63.31. Предположим противное. Пусть стороны квадратов равны 1, квадрат K касается девяти остальных. Рассмотрим квадрат K' со стороной 2, получаемый из K гомотетией относительно его центра. Имеет место следующий факт: внутренность любого квадрата, касающегося K, высекает на периметре (границе) квадрата K' участок длины не меньше 1. Отсюда немедленно следует противоречие — квадратов 9, а периметр K' равен всего лишь 8, значит, какие-то квадраты имеют общие внутренние точки.

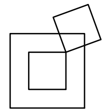
Оставшаяся часть решения — это доказательство сформулированного выше факта.

Пусть X — квадрат, касающийся K. Случай, когда X расположен параллельно K, тривиален. Далее всюду предполагается, что они расположены не параллельно, в частности, пересечение их границ состоит из конечного числа точек. Обозначим через P пересечение внутренности X с границей K', оно состоит из нескольких отрезков с концами в вершинах K' и точках пересечения границ K' и X. Наша цель — доказать, что сумма длин этих отрезков не меньше 1.

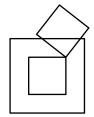
Сначала приведем соображения, позволяющие сократить перебор. При фиксированных направлениях сторон квадратов и фиксированной комбинаторной структуре их пересечения (под комбинаторной структурой мы понимаем список данных типа “такая-то сторона K' пересекает такую-то сторону X”), длина P линейно зависит от положения квадратов. Если один из квадратов K и X касается стороны другого, то его можно параллельно переносить вдоль этой стороны в том направлении, в котором наша линейная функция не убывает, до тех пор, пока квадраты не перестанут касаться или комбинаторная структура P не изменится. Поэтому достаточно рассмотреть только соответствующие “краевые” случаи, а именно: (1) K и X имеют общую вершину; (2) одна из вершин K' лежит на периметре X; (3) одна из вершин X лежит на периметре K'.

Для определенности будем считать, что квадрат K расположен горизонтально.

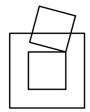
(1) Пусть общая вершина квадратов — правая верхняя вершина K (обозначим ее через A). Пусть X повернут по часовой стрелке на угол α, $0 < \alpha < 90°$, по сравнению с горизонтальным положением. Рассмотрим три подслучая.



1а) $0 < \alpha < 45°$. Тогда P — объединение горизонтального отрезка длины $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ и вертикального отрезка длины $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, то есть имеет длину 1.

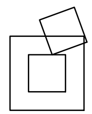


1б) $45° \leqslant \alpha \leqslant 60°$. Тогда P — гипотенуза прямоугольного треугольника с прямым углом в A. Гипотенуза вдвое больше проведенной к ней медианы, а медиана не меньше высоты, которая в данном случае равна $1/2$. Значит, длина P не меньше 1.



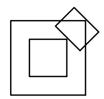
1в) $60° < \alpha < 90°$. Тогда P — отрезок, соединяющий две противоположные стороны X, его длина не меньше расстояния между этими сторонами, которое равно 1.

(2) Пусть правая верхняя вершина квадрата K' (обозначим ее A') принадлежит стороне a квадрата X. Поскольку X содержит точки внутри K' и не может целиком содержаться в K', их периметры должны пересекаться. При этом только те стороны K', которые примыкают к A', могут пересекать периметр X (две другие стороны слишком далеки от A'). При этом каждая из этих двух сторон пересекает периметр X не более одного раза (не считая точки A') в силу выпуклости квадрата X. Рассмотрим подслучаи.

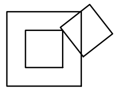


2а) Хотя бы одна из сторон K' пересекает сторону X, противоположную a (сюда включается и ситуация, когда A' является вершиной X, так как в качестве a тогда можно выбирать любую из двух соседних сторон). Как и в случае 1в, пользуемся тем, что расстояние между противоположными сторонами X равно 1.

2б) Две стороны K' пересекают периметр X (причем они пересекают стороны X, соседние с a, иначе это случай 2а). Ясно, что они не могут пересекать одну и ту же строну X, поэтому соответствующие отрезки образуют ломаную, соединяющую две противоположные стороны X. Длина любой такой ломаной не меньше расстояния между сторонами. (На самом деле этот случай невозможен, но проще его разобрать, чем это доказывать.)

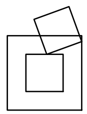


2в) Только одна сторона K' пересекает периметр X, причем пересекает сторону (обозначим ее b), соседнюю с a. Пусть эта сторона K' — вертикальная. Заметим, что один конец стороны a лежит внутри K', а другой — снаружи, иначе по топологическим причинам найдется еще одна точка пересечения. К какому же из них примыкает сторона b? Ясно, что к внутреннему (обозначим его M), иначе она не пересечет K'. Таким образом, стороны a и b выходят из M вправо, значит, M — самая левая точка квадрата X, значит, она находится на расстоянии не меньше $1/2$ от правой стороны K' (иначе у X и K не было бы общих точек). Значит, P — гипотенуза прямоугольного треугольника с высотой не меньше $1/2$, как в случае 1б.



(3) Пусть вершина M квадрата X лежит на правой стороне квадрата K' (а вершины K' не лежат на периметре X, иначе это случай 2). Если X касается вертикальной стороны K, то это не краевой случай — можно передвинуть X вверх или вниз. Значит, либо X касается горизонтальной стороны K, либо X касается вершины K своей стороной. Рассмотрим подслучаи.

3а) X касается горизонтальной (для определенности, верхней) стороны K своей вершиной N. Тогда N — самая нижняя точка X. Угол между MN и горизонталью меньше 30°, так как расстояние между M и N не меньше 1, а разность высот меньше $1/2$. Значит, MN — сторона, а не диагональ квадрата X, иначе N — не самая нижняя точка. Стороны квадрата X, соседние с MN, идут от M и N вверх и влево (так как M правее и выше N) под углом больше 60° к горизонтали. Значит, они пересекают верхнюю сторону K', и у нас опять есть отрезок, соединяющий противоположные стороны квадрата.



3б) Пусть для определенности X касается правой верхней вершины K (обозначим ее A) своей стороной a. Тогда сторона a направлена вправо-вниз (имеет отрицательный коэффициент наклона). Ясно, что M является одним из концов a. (Пусть это не так, тогда M лежит на прямой, проходящей на расстоянии 1 от точки A правее и выше нее, но такая прямая не может иметь общих точек с K'.) Перенесем X параллельно a вправо-вниз так, чтобы второй конец стороны a

совместился с A. При этом P как множество не увеличится, так как точки плоскости, добавившиеся в X, лежат левее M, а значит, лежат за пределами K'. Таким образом, мы свели этот подслучай к случаю 1.

63.32. Так как сумма $(\sqrt{26}+5)^{1963}+(5-\sqrt{26})^{1963}$ есть целое число (это проверяется при помощи бинома Ньютона), а также выполняется неравенство $-0.1 < 5-\sqrt{26} < 0$, то $-10^{-1963} < (5-\sqrt{26})^{1963} < 0$, и следовательно, первые 1963 цифры числа $(\sqrt{26}+5)^{1963}$ после запятой — нули.

63.33. Коробок-параллелепипед должен располагаться так, чтобы плоскость, проходящая через вторые концы его ребер, выходящих из одной вершины, была горизонтальна.

040701 СИ **63.34.** Пусть B_i — данные круги, O_i — их центры, r_i — радиусы ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Если какие-то три центра лежат на одной прямой, то соответствующие круги имеют общую точку на этой прямой (каждый высекает на этой прямой отрезок, из условия любые два из этих отрезков пересекаются, отсюда следует, что все отрезки имеют общую точку). Пусть никакие три центра не лежат на одной прямой, тогда нетрудно проверить, что какие-то четыре из них лежат в вершинах выпуклого четырехугольника. Пусть $O_1O_2O_3O_4$ — выпуклый четырехугольник, P — точка пересечения его диагоналей. Так как круги B_1 и B_3 пересекаются, их объединение содержит отрезок O_1O_2, значит, P принадлежит хотя бы одному из этих кругов; аналогично для B_2 и B_4. Пусть для определенности P принадлежит B_1 и B_2, $PO_1 = r_1 - d_1$, $PO_2 = r_2 - d_2$, $d_1 \leqslant d_2$. Построим на отрезке PO_3 такую точку X, что $PX = d_1$, а если такой нет (т. е. $PO_3 < d_1$), положим $X = O_3$. Тогда X принадлежит кругам B_1, B_2 и B_3: $O_1X \leqslant PO_1 + d_1 = r_1$, $O_2X \leqslant PO_2 + d_1 \leqslant PO_2 + d_2 = r_2$ по неравенству треугольника, а расстояние O_3X равно либо 0, либо $O_3P - d_1 = O_1O_3 - r_1$, что не больше r_3, так как B_1 и B_3 пересекаются.

63.35. Допустим, что это не так. Тогда, как нетрудно проверить, в данном наборе чисел не более 7 единиц — иначе, складывая другие числа, можно получить число от $a-8$ до a. Далее, среди них не более 7 двоек — это доказывается так же. Рассуждая аналогично, получаем, что в наборе не более десятка троек, четверок, ... , девяток. Тогда сумма чисел в на-