Метрическая геометрия и пространства Александрова

С. В. Иванов

5 февраля 2011 г.

Это предварительные заметки по курсу, читаемому в физматклубе (осенний семестр 2010). Текст будет дополняться по мере продвижения курса.

Содержание лекций:

23.09 — длина кривой, внутренние метрики, задание внутренней метрики структурой длин

30.09 — произведения, конусы, факторпространства

07.10 — факторпространства (продолжение), нормированные пространства (начало)

14.10 — нормированные пространства, евклидовы пространства, римановы и финслеровы метрики

21.10 — полные внутренние метрики, существование кратчайших

28.10 — метрические углы

03.12 — пространства ограниченной кривизны: определение и примеры

10.12 — определение кривизны через сравнение углов, теорема Топоногова о глобализации

17.12 — кривизна и диаметр, кривизна конуса, кривизна полиэдра

1 Предварительные сведения

В этом параграфе излагаются необходимые сведения, относящиеся скорее к анализу и топологии, чем к геометрии.

1.1 Метрические пространства

Напоминание. Метрическое пространство — это структура (X, d), состоящая из множества X и функции $d : X \times X \to \mathbb{R}$ (называемой *метрикой*), обладающей следующими свойствами:

1. Положительность: $d(x, y) \geq 0$ для всех $x, y \in X$, при этом $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

2. Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x.y \in X$.

3. Неравенство треугольника: $d(x, y) + d(x, z) \geq d(x, z)$ для всех $x, y, z \in X$.

Элементы множества X называются *точками* метрического пространства, значение $d(x, y)$ — *расстоянием* между точками $x, y \in X$. Обычно метрика d ясна из контекста, и тогда говорят просто «метрическое пространство X» вместо «метрическое пространство (X, d)».

Обозначение. В большинстве случаев мы будем вместо $d(x, y)$ использовать более короткое обозначение $|xy|$ или $|x, y|$.

Отображение $f : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *изометрией*, если оно биективно и сохраняет расстояние. Пространства X и Y называются *изометричными*, если между ними есть изометрия. Очевидно, изометричность — отношение эквивалентности.

В метрических пространствах имеют смысл стандартные понятия топологии и анализа: открытые и замкнутые множества, пределы, непрерывность и т.д. Более продвинутые понятия будут рассматриваться по мере надобности.

Бесконечные расстояния. Иногда бывает удобно допускать бесконечные расстояния между точками, то есть заменить в определении метрического пространства область значений функции d на расширенную область неотрицательных чисел $\widehat{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. Все результаты о метрических пространствах обобщаются на случай бесконечных расстояний дословно или с очевидными изменениями.

Более того, изучение пространств с бесконечными расстояниями сводится к изучению обычных метрических пространств с помощью следующего наблюдения: любое пространство с бесконечными расстояниями разбивается на части (непересекающиеся подмножества) так, что все расстояния внутри каждой части конечны, а все расстояния между точками из разных частей бесконечны. Действительно, назовем две точки «близкими», если расстояние между ними конечно. Из неравенства треугольника следует, что эта «близость» — отношение эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности — это и есть вышеупомянутые части. Далее мы будем называть эти части *компонентами достижимости* (это не общепринятая терминология).

Замечание. Существует много много других обобщений понятия метрического пространства, получаемых убиранием или ослаблением какого-либо из условий в определении. Такие обобщения обычно обозначаются приставками *квази-*, *псевдо-*, *полу-* и т.п., добавляемыми к словам «метрика» и «метрическое пространство». Общепринятой терминологии на это счет нет, в каждом конкретном случае следует уточнять, что имеется в виду.

1.2 Некоторые примеры

Пространство $\mathbb{R}^n$. Стандартная метрика на пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется формулой $d(x,y) = |x-y|$, где $|\cdot|$ — длина вектора, определяемая равенством

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Положительность и симметричность этой метрики тривиальны, неравенство треугольника следует из неравенства $|x+y| \le |x| + |y|$ для $x, y \in \mathbb{R}^n$, которое после возведения в квадрат сводится к неравенству Коши–Буняковского–Шварца.

Длина вектора естественно связана со стандартным скалярным произведением, которое определяется равенством

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

А именно, $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Обратно, скалярное произведение можно выразить через длины:

$$\langle x, y\rangle = \frac{|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2}{2}.$$

С помощью ортогонализации базисов легко доказать, что любое линейное подпространство $X \subset \mathbb{R}^n$ изометрично $\mathbb{R}^k$, где $k = \dim X$. В частности, любое двумерное подпространство в $\mathbb{R}^n$ изометрично стандартной евклидовой плоскости и, следовательно, в нем выполняются все теоремы планиметрии.

Изометрии пространства $\mathbb{R}^n$ иногда называют *движениями*. Каждое движение есть композиция параллельного переноса и ортогонального преобразования (то есть линейного преобразования, сохраняющего скалярное произведение), и наоборот. Группа движений обладает следующим сильным свойством транзитивности: любая изометрия между двумя подмножествами $\mathbb{R}^n$ продолжается до изометрии всего пространства.

Сфера. Через S^n будем обозначать единичную сферу (с центром в 0) в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, то есть

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}.$$

Поскольку сфера S^n является подмножеством $\mathbb{R}^{n+1}$, ее можно снабдить метрикой подпространства (то есть сужением метрики объемлющего пространства).

Однако стандартной метрикой на сфере считается *угловое* (или *внутреннее*) расстояние, определяемое следующим образом:

$$d(x,y) = \angle(x,y) = \arccos\langle x, y\rangle.$$

Неравенство треугольника для этой метрики следует из неравенства треугольника для углов в $\mathbb{R}^3$. Евклидово и внутреннее расстояние связаны между собой очевидным соотношением

$$|x-y| = 2\sin\tfrac{1}{2}\angle(x,y).$$

Группа изометрий сферы S^n совпадает с группой ортогональных преобразований $\mathbb{R}^{n+1}$ (ограниченных на сферу) и обладает аналогичными свойствами транзитивности.

Пространства ℓ_∞. Пусть X произвольное множество. Через $\ell_\infty(X)$ обозначается множество всех ограниченных функций из X в $\mathbb{R}$, снабженное следующим расстоянием, обозначаемым d_∞:

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Легко проверить, что это действительно метрика. Запись ℓ_∞ без аргумента обозначает $\ell_\infty(\mathbb{N})$. Элементами этого пространства являются ограниченные последовательности вещественных чисел.

Замечание. Можно рассматривать и множество всех (не только ограниченных) функций на X, если допускать бесконечный расстояния. Легко убедиться, что полученное пространство разбивается на компоненты достижимости, каждая из которых изометрична подпространству $\ell_\infty(X)$ и переходит в него при параллельном переносе.

Теорема (вложение Куратовского). *1. Любое метрическое пространство X изометрично некоторому подмножеству пространства $\ell_\infty(X)$.*

2. Любое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства ℓ_∞.

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай, когда X ограничено. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ функцию $\rho_x : X \to \mathbb{R}$ расстояния до x, а именно, $\rho_x(y) = |xy|$. Из неравенства треугольника следует, что $|\rho_x(z) - \rho_y(z)| \le |xy|$ для любых $x, y, z \in X$, причем в случае $z = x$ достигается равенство. Следовательно, $d_\infty(\rho_x, \rho_y) = |xy|$. Таким образом отображение $I : X \to \ell_\infty(X)$, определяемое равенством $I(x) = \rho_x$, сохраняет расстояния. Следовательно, его образ $I(X)$ изометричен X.

Если X не ограничено, то I сохраняет расстояния, но функции ρ_x не лежат в ℓ_∞. Это легко исправляется с помощью параллельного переноса в пространстве функций. А именно, зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$ и определим отображение $I_{x_0} : X \to \ell_\infty(X)$ равенством $I_{x_0}(x) = \rho_x - \rho_{x_0}$. Это отображение тоже сохраняет расстояния, и его образ содержится в ℓ_∞.

2. Пусть $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное всюду плотное множество в X. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ последовательность $I(x) = (|xx_1| - |xx_0|, |xx_2| - |xx_0|, \dots)$. (По сути, это та же функция $\rho_x - \rho_{x_0}$, ограниченная на множество S.) Аналогично первой части доказывается, что I — изометрическое отображение из X в ℓ_∞. □

Замечание. Само пространство ℓ_∞ не сепарабельно. Существует сепарабельное пространство $\mathfrak{U}$ (называемое *универсальным пространством Урысона*) с аналогичным свойством: любое сепарабельное пространство изометрично некоторому подмножеству $\mathfrak{U}$.

1.3 Полные пространства

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если $|x_m x_n| \to 0$ при $m, n \to \infty$. (Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что для всех $m, n > n_0$ выполняется неравенство $|x_m x_n| < \varepsilon$.)

Метрическое пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Примеры. 1. Вещественная прямая $\mathbb{R}$ — полное пространство. Это стандартный факт анализа.

2. Пространство $\mathbb{R}^n$ полно. Это легко выводится из полноты прямой.

3. Прямая с выколотой точкой — не полное пространство: последовательность, сходящаяся в $\mathbb{R}$ к выколотой точке, фундаментальна, но не имеет предела в этом пространстве.

4. Более общо, если множество Y в некотором метрическом пространстве не замкнуто, то оно не полно.

5. Замкнутое подмножество полного пространства само является полным пространством.

6. Любое компактное метрическое пространство полно.

7. Для любого множества X пространство $\ell_\infty(X)$ полно.

Теорема (существование пополнения). *Для любого метрического пространства X существует полное пространство $\overline{X}$, содержащее X в качестве всюду плотного пространства.*

Доказательство. Вложим в $\ell_\infty(X)$ и возьмем замыкание. □

2 Длина кривой

Определение. *Кривая* (*путь*) в топологическом пространстве X — это непрерывное отображение интервала в X. Мы будем рассматривать только кривые, параметризованные замкнутыми ограниченными интервалами, то есть вида $\gamma\colon [a,b] \to X$.

Далее до конца параграфа X обозначает метрическое пространство.

Определение. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — кривая. Ее *пунктиром* будем называть последовательность точек вида $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$, где $a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n = b$. *Длина пунктира* — сумма расстояний между его соседними точками, то есть $\sum_{i=1}^n |\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)|$. Длина кривой — супремум длин всех ее пунктиров.

Длина кривой γ в метрическом пространстве (X,d) будет обозначаться через $L_d(\gamma)$ или просто $L(\gamma)$, если это не приводит к неоднозначности.

Длина кривой может быть бесконечной. Кривые конечной длины называются *спрямляемыми.*

Тривиальные свойства. 1. Длина кривой неотрицательна, она равна нулю тогда и только тогда, когда кривая — константа.

2. Длина кривой не меньше расстояния между концами (и, более общо, расстояния между любыми двумя точками на кривой).

3. Длина аддитивна: для любой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ и любого $c \in [a,b]$ выполняется равенство $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$.

4. Длина сохраняется при замене параметра: если кривые $\gamma\colon [a,b] \to X$ и $\gamma_1\colon [c,d] \to X$ связаны соотношением $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, где $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ — монотонная сюръекция, то $L(\gamma) = L(\gamma_1)$.

2.1 Непрерывность по параметру и натуральная параметризация

Теорема (непрерывность длины по параметру)**.** *Пусть $\gamma\colon [a,b] \to X$ — спрямляемая кривая. Тогда функция $\lambda\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, заданная равенством $\lambda(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$, непрерывна.*

Доказательство. □

Определение. Кривая $\gamma\colon I \to X$ называется *натурально параметризованной*, если для любого подинтервала $[c,d] \subset X$ выполняется равенство $L(\gamma|_{[c,d]}) = |c-d|$.

Теорема (о натуральной параметризации)**.** *Для любой спрямляемой кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$ существуют натурально параметризованная кривая $\bar\gamma\colon [0,\ell] \to X$, где $\ell = L(\gamma)$, и непрерывная неубывающая функция $\varphi\colon [a,b] \to [0,\ell]$ такие, что $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = \ell$, и $\gamma = \bar\gamma \circ \varphi$. Такие $\bar\gamma$ и φ единственны.*

Доказательство. Положим $\varphi(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$. Для каждого $\tau \in [0,\ell]$ найдем $t \in [a,b]$, для которого $\varphi(t) = \tau$ (такое t существует в силу непрерывности φ) и положим $\bar\gamma(\tau) = \gamma(t)$. Нетрудно проверить, что отображение $\bar\gamma$ корректно определено, непрерывно и является натурально параметризованной кривой. Единственность очевидна. □

2.2 Длина как интеграл скорости

Определение. Пусть γ — кривая в метрическом пространстве. *Метрической скоростью* $v_\gamma(t)$ в момент t называется предел

$$v_\gamma(t) = \lim_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t-t'|}$$

(если он существует).

Теорема. *Пусть X — метрическое пространство и $\gamma\colon [a,b] \to X$ — кривая. Предположим, что для каждого $t \in [a,b]$ определена метрическая скорость $v_\gamma(t)$, и что v_γ — непрерывная функция на $[a,b]$. Тогда*

$$L(\gamma) = \int_a^b v_\gamma(t)\,dt.$$

Доказательство. □

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\gamma\colon [a,b] \to X$ — непрерывно дифференцируемая кривая. Тогда

$$v_\gamma(t) = \lim_{t'\to t} \frac{|\gamma(t') - \gamma(t)|}{|t' - t|} = \lim_{t'\to t} \left| \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \right| = \left| \lim_{t'\to t} \frac{\gamma(t') - \gamma(t)}{t' - t} \right| = |\gamma'(t)|.$$

Таким образом, из теоремы вытекает следующая стандартная формула для длины: $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Замечание. То же верно в любом нормированном пространстве, доказательство дословно такое же.

2.3 Полунепрерывность длины

Теорема. *Пусть последовательность $\{\gamma_n\}$ кривых в пространстве X, параметризованных одним отрезком $[a,b]$, поточечно сходится к кривой $\gamma\colon [a,b] \to X$. (Это означает, что для любого $t \in [a,b]$ верно, что $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$ при $n \to \infty$.) Тогда $L(\gamma) \le \varliminf L(\gamma_n)$.*

2.4 Существование кратчайших

Теорема. *Пусть X — компактное метрическое пространство, и точки x, y соединимы спрямляемой кривой. Тогда существует кратчайшая кривая, соединяющая x и y.*

3 Внутренние метрики

Определение. Пусть X — метрическое пространство. Его метрика называется *строго внутренней*, если любые для любых двух точек $x, y \in X$ существует соединяющая их кривая, длина которой равна расстоянию между ними.

Метрика d называется *внутренней*, если для любых двух точек расстояние между ними равно инфимуму длин соединяющих их кривых.

Другие термины: метрика длин (length metric), метрика путей (path metric) — то же, что внутренняя метрика; геодезическая метрика (geodesic metric) — то же, что строго внутренняя метрика.

Замечание. Понятие внутренней метрики применимо и к пространствам с бесконечными расстояниями. Если расстояние между точками x и y бесконечно, то требование из определения для них выполняется автоматически: соединяющих их кривых не существует, поэтому инфимум длин равен $\inf \emptyset$, то есть $+\infty$.

Примеры. 1. Стандартные метрики прямой и плоскости (более общо, пространства $\mathbb{R}^n$) — строго внутренние. Расстояния реализуются прямолинейными отрезками.

Замечание: То же верно для любого нормированного векторного пространства с расстоянием $d(x,y) = \|\cdot\|$, где $\|\cdot\|$ — норма. Примеры неевклидовых норм на плоскости: $\|(x,y)\| = |x| + |y|$, $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$.

2. Метрика плоскости с выколотой точкой — внутренняя, но не строго внутренняя.

3. Метрика прямой с выколотой точкой — не внутренняя, так как точки 1 и -1 не соединимы кривой. Более общо, в пространстве с внутренней метрикой расстояние между компонентами линейной связности должно быть бесконечно.

4. Рассмотрим единичную окружность $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Ограничение евклидовой метрики из $\mathbb{R}^2$ на окружность не является внутренней метрикой. Естественная (строго) внутренняя метрика на окружности — угловая, определенная равенством $d(x,y) = \angle xoy = \arccos\langle x, y\rangle$. Заметим, что окружность с угловой метрикой локально изометрична прямой (а именно, любая дуга, не превосходящая полуокружности, изометрична отрезку той же длины).

Задача. Внутренняя метрика на окружности единственна с точностью до умножения на константу. А именно, если пространство с внутренней метрикой гомеоморфно окружности, то оно изометрично окружности с угловой метрикой, умноженной на некоторую константу.

5. Точно так же определяется стандартная внутренняя метрика на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (более общо, на сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$). Доказательство неравенства треугольника для этой метрики требует бóльших усилий, чем в предыдущих примерах. Далее сфера всегда будет рассматриваться с этой метрикой, если явно не оговорено другое. В отличие от окружности, внутренняя метрика сферы не локально изометрична плоскости (задача?)

Некоторые свойства внутренних метрик. (Упражнения?) Многие «геометрически очевидные» свойства неверны в произвольных метрических пространствах, но выполняются в пространствах с внутренними метриками. Вот некоторые из них.

1. Если сумма радиусов двух шаров больше расстояния между центрами, то их пересечение непусто.

2. r-окрестность шара радиуса r_1 — шар радиуса $r + r_1$ с тем же центром.

3. Замыкание открытого шара — замкнутый шар того же радиуса.

3.1 Полные внутренние метрики

Определение. Пусть X — метрическое пространство, $x, y \in X$. Точка $z \in X$ называется *серединой* между x и y, если $|xz| = |yz| = \frac{1}{2}|xy|$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Точка $z \in X$ называется *ε-серединой* между x и y, если $|xz|, |yz| < \frac{1}{2}|xy| + \varepsilon$.

Теорема. *Пусть X полно. Тогда*

1. Метрика X является строго внутренней тогда и только тогда, когда у любых двух точек есть середина.

2. Метрика X является внутренней тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует ε-середина между x и y.

Следствие. *Компактная внутренняя метрика — строго внутренняя.*

Задача. В полном локально компактном пространстве с внутренней метрикой (a) все замкнутые шары компактны; (b) метрика строго внутренняя.

4 Задание метрик длинами

4.1 Индуцированная внутренняя метрика

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Определим новую метрику d^* на X следующим образом:

$$d^*(x, y) = \inf\{L_d(\gamma) : \gamma \text{ — кривая, соединяющая } x \text{ и } y\}.$$

Легко проверить, что d^* — тоже метрика. Более того, это внутренняя метрика (это следует из более общей теоремы, доказываемой ниже). Она называется *индуцированной внутренней метрикой* метрики d.

Упражнение. Пусть X — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, d — ограничение евклидовой метрики на эту сферу. Докажите, что d^* — угловая метрика.

Замечание. Из очевидного неравенства $d^* \geq d$ следует, что топология метрики d^* сильнее, чем топология метрики d. Вообще говоря, эти две топологии могут отличаться.

Например, определим метрику d на $\mathbb{R}$ равенством $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$. Все расстояния в индуцированной внутренней метрике бесконечны, ее топология дискретна.

Другой пример: рассмотрим на плоскости «гребенку», состоящую из горизонтального отрезка между точками $(0, 0)$ и $(1, 0)$ и вертикальных отрезков между точками $(x, 0)$ и $(x, 1)$ для $x = 0, 1, 1/2, 1/3, \dots$. Пусть d — ограничение евклидовой метрики на это множество, d^* — индуцированная внутренняя метрика; заметим, что все расстояния в этой метрике конечны. Топология метрики d^* не совпадает с топологией метрики d, например, последовательность точек $(1/k, 1)$ сходится к $(0, 1)$ на плоскости, но не во внутренней метрике. Более того, исходное пространство компактно, а полученное пространство с внутренней метрикой — нет.

4.2 Задание метрики структурой длин

Определение. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. *Структура длин* (или *функционал длины*) на X — это множество A некоторое путей в X, называемых *допустимыми*, и функция $L\colon A \to \mathbb{R}_+$, значения которой называются *длинами* допустимых путей. При этом должны выполнятся такие свойства:

1. Произведение двух допустимых путей — допустимый путь, при этом длина равна сумме длин частей.

2. Любой подинтервал допустимого пути — тоже допустимый путь. При этом длина непрерывна по параметру: для допустимого пути $\gamma\colon [a,b] \to X$ функция $t \mapsto L(\gamma|_{[a,t]})$ непрерывна.

3. Допустимость и длина не меняются при линейных заменах параметра.

4. Согласованность с топологией. Для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует такое $\delta > 0$, что длина любой кривой, соединяющей x с точкой вне y

Структура длин (A, L) порождает метрику d_L на X:

$$d_L(x,y) = \inf\{L_d(\gamma) : \gamma \in A, \gamma \text{ соединяет } x \text{ и } y\}.$$

Неравенство треугольника, симметричность и положительность легко следуют из определений.

Теорема. *Любая метрика, порождаемая функционалом длины — внутренняя.*

Доказательство. □

Примеры. 1. Индуцированная внутренняя метрика метрического пространства (X, d). Допустимые кривые — все спрямляемые, $L = L_d$. Полученная в результате внутренняя метрика d_L — то же, что индуцированная внутренняя метрика d^*.

2. («Метрика Манхэттена») $X = \mathbb{R}^2$, допустимые кривые — ломаные, звенья которых параллельны координатным осям, Длина — обычная длина. Расстояние в полученной метрике d_L между точками с координатами (x,y) и (x',y') равно $|x-x'|+|y-y'|$

3. Конформная метрика в области.

4. Частный случай: плоскость Лобачевского (модель в полуплоскости).

5. Финслеровы и римановы метрики.

Замечание. 1. Топология метрики d_L сильнее исходной топологии на X. Эти топологии могут не совпадать. (Но в естественных примерах обычно совпадают.)

2. Метрика $d = d_L$ порождает новую длину $L_d = L_{d_L}$. При этом $L_d \le L$ (см. доказательство теоремы выше). Это неравенство может быть строгим, но в естественных примерах эти две длины обычно равны.

В частности, в примере с индуцированной внутренней метрикой всегда имеет место равенство $L_{d^*} = L_d$. Действительно, неравенство $L_{d^*} \le L_d$ — частный случай упомянутого выше неравенства для метрик, порождаемых динами. А обратное неравенство $L_{d^*} \ge L_d$ следует из очевидного неравенства $d^* \ge d$.

5 Произведения и конусы

5.1 Метрическое произведение

Определение. Пусть X, Y — метрические пространства. Их *прямое произведение* $X \times Y$ — это множество пар вида (x,y), где $x \in X$, $y \in Y$. *Метрическое прямое произведение* — это прямое произведение с такой метрикой: расстояние между точками (x,y) и $(x'y')$ равно

$$|pq| = \sqrt{|xx'|_X^2 + |yy'|_Y^2},$$

где $|\cdot\cdot|_X$ и $|\cdot\cdot|_Y$ — расстояния в X и Y соответственно.

Теорема. *1. Произведение метрических пространств — метрическое пространство.*

2. Если метрики X и Y (строго) внутренние, то метрика $X \times Y$ тоже (строго) внутренняя.

Доказательство. □

5.2 Метрический конус

Определение. Пусть X — метрическое пространство. *Конус* над X (обозначается $\mathrm{Cone}(X)$) — это фактор-множество $X \times \mathbb{R}_+ / X \times \{0\}$, другими словами, это множество пар вида (x,t), где $x \in X$ и $t \ge 0$, где все пары вида $(x,0)$ отождествлены между собой и представляют одну точку конуса (которая называется *вершиной конуса*).

Точку $(x,t) \in \mathrm{Cone}(X)$ также обозначают $t \cdot x$. Удобно представлять себе X вложенным в единичную сферу в евклидовом пространстве (большой размерности), тогда $\mathrm{Cone}(X)$ — объединение лучей с началом в 0, проходящих через точки множества.

Метрика на $\mathrm{Cone}(X)$ определяется так: расстояние между точками (x_1, t_1) и (x_2, t_2) равно

$$t_1^2 + t_2^2 - 2\cos(\min\{\pi, |x_1x_2|\}).$$

Другими словами, расстояние равно $t_1 + t_2$, если $|x_1x_2| \geq \pi$, и $t_1^2 + t_2^2 - 2\cos(|x_1x_2|)$, если $|x_1x_2| \leq \pi$. Конус с так определенным расстоянием называется *метрическим конусом* над X.

Примеры. **1.** Если X — единичная окружность S^1 со стандартной внутренней метрикой, то $Con(X) \simeq \mathbb{R}^2$ (где $\simeq$ обозначает изометричность). Более общо, если $X = S^{n-1}$, то $Con(X) \simeq \mathbb{R}^n$.

2. Пусть X — отрезок длины $\ell \leq \pi$. Тогда $\mathrm{Cone}(X)$ изометричен сектору на плоскости между лучами, образующими угол ℓ. (Метрика сектора получена ограничением евклидовой метрики плоскости.)

Если $\ell > \pi$, то конус над отрезком длины ℓ — невыпуклый сектор с внутренней метрикой: если отрезок между двумя точками лежит в секторе, то расстояние равно его длине, в противном случае — длине пути через вершину.

Конус над отрезком длины больше 2π (и над $\mathbb{R}$) можно рассматривать как сектор в разветвленном накрытии над $\mathbb{R}^2$ с ветвлением над 0.

3. Пусть X — окружность длины $\ell < 2\pi$ с внутренней метрикой. Тогда $\mathrm{Cone}(X)$ изометричен внутренней метрике поверхности кругового конуса в $\mathbb{R}^3$, пересечение которого со сферой имеет длину ℓ (упражнение: вычислите угол при вершине этого конуса через ℓ). Заметим, что, за исключением вершины, этот конус локально изометричен плоскости.

Конус над окружностью длины $\ell > 2\pi$ тоже можно представить как внутреннюю метрику поверхности в $\mathbb{R}^3$. Для этого нарисуем на сфере простую замкнутую кривую длины ℓ и проведем все лучи из 0 через точки этой кривой.

Теорема. *1. Конус над метрическим пространством — снова метрическое пространство.*

2. Если метрика пространства (строго) внутренняя, то метрика конуса тоже.

Доказательство. □

5.3 Сферический конус (надстройка)

Определение. *Сферический конус* (*надстройка*) над X — это множество $X \times [0, \pi]$, профакторизованное по следующим отождествлениям: $(x, 0) \sim (x', 0)$ и $(x, \pi) \sim (x', \pi)$ для всех $x, x' \in X$.

Метрика на сферическом конусе определяется по формуле из сферической теоремы косинусов: если $p = (x_1, t_1)$ и $q = (x_2, t_2)$, то

$$|pq| = \arccos(\cos t_1 \cot t_2 + \sin t_1 \sin t_2 \cos\varphi),$$

где $\varphi = \min\{\pi, |x_1x_2|\}$. Другими словами, это расстояние равно стороне ab сферического треугольника abc, в котором $|ac| = t_1$, $|bc| = t_2$ и $\angle c = \varphi$.

Теорема. *Надстройка над метрическим пространством — метрическое пространство. Если метрика пространства (строго) внутренняя, то метрика надстройки — тоже.*

Доказательство. Аналогично доказательству для метрического конуса, только вместо плоскости надо рассматривать сферу. □

Примеры. **1.** Надстройка над единичной окружностью с внутренней метрикой — единичная сфера с внутренней метрикой. Более общо, надстройка над S^{n-1} изометрична S^n.

2. Надстройка над окружностью длины $\ell < 2\pi$ — внутренняя метрика поверхности, похожей на мяч для регби.

Задачи. **1.** $\mathrm{Cone}(X) \times \mathbb{R} \simeq \mathrm{Cone}(S(X))$, где $S(X)$ — надстройка над X.

2. $\mathrm{Cone}(X) \times \mathrm{Cone}(Y)$ — тоже метрический конус над некоторым пространством Z. Попробуйте описать Z через X и Y.

6 Факторпространства

Факторизация в метрическом пространстве — то же, что склеивание точек. В первом приближении операция склеивания точек в метрическом пространстве определяется так: расстояние между склеиваемыми точками объявляется равным 0, остальные расстояние изменяются, принимая максимально возможные значения, допустимые неравенством треугольника. Подробности ниже.

6.1 Полуметрики

Определение. *Полуметрика* на множестве X — то же, что метрика, но без требования строгой положительности расстояний между различными точками. То есть, некоторые расстояния могут быть нулевыми, но требования неотрицательности, симметричности и неравенства треугольника сохраняются.

По каждому полуметрическому пространству (X, d) естественно строится метрическое пространство, обозначаемое X/d. А именно, объявим эквивалентными точки X, расстояния между которыми равно 0. Из неравенства треугольника следует, что это отношение эквивалентности на X. Множество X/d — это множество классов эквивалентности по этому отношению. Расстояния между классами эквивалентности — это расстояние между любыми их представителями. Легко проверить, что это определение корректно и задает метрику на X/d.

6.2 Максимальная метрика

Теорема. *Пусть X — произвольное множество, $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ — произвольная функция. Тогда среди всех полуметрик d, удовлетворяющих неравенству $d \le f$, существует максимальная.*

6.3 Склеивание

Определение. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\sim$ — произвольное отношение на X (то есть подмножество $X \times X$). Определим $d_0\colon X \times X$ следующим образом: $d_0(x, y) = 0$, если $x \sim y$, и $d_0(x, y) = d(x, y)$ в противном случае. Это определяет максимальную полуметрику $d_1 \le d_0$, а эта полуметрика — метрическое пространство X/d_1. Оно называется результатом склеивания или метрическим факторпространством X по отношению $\sim$.

Замечание. В отличие от общей топологии, в результате склеивания могут отождествиться точки, которые не былт эквивалентны в смысле отношения $\sim$ (если оно было отношением эквивалентности). Например, если стянуть в точку открытый интервал на прямой, то к нему подклеятся его концы.

Теорема. *При факторизации из внутренних метрик получаются внутренние.*

6.4 Примеры

Букет пространств. Пусть X и Y — метрические пространства с отмеченными точками p и q соответственно. Их *букет* строится так: рассмотрим несвязное объединение $X \sqcup Y$ (с бесконечным расстоянием между любой точкой из X и любой точкой из Y), в этом объединении склеим p и q. Метрика полученного пространства явно описывается так: расстояние внутри пространств X и Y остается прежним, а расстояние между точками $x \in X$ и $y \in Y$ равно $|xp| + |yq|$.

Аналогично определяется букет любого семейства метрических пространств $\{X_i\}$ с отмеченными точками $p_i \in X_i$.

Приклеивание по отображению. Более общо, пусть X и Y — метрические пространства, $A \subset X$ — произвольное подмножество, $f\colon A \to Y$ — произвольное отображение (в естественных примерах A замкнуто, а f непрерывно). Рассмотрим несвязное объединение $X \sqcup Y$ и отождествим в нем каждую точку $a \in A \subset X$ с ее образом $f(a) \in Y$. Полученное пространство обозначается $X \sqcup_f Y$ и называется результатом приклеивания X к Y по отображению f.

Если f — изометрия между A и $f(A) \subset Y$, то расстояние в $X \sqcup_f Y$ устроено следующим образом: внутри X и внутри Y оно остается прежним, а между точкой $x \in X$ и $y \in Y$ оно равно

$$\inf_{z \in A} \{|xz|_X + |yf(z)|_Y\}.$$

Если f — не изометрия, то в результате склеивания расстояния внутри X и Y могут измениться.

Склеивание окружности из отрезка. Рассмотрим отрезок $[0, 2\pi]$ и склеим его концы. Полученное факторпространство изометрично единичной окружности с внутренней метрикой.

Склеивание тора из параллелограмма. Стандартный тор $S^{\times} S^1$ может быть склеен из квадрата: нужно отождествить соответствующие точки на каждой паре противоположных сторон. Вместо квадрата можно брать любой параллелограмм, таким образом получается много различных внутренних метрик на торе.

Все эти метрики — плоские, то есть локально изометричны $\mathbb{R}^2$. Это доказывается рассмотрением каждого из трех видов точек на торе: большинство точек тора получено из внутренних точек параллелограмма, некоторые получены из точек на сторонах (которые склеиваются парами) и, наконец, одна точка получена склеиванием четырех вершин параллелограмма.

Несмотря на различное «происхождение» разных видов точек на торе, в итоговой факторметрике они неотличимы друг от друга. А именно, для любых двух точек существует изометрия тора, переводящая одну точку в другую.

Упражнения. 1. Рассмотрим тор T_0, склеенный из единичного квадрата, и тор T_1, склеенный из параллелограмма, порожденного векторами $(1,0)$ и $(1,1)$. Докажите, что эти торы изометричны.

2. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим тор T_λ, склеенный из параллелограмма, порожденного векторами $(1,0)$ и $(\lambda,1)$. Докажите, что торы T_λ и $T_{\lambda'}$ изометричны тогда и только тогда, когда $\lambda - \lambda' \in \mathbb{Z}$.

Фактор по группе изометрий. Пусть X — метрическое пространство, и пусть Γ — некоторая подгруппа его группы изометрий. Объявим точки $x, y \in X$ эквивалентными, если $y = f(x)$ для некоторого $f \in \Gamma$. Это, как нетрудно проверить, отношение эквивалентности. Соответствующие классы эквивалентности называются *орбитами* группы Γ. Орбита, содержащая точку $x \in X$, обозначается Γx, то есть $\Gamma x = \{f(x) : f \in \Gamma\}$. Факторпространство по этому отношению обозначается X/Γ (или $\Gamma\backslash X$, отражая тот факт, что Γ действует на X «слева»).

Теорема. *Предположим, что все орбиты замкнуты. Тогда точки факторпространства X/Γ — это орбиты (то есть при факторизации не происходит «лишних» отождествлений). Расстояние между орбитами Γx и Γy, где $x, y \in X$, равно*

$$\inf\{|x'y'| : x' \in \Gamma x,\ y' \in \Gamma y\},$$

или, что то же самое.

$$\inf\{|xy'| : y' \in \Gamma y\}.$$

Доказательство. □

Пример. Пусть v и w — линейно независимые векторы на плоскости. Рассмотрим группу Γ (изоморфную $\mathbb{Z}^2$), состоящую из параллельных переносов на векторы вида $av + bw$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Факторпространство по этому действию — плоский тор, изометричный склеенному из параллелограмма, порожденного векторами v и w.

Аналогично, любой линейно независимый набор из n векторов естественно определяет действие группы $\mathbb{Z}^n$ параллельными переносами. Соответствующие факторпространства называются n-мерными плоскими торами. Все они гомеоморфны стандартному n-мерному тору (произведению n окружностей).

Метрические графы. *Метрический граф* задается следующими данными:

- Произвольное множество V, элементы которого называются *вершинами* графа.
- Множество E, элементами которого являются отрезки (метрические пространства, изометричные отрезкам), называемые *ребрами графа*. Длины этих отрезков могут быть различными.
- Отображение приклеивания f — произвольное отображение из множества концов ребер в множество вершин.

Метрический граф, задаваемый этими данными — результат приклеивания несвязного объединения ребер к V по отображению f.

Малая окрестность внутренней точки ребра в метрическом графе изометрична отрезку. Если граф локально конечен, то есть к каждой вершине приклеен конечный набор ребер (более общо, если длины примыкающих к каждой вершине ребер отделены от нуля), то окрестность каждой вершины изометрична букету соответствующего количества отрезков.

Как правило, рассматриваются только локально конечные метрические графы. Не локально конечные графы могут иметь патологическое локальное строение. Например, любое метрическое пространство изометрично множеству вершин некоторого графа. Для построения такого графа достаточно соединить каждую пару точек пространства ребром графа, длина которого равна расстоянию между этими точками.

Двумерные полиэдры. Двумерные полиэдральные пространства (полиэдры) получается приклеиванием плоских треугольников к графам. А именно, каждый треугольник приклеивается сторонами к трем ребрам графа, образующим цикл, при этом приклеивающее отображение должно сохранять длины.

Малая окрестность любой точки (локально конечного) двумерного полиэдра изометрична окрестности вершины конуса над некоторым графом, этот граф называется *линком* данной точки.

Полиэдры старших размерностей. Полиэдр размерности n — результат приклеивания набора n-мерных евклидовых симплексов (называемых n-мерных гранями) к $(n-1)$-мерным граням некоторого $(n-1)$-мерного полиэдра. Отображения приклеивания должны быть изометрическими (относительно исходных евклидовых метрик на симплексах)

7 Нормированные пространства

Определение. *Норма* на векторном пространстве X — это функция $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:

1. Положительность: $\|x\| > 0$ для любого $x \neq 0 \in X$.
2. Симметричность: $\|-x\| = \|x\|$ для любого $x \in X$.
3. Положительная однородность: $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$ для любых $x \in X$ и $\lambda \geq 0$.
4. Неравенство треугольника: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Векторное пространство с заданной на нем нормой называется *нормированным пространством.*

Норма $\|\cdot\|$ определяет функцию расстояния $d :: X \times X \to \mathbb{R}_+$ формулой $d(x,y) = \|x-y\|$. Из определения нормы легко выводится, что эта функция является метрикой на X.

Примеры. **1.** Стандартная евклидова норма $|\cdot|$ на $\mathbb{R}^n$: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

2. Стандартная ℓ_1-норма $\|\cdot\|_1$ на $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$.

3. Стандартная ℓ_∞-норма $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

4. Более общо, для каждого вещественного $p \geq 1$ можно определить ℓ_p норму $\|\cdot\|_p$ на $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$. При $p = 2$ это стандартная евклидова норма, при $p \to \infty$ она стремится к $\|\cdot\|_\infty$. Неравенство треугольника для этой нормы называется неравенством Минковского; его доказательство заметно сложнее, чем в предыдущих примерах. Пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|$ обозначается через $\mathbb{R}^n_p$.

5. Пусть X — произвольное множество. Обозначим через $\ell_\infty(X)$ множество всех ограниченных функций с нормой $\|\cdot\|$, определяемой равенством $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Например, в случае $X = \{1, \ldots, n\}$ это пространство совпадает с $\mathbb{R}^n_\infty$. Через ℓ_∞ без аргумента в скобках обозначается пространство $\ell_\infty(\mathbb{N})$.

Теорема. *1. Любое метрическое пространство X изометрично некоторому подмножеству пространства $\ell_\infty(X)$.*

2. Любое сепарабельное метрическое пространство изометрично некоторому подмножеству пространства ℓ_∞.

Определение. Нормы $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$, заданные на одном и том же векторном пространстве X, называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы c и C, что

$$c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|$$

для всех $x \in X$.

Легко проверить, что эквивалентность норм действительно является отношением эквивалентности на множестве всех норм, заданных на пространстве X. Эквивалентные нормы задают одинаковые топологии и, более того, взаимозаменяемы в большинстве вопросов анализа (например, при рассмотрении порядков малости и т.п.) С геометрической точки зрения, эквивалентные нормы часто имеют принципиально различные свойства, см. ниже.

Теорема. *Если X конечномерно, то все нормы на X эквивалентны.*

Единичный шар нормы. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на векторном пространстве X, B — ее единичный шар: $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. Легко убедиться, что B однозначно определяет норму.

Теорема. *Пусть X — векторное пространство. Множество $B \subset X$ является единичным шаром некоторой нормы тогда и только тогда, когда оно выпукло, центрально симметрично, и пересекается с каждой прямой, проходящей через 0, по невырожденному отрезку.*

Доказательство. □

Замечание. В конечномерном случае условие пересечения с прямыми можно заменить на требование, что множество замкнуто, ограничено и имеет непустую внутренность.

Изометрии нормированных пространств. Сначала рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пространства $\mathbb{R}^2_1$ и $\mathbb{R}^2_\infty$ изометричны. Действительно, единичные шары этих норм — квадраты, и первый переводится во второй поворотной гомотетией с углом поворота $\pi/4$ и коэффициентом $\sqrt{2}$. Поскольку это преобразование линейно и переводит единичный шар одной нормы в единичный шар другой, оно является изометрией между этими нормированными пространствами.

Эта конструкция не обобщается на старшие размерности. Например, в $\mathbb{R}^3$ единичные шары норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ существенно различны (это, соответственно, октаэдр и куб). Эти множества не переводятся друг в друга линейными преобразованиями. Как мы вскоре увидим, из этого факта следует, что нормированные пространства $\mathbb{R}^3_1$ и $\mathbb{R}^3_\infty$ не изометричны. Доказать эту неизометричность «руками» можно, хотя и не очень просто.

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^2_1$ (а значит, и $\mathbb{R}^2_\infty$) не изометрично стандартной плоскости $\mathbb{R}^2$. Действительно, рассмотрим в $\mathbb{R}^2_1$ точки $p = (0,0)$ и $q = (1,1)$. Расстояние между ними равно 2, и существуют две различные точки $a = (0,1)$ и $b = (1,0)$, расстояния от которых до p и q равны 1. На евклидовой плоскости такая конфигурация невозможна, так как «середина» между любыми двумя точками единственна.

Пример 3. Существует много норм на плоскости, изометричных стандартной. Например, определим норму $\|\cdot\|$ равенством $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+2y^2}$. Она изометрична стандартной, в качестве изометрии можно взять линейное отображение $f\colon (x,y) \mapsto (x, \sqrt{2}\cdot y)$ — оно, очевидно, удовлетворяет равенству $|f(v)| = \|v\|$ для любого $v \in \mathbb{R}^2$. Кстати, из наличия такого отображения следует, что функция $\|\cdot\|$ действительно является нормой (например, неравенство треугольника для нее следует из неравенства треугольника для стандартной нормы).

Вот еще один вариант: определим $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+2xy+5y^2}$. В этом случае в качестве изометрии подходит отображение $(x,y) \mapsto (x+y, 2y)$, это следует из тождества $\|(x,y)\|^2 = (x+y)^2 + (2y)^2$.

Теорема (Мазур–Улам)**.** *Любая изометрия между нормированными пространствами — композиция линейной изометрии и параллельного переноса.*

Следствие. *Два нормированных пространства изометричны тогда и только тогда, когда их единичные шары переводятся друг в друга линейными отображениями.*

7.1 Евклидовы нормы

Евклидовы нормы — это нормы специального вида. Свойство евклидовости нормы можно определять многими эквивалентными способами. Самое короткое определение (для конечномерных пространств) такое.

Определение. Норма на n-мерном векторном пространстве X называется *евклидовой*, если X с этой нормой изометрично стандартному пространству $\mathbb{R}^n$.

Квадратичной форма на пространстве $\mathbb{R}^n$ — это функция $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которую можно представить в виде

$$Q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j,$$

где a_{ij} — некоторые константы. Другими словами, квадратичная форма — это однородный многочлен степени 2 от координат. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если все ее значения на ненулевых векторах положительны.

Например, на плоскости квадратичная форма $Q(x,y) = x^2+6xy+10y^2$ положительно определена (доказательство: $Q(x,y) = (x+3y)^2 + y^2$), а квадратичная форма $Q(x,y) = x^2+6xy+8y^2$ — нет (доказательство: подставим $x = -3$ и $y = 1$).

Заметим, что при линейных заменах координат квадратичные формы переходят в квадратичные формы, поэтому понятие квадратичной формы имеет смысл в любом (конечномерном) векторном пространстве (т. е. не зависит от выбора базиса).

Теорема. *1. Норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве X является евклидовой тогда и только тогда, когда её квадрат $\|\cdot\|^2$ является (положительно определенной) квадратичной формой.*

2. Для любой положительно определенной квадратичной формы Q функция $\|\cdot\|$, определенная равенством $\|x\| = \sqrt{Q(x)}$ является евклидовой нормой.

Доказательство. Следует из разложения квадратичной формы в сумму квадратов. □

Определение. Пусть X — векторное пространство. *Скалярное произведение* на X — это функция $B\colon X \times X \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. Симметричность: $B(x,y) = B(y,x)$ для любых $x, y \in X$.
2. Билинейность (линейность по каждому аргументу).
3. Положительная определённость: $B(x,x) > 0$ для любого $x \in X \setminus \{0\}$.

Скалярные произведения принято обозначать угловыми скобками, то есть писать $\langle x,y\rangle$ вместо $B(x,y)$. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ задается формулой $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Вот пример другого скалярного произведения на плоскости: $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 3(x_1y_2 + x_2y_1) + 10y_1y_2$.

Следующая характеризация евклидовых норм обычно принимается в качестве определения.

Теорема. *1. Для любого скалярного произведения $\langle,\rangle$ функция $\|\cdot\|$, заданная равенством $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, является евклидовой нормой.*

2. Обратно, для любой евклидовой нормы $\|\cdot\|$ существует единственное скалярное произведение $\langle,\rangle$, связанное с этой нормой соотношением $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Теорема. *Норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве X является евклидовой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству параллелограмма:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

для любых $x, y \in X$.

Теорема. *Норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве X является евклидовой тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in X$ таких, что $\|x\| = \|y\| = 1$, существует линейная изометрия пространства $(X, \|\cdot\|)$, переводящая x в y.*

8 Метрические углы

Определение. Пусть X — метрическое пространство, $a, b, c \in X$, $a \neq b$, $a \neq c$. Угол сравнения $\tilde{\angle} abc$ — это угол $\angle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ треугольника $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ на плоскости, стороны которого равны расстояниям между точками a, b, c: $|\tilde{a}\tilde{b}| = |ab|$, $|\tilde{b}\tilde{c}| = |bc|$, $|\tilde{a}\tilde{c}| = |ac|$. Явная формула:

$$\tilde{\angle} abc = \arccos \frac{|ab|^2 + |bc|^2 - |ac|^2}{2 \cdot |ab| \cdot |bc|}$$

Определение. Угол между кривыми. Верхний угол. Нижний угол.

Примеры.

1. Прямые в евклидовом пространстве.

2. Гладкие кривые в евклидовом пространстве.

3. Негладкие кривые — не обязательно есть угол $\angle(\gamma,\gamma)$..

4. Нормированные пространства: если существует угол между любыми двумя прямыми, то норма — евклидова.

5. В пространстве с внутренней метрикой угол между кратчайшей и ей самой равен 0.

6. В пространстве с внутренней метрикой угол между двумя половинами кратчайшей равен π.

7. В букете трех прямых три угла равны π.

8. Римановы метрики (б/д)

Упражнение. Углы на сфере.

Теорема. *Неравенство первой вариации.*

Теорема. *Неравенство треугольника для верхних углов.*

Определение. Пространство направлений — пополненное пространство направлений кратчайших.

Примеры. **1.** Пространство направлений в конусе, в двумерном полиэдре,

2. Дважды покрытый диск.

Упражнение. Пространство направлений в прямого произведения с $\mathbb{R}$.

Определение. Большое пространство направлений.

Упражнение. Найдите его для конуса.

9 Пространства ограниченной кривизны

9.1 Модельные пространства

Пусть $\kappa \in \mathbb{R}$. Будем называть *κ-плоскостью* и обозначать через Π_κ одно из следующих пространств:

- при $\kappa = 0$ — плоскость $\mathbb{R}^2$ со стандартной метрикой;
- при $\kappa > 0$ — сферу радиуса $1/\sqrt{\kappa}$ с внутренней метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}^3$ (другими словами, с угловой метрикой, умноженной на $1/\sqrt{\kappa}$);
- при $\kappa < 0$ — плоскость Лобачевского, гомотетированную с коэффициентом $1/\sqrt{|\kappa|}$ (это означает, что все расстояния на стандартной плоскости Лобачевского умножены на эту константу),

На κ-плоскости определены следующие структуры: расстояния, отрезки, углы и движения. Обозначим через D_κ диаметр κ-плоскости,

$$D_k = \begin{cases} \pi/\sqrt{\kappa}, & \kappa > 0, \\ \infty, & \kappa \le 0. \end{cases}$$

Две точки $x, y \in \Pi_\kappa$ соединимы единственным отрезком тогда и только тогда, когда $|xy| < D_\kappa$. На κ-плоскости выполняются аксиомы откладывания отрезков и углов, а также признаки равенства треугольников.

Равенство треугольников по двум сторонам и углу. Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ — треугольники на κ-плоскости такие, что $|ab| = |a'b'|$, $|ac| = |a'c'|$ и $\angle bac = \angle b'a'c'$. Тогда существует движение, переводящее $\triangle abc$ в $\triangle a'b'c'$.

Равенство треугольников по трем сторонам. Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ — треугольники на κ-плоскости такие, что $|ab| = |a'b'|$, $|ac| = |a'c'|$, $|bc| = |b'c'|$, и все эти длины сторон меньше D_κ. Тогда существует движение, переводящее $\triangle abc$ в $\triangle a'b'c'$.

Монотонная зависимость стороны от противолежащего угла. Пусть $\triangle abc$ и $\triangle a'b'c'$ — треугольники на κ-плоскости такие, что $|ab| = |a'b'| < D_\kappa$, $|ac| = |a'c'| < D_\kappa$ и $\angle bac > \angle b'a'c'$. Тогда $|bc| > |b'c'|$.

Построение треугольника по трем сторонам. Треугольник со сторонами $x, y, z > 0$ на κ-плоскости существует тогда и только тогда, когда числа x, y, z удовлетворяют неравенству треугольника и $x + y + z \le 2D_\kappa$.

9.2 Определение кривизны через сравнение расстояний

Пусть X — пространство с внутренней метрикой. Кратчайшие кривые в X будем называть отрезками. Мы будем предполагать, что у любой точки пространства X есть такая окрестность, что любые две точки этой окрестности можно соединить отрезком (не обязательно единственным и не обязательно лежащим в этой окрестности). Отрезок между точками x и y будем обозначать через $[xy]$ (обычно из контекста ясно, какой из отрезков, соединяющих данные точки, имеется в виду.) *Треугольником* в пространстве X будем называть тройку точек (называемых вершинами треугольника), попарно соединенных отрезками (называемых сторонами).

Рассмотрим треугольник с вершинами $a, b, c \in X$. Треугольник $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ на κ-плоскости называется *треугольником сравнения* для $\triangle abc$, если длины сторон $|\tilde{a}\tilde{b}|$, $|\tilde{a}\tilde{c}|$ и $|\tilde{b}\tilde{c}|$ равны соответственно расстояниям $|ab|$, $|ac|$ и $|bc|$ и треугольник с такими сторонами — единственный с точностью до движения (это эквивалентно тому, что все длины сторон меньше D_κ). Треугольник сравнения для $\triangle abc$ на κ-плоскости существует тогда и только тогда, когда $|ab|, |ac|, |bc| < D_\kappa$ и $|ab| + |ac| + |bc| \le 2\pi$.

Рассмотрим треугольник $\triangle abc$ в пространстве X и треугольник сравнения $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ на κ-плоскости. Пусть d — точка на стороне $[bc]$ первого треугольника. Тогда на стороне $[\tilde{b}\tilde{c}]$ треугольника сравнения существует единственная точка $\tilde{d}$ такая, что $|\tilde{b}\tilde{d}| = |bd|$ и $|\tilde{c}\tilde{d}| = |cd|$. Будем называть точку $\tilde{d}$ *соответствующей* точке d в треугольнике сравнения. Аналогично определяются соответствующие точки для точек на сторонах $[ab]$ и $[ac]$.

Определение. Треугольник $\triangle abc$ в пространстве X называется κ-толстым, если для любой точки d, лежащей любой из его сторон, расстояние между d и противолежащей вершиной треугольника не меньше, чем расстояние между соответствующими точками треугольника сравнения. (Например, если $d \in [bc]$ и $\tilde{d}$ — соответствующая точка в треугольнике сравнения $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$, то $|ad| \ge |\tilde{a}\tilde{d}|$.)

Треугольник $\triangle abc$ называется κ-тонким, если выполняется аналогичное условие с заменой слов «не меньше» на «не больше».

Это определение имеет смысл только для треугольников, у которых есть треугольник сравнения на κ-плоскости. Для удобства будем считать все треугольники, не имеющие треугольников сравнения, κ-толстыми и κ-тонкими.

Определение. Пусть X — пространство со строго внутренней метрикой (более общо, с локально строго внутренней метрикой).

Будем говорить, что X является *пространством кривизны* $\ge \kappa$ (соотв. кривизны $\le \kappa$), если у любой его точки есть окрестность, в которой все треугольники являются κ-толстыми (соотв. κ-тонкими).

Пространство X называется *пространством ограниченной снизу кривизны* (соотв. *пространством ограниченной снизу кривизны*), если для любой его точки существует такое $\kappa \in \mathbb{R}$ и такая окрестность этой точки, что все треугольники в этой окрестности являются κ-толстыми (соотв. κ-тонкими).

Упражнение. Пространство кривизны $\ge \kappa$ является пространством кривизны $\ge \kappa_1$ для любого $\kappa_1 \le \kappa$. Пространство кривизны $\le \kappa$ является пространством кривизны $\le \kappa_1$ для любого $\kappa_1 \ge \kappa$.

Примеры (для $\kappa = 0$). 1. Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является и пространством кривизны ≥ 0, и пространством кривизны ≤ 0.

2. То же верно для любого выпуклого множества в $\mathbb{R}^n$. Более общо, выпуклое подмножество пространства кривизны $\ge \kappa$ (соотв. $\le \kappa$) само является пространством кривизны $\ge \kappa$ (соотв. $\le \kappa$). (Множество в метрическом пространстве называется выпуклым, если вместе с каждой парой точек оно содержит хотя бы один соединяющий их отрезок.)

3. Букет отрезков (и, как следствие, любой локально конечный граф) является пространством кривизны ≤ 0.

4. Конус окружностью длины $\le 2\pi$ является пространством кривизны ≥ 0. Как следствие, поверхность выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^3$ (с внутренней метрикой) является пространством кривизны ≥ 0. (Действительно, у каждой точки есть окрестность, изометричная окрестности вершины конуса над окружностью длины $\le 2\pi$.

5. Конус окружностью длины $\ge 2\pi$ является пространством кривизны ≤ 0.

6. Конус над любым отрезком является пространством кривизны ≤ 0. Он является пространством кривизны ≥ 0 тогда и только тогда, когда длина отрезка на превосходит π.

7. Прямое произведение пространств кривизны ≥ 0 (соотв. ≤ 0) — снова пространство ≥ 0 (соотв. ≤ 0). В частности, блокнот (результат склеивания нескольких полуплоскостей по граничным прямым) — пространство кривизны ≤ 0.

Упражнение. Произведение пространства кривизны $\ge \kappa_1$ и пространства кривизны $\ge \kappa_2$ имеет кривизну $\ge \min\{\kappa_1, \kappa_2, 0\}$. Произведение пространства кривизны $\le \kappa_1$ и пространства кривизны $\le \kappa_2$ имеет кривизну $\le \max\{\kappa_1, \kappa_2, 0\}$.

9.3 Определение кривизны через сравнение углов

Зафиксируем $\kappa \in \mathbb{R}$. Для (достаточно маленького) треугольника $\triangle abc$ в пространстве X будем обозначать через $\tilde{\angle}_\kappa abc$ угол при вершине b треугольника сравнения на κ-плоскости. Заметим, что этот угол однозначно определяется только расстояниями между a, b и c и не зависит от того, какие именно отрезки выбраны в качестве сторон.

Пусть X — пространство с локально строго внутренней метрикой.

Определение. Пространство X является пространством кривизны $\leq \kappa$, если в нем выполняются следующие условия:

(i) Определены углы между любыми отрезками.

(ii) У любой точки есть такая окрестность, что у любого треугольника в этой окрестности все углы не больше соответствующих углов треугольника сравнения на κ-плоскости.

Определение. Пространство X является пространством кривизны $\geq \kappa$, если в нем выполняются следующие условия:

(i) Определены углы между любыми отрезками.

(ii) У любой точки есть такая окрестность, что у любого треугольника в этой окрестности все углы не меньше соответствующих углов треугольника сравнения на κ-плоскости.

(iii) Сумма любых двух смежных углов равна π.

Доказательство эквивалентности определений использует следующую элементарную лемму, называемую шарнирной леммой Александрова.

Лемма. *Пусть $\triangle abc$ — треугольник на κ-плоскости, стороны которого меньше D_κ, и пусть d — внутренняя точка стороны $[bc]$. Пусть $a'b'd'c'$ — такой четырехугольник на κ-плоскости, что $|a'b'| = |ab|$, $|b'd'| = |bd|$, $|d'c'| = |dc|$, $|c'a'| = |ca|$, $|a'd'| < D_\kappa$, и при этом b' и c' лежат по разные стороны от $a'd'$. Тогда*

1. Если $|a'd'| > |ad|$, то $\angle a'd'b' + \angle a'd'c' < \pi$ («выпуклый четырехугольник»).

2. Если $|a'd'| = |ad|$, то $\angle a'd'b' + \angle a'd'c' = \pi$, $|a'd'| = |ad|$ («вырожденный четырехугольник»)

3. Если $|a'd'| < |ad|$, то $\angle a'd'b' + \angle a'd'c' > \pi$, $|a'd'| < |ad|$ («вогнутый четырехугольник»).

9.4 Некоторые свойства

Расстояние между точками на сторонах треугольника при кривизне, ограниченной снизу, больше, чем в треугольнике сравнения, а при кривизне, ограниченной снизу — меньше.

Если кривизна ограничена снизу, то

— если угол между двумя отрезками равен 0, то один содержится в другом

— если два отрезка имеют две общие точки, то это их концы

Если кривизна ограничена сверху, то в нормальной окрестности токи

— если угол между двумя отрезками равен π, то их объединение — отрезок

— отрезок однозначно определяется своими концами

— шары выпуклы

10 Теорема Топоногова

Определение. Пространство со строго внутренней метрикой имеет кривизну $\geq \kappa$ (соотв. $\leq \kappa$) *в целом* (или *глобально*), если все треугольники, для которых однозначно определен треугольник сравнения, являются κ-толстыми (соотв. κ-тонкими).

Замечание. Точно так же, как в локальном случае, доказывается эквивалентность этого определения и определения через углы.

Теорема (Александров–Топоногов–Перельман). *Пусть X — полное пространство кривизны $\geq \kappa$. Тогда X имеет кривизну $\geq \kappa$ в целом.*

Доказательство. Будем доказывать, что условие сравнения углов выполняется для всех треугольников в X. Пусть Δabc — треугольник в пространстве X. Будем называть угол a в этом треугольнике *хорошим*, если для него выполняется условие сравнения углов, то есть $\angle bac \geq \widetilde{\angle}_\kappa bac$, и *плохим* в противном случае. Будем называть треугольник *хорошим*, если все его углы хорошие, и *плохим*, если хотя бы один из его углов плохой. Через $P(abc)$ будем обозначать периметр треугольника abc, то есть $P(abc) = |ab| + |ac| + |bc|$.

Шаг 1. Предположим, что в пространстве X существует хотя бы один плохой треугольник. Тогда существует плохой треугольник abc, обладающий таким дополнительным свойством: любой треугольник $a'b'c'$, лежащий в окрестности радиуса $100P(abc)$ треугольника abc и имеющий периметр не больше $0.99P(abc)$, является хорошим. (Далее будем называть такой треугольник *почти минимальным* плохим треугольником.)

Действительно, предположим, что такого треугольника не найдется. Тогда по индукции строится последовательность плохих треугольников $a_nb_nc_n$, в которой каждый следующий треугольник

$\triangle a_{n+1}b_{n+1}c_{n+1}$ лежит в окрестности предыдущего треугольника $\triangle a_nb_nc_n$ радиуса $100P(a_nb_nc_n)$ и имеет периметр не более $0.99P(a_nb_nc_n)$. Периметры треугольников и расстояния между ними оцениваются сверху геометрической прогрессией со знаменателем 0.99, следовательно, вершины треугольников образуют фундаментальную последовательность. В силу полноты она имеет предел $p \in X$. Так как пространство имеет кривизну $\geq \kappa$ локально, то в некоторой окрестности точки p все треугольники хорошие. Но треугольники $a_nb_nc_n$, начиная с некоторого n, лежат в этой окрестности, противоречие.

Шаг 2. Сначала докажем лемму, которая будет многократно использоваться в доказательстве теоремы.

Лемма. *Пусть d — точка на стороне $[bc]$ треугольника abc с плохим углом b. Рассмотрим треугольники $\triangle abd$ и $\triangle acd$ с общей стороной $[bd]$ и другими сторонами, лежащими на сторонах $\triangle abc$. Тогда хотя бы один из треугольников $\triangle abd$ и $\triangle acd$ плохой, более того, плохим является один из углов $\angle abd$, $\angle adb$ и $\angle adc$ (в соответствующем треугольнике).*

Доказательство. Предположим, что угол d в обоих треугольниках хороший. Тогда $\widetilde{\angle}_\kappa adb + \widetilde{\angle}_\kappa adc \leq \angle_\kappa adb + \angle_\kappa adc = \pi$. Отсюда по шарнирной лемме $\widetilde{\angle}_\kappa abd \geq \widetilde{\angle}_\kappa abc > \angle abc$, то есть угол b в треугольнике $\triangle abc$ — плохой. □

Заметим, что периметры треугольников abd и acd из леммы не превосходят периметра $\triangle abc$.

Пусть $\triangle abc$ — почти минимальный плохой треугольник из Шага 1 и пусть b или c — плохой угол в нем. Обозначения a, b, c для вершин этого треугольника зафиксируем до конца доказательства. Положим $P = P(abc)$.

Пусть d — середина стороны $[bc]$ треугольника $\triangle abc$. По лемме, один из треугольников abd и acd — плохой, причем в нем есть плохой угол, отличный от a. Разделив его сторону $[bd]$ или $[cd]$ пополам, получим плохой треугольник с вершиной a стороной длины $\frac{1}{4}|bc|$ напротив a. Продолжая делить сторону пополам, получим плохой треугольник $\triangle apq$ (с плохим углом q), в котором $|pq| < 0.001P$. В случае $\kappa > 0$ дополнительно потребуем, что $|pq| < (2\pi/\sqrt{\kappa} - P)/100$, тогда $|pq| + |ap| < \pi/\sqrt{\kappa}$ и $|pq| + |aq| < \pi/\sqrt{\kappa}$.

Заметим, что $0.99P \leq P(apq) \leq P$. Второе неравенство следует из того, что каждое "деление треугольника пополам" не увеличивает периметр. А первое — из почти минимальности исходного треугольника abc и того, что $\triangle apq$ имеет с ним общую вершину и, следовательно, лежит в его окрестности радиуса $100P$. Из неравенств $0.99P \leq P(apq) \leq P$ и $|pq| \leq 0.001P$ следует, что $|ap| \geq 0.49P$ и $|aq| \geq 0.49P$.

Пусть x — середина $[aq]$. По лемме, один из треугольников pqx и aqx — плохой. Треугольник pqx плохим быть не может, так как его периметр меньше $0.99P$. Значит, $\triangle aqx$ — плохой, причем (опять же по лемме) в нем угол x является плохим.

Таким образом, мы построили треугольник $\triangle apx$ с плохим углом x, в котором $|ap| \geq 0.49P$ и $|ax|, |bx| \geq 0.1P$. По индукции построим последовательность треугольников $\triangle apx_n$ с аналогичными свойствами: положим $x_1 = x$, x_{n+1} — середина более длинного из отрезков ax_n и px_n. По индукции имеем $P(apx_n) \leq P$, отсюда и из неравенства $|ap| \geq 0.49P$ по построению следует, что $|ax_n| \geq 0.1P$, $|px_n| \geq 0.1P$ и $P(px_{n-1}x_n) < 0.99P$. Из последнего неравенства и почти минимальности исходного треугольника abc следует, что $\triangle px_{n-1}x_n$ — хороший. Следовательно (по индукции из леммы), угол x_n в треугольнике $\triangle apx_n$ — плохой.

Шаг 3. Для чисел $u, v > 0$ и $\alpha \in [0, \pi]$ обозначим через $V(u, v, \alpha)$ сторону $|yz|$ треугольника на κ-плоскости, заданного условиями $|xy| = u$, $|xz| = v$ и $\angle yxz = \alpha$. Как известно, $V(u, v, \alpha)$ является возрастающей функцией от α при фиксированных u и v.

Положим $\alpha_n = \angle ax_np$. Поскольку угол x_n в $\triangle ax_np$ — плохой, имеем

$$|ap| = V(|ax_n|, |px_n|, \widetilde{\angle}_\kappa ax_np) \geq V(|ax_n|, |px_n|, \alpha_n)$$

Положим $\ell_n := V(|ax_n|, |px_n|, \alpha_n)$. Докажем, что последовательность ℓ_n — невозрастающая.

Зафиксируем n и будем для определенности считать, что точка x_{n+1} лежит на стороне $[ax_n]$. Обозначим $x = x_n$, $y = x_{n+1}$, $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \angle pyx$, тогда $\alpha_{n+1} = \pi - \beta$. Построим в κ-плоскости треугольник сравнения $\triangle\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y}$ для треугольника $\triangle pxy$. На продолжении отрезка $[\tilde{x}\tilde{y}]$ за точку $\tilde{y}$ отложим отрезок $[\tilde{y}\tilde{z}]$, по длине равный $|yz|$. Поскольку $\triangle pxy$ — хороший, имеем $\angle\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y} \leq \alpha$ и $\angle\tilde{p}\tilde{y}\tilde{x} \leq \beta$. Следовательно,

$$\angle\tilde{p}\tilde{y}\tilde{z} = \pi - \angle\tilde{p}\tilde{y}\tilde{x} \geq \pi - \beta = \alpha_{n+1},$$

откуда

$$\ell_{n+1} = V(|py|, |ya|, \alpha_{n+1}) = V(|\tilde{p}\tilde{y}|, |\tilde{y}\tilde{a}|, \alpha_{n+1}) \leq V(|\tilde{p}\tilde{y}|, |\tilde{y}\tilde{a}|, \angle\tilde{p}\tilde{y}\tilde{z}) = |\tilde{p}\tilde{z}|.$$

С другой стороны,

$$|\tilde{p}\tilde{z}| = V(|\tilde{p}\tilde{x}|, |\tilde{x}\tilde{z}|, \angle\tilde{p}\tilde{x}\tilde{z}) = V(|px|, |xa|, \angle\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y}) \le V(|px|, |xa|, \alpha) = \ell_n,$$

так как $\angle\tilde{p}\tilde{x}\tilde{y} \le \alpha$. Таким образом, $\ell_{n+1} \le \ell_n$, что и требовалось доказать.

Шаг 4. Из доказанного на предыдущем шагу следует, что $\ell_n \le \ell_1 < |ap|$. Поскольку $|ax_n|+|px_n| \ge |ap|$, отсюда следует, что числа

$$|ax_n| + |px_n| - \ell_n = |ax_n| + |px_n| - V(|ax_n|, |px_n|, \alpha_n)$$

отделены от 0. Следовательно, углы α_n отделены от π (так как длины $|ax_n|$ и $|px_n|$ ограничены и $V(|ax_n|, |px_n|, \pi) = |ax_n| + |px_n|$) в силу неравенства $|ax_n| + |px_n| < \pi/\sqrt{\kappa}$).

С другой стороны, рассмотрим величины $\delta_n = P(apx_n) - P(apx_{n+1})$ поскольку периметры $P(apx_n)$ образуют невозрастающую последовательность, имеем $\delta_n \to 0$. Заметим, что

$$\delta_n = |px_n| + |x_n x_{n+1}| - |px_{n+1}|,$$

если точка x_{n+1} лежит на стороне $[ax_n]$, и

$$\delta_n = |ax_n| + |x_n x_{n+1}| - |ax_{n+1}|,$$

если x_{n+1} лежит на $[px_n]$. Поскольку стороны всех рассматриваемых треугольников ограничены и отделены от нуля, отсюда следует, что угол сравнения $\widetilde{\angle}_\kappa px_n x_{n+1}$ или $\widetilde{\angle}_k aax_n x_{n+1}$ соответствующего треугольника стремится к π. Но $\widetilde{\angle}_\kappa px_n x_{n+1} \le \angle px_n x_{n+1} = \alpha_n$ (если $x_{n+1} \in [x_n a]$, иначе то же верно для $\widetilde{\angle}_\kappa px_n x_{n+1}$), следовательно, $\alpha_n \to \pi$. Но выше доказано, что α_n отделены от π, противоречие. □

10.1 Кривизна и диаметр

Теорема. *Пусть $\kappa > 0$, X — полное пространство кривизны $\ge \kappa$, которое не является отрезком, лучом, прямой или окружностью. Тогда* $\operatorname{diam} X \le \pi/\sqrt{\kappa}$.

Теорема. *Пусть $\kappa > 0$, X — полное пространство кривизны $\ge \kappa$, которое не является отрезком, лучом, прямой или окружностью. Тогда периметр любого треугольника в X не превосходит $2\pi/\sqrt{\kappa}$.*

11 Кривизна конуса

Теорема. *Пусть X — пространство со строго внутренней метрикой, K — конус над X, o — его вершина. Тогда*

1. $K \setminus \{0\}$ имеет кривизну ≥ 0 (соотв. ≤ 0) тогда и только тогда, когда X имеет кривизну ≥ 1 (соотв. ≤ 1).

2. K имеет кривизну ≤ 0 тогда и только тогда, когда X имеет кривизну ≤ 1 в целом.

3. K имеет кривизну ≥ 0 тогда и только тогда, когда X имеет кривизну ≥ 1 в целом и, кроме того, периметр любого треугольника в X не превосходит 2π.

Теорема. *Конус над несвязным пространством X имеет кривизну ≤ 0 тогда и только тогда, когда конус над каждой компонентой имеет кривизну ≤ 0.*

Конус над несвязным пространством X имеет кривизну ≥ 0 тогда и только тогда, когда X состоит ровно из двух точек.

Следствие. *Кривизна двумерного полиэдра.*