоская симплициальная абелева группа $\boldsymbol{U}$. Тогда отображение $\mathrm{id} \colon \Pi_m|\boldsymbol{U}| \to \Pi_m|\boldsymbol{U}|$ 1-определимо.*

Доказательство. Пусть дано конечное множество $B \subset \Pi_m|\boldsymbol{U}|$. Для $x \in S^m$ зададим на B отношение $R_x = \{\, (a, a') : a(x) = a'(x) \,\}$. Выберем такое конечное множество $Z \subset S^m$, что $\{\, R_z \mid z \in Z \,\} = \{\, R_x \mid x \in S^m \,\}$. Пусть $E = \{\, (z, a(z)) \mid z \in Z, a \in B \,\} \subset S^m \times |\boldsymbol{U}|$. Пусть дана точка $x \in S^m$. Выберем такую точку $z \in Z$, что $R_z = R_x$. Зададим отображение $P \colon E \to |\boldsymbol{U}|$, полагая $P(z, a(z)) = a(x)$ для $a \in B$ (это корректно, так как $R_z = R_x$) и $P(t) = 0$ для остальных $t \in E$. Зададим отображение $p \colon E(1) \to |\boldsymbol{U}|$, полагая $p(\{t\}) = P(t)$ для $t \in E$ и $p(\varnothing) = 0$. Пусть $l \colon \Pi_m|\boldsymbol{U}| \to |\boldsymbol{U}|$ — отображение вычисления в точке x. Легко проверить, что $l|_B = p_B$. Значит, отображение $l|_B$ $(E, 1)$-определимо. Таким образом, по лемме 10.5, включение $B \to \Pi_m|\boldsymbol{U}|$ $(E, 1)$-определимо. Таким образом, отображение $\mathrm{id} \colon \Pi_m|\boldsymbol{U}| \to \Pi_m|\boldsymbol{U}|$ 1-определимо. □

11.3. Утверждение. *Пусть даны число $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, и односвязное пунктированное симплициальное множество $\boldsymbol{T}$. Тогда существует такое $r \in \mathbb{N}$, что основное отображение $h \colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \pi_m|\boldsymbol{T}|$ r-определимо.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{j} \colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{U}$ — универсальное связанное симплициальное отображение множества $\boldsymbol{T}$ в симплициальную абелеву группу. Отображение $\boldsymbol{j}$, очевидно, особо и нормально.

Последовательно для каждого $n = 2, 3, \ldots$ построим $(n-1)$-связное пунктированное симплициальное множество $\boldsymbol{T}^n$ (эти множества будут образовывать башню Уайтхеда для $\boldsymbol{T}$), симплициальную абелеву группу $\boldsymbol{U}^n$ и нормальное особое (и, следовательно, удобное) связанное симплициальное отображение $\boldsymbol{j}^n \colon \boldsymbol{T}^n \to \boldsymbol{U}^n$. Пусть $\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{j}$. Предположим, для некоторого n всё построено. Пусть $M = H_n(\boldsymbol{T}^n)$, $i \in H^n(\boldsymbol{T}^n; M)$ — такой класс, что $\langle i, x \rangle = x$ для любого $x \in H_n(\boldsymbol{T}^n) = M$. Выберем свободную абелеву группу

L и эпиморфизм $p\colon L \to M$. Пусть $\boldsymbol{V}^n = \mathcal{K}(p, n)$, $z \in H^n(\boldsymbol{V}^n; M)$ — универсальный когомологический класс. По следствию 7.2, есть такое регулярное относительно $\boldsymbol{j}^n$ связанное симплициальное отображение $\boldsymbol{k}^n\colon \boldsymbol{T}^n \to \boldsymbol{V}^n$, что $i = \boldsymbol{k}^*(z)$. Пусть $\boldsymbol{c}^n\colon \boldsymbol{PV}^n \to \boldsymbol{V}^n$ — канонический симплициальный гомоморфизм. Так как группа $\boldsymbol{V}^n$ связна, то гомоморфизм $\boldsymbol{c}^n$ сюръективен. Так как группа $\boldsymbol{V}^n$ односвязна, то группа $\mathbf{ker}\, \boldsymbol{c}^n$ связна. Так как группа $\boldsymbol{V}^n$ свободна, то группа $\boldsymbol{PV}^n$ тоже свободна. Построим блок

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{U}^{n+1} & \xleftarrow{\boldsymbol{j}^{n+1}} & \boldsymbol{T}^{n+1} & \xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{k}}^n} & \boldsymbol{PV}^n \\
\big\downarrow & & \boldsymbol{f}^n\big\downarrow & & \big\downarrow \boldsymbol{c}^n \\
\boldsymbol{U}^n & \xleftarrow{\boldsymbol{j}^n} & \boldsymbol{T}^n & \xrightarrow{\boldsymbol{k}^n} & \boldsymbol{V}^n.
\end{array}
$$

Сравнивая гомотопические последовательности расслоений $|\boldsymbol{f}^n|$ и $|\boldsymbol{c}^n|$, получаем, что множество $\boldsymbol{T}^{n+1}$ n-связно. По лемме 9.1, отображение $\boldsymbol{j}^{n+1}$ особо. По лемме 9.2, оно нормально. (Конец индукции.)

Для каждого $n = 2, 3, \ldots$ пусть $\boldsymbol{F}^n = \boldsymbol{f}^2 \circ \ldots \circ \boldsymbol{f}^{n-1}\colon \boldsymbol{T}^n \to \boldsymbol{T}$ ($\boldsymbol{F}^2 = \mathbf{id}$), $s_n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant 1$, — такое число, что отображение $\boldsymbol{k}^n$ s_n-регулярно, $r_n = s_2 \ldots s_{n-1}$ ($r_2 = 1$).

Пусть дано конечное множество $B \subset \Pi_m|\boldsymbol{T}|$. Пусть $e\colon B \to \Pi_m|\boldsymbol{T}|$ — включение. По леммам 11.2, 11.1, отображение $|\boldsymbol{j}|_\sharp$ 1-определимо. Значит, есть такое конечное множество $E \subset S^m \times |\boldsymbol{T}|$, что отображение $|\boldsymbol{j}|_\sharp|_B$ $(E, 1)$-определимо.

Последовательно для каждого $n = 2, 3, \ldots, m$ построим такое отображение $e^n\colon B \to \Pi_m|\boldsymbol{T}^n|$, что $|\boldsymbol{F}^n|_\sharp \circ e^n = e$ и отображение $|\boldsymbol{j}^n|_\sharp \circ e^n$ (E, r_n)-определимо. Пусть $e^2 = e$. Переход даётся леммой 10.9.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \Pi_m|\boldsymbol{V}^m| & \xrightarrow{g} & \pi_m|\boldsymbol{V}^m| \\
 & & |\boldsymbol{k}^m|_\sharp\big\uparrow & & |\boldsymbol{k}^m|_*\big\uparrow \\
 & & \Pi_m|\boldsymbol{T}^m| & \xrightarrow{h^m} & \pi_m|\boldsymbol{T}^m| \\
 & & |\boldsymbol{F}^m|_\sharp\big\downarrow & & |\boldsymbol{F}^m|_*\big\downarrow \\
B & \xrightarrow{e} & \Pi_m|\boldsymbol{T}| & \xrightarrow{h} & \pi_m|\boldsymbol{T}|,
\end{array}
$$

где h^m, g — основные отображения. Так как отображение $|\boldsymbol{j}^m|_\sharp \circ e^m$ (E, r_m)-определимо, а отображение $\boldsymbol{k}^m$ s_m-регулярно относительно $\boldsymbol{j}^m$, то, по лемме 10.8, отображение $|\boldsymbol{k}^m|_\sharp \circ e^m$ (E, r_{m+1})-определимо. Так как g — гомоморфизм, то отображение $g \circ |\boldsymbol{k}^m|_\sharp \circ e^m = |\boldsymbol{k}^m|_* \circ h^m \circ e^m$ (E, r_{m+1})-определимо. Так как $|\boldsymbol{k}^m|_*$ — изоморфизм, то отображение $h^m \circ e^m$ (E, r_{m+1})-определимо. Значит, отображение $|\boldsymbol{F}^m|_* \circ h^m \circ e^m = h|_B$ (E, r_{m+1})-определимо.

Таким образом, отображение h r_{m+1}-определимо. $\square$

11.4. Утверждение. *Для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, существует такое $r \in \mathbb{N}$, что для любого односвязного пунктированного симплициального множества $\boldsymbol{T}$ основное отображение $h\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \pi_m|\boldsymbol{T}|$ r-определимо.*

Доказательство. От противного: допустим, есть такое $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, что для каждого $s \in \mathbb{N}$ есть односвязное пунктированное симплициальное множество

$\boldsymbol{T}^s$, у которого основное отображение $h^s\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}^s| \to \pi_m|\boldsymbol{T}^s|$ не s-определимо. Пусть

$$\boldsymbol{T} = \bigvee_{s\in\mathbb{N}} \boldsymbol{T}^s.$$

По утверждению 11.3, есть такое $r \in \mathbb{N}$, что основное отображение $h\colon \Pi_m|\boldsymbol{T}| \to \pi_m|\boldsymbol{T}|$ r-определимо. Пусть $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{T}^r \to \boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{p}\colon \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}^r$ — канонические связанные симплициальные отображения ($\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{i} = \mathbf{id}$). Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_m|\boldsymbol{T}| & \xrightarrow{\ h\ } & \pi_m|\boldsymbol{T}| \\
{\scriptstyle |\boldsymbol{i}|_\sharp}\Big\uparrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle |\boldsymbol{p}|_*} \\
\Pi_m|\boldsymbol{T}^r| & \xrightarrow{\ h^r\ } & \pi_m|\boldsymbol{T}^r|.
\end{array}$$

По лемме 11.1, отображение $h\circ|\boldsymbol{i}|_\sharp$ r-определимо. Так как $|\boldsymbol{p}|_*$ — гомоморфизм, то отображение $|\boldsymbol{p}|_* \circ h \circ |\boldsymbol{i}|_\sharp = h^r$ r-определимо. Противоречие. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть дано $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Для пунктированного пространства Y пусть $h_Y\colon \Pi_m(Y) \to \pi_m(Y)$ — основное отображение. По утверждению 11.4, есть такое $r \in \mathbb{N}$, что для любого односвязного пунктированного симплициального множества $\boldsymbol{T}$ отображение $h_{|\boldsymbol{T}|}$ r-определимо. Пусть дано односвязное допустимое пунктированное пространство Y. Есть пунктированное симплициальное множество $\boldsymbol{T}$ и связанная эквивалентность $e\colon Y \to |\boldsymbol{T}|$. По лемме 11.1, отображение $h_{|\boldsymbol{T}|} \circ e_\sharp = e_* \circ h_Y$ r-определимо. Так как e_* — изоморфизм, то отображение h_Y r-определимо. $\square$

Литература

1. М. Минский, С. Пейперт, *Персептроны*, Мир, 1971.
2. С. С. Подкорытов, *Об отображениях сферы в односвязное пространство с конечно порождёнными гомотопическими группами*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 4, 153 — 192.
3. P. G. Goerss, J. F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Birkhäuser, 1999.
4. M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), 1045–1068.
5. I. B. S. Passi, *Group rings and their augmentation ideals*, Lect. Notes Math. 715, Springer, 1979.