1 Евклидовы пространства

1.1 Скалярное произведение

Определение. Пусть X — векторное пространство (над $\mathbb{R}$). *Скалярное произведение* в X — это функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{R}$, обладающая свойствами:

(1) Симметричность: $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ для любых $x,y\in X$.

(2) Линейность по каждому аргументу (билинейность): $\langle ax,y\rangle=a\langle x,y\rangle$, $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$ для любых $x,y,z\in X$, $a\in\mathbb{R}$. Линейность по второму аргументу следует из симметричности.

(3) Положительная определенность: $\langle x,x\rangle>0$ при всех $x\in X\setminus\{0\}$,

Евклидово пространство — это векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением.

Примеры. 1. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ определяется равенством

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

где $x-(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$.

2. Любое подпространство евклидова пространства — тоже евклидово пространство (с тем же скалярным произведением, ограниченным на это подпространство).

3. Пусть $X=C[0,1]$ — пространство непрерывных функций $[0,1]\to\mathbb{R}$. Можно определить скалярное произведение на нем формулой $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.

4. Пусть $X=\mathbb{R}^2$. Можно определить скалярное произведение формулой

$$\langle(x,y),(x'y')\rangle=3xx'+5yy'+2(xy'+y'x).$$

5. Обобщение: зафиксируем числа a,b,c, такие, что $a>0$, $b>0$, $ab-c^2>0$. Тогда формула

$$\langle(x,y),(x'y')\rangle=axx'+byy'+c(xy'+y'x)$$

задает скалярное произведение.

Задача: любое скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ представляется в таком виде.

1.2 Длина вектора

Определение. Пусть X — евклидово пространство. *Длина* (*норма*) $|x|$ вектора $x\in X$ определяется равенством $|x|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Свойства. 1. Положительность: $|0|=0$, $|x|>0$ при $x\neq 0$.

2. Симметричность: $|-x|=|x|$ для любого $x\in X$.

3. Положительная однородность: $|ax|=a|x|$ для любых $x\in X$, $a\geq 0$.

4. Неравенство КБШ: $|\langle x,y\rangle|\leq|x|\cdot|y|$ для любых $x,y\in X$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y пропорциональны. (*Доказательство*: посчитаем дискриминант трехчлена $f(t)=|x+ty|^2$.)

Замечание. Можно определить угол между ненулевыми векторами x и y формулой $\angle(x,y)=\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{|x|\cdot|y|}$. Угол зависит только от направления векторов, но не от длины.

5. Неравенство треугольника: $|x+y|\leq|x|+|y|$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда x и y сонаправлены.

6. Скалярное произведение выражается через длину: $\langle x,y\rangle=\frac{|x+y|^2-|x|^2-|y|^2}{2}$.

7. Тождество параллелограмма: $|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2)$.

Задача: любая функция $|\cdot|$ на векторном пространстве, удовлетворяющая свойствам положительности, симметричности, положительной однородности и тождеству параллелограмма, порождается некоторым скалярным произведением.

Определение. *Расстояние* между точками x и y в евклидовом пространстве X определяется равенством $d(x,y)=|x-y|$.

Теорема. *Евклидово пространство X с введенным расстоянием d — метрическое пространство.*

1.3 Ортогонализация

Определение. Пусть X — евклидово пространство. Векторы $x,y\in X$ называются *ортогональными* (обозначение: $x\perp y$), если $\langle x,y\rangle=0$. Набор векторов $v_1,v_2,\dots,v_n$ называется *ортонормированным*, если эти векторы попарно ортогональны и имеют единичную длину: $|v_i|=1$ для всех i, $\langle v_i,v_j\rangle=0$ при $i\neq j$. *Ортонормированный базис* — это ортонормированный набор векторов, являющийся басисом пространства.

Пример: стандартный базис $\mathbb{R}^n$ — ортонормированный.

Свойства. 1. Теорема Пифагора: если векторы $v_1,\dots,v_k$ попарно ортогональны, то $|v_1+\dots+v_k|^2=|v_1|^2+\dots+|v_k|^2$.

2. Векторы ортонормированного набора линейно независимы.

3. Скалярное произведение выражается через разложение по ортонормированному базису так же, как в $\mathbb{R}^n$: если $v_1,\dots,v_n$ — ортонормированный базис, $x=\sum x_iv_i$, $y=\sum y_iv_i$ (где $x_i,y_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\dots,n$), то $\langle x,y\rangle=\sum x_iy_i$.

Теорема (ортогонализация по Граму–Шмидту). *Пусть $w_1,\dots,w_k$ — линейно независимый набор векторов в евклидовом пространстве. Тогда существует единственный ортонормированный набор $v_1,\dots,v_k$, такой. что*

1. Для каждого $k\le n$ линейные оболочки наборов $\{w_1,\dots,w_k\}$ и $\{v_1,\dots,v_k\}$ совпадают.

2. $\langle v_k,w_k\rangle>0$ для всех $k\le n$.

Следствие. *В конечномерном векторном пространстве существует ортонормированный базис. Более того, любой ортонормированный набор векторов можно дополнить до ортонормированного базиса.*

Определение. Пусть Y — линейное подпространство евклидова пространства X. *Ортогональным дополнением* Y называется множество $Y^\perp=\{x\in X:\forall y\in Y\ \langle x,y\rangle=0\}$.

Пример. Пусть $X=\mathbb{R}^n$, $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис, Y — линейная оболочка векторов нескольких координатных векторов. Тогда $Y^\perp$ — линейная оболочка остальных координатных векторов.

Теорема (задача?). *Пусть X — конечномерное евклидово пространство, $Y\subset$ — линейное подпространство.*

1. $Y^\perp$ — линейное подпространство.

2. $\dim Y+\dim Y^\perp=\dim X$.

3. $(Y^\perp)^\perp=Y$.

4. Для любой точки $x\in X$ существует единственная точка $y\in Y$, такая, что $x-y\in Y^\perp$ (она называется ортогональной проекцией x на Y).

5. Отображение, ставящее в соответствие каждой точке ее ортогональную проекцию на Y — линейно.

1.4 Изоморфизмы

Определение. *Изоморфизм* евклидовых пространств X и Y — это линейная биекция $L : X \to Y$, сохраняющая скалярное произведение, т. е. такая, что $\langle L(x), L(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ для любых $x, y \in X$.

Свойства. 1. Изоморфизм сохраняет расстояния и углы.

2. Если линейное отображение переводит некоторый ортонормированный базис X в ортонормированный базис Y, то оно является изоморфизмом евклидовых пространств.

Теорема. *Любые два конечномерных евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны. В частности, любое евклидово пространство размерности n изоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Следствие. *В любом двумерном подпространстве евклидова пространства выполняются все теоремы планиметрии.*

Определение. *Ортогональное преобразование* — это изоморфизм евклидова пространства в себя.

Свойство: ортогональные преобразования образуют группу.

Определение. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если $AA^T = 0$.

Теорема. *Линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ортогонально тогда и только тогда, когда его матрица ортогональна.*

Следствие. *1. Ортогональные матрицы образуют группу относительно произведения.*
2. Матрица, транспонированная к ортогональной, тоже ортогональна.

1.5 Движения

Определение. Движение — отображение евклидова пространства в себя, сохраняющее расстояния.

Примеры: ортогональные преобразования, параллельные переносы, композиции.

Теорема. *Любое движение — композиция ортогонального преобразования и параллельного переноса.*

Теорема (задача?)**.** *Пусть X — евклидово пространство, $M \subset X$ — произвольное подмножество. Тогда любое сохраняющее расстояния отображение $M \to X$ продолжается до движения.*

2 Регулярные кривые

2.1 Векторнозначные функции

Будем расматривать функции вида $f : I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Любая такая функция задается набором из n функций $f_1, f_2, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Функции f_i называются координатными функциями f. В тех формулах, где явно не участвуют координаты, можно вместо $\mathbb{R}^n$ брать любое евклидово пространство.

Определение. Предел функции $f : I \to \mathbb{R}^n$ в точке $t_0 \in \overline{I}$ — это такой вектор $a \in \mathbb{R}^n$, что $|f(t) - a| \to 0$ при $t \to t_0$. Функция называется непрерывной, если в любой точке $t_0 \in I$ ее предел существует и равен $f(t_0)$.

Производная f в точке $t_0 \in I$ — это вектор $f'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$. Если предел существует, то функция называется дифференцирумой в t_0.

Свойства. 1. $f(t) \to a = (a_1, \dots, a_n)$ при $t \to t_0$ тогда и только тогда, когда $f_i(t) \to a_i$ при $t \to t_0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

2. Если предел есть, то он единственный.

3. f непрерывна $\iff$ все f_i непрерывны.

4. f дифференцируема $\iff$ все f_i дифференцируемы, при этом $f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_n'(t))$.

5. $(f + g)' = f' + g'$.

6. Если $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемы, то $(\varphi f)' = \varphi' f + f\varphi'$.

7. Если $f : I \to \mathbb{R}^n$ и $\varphi : J \to I$ дифференцируемы, то композиция дифференцируема и $(f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$.

8. Если $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ дифференцируемы, то $\langle f, g\rangle' = \langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle$.

9. Пусть $r(t) = |f(t)|$. Тогда $r'(t) = |f'(t)| \cos \angle(f(t), f'(t))$.

10. Если $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение, $f : I \to \mathbb{R}^n$ — дифференцируема, то $(L \circ f)' = L(f')$.

Определение. Старшие производные, классы C^1, C^k, C^∞.

Задачи. 1. Пусть $A = A(t)$ и $A = B(t)$ — дифференцируемые функции со значениями в матрицах $n \times n$. Тогда $(AB)' = A'B + AB'$. 2. Пусть матрица $A(t)$ невырождена при всех t. Доказать, что $A^{-1}(t)$ дифференцируема и $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$.

2.2 Кривые и параметризации

Определение. Кривая в $\mathbb{R}^n$ — это непрерывное отображение $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал. Кривая γ называется *гладкой*, если $\gamma \in C^\infty$.

Пример. Кривая $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ на плоскости гладкая, но ее изображение имеет острие.

Определение. *Регулярная кривая* — это гладкая кривая, производная которой нигде не обращается в ноль.

Определение. Регулярные кривые $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ и $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ называются *эквивалентными*, если существует гладкая биекция $\varphi : I_1 \to I_2$, такая что $\varphi'(t) > 0$ при всех $t \in I_1$ и $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. При этом φ называется *функцией замены параметра.*

Теорема. *Это действительно отношение эквивалентности.*

Класс эквивалентности по введенному отношению называется *непараметризованной кривой*, а его представители — *параметризациями* данной кривой. Свойство кривой считается геометричесуим, если оно (1) не зависит от выбора системы координат; (2) сохраняется при движениях; (3) не зависит от выбора параметризации.

Определение. *Длина* $L(\gamma)$ гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ определяется равенством $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.

Аналогично определется длина кривой, область определения которой — интервал другого типа (при этом нужно брать несобственный интеграл).

Свойства. 1. Длина кривой сохраняется при движениях.

2. Длины эквивалентных кривых равны.

3. Длина кривой не меньше расстояния между ее концами; равенство достигается для отрезка.

Задача. Если $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — кривая на единичной сфере, то $L(\gamma) \geq \angle(\gamma(a), \gamma(b))$, равенство достигается для дуги большой окружности длины не больше π.

Определение. Регулярная кривая γ называется *натурально параметризованной*, если $|\gamma'(t)| = 1$ для всех t из области определения.

Теорема. *У любой регулярной кривой есть натуральная параметризация, причем единственная с точностью до замены параметра вида* $t \mapsto t + const$.

3 Кривые на плоскости

3.1 Кривизна

Определение. Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованная кривая. Ее *вектор скорости* в момент $t \in I$ — это вектор $v(t) = \gamma'(t)$. Вектор нормали $n(t)$ — единичный вектор, ортогональный $v(t)$ и такой, что пара $v(t), n(t)$ положительно ориентирована (то есть $v(t)$ получен из $n(t)$ поворотом против часовой стрелки).

Пара $(v(t), n(t))$ называется *базисом Френе* или *сопровождающим репером* кривой в момент t. Аргумент t в обозначениях обычно опускается.

Определение. *Кривизна* кривой γ в момент t — это число $\kappa_\gamma(t) = \langle v'(t), n(t)\rangle$.

Пример. 1. Пусть γ — прямая. Тогда $\kappa \equiv 0$.

2. Пусть γ — окружности радиуса R. Тогда $\kappa \equiv \frac{1}{R}$.

Свойства. Кривизна сохраняется при поворотах и параллельных переносах, меняет знак при осевых симметриях и изменении напрввления обхода.

Задача. При гомотетии с коэффициентом r кривизна умножается на $1/r$.

Теорема (формулы Френе)**.** $v' = \kappa n$, $n' = -\kappa v$.

Определение. Кривизна произвольной (не натурально параметризованной) кривой — это кривизна ее натуральной параметризации в соответствующей точке.

Теорема. *Для произвольной кривой γ кривизна равна* $\kappa = \frac{\gamma' \times \gamma''}{|\gamma'|^3}$.

Определение. Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — множество. Кривая имеет касание порядка k с M в точке t_0, если $dist(\gamma(t_0 + \varepsilon), M) = o(\varepsilon^k)$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. *Пусть $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ — регулярная натурально параметризованная кривая, $t_0 \in I$. Тогда*

1. Существует единственная прямая, с которой γ имеет касание порядка 1 в точке t_0. Эта прямая проходит через $\gamma(t_0)$ и параллельна $v(t_0)$.

2. Если $\kappa(t_0) \neq 0$, то существует единственная окружность, с которой кривая имеет касание второго порядка в точке t_0. Это окружность радиуса $1/|\kappa(t_0)|$ с центром в точке $\gamma(t_0) + n(t_0)/\kappa(t_0)$.

Термины: прямая из первого утверждения называется касательной к кривой в данной точке, окружность из второго утверждения — соприкасающейся окружностью, ее центр и радиус — центром и радиусом кривизны.

Определение. Параллельная кривая на расстоянии h — это $\gamma_h(t) = \gamma(t) + hn(t)$.

Теорема. *Предположим, что $h \neq \kappa_\gamma(t)$ при всех t. Тогда*

1. $\gamma_h(t)$ — регулярная кривая,

2. Касательные γ и γ_h в соответствующих точках параллельны.

Следствие. *γ_h регулярна при всех достаточно малых h.*

Теорема (задача?). *Если γ определена на замкнутом интервале и не имеет самопересечений, то при достаточно малых $|h|$ кривая γ_h тоже не имеет самопересечений и расстояние от любой точки γ_h до γ равно h.*

Задача. Эволюты и эвольвенты. Эволюта эвольвенты — исходная кривая.

3.2 Поворот

Определение. Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованная регулярная кривая. *Поворотом* γ называется число $\int_a^b \kappa_\gamma(t)\,dt$.

Теорема. *Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — натурально параметризованная регулярная кривая. Тогда ориентированный угол между $\gamma'(a)$ и $\gamma'(b)$ отличается от поворота γ на число, кратное 2π:*

Доказательство.

Лемма (о непрерывном аргументе). *Пусть $v : [a, b] \to S^1$ — непрерывная функция, $|v(t)| = 1$ при всех t. Тогда существует непрерывная функция $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$, такая, что*

$$v(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$$

при всех t. Эта функция единственна с точностью до прибавления константы, кратной 2π.

Из леммы следукт, что разность $\alpha(b) - \alpha(a)$ корректно определена. Эта разность называется *изменением аргумента* функции $v(t)$.

Пусть $v(t) = \gamma'(t)$. Тогда соответствующая функция $\alpha(t)$ гладкая и $\alpha'(t) = \kappa_\gamma(t)$. Значит, изменение аргумента функции $v(t) = \gamma'(t)$ равна повороту кривой. □

Теорема. *Пусть $\kappa : [a, b] \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $v_0 \in S^1$. Тогда существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, такая, что $\gamma(a) = p_0$, $\gamma'(0) = v_0$, $\kappa_\gamma(t) = \kappa(t)$ при всех t.*

Следствие. *Пусть γ_1, γ_2 — натурально параметризованные кривые с одинаковым интервалом параметров, и $\kappa_{\gamma_1}(t) = \kappa_{\gamma_2}(t)$ при всех t. Тогда эти кривые совмещаются поворотом или параллельным переносом.*

Задача. Если $\kappa_\gamma < 1$, $L(\gamma) > \pi$, то кривая не поместится в круг радиуса 1.

3.3 Замкнутые кривые

Определение. Кривая $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ называется замкнутой, если существует гладкое отображение $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, периодическое с периодом $T = b - a$ и совпадающее с γ на $[a, b]$.

Эквивалентно, γ замкнута, если $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, $\gamma''(a) = \gamma''(b)$ и так далее для всех производных.

Из теоремы о повороте следует, что поворот замкнутой кривой кратен 2π.

Определение. Кривая γ называется простой, если она не имеет самопересечений, то есть $\gamma(x) \neq \gamma(y)$ кроме случаев $x = y$ или $\{x, y\} = \{a, b\}$.

Теорема. *Поворот простой замкнутой кривой равен $\pm 2\pi$.*

Одно доказательство основано на приближениях ломаными. Разобьем область параметров кривой на интервалы, не превосходящие некоторого малого δ и соединим полученные точки на кривой отрезками. Полученную ломаную будем называть вписанной ломаной, а δ —мелкостью этой ломаной. Теорема следует из трех лемм.

Лемма 1. *Если δ достаточно мало, то поворот кривой равен сумме ориентированных внешних углов любой вписанной ломаной мелкости δ.*

Лемма 2. *Если δ достатчно мало, то любая вписанная ломаная мелкости δ тоже не имеет самопересечений.*

Лемма 3. *Сумма внешних углов любой несамопересекающейся ломаной равна $\pm 2\pi$.*

Следствие. *Пусть γ — простая замкнутая кривая, γ_h — параллельная кривая на расстоянии h. Тогда $L(\gamma_h) = L(\gamma) \pm 2\pi h$.*

3.4 Выпуклые кривые

Определение. Выпуклая кривая — это простая замкнутая кривая, лежащая по одну сторону от любой своей касательной.

Теорема. *Пусть γ — простая замкнутая кривая. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

1. Эта кривая выпукла.

2. Ее кривизна либо всюду неположительна, либо всюду неотрицательна.

3. Для каждого ориентированного направления существует ровно одна касательная этого направления.

Свойство. Если примая имеет больше двух общих точек с выпуклой кривой, то это касательная, и множество общих точек образует интервал.

Определение. Вершина выпуклой кривой — точка, где $\kappa' = 0$.

Упражнение. Вершины — те и только те точки, где кривая имеет касание третьего порядка с прямой или окружностью.

Теорема (теорема о четырех вершинах)**.** *На любой выпуклой кривой есть хотя бы четыре вершины.*

4 Кривые в старших размерностях

4.1 Кривизна

Определение. Пусть γ — натурально параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$. Вектором кривизны γ называется вектор $w = \gamma''$. Кривизна $\kappa = |w|$. Если $\kappa \neq 0$, то вектор $n = \gamma''/|\gamma''|$ называется главной нормалью.

Свойства. 1. Кривизна сохраняется при движениях и изменениии направления обхода.

2. При $n = 2$ получается модуль той кривизны, которая была раньше.

2. (Упражнение) Кривая имеет касание второго порядка с плоскостью, содержащей векторы скорости и главной нормали. Она называется *соприкасающейся плоскостью.*

3. Пусть γ — регулярная кривая (не натурально параметризованная), v и w — векторы скорости и кривизны ее натуральной параметризации, $s = |\gamma'|$, $a = s'$. Тогда $\gamma' = sv$, $\gamma'' = av + s^2 w = av + s^2 \kappa n$. (разложение ускорения на касательную и нормальную компоненту).

Теорема. *Для не натурально параметризованной кривой*

$$w = \frac{\gamma'' - \langle \gamma', \gamma'' \rangle / |\gamma'|}{|\gamma'|^2},$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{|\gamma'|^2 |\gamma''|^2 - \langle \gamma', \gamma'' \rangle^2}}{|\gamma'|^3}.$$

Задачи. 1. $\angle(\gamma'(a), \gamma'(b) \leq \int_a^b \kappa$.

2. Кривая с кривизной меньше 1 и длиной больше π не поместится в единичный круг.

3. Если достаточно короткий интервал кривой выложить на плоскость с сохранением кривизны, то расстояние между концами уменьшится.

4. Теорема Фенхеля: интеграл кривизны замкнутой кривой не меньше 2π.

4.2 Базис Френе и формулы Френе

Определение. Два базиса в конечномерном векторном пространстве называются одинаково ориентированными, если определитель матрицы перехода положителен. Базис в $\mathbb{R}^n$ называется положительно ориентированным, если он одинаково ориентирован со стандартным.

Упражнение: два базиса одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда их можно совместить непрерывной деформацией в классе базисов.

Определение. Пусть γ — регулярная кривая в $\mathbb{R}^n$ (не обязательно натурально параметризованная). Будем называть ее кривой общего положения, если при всех t векторы $\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$ линейно независимы.

Замечание: при $n = 2$ условие всегда выполнено, при $n = 3$ оно означает, что кривизна не обращается в ноль.

Определение. Пусть $\gamma(t)$ — кривая общего положения в $\mathbb{R}^n$. Базис Френе — это набор функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$, такой, что для каждого t

1. $v_1(t), \dots, v_n(t)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис.
2. Векторы $v_1(t), \dots, v_{n-1}(t)$ получаются ортогонализацией из $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$.

Пример: при $n = 2$ это базис из скорости и нормали. При $n > 2$: v_1 — скорость, v_2 — главная нормаль.

Теорема. *У кривой общего положения базис Френе существует и единственен, при этом он гладко зависит от t.*

Теорема. *Условие общего положения и базис Френе не меняются при замене параметра.*

Определение. $\kappa_i = \langle v_i', v_{i+1} \rangle$, $i = 1, \dots, n-1$. Числа $\kappa_i = \kappa_i(t)$ называются кривизнами кривой γ.

Замечание: $\kappa_1 = \kappa$.

Свойства. 1. Все числа κ_i, кроме κ_{n-1}, положительны.
2. κ_i сохраняются при движениях, сохранящих ориентацию.

Теорема (формулы Френе)**.**
$v_1' = \kappa_1 v_2,$
$v_2' = -\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_3,$
$\dots,$
$v_i' = -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1},$
$\dots,$
$v_n' = -\kappa_{n-1} v_{n-1}$

Замечание: $\kappa_1 = \kappa$.
Добавление: формулы Френе для не натурально параметризованной кривой.

4.3 Трехмерный случай

Базис Френе обозначается v, n, b, его элементы называются скоростью, нормалью и бинормалью. Кривизны κ_1 и κ_2 обозначаются κ и τ и называются кривизной и кручением. Формулы Френе принимают вид:

$$\begin{cases} v' = \kappa n \\ n' = -\kappa v + \tau b \\ b' = -\tau n. \end{cases}$$

Свойства. 1. При гомотетии κ и τ делятся на коэффициент гомотетии.

2. При обращении направления обхода они не меняются.

3. Кривая лежит в одной плоскости $\iff$ $\tau = 0$.
Картинка: проекции кривой на три плоскости.

Теорема. *Для не неатурально параметризованной кривой*

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}$$

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

4.4 Натуральное уравнение кривой

Теорема. *Функции κ_i и начальное положение базиса Френе задают кривую, причем однозначно.*

Следствие. *Кривизны задают кривую однозначно с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.*

5 Кривые на сфере

Определение. Сферический образ кривой.

Лемма. *Пусть* γ_1 *— сферический образ* γ*. Тогда* $\kappa_{\gamma_1} = \sqrt{1 + \tau_\gamma^2/\kappa_\gamma^2}$.

Следствие. *Кривизна кривой на единичной сфере не меньше 1.*

Следствие. *Для любых констант* $\kappa, \tau \neq 0$ *существует винтовая линия с такой кривизной и кручением.*

Теорема. *Для любой функции* $\kappa(t) > 1$ *существует кривая на сфере с такой кривизной, причем единственная с точностью до движения.*

Теорема. *При* $\kappa, \tau \neq 0$ *существует единственная сфера, с которой кривая имеет касание порядка 3. Ее радиус равен* $\frac{1}{\kappa}\sqrt{1 + (\kappa'/\kappa\tau)^2}$.

Теорема. *Если* $\kappa, \tau, \kappa' \neq 0$ *и радиус соприкасающейся сферы — константа, то кривая лежит на сфере.*

6 Кривые в метрических пространствах

6.1 Длина кривой

Определение. Метрическое пространство, непрерывность.

Определение. Кривая в метрическом пространстве X — непрерывное отображение $\gamma : I \to X$, где $I \subset \mathbb{R}$ — интервал.

Определение. *Пунктир* кривой $\gamma : [a, b] \to X$ — последовательность точек вида $\gamma(t_0)$, $\gamma(t_1)$, …, $\gamma(t_n)$, где $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$.

Длина пунктира: $L(\gamma, \{t_i\}) = \sum |\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})|$.

Длина кривой $L(\gamma)$ — супремум длин всех ее пунктиров. Кривая, параметризованная отрезком, называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Примеры. Неспрямляемые кривые на плоскости.

Свойства. 1. Длина не меньше расстояния между концами.

2. Длина аддитивна: $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]}$ для любой кривой $\gamma : [a, b] \to X$.

3. Длина спрямляемой кривой непрерывна по параметру: функция $\lambda(t) = L(\gamma|_{[a,t]}$ непрерывна, если $L(\gamma) < \infty$.

Определение. Мелкость разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[a, b]$ — это $\Delta(\{t_i\}) = \max(t_{i+1} - t_i)$.

Теорема. *При мелкости разбиения, стремящейся к 0, длина соответствующего пунктира стремится к длине кривой. То есть, для любого* $c < L(\gamma)$ *найдется такой* $\delta > 0$*, что для любого пунктира* $\{t_i\}$ *мелкости меньше* δ *верно, что* $L(\gamma, \{t_i\}) > c$.

Определение. Кривая $\gamma : [a, b] \to X$ называется натурально параметризованной, если для любых $t_1, t_2 \in [a, b]$, где $t_1 < t_2$ верно, что $L(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = t_2 - t_1$.

Замечание. Для непрерывных кривых трудно определить, что такое эквивалентность с точностью до замены параметра.

Теорема (о натуральной параметризации)**.** *Пусть* $\gamma : [a, b] \to X$ *— кривая,* $L = L(\gamma) < \infty$*. Тогда существуют единственные натурально параметризованная кривая* $\bar{\gamma} : [0, L] \to X$ *и сюръективная неубывающая функция* $\varphi : [a, b] \to [0, L]$ *такие, что* $\gamma = \bar{\gamma} \circ \varphi$.

6.2 Длина и скорость

Определение. Метрическая скорость кривой γ в момент t — это предел

$$s_\gamma(t) = \lim_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')}{|t - t'|}$$

(если он существует).

Пример. Если γ — дифференцируемая кривая в $\mathbb{R}^n$, то ее метрическая скорость в момент t определена и равна $|\gamma'(t)|$.

Теорема. *Предположим, что метрическая скорость $s_\gamma(t)$ определена при всех t и интегрируема по Риману. Тогда $\int s_\gamma(t)\,dt = L(\gamma)$.*

6.3 Внутренние метрики

Определение. Строго внутренняя метрика, внутренняя метрика.

Примеры. 1. Внешняя и внутренняя метрика сферы и окружности.

2. Метрика плоскости с выколотой точкой — внутренняя, но не сторго внутренняя.

Упражнения. 1. Для внутренней метрики $U_{r_1}(U_{r_2}(M)) = U_{r_1+r_2}(M)$, в общем случае это неверно.

2. Для внутренней метрики из локальной C-липшицевости следует глобальная, в общем случае это неверно.

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство, в котором любые две точки можно соединить спрямляемой кривой. Определим $d^*(x, y) = \inf L(\gamma)$ по всем кривым γ, соединяющим x и y. Функция d^* называется индуцированной внутренней метрикой метрики d.

Упражнение. Если d — евклидова метрика на сфере, то d^* — угловая метрика.

Свойства. 1. $d^* \geq d$.

2. d^* — метрика.

3. Если γ — спрямляема относительно d, то она непрерывна относительно d^* и имеет ту же длину.

4. d^* — внутренняя метрика ($d^{**} = d^*$).