Заметки по курсу римановой геометрии

С. В. Иванов

14 ноября 2006 г.

Данный текст предлагается в качестве дополнительного пособия к курсу римановой геометрии (5 семестр 2006 г.). В нем излагаются некоторые технические вопросы, недостаточно подробно освещавшиеся на лекциях. Пособие не претендует на полноту и отсутствие ошибок. Электронную версию этого текста и его обновления можно искать по адресу `http://www.pdmi.ras.ru/~svivanov`

Содержание

Термины и обозначения

Термин “гладкий” обозначает “класса C^∞”. Все многообразия, функции и отображения предполагаются гладкими, если явно не указано другое.

Для функции f, определенной на $\mathbb{R}^n$, через $\partial_i f$ обозначается ее частная производная по i-й координате. В традиционных обозначениях, $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, где f рассматривается как функция n переменных $x_1, \dots, x_n$.

Аргументы многих отображений записываются без скобок, если это не ведет к неоднозначности. Например, ∂_i формально является отображением из множества функций в себя, но мы пишем $\partial_i f$, а не $\partial_i(f)$.

Пусть M — гладкое многообразие. Через $\mathcal{F}(M)$ будем обозначать множество гладких функций на M со значениями в $\mathbb{R}$, через $\mathcal{X}(M)$ — множество гладких касательных векторных полей на M. Значение векторного поля $V \in \mathcal{X}(X)$ в точке $p \in M$ обозначается через V_p или $V(p)$.

Множество $\mathcal{F}(M)$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{R}$ и кольцо относительно поточечного умножения, $\mathcal{X}(M)$ — как модуль над кольцом $\mathcal{F}(M)$. А именно, если $f \in \mathcal{F}(M)$ и $V \in \mathcal{X}(M)$, то fV — это векторное поле, определяемое условием $(fV)_p = f(p)V_p$. Запись Vf обозначает не умножение, а дифференцирование, см. далее.

1 Касательные векторы и дифференцирования

Пусть M — гладкое многообразие, $p \in M$, $v \in T_pM$. Введем (временное) обозначение: D_v — дифференцирование функции вдоль вектора v, а именно, отображение $D_v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ определяется равенством $D_v f = d_p f(v)$.

Из правил дифференцирования вытекает, что отображение D_v линейно и

$$D_v(fg) = f(p)D_v g + g(p)D_v f$$

для любых $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Теорема 1.1. *Пусть M — гладкое многообразие, $p \in M$, $D : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ — линейное отображение, такое, что*

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) \tag{1}$$

для любых $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Тогда $D = D_v$ для некоторого (единственного) вектора $v \in T_pM$.

Доказательство. Единственность вектора v тривиальна, докажем существование. Сначала рассмотрим случай $M = \mathbb{R}^n$, $p = 0$.

Лемма. *Любая гладкая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может быть представлена в виде*

$$f(x) = c + x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + \dots + x_n f_n(x),$$

где c — константа, $f_1, \dots, f_n$ — гладкие функции на $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Доказательство леммы. Положим $c = f(0)$,

$$f_i(x) = \int_0^1 \partial_i f(tx)\, dt.$$

Из гладкости f и теорем о зависимости интеграла от параметра следует, что функции f_i — гладкие. Подставляя в формулу Ньютона–Лейбница функцию $t \mapsto f(tx)$, $t \in [0,1]$, получаем

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} f(tx) \right) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \cdot \partial_i f(tx)\, dt = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x),$$

что и требовалось. □

Обозначим через φ_i координатные функции на $\mathbb{R}^n$, то есть функции, определяемые равенством $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Тогда утверждение леммы можно переписать в виде

$$f = c + \varphi_1 f_1 + \varphi_1 f_2 + \dots + \varphi_n f_n.$$

Положим $v_i = D(\varphi_i)$ и рассмотрим вектор v с координатами $(v_1, \dots, v_n)$ как касательный вектор в нуле. Докажем, что $D = D_v$. Из предыдущей формулы для f имеем

$$D(f) = D(c) + \sum D(\varphi_i f_i) = D(c) + \sum \varphi_i(0) D(f_i) + \sum f_i(0) D(\varphi_i).$$

Поскольку $\varphi_i(0) = 0$, второе слагаемое исчезает. Подставляя в условие теоремы $f = g \equiv 1$, получаем, что $D(1) = 0$, откуда в силу линейности $D(c) = 0$. Таким образом,

$$D(f) = \sum f_i(0) D(\varphi_i) = \sum v_i f_i(0).$$

Осталось заметить, что все использовавшиеся тождества для D (линейность, правило дифференцирования произведения и равенство $D(\varphi_i) = 0$) выполняются и для D_v, поэтому такое же вычисление дает равенство $D_v(f) = \sum v_i f_i(0)$. Таким образом, $D(f) = D_v(f)$, и утверждение для случая $M = \mathbb{R}^n$ доказано.

Общий случай. Докажем вспомогательное утверждение: если функция f обращается в ноль в некоторой окрестности точки p, то $D(f) = 0$. Пусть U — такая окрестность. Построим такую функцию $g \in \mathcal{F}(M)$, что $g(p) = 1$ и $g = 0$ вне U. Тогда $fg = 0$, откуда

$$0 = D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) = D(f),$$

так как $f(p) = 0$ и $g(p) = 1$. Утверждение доказано.

Из него следует, что $D(f) = D(g)$ для любых функций f и g, совпадающих в окрестности точки p. Другими словами, $D(f)$ однозначно определяется значениями f в произвольно малой окрестности точки p (свойство локальности).

Пусть U — координатная окрестность, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — соответствующая карта, причем $\varphi(p) = 0$. Определим отображение $\widetilde{D} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ следующим образом: для $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ положим $\widetilde{D}(f) = D(\widetilde{f})$, где $\widetilde{f}$ — произвольная функция на M, совпадающая с $\varphi \circ f$ в некоторой малой окрестности точки p. Из локальности D следует, что это определение не зависит от выбора $\widetilde{f}$. Отображение $\widetilde{D}$ удовлетворяет условиям теоремы для $M = \mathbb{R}^n$ и $p = 0$, поэтому по доказанному ранее существует такой вектор $\widetilde{v} \in T_0\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$, что $\widetilde{D} = D_{\widetilde{v}}$. Тогда $D = D_v$, где $v = d\varphi^{-1}(\widetilde{v})$. □

Теорема означает, что можно дать новое определение касательного вектора: это линейная функция на $\mathcal{F}(M)$, удовлетворяющая тождеству (1). Имея в виду это определение, производную функции f вдоль вектора v часто обозначают через $v(f)$ или vf. Эту запись следует рассматривать как сокращенное обозначение для $D_v f$.

С новым определением сложение касательных векторов представляет собой обычное сложение линейных функций: $(v+w)f = vf + wf$, аналогично для умножения на скаляры: $(cv)f = c(vf)$, образ касательного вектора при дифференциале отображения $\varphi : M \to N$ задается равенством $(d\varphi(v))f = v(f \circ \varphi)$ для $f \in \mathcal{F}(N)$.

Для векторного поля $V \in \mathcal{X}(M)$ определим оператор дифференцирования $D_V : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ равенством $D_V f(p) = D_{V(p)} f$. Правило дифференцирования произведения принимает вид

$$D_V(fg) = f \cdot D_V g + g \cdot D_V f.$$

Как и для одиночных векторов, вместо $D_V f$ часто используется запись Vf. Выполняются естественные тождества $(V+W)f = Vf + Wf$, $(gV)f = g(Vf)$ для $V, W \in \mathcal{F}(M)$, $f, g \in \mathcal{X}(M)$.

Теорема 1.2. *Пусть $D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ — отображение, линейное над $\mathbb{R}$ и удовлетворяющее тождеству*

$$D(fg) = f \cdot D(g) + g \cdot D(f)$$

для любых $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Тогда $D = D_V$ для некоторого (единственного) векторного поля $V \in \mathcal{F}(M)$.

Доказательство. Для каждой точки $p \in M$ отображение $f \mapsto D(f)(p)$ из $\mathcal{F}(M)$ в $\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, поэтому существует такой вектор $V(p)$, что $D(f)(p)$ есть производная f вдоль $V(p)$. Остается доказать, что полученное векторное поле V гладкое. Для этого достаточно проверить, что его координаты в любой карте — гладкие функции. Координаты вектора дифференцированием вдоль него координатных функций карты (произвольно продолженных на все многообразие), значит, координаты векторного поля локально совпадают с результатом применения оператора D_V к некоторым гладким функциям на M, следовательно, они гладкие. □

2 Скобка Ли

Определение 2.1. Пусть M — гладкое многообразие, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. *Скобка Ли* полей X и Y, обозначаемая $[X, Y]$ — это векторное поле на M, определяемое равенством

$$D_{[X,Y]} f = D_X(D_Y f) - D_Y(D_X f),$$

или, в сокращенных обозначениях,

$$[X, Y]f = XYf - YXf$$

для любой $f \in \mathcal{F}(M)$.

Доказательство корректности. Достаточно проверить, что отображение $D : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$, заданное равенством $D(f) = XYf - YXf$, удовлетворяет условиям теоремы 1.2. Это прямое вычисление:

$$\begin{aligned} D(fg) = X(Y(fg)) - Y(X(fg)) = X(f \cdot Yg + g \cdot Yf) - Y(f \cdot Xg + g \cdot Xf) = \\ = Xf \cdot Yg + f \cdot XYg + Xg \cdot Yf + g \cdot XYf - Yf \cdot Xg - f \cdot YXg - Yg \cdot Xf - g \cdot YXf = \\ = f \cdot XYg + g \cdot XYf - f \cdot YXg - g \cdot YXf = f \cdot D(g) + g \cdot D(f) \end{aligned}$$

□

Предложение 2.2. *Скобка Ли векторных полей билинейна над $\mathbb{R}$, антисимметрична ($[X, Y] = -[Y, X]$) и удовлетворяет тождеству Якоби:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

для любых $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$.

Доказательство. Подставить определение и раскрыть скобки. □

Предложение 2.3. *При умножении аргументов на функции скобка Ли преобразуется следующим образом:*

$$[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - (Yf) \cdot X,$$
$$[X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$$

для любых $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.

Доказательство. Подставить определение и применить правило дифференцирования произведения. □

Определение 2.4. Пусть M, N — гладкие многообразия, $\varphi : M \to N$ — гладкое отображение. Будем говорить, что φ *переводит* векторное поле $X \in \mathcal{X}(M)$ в векторное поле $Y \in \mathcal{X}(N)$, если $Y_{\varphi(p)} = d_p\varphi(X_p)$ для всех $p \in M$.

Замечание. Поле Y, удовлетворяющее этому определению, может быть не единственным, однозначно определены лишь его значения в точках из $\varphi(M)$. Кроме того, такое поле Y не обязательно существует (например, если $\varphi(p) = \varphi(q)$, но $d_p\varphi(X_p) \neq d_q(X_q)$ для некоторых $p, q \in M$). Существование и единственность поля Y имеет место, если φ — диффеоморфизм.

Теорема 2.5. *Пусть M, N — гладкие многообразия, $\varphi : M \to N$ — гладкое отображение. Предположим, что φ переводит поля $X_1, X_2 \in \mathcal{X}(M)$ в поля $Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(N)$ соответственно. Тогда φ переводит $[X_1, X_2]$ в $[Y_1, Y_2]$.*

Доказательство. Условие "φ переводит X в Y" эквивалентно следующему: $(Yf) \circ \varphi = X(f \circ \varphi)$ для любой функции $f \in \mathcal{F}(N)$. Отсюда

$$(Y_1(Y_2 f)) \circ \varphi = X_1((Y_2 f) \circ \varphi) = X_1(X_2(f \circ \varphi)).$$

Вычитая аналогичное тождество с переставленными индексами 1 и 2, получаем

$$([Y_1, Y_2]f) \circ \varphi = [X_1, X_2](f \circ \varphi),$$

что и требовалось. □

Следствие 2.6. *Пусть N — гладкое подмногообразие в M, X и Y — векторные поля из $\mathcal{X}(M)$, касающиеся N (то есть X_p и Y_p лежат в T_pN для любой точки $p \in M$). Тогда $[X, Y]$ тоже касается N. Более того, сужение $[X, Y]|_N$ скобки Ли на N совпадает со скобкой Ли полей $X|_N$ и $Y|_N$, рассматриваемых как элементы $\mathcal{X}(N)$.*

Доказательство. Применим теорему 2.5 к отображению вложения $i : N \to M$, заметив, что оно переводит $X|_N$ и $Y|_N$ в X и Y соответственно. □

Следствие 2.7. *Пусть $U \subset M$ — открытое множество, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Тогда $[X, Y]|_U = [X|_U, Y|_U]$, где $X|_U$ обозначает сужение векторного поля X на U, $X|_U \in \mathcal{X}(U)$. В частности, значения скобки Ли $[X, Y]$ на U однозначно определяются значениями полей X и Y на U.*

Доказательство. Подставим в следствие 2.6 подмногообразие $N = U$. □

Теорема 2.8 (Скобка Ли в координатах). *Пусть $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ — карта на M. Для каждого векторного поля $X \in \mathcal{X}(M)$ обозначим через X^φ функцию $U \to \mathbb{R}^n$, вычисляющую координаты веркторного поля в данной карте, то есть $X^\varphi(p) = d_p\varphi(X_p) \in \mathbb{R}^n$ для каждой точки $p \in U$. Тогда*

$$[X, Y]^\varphi = D_X(Y^\varphi) - D_Y(X^\varphi),$$

где D_X обозначает оператор дифференцирования вдоль X.

Доказательство. По следствию 2.7 можно считать, что $M = U$. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Тогда $X^\varphi = (D_X\varphi_1, \dots, D_X\varphi_n)$ и результат получается подстановкой функций φ_i в определение скобки Ли. □

Следствие 2.9. *Если два векторных поля имеют постоянные координаты в некоторой карте, то их скобка Ли в пределах этой карты равна 0. В частности, скобка Ли координатных векторных полей равна 0.*

Определение 2.10. Векторные поля называются *коммутирующими*, если их скобка Ли равна 0.