Санкт-Петербургское отделение

математического института им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

На правах рукописи

ИВАНОВ СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

ОБЪЕМЫ И ПЛОЩАДИ В МЕТРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

(01.01.04 — Геометрия и топология)

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2009

Оглавление

Введение

Мотивирующие задачи

В диссертации исследуются объемы и площади римановых, финслеровых и более общих липшицевых метрик на многообразиях, а также поверхностей в банаховых пространствах. Целью является изучение общих вопросов об этих структурах и приложения в различных областях, таких, как теория заполняющих объемов, асимптотическая геометрия, систолическая геометрия, геометрия многогранников, вариационное исчисление, краевые обратные задачи. Перечислим некоторые вопросы, которые мотивировали эти исследования и на которые в диссертации даются частичные или полные ответы.

1. Минимальные заполнения. Пусть S — замкнутое $(n-1)$-мерное гладкое многообразие, и пусть $d : S \times S \to \mathbf{R}_+$ — произвольная метрика на S. М. Громов [63] ввел понятие *заполняющего объема* $\mathrm{FillVol}(S,d)$ пространства (S,d). По определению, заполняющий объем равен инфимуму объемов таких компактных n-мерных римановых многообразий (M,g), что $\partial M = S$ и $d_g(x,y) \geq d(x,y)$ для всех $x,y \in S$, где d_g — расстояние в M, определяемое римановой метрикой g.

Риманово многообразие (M,g) называется *минимальным заполнением*, если оно реализует этот инфимум для какой-нибудь функции d, или, что то же самое, для функции расстояния d_g, ограниченной на $S \times S$. Другими словами, (M,g) является минимальным заполнением, если для любого компактного риманова многообразия $(M'g')$, удовлетворяющего условиям $\partial M' = \partial M$ и

$$d_{g'}(x,y) \geq d_g(x,y) \qquad \text{для любых } x,y \in \partial M,$$

выполняется неравенство

$$\mathrm{vol}(M',g') \geq \mathrm{vol}(M,g),$$

где vol — риманов объем.

Для некоторых задач удобно ограничить топологический тип многообразий M' в определении заполняющего объема, например, рассматривать только многообразия, диффеоморфные M. По причинам, объясняемым ниже, имеет смысл рассматривать заполнения не только римановыми, но и финслеровыми метриками. Далее в этом вводном разделе мы для простоты ограничиваемся римановыми метриками на n-мерном диске D^n.

Ряд классических неравенств римановой геометрии естественно формулируется в терминах минимальных заполнений. Например, неравенство Безиковича [30] означает, что единичный куб $[0,1]^n$ (более общо, любая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$) с евклидовой метрикой является минимальным заполнением своей границы (с евклидовой или ℓ_∞-метрикой). Неравенство Пу [83], оценивающее длину кратчайшей нестягиваемой петли в $\mathbf{RP}^2$, эквивалентно тому, что стандартная полусфера является минимальным заполнением внутренней метрики окружности (в классе заполнений, гомеоморфных диску). Заполняющие объемы чаще всего используются в систолической геометрии, асимптотической геометрии и близких к ним областях (см., например, книги [66] и [73]), но в целом область их применений весьма широка и включает, в частности, задачи теории динамических систем [31] и обратные краевые задачи математической физики (см. обсуждение граничной жесткости ниже).

Большинство известных результатов о заполняющих объемах представляет собой оценки сверху или снизу, а не вычисление точных значений. В отличие от результатов такого типа, в настоящей работе основное внимание уделяется точным значениям заполняющих объемов, или, что то же самое, нахождению минимальных заполнений. Это позволяет получать в качестве приложений оптимальные изосистолические неравенства, оптимальные оценки асимптотических объемов и некоторые результаты о жесткости.

До недавнего времени список известных минимальных заполнений ограничивался областями в некоторых симметрических пространствах (см. [30], [83], [63], [31]). Однако, есть основания полагать, что класс (гладких) римановых метрик, являющихся минимальными заполнениями, гораздо шире. А именно, имеется следующая

Гипотеза. *Если риманова метрика g на диске D^n такова, что любые две точки внутри диска соединяются единственной геодезической, и эта геодезическая реализует риманово расстояние, то (D^n, g) — минимальное заполнение (в классе римановых метрик на D^n).*

В число результатов диссертации входит доказательство этой гипотезы в размерности 2 (теорема 7.1.2), а также в старших размерностях для метрик, достаточно близких к евклидовой (теорема 10.1.2).

2. Граничная жесткость. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие с краем, d_g — соответствующая функция риманова расстояния. Задача граничной жесткости состоит в следующем: верно ли, что ограничение d_g на край определяет метрику g однозначно (с точностью до изометрии)? Другими словами, требуется восстановить метрику g внутри многообразия, зная только геодезические расстояния между точками края.

Эта задача является геометрическим вариантом обратной задачи кинематики, различные варианты которой изучаются с начала 20-го века. (Первоначальной мотивировкой служили вопросы геофизики, а именно задача определения внутренней структуры Земли по времени прохождения сейсмических волн, см. [72], [91].)

Риманова метрика g называется *гранично жесткой*, если она однозначно определяется своими граничными расстояниями. Более формально, компактное риманово многообразие (M, g) называется гранично жестким, если для любого риманова многообразия (M', g'), удовлетворяющего условиям $\partial M' = \partial M$ и

$$d_{g'}(x, y) = d_g(x, y) \qquad \text{для любых } x, y \in \partial M$$

верно, что существует изометрия между (M, g) и (M', g'), сужение которой на ∂M тождественно.

Далеко не каждая риманова метрика является гранично жесткой. Например, если в многообразии есть область, через которую не проходит ни одна минимальная геодезическая, соединяющая точки края, то любое увеличение метрики в этой области оставляет граничные расстояния неизменными. Чтобы получить такую область ("черную дыру"), достаточно сделать метрический тензор в окрестности некоторой точки столь большим, что расстояние от этой точки до края больше, чем диаметр самого края. Простым явным примером метрики, не являющейся гранично жесткой, является стандартная метрика полусферы. На полусфере все краевые расстояния реализуются путями вдоль края, поэтому любое увеличение метрики внутри полусферы оставляет их неизменными. (Однако, любая компактная область, содержащаяся строго внутри полусферы, уже является гранично жесткой.)

Таким образом, чтобы задача о граничной жесткости была осмысленной, необходимо наложить ограничения на метрику g. Удобный набор ограничений был сформулирован Р. Мичелом (R. Michel, [77]): метрика g на M называется *простой*, если край ∂M является строго выпуклым относительно g, и для любой точки $x \in M$ риманово экспоненциальное отображение

$$\exp_x : \exp_x^{-1}(M) \to M$$

является диффеоморфизмом. Второе условие можно переформулировать следующим образом: любые две точки в M соединяются единственной геодезической, и геодезические не имеют сопряженных точек. (Иногда рассматриваются более общие определения, допускающие невыпуклый край, см., например, [53].)

Определение удобно, в частности, тем, что простота метрики может быть определена по функции граничного расстояния: если у два компактных римановых многообразий (M, g) и (M', g') имеют общий край и их граничные расстояния одинаковы, то метрики g и g' простые или нет одновременно. Отметим, что многообразие M с простой метрикой с необходимостью диффеоморфно n-мерному диску D^n.

Гипотеза (R. Michel [77]). *Все простые метрики являются гранично жесткими.*

Недавно L. Pestov и G. Uhlmann [81] доказали эту гипотезу в размерности 2. Для частного случая двумерных метрик отрицательной кривизны она была доказана ранее в работах C. Croke [52] и J.-P. Otal [80]. В старших размерностях известно немного примеров гранично жестких метрик, и все они обладают свойствами симметрии. Это компактные области в $\mathbf{R}^n$ (M. Gromov [63]), во внутренности полусферы S^n_+ (R. Michel [77]), в симметрических пространствах отрицательной кривизны (G. Besson, G. Courtois и S. Gallot [31]) и в расщепляющихся пространствах вида $X \times \mathbf{R}$, где X — полное односвязное риманово многообразие без сопряженных точек (C. Croke и B. Kleiner [55]). Обзор современного состояния проблемы, других обратных задач и приложений можно найти в [57] или [81].

Одним из результатов диссертации является доказательство гипотезы Мичела для всех метрик, достаточно близких к евклидовой метрике области в $\mathbf{R}^n$ (теорема 10.1.3). Граничная жесткость для таких метрик доказывается исследованием случая равенства в задаче о минимальном заполнении. А именно, гипотеза Мичела рассматривается как частный случай следующей усиленной гипотезы о минимальном заполнении.

Гипотеза. *Любая простая метрика g на диске D^n является единственным (с точностью до изометрии, тождественной на краю) минимальным заполнением своего края $(\partial D^n, d_g)$.*

Из этой гипотезы легко выводится гипотеза Мичела. Более того, любой частный этой гипотезы влечет соответствующий частный случай гипотезы Мичела, так как любая простая метрика g, реализующая единственное минимальное заполнение края, является гранично жесткой. Действительно, объем простой метрики можно вычислить по граничным расстояниям и их производным с помощью интегральной формулы Сантало (см. [14, гл.19]). Таким образом, если простая метрики g и метрика g' на D^n определяют одинаковые граничные расстояния, то g' тоже простая и $\mathrm{vol}(D^n, g) = \mathrm{vol}(D^n, g')$. Поэтому если g является единственным минимальным заполнением, то g' тоже минимальное заполнение и, следовательно, две метрики изометричны.

В диссертации усиленная гипотеза о минимальном заполнении доказывается в размерности 2 и для метрик, достаточно близких к евклидовым во всех размерностях. Двумерный результат не столь интересен, так как в нем единственность минимального заполнения выводится из вышеупомянутого результата Пестова и Ульмана о граничной жесткости. В случае почти плоских метрик, наоборот, граничная жесткость доказывается непосредственным анализом случая равенства в доказательстве минимальности, то есть она оказывается приложением теории заполняющих объемов. Отметим, что в настоящее время не известно других методов, доказывающих граничную жесткость для открытого класса метрик в размерностях, больших, чем 2.

3. Асимптотические объемы и систолические неравенства. Рассмотрим периодическую риманову метрику g в $\mathbf{R}^n$, то есть метрику, инвариантную относительно стандартного действия группы $\mathbf{Z}^n$ параллельными переносами. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и рассмотрим метрические шары $B_R(x_0)$ метрики g с центрами в x_0 и радиусами $R \to \infty$. Нетрудно показать, что объемы этих шаров растут как полином степени n, точнее,

$$\mathrm{vol}_g(B_R(x_0)) \sim c(g) \cdot R^n, \qquad R \to \infty$$

для некоторой константы $c(g) > 0$. Число $c(g)$ называется *асимптотическим объемом* метрики g и обозначается $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g)$.

М. Громов [63] доказал, что асимптотический объем любой периодической римановой метрики g в $\mathbf{R}^n$ оценивается снизу константой, зависящей только от n, и высказал гипотезу, что минимальное значение асимптотического объема достигается для евклидовой метрики. В случае $n = 2$ эту гипотезу доказал И. К. Бабенко [3]. Одним из результатов диссертации является доказательство этой гипотезы во всех размерностях (теорема 9.3.1).

Заполняющие и асимптотические объемы тесно связаны с систолической геометрией. История этой области начинается с неравенства Лёвнера (см. [83], [73, гл. 1]), которое состоит в следующем: для любой римановой метрики g на двумерном торе T^2 существует нестягиваемая петля γ, длина которой $L(\gamma)$ удовлетворяет неравенству

$$L(\gamma)^2 \le \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{area}(T^2, g).$$

Равенство достигается для образующей плоского тора, склеенного из ромба с углом $\pi/3$ при вершине, поэтому константа $\frac{2}{\sqrt{3}}$ является оптимальной.

В работе [63] М. Громов доказал аналогичное неравенство с (неоптимальной) константой, зависящей от размерности, для всех гомологически существенных многообразий, в частности, для n-мерного тора T^n при любом n. Позднее в книге [66] он получил оптимальные константы в обобщенном неравенства Лёвнера для T^n — как и ожидалось, оптимальные значения реализуются плоскими метриками. (Вместо длины кратчайшей нестягиваемой петли в обобщенном оптимальном неравенстве используется *стабильная систола* — длина кратчайшего цикла, представляющего ненулевой целочисленный элемент в группе гомологий $H_1(T^n; \mathbf{R})$. Аналогичное неравенство для гомотопических систол остается недоказанной гипотезой.)

Доказательство Громова в [66] опирается на теорему 9.3.1 (которая к этому моменту уже была опубликована). Тот же метод позволил доказать обобщенное неравенство Лёвнера не только для торов, но и для некоторых других многообразий, у которых первое число Бетти равно размерности. Одним из результатов диссертации является дальнейшее обобщение неравенства Лёвнера на многообразия, у которых первое число Бетти не превосходит размерности (теорема 9.4.7).

4. Финслеровы метрики и поверхности в банаховых пространствах. Для исследования заполняющих и асимптотических объемов очень полезными оказываются различные варианты конструкции Куратовского, позволяющей изометрически вложить любое метрическое пространство в банахово пространство вида $L^\infty(X)$, где X — некоторое пространство с мерой. Опишем простейший вариант этой конструкции применительно к минимальным заполнениям.

Пусть (S,d) и (M,g) — те же, что в задаче о минимальном заполнении, обсуждавшейся в начале этого введения. Стандартное вложение Куратовского

$$F_d : S \to C^0(S) \subset L^\infty(S)$$

определяется так: образ $F_d(x)$ точки $x \in S$ есть дистанционная функция $\rho_x : S \to \mathbf{R}$, определяемая равенством

$$\rho_x(y) = d(x,y), \qquad y \in S.$$

Из неравенства треугольника для метрики d немедленно следует, что F_d является изометрическим (т. е. сохраняющим расстояния) вложением метрического пространства (S,d) в банахово пространство $C^0(S)$ непрерывных функций на M с нормой, определяемой равенством $\|f\|_{C^0} = \sup|f|$. По техническим причинам удобнее рассматривать в качестве области значений не $C^0(S)$, а большее пространство $L^\infty(S)$.

Предположим, что риманово многообразие (M,g) заполняет пространство (S,d), то есть $\partial M = S$ и $d_g(x,y) \ge d(x,y)$ для любых $x,y \in S$. Тогда вложение Куратовского F_d является нерастягивающим (т. е. не увеличивающим расстояния) относительно метрики d_g, ограниченной на S. Учитывая специальный вид нормы в $L^\infty(S)$, нетрудно показать, что любое такое отображение допускает нерастягивающее (относительно метрики d_g) продолжение $F : M \to L^\infty(S)$. Поскольку это отображение нерастягивающее, оно не увеличивает объем. Таким образом, риманов объем многообразия (M,g) оценивается снизу площадью поверхности $F(M)$ в $L^\infty(S)$, граница которой совпадает с изометрическим образом $F_d(S)$ пространства (S,d). (Здесь и далее термины “объем” и “площадь” формально считаются синонимами, но первый обычно относится к римановым многообразиям и другим “никуда не вложенным” пространствам, а второй — к параметризованным поверхностям и другим объектам в пространствах большей размерности.)

Переход к инфимуму по всем многообразиям (M, g) показывает, что заполняющий объем $\operatorname{FillVol}(S, d)$ оценивается снизу инфимумом площадей липшицевых поверхностей в пространстве $L^\infty(S)$, затягивающих данную границу $F_d(S)$. М. Громов [63] показал, что отношение заполняющего объема к этому инфимуму площадей ограничено константой, зависящей только от размерности. Это наблюдение лежит в основе его фундаментальных результатов о сравнении заполняющего объема, заполняющего радиуса и $(n-1)$-мерного объема самого пространства (S, d).

Одним из результатов диссертации является уточнение вышеупомянутого результата о сравнении заполняющих объемов и площадей, а именно избавление от константы: при правильном выборе определения площади заполняющий объем $\operatorname{FillVol}(S, d)$ в точности равен инфимуму площадей поверхностей в $L^\infty(S)$ с данным краем $F_d(S)$ (теорема 5.4.1 и следствие 5.4.3). Как следствие, минимальные заполнения находятся во взаимно однозначном соответствии с поверхностями, минимизирующими площадь при фиксированной границе.

Возвращаясь к гипотезам о минимальных заполнениях, отметим, что в случае простой метрики g нерастягивающее отображение $F : M \to L^\infty(S)$, продолжающее F_d, единственно и сохраняет расстояния. (А именно, F совпадает с *представлением граничными расстояниями*: для $x \in M$ значение $F(x)$ есть дистанционная функция $y \mapsto d_g(x, y) : S \to \mathbf{R}$.) Таким образом, гипотеза о минимальности простых метрик аналогична известному свойству минимальности вполне геодезических поверхностей в римановых многообразиях. Другим указанием на правдоподобность гипотезы является вычисление в главе 10 первой вариации площади — как и следовало ожидать, она равна нулю.

Определение площади поверхности в пространствах вида $L^\infty(S)$ является нетривиальным вопросом, которому посвящены главы 3 и 4 диссертации. В первую очередь следует отметить, что норма в $L^\infty(S)$ не евклидова, поэтому даже для гладко вложенной поверхности индуцируемая на ней метрика, вообще говоря, является не римановой, а финслеровой. Это показывает, что рассматриваемые вопросы, даже при решении чисто римановых задач, удобно рассматривать в более общем контексте финслеровой геометрии.

В отличие от риманова случая, в финслеровой геометрии существуют различные (не эквивалентные) определения объема, наиболее часто используются объем по Буземану (мера Хаусдорфа) и объем по Холмсу–Томпсону (симплектический объем). В теории заполняющих объемов традиционным является использование объема по Бенсону [28], который, следуя Громову, обычно обозначают через $mass*$. Этот объем очень прост в использовании (в частности, легко определяется для любого метрического пространства), но является слишком грубым инвариантом для нахождения точных значений заполняющих объемов. В этом одна из причин неоптимальности констант в классических результатах Громова.

В общей теории, развиваемой в главах 3–6, мы не фиксируем определение объема, но предполагаем, что оно удовлетворяет естественным требованием, главным из которых является монотонная зависимость от метрики. Выбор конкретного определения зависит от рассматриваемой задачи. В упоминавшихся выше приложениях мы используем объем по Холмсу–Томпсону и введенный в главе 3 объем по Лёвнеру, который оказывается особенно хорошо приспособленным для решения римановых задач, требующих вспомогательных финслеровых построений.

Одной из трудностей, возникающих при определении площади, является недостаточная регулярность (всего лишь липшицевость) рассматриваемых поверхностей и отсутствие привычных аналитических свойств у пространства L^∞ (например, в нем не выполняется теорема Радемахера о дифференцируемости почти всюду). В главе 4 строится технический аппарат для преодоления этих трудностей, в частности, вводится понятие слабой дифференцируемости и для него доказывается аналог теоремы Радемахера (теорема 4.4.3). Это позволяет дать согласованные "внутреннее" (через индуцированную метрику) и "внешнее" (через производные) определения площади липшицевой поверхности, обобщающие произвольно выбранное определение финслерова объема.

Отметим, что в последнее время развивается геометрическая теория меры в произвольных метрических пространствах, см., например, [20], [92]. В перспективе, развитие этой теории (в частности, включение в нее параметрических интеграндов и эллиптичности) может позволить применять к вопросам о минимальных заполнениях существующие методы теории минимальных поверхностей.

5. Минимальность плоских поверхностей. Пусть V — конечномерное нормированное векторное пространство, $P \subset V$ — линейное подпространство размерности n, где $2 \le n < \dim V$. Пусть D — область в P с гладкой или кусочно линейной границей (можно считать, что D — аффинный образ стандартного n-мерного шара $D^n \subset \mathbf{R}^n$). Верно ли, что D минимизирует n-мерную площадь среди всех n-мерных поверхностей в V с тем же краем?

В евклидовых пространствах положительный ответ тривиально доказывается с помощью ортогональной проекции. Для неевклидовых норм вопрос, несмотря на кажущуюся очевидность, остается открытым с середины 20-го века, когда он был явно сформулирован Буземаном [45]. (На самом деле он включает в себя несколько разных вопросов, так как имеются различные определения площади в нормированном пространстве, соответствующие различным определениям финслерова объема. Формулировка Буземана относилась к площади по Холмсу–Томпсону, которая определялась в терминах проекционных функций выпуклых тел.)

В случае гиперповерхностей (то есть для $n = \dim V - 1$) минимальность плоских областей известна и следует из классических теорем Минковского и Буземана о выпуклости тел сечений и проекций, см. [44] или [90, гл. 6–7]. В коразмерностях, больших 1, для стандартных определений площади известно немногое: положительные ответы для некоторых специальных типов норм и контрпримеры к более сильным утверждениям о выпуклой продолжимости, см. [19], [46]. Одним из результатов диссертации является положительный ответ на вопрос Буземана при $n = 2$ (для поверхностей, параметризованных диском), см. следствие 7.1.3.

Минимальность плоских поверхностей (или, на языке вариационного исчисления, полуэллиптичность интегранда площади) играет ключевую роль в вопросах о минимальных заполнениях и асимптотических объемах. А именно, это свойство является необходимым (а во многих задачах и достаточным) для финслеровых обобщений обсуждавшихся выше результатов. Эквивалентность полуэллиптичности площади и ряда свойств, важных для метрической геометрии, является основным результатом главы 6. Большая часть упомянутых выше результатов о римановых метриках является следствием этой общей теории и полуэллиптичности объема по Лёвнеру, которая также является одним из результатов диссертации (теорема 8.1.1 и следствие 8.1.2). Кроме упомянутых выше результатов, из свойств объема по Лёвнеру также следует полунепрерывность объема относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу (при некоторых топологических ограничениях), которая доказывается в главе 8.

6. Критерии полуэллиптичности. Понятие полуэллиптичности для произвольных n-мерных параметрических интеграндов было введено Альмгреном [16] и играет важную роль в вариационном исчислении и геометрической теории меры, см. [15, гл. 5]. Для интеграндов, инвариантных относительно параллельных переносов (к которым относятся площади в нормированных пространствах) полуэллиптичность — то же самое, что минимальность плоских поверхностей. Точнее, свойство полуэллиптичности состоит в том, что плоские поверхности минимизирую площадь в классе липшицевых цепей с целыми или вещественными коэффициентами. Таким образом, имеются разные варианты определения полуэллиптичности: над $\mathbf{Z}$ и над $\mathbf{R}$ (а также над другими кольцами, но они в диссертации не рассматриваются). Для удобства мы вводим еще одно понятие “топологическая полуэллиптичность” которая означает минимальность в классе поверхностей, параметризованных диском D^n (при $n \geq 3$ это эквивалентно полуэллиптичности над $\mathbf{Z}$).

Определение полуэллиптичности сложно для непосредственной проверки, поэтому важно иметь критерии, позволяющие доказывать полуэллиптичность конкретных интеграндов. К сожалению, практически единственным известным критерием является выпуклая продолжимость, то есть условие, что интегранд продолжается до выпуклой функции на n-кратном внешнем произведении $\Lambda^n V$. Проекционные функции выпуклых тел не обладают этим свойством (см. [46]), и именно этим вызвана сложность обсуждавшегося выше вопроса о минимальности плоских поверхностей.

Поэтому интересен вопрос о наличии других критериев, то есть о том, эквивалентны ли полуэллиптичность и выпуклая продолжимость. В диссертации доказано, что ответ положителен для полуэллиптичности над $\mathbf{R}$ (теорема 2.2.3) и отрицателен для полуэллиптичности над $\mathbf{Z}$ (теорема 2.6.1). Интересным следствием первого из этих результатов является обобщение на старшие коразмерности классической теоремы Минковского о существовании многогранника с данными направлениями и площадями граней (теорема 2.3.1).

Обозначения и соглашения

Следующие термины, обозначения и соглашения используются всюду без пояснений.

ω_n — мера Лебега единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

$\mathbf{R}^n_\infty$ — нормированное пространство $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где норма $\|\cdot\|_\infty$ определена равенством $\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$.

d_∞ — расстояние, определяемое нормой $\|\cdot\|_\infty$.

$G_k(V)$ и $G^+_k(V)$ — грассмановы многообразия неориентированных и ориентированных k-мерных линейных подпространств пространства V.

$G_{k,n} = G_k(\mathbf{R}^n)$; $G^+_{k,n} = G^+_k(\mathbf{R}^n)$.

$\Lambda^k V$ — k-кратное внешнее произведение $V \wedge \dots \wedge V$.

$\Lambda^k_s V$ — *грассманов конус* порядка k, то есть подмножество произведения $\Lambda^k V$, состоящее из k-векторов вида $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. Такие k-векторы называются *простыми*.

$\Lambda^k V^*$ — пространство внешних k-форм на V. Мы рассматриваем внешние k-формы как линейные функции на $\Lambda^k V$, в частности, запись $\omega(\sigma)$ обозначает действие k-формы ω на k-векторе σ.

Знак модуля $|\cdot|$, помимо абсолютной величины числа, также может обозначать евклидову норму, площадь и объем (при наличии в рассматриваемом пространстве евклидовой структуры).

Термин "многообразие" означает гладкое многообразие (класса C^∞), возможно, с краем. Через TM обозначается касательное расслоение многообразия M, через T_xM — его слой над точкой $x \in M$. Через UTM обозначается расслоение единичных касательных векторов (относительно рассматриваемой метрики).

Через $\dot\gamma$ или γ' обозначается вектор скорости дифференцируемой кривой γ в многообразии M, $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$.

Все геометрические объекты рассматриваются как метрические пространства, то есть снабжаются некоторыми естественно определенными расстояниями. Расстояние, определяемое римановой метрикой g, обозначается через d_g, аналогичное обозначение используется для норм, финслеровых метрик и т. п. Если для расстояния в пространстве X не зафиксировано обозначения, то оно обозначается через d_X или d.

Содержание работы и результаты

Диссертация состоит из введения и 10 глав, разбитых на параграфы. Главы 1 и 3 посвящены, в основном, обсуждению определений и не претендуют на оригинальность. В главах 2 и 4–6 изучаются общие вопросы, не зависящие от выбора определения объема. В главах 7–10 содержатся приложения к конкретным вопросам римановой и финслеровой геометрии.

Глава 1. Плотности и площади

Это вводная глава, ее цель — зафиксировать некоторые термины и обозначения, а также доказать ряд технических фактов, используемых в дальнейшем. В основном в этой главе рассматривается произвольный n-мерный параметрический интегранд θ в конечномерном векторном пространстве V, где $\dim V \geq n$, и определяемый им функционал A_θ, играющий роль "площади поверхности" и называемый *θ-площадью.* Для наших целей достаточно рассмотрения интеграндов, инвариантных относительно параллельных переносов, которые мы называем *n-плотностями.*

Изложение основано на полиэдральных структурах, так как они позволяют иметь дело с разрывными n-плотностями. Для непрерывных n-плотностей полиэдральные определения эквивалентны стандартным, основанным на липшицевых цепях или спрямляемых потоках, см. [15, §4.1].

В §1.1 вводятся бескоординатные аффинно инвариантные определения для стандартных понятий из теории меры и вариационного исчисления. Если X — n-мерное векторное пространство, то все инвариантные относительно параллельных переносов локально конечные меры на X пропорциональны друг другу и находятся во взаимно однозначном соответствии с нормами на пространстве $\Lambda^n X \simeq \mathbf{R}$, а именно, норма n-вектора $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ равна мере параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \ldots, v_n$. Мы называем такую норму на $\Lambda^n X$ *плотностью* соответствующей меры. Это соответствие между мерами на X и нормами на $\Lambda^n X$ подразумевается и используется всюду в дальнейшем.

Определение (1.1.1)**.** Пусть M — n-мерное многообразие. *Плотностью меры* (или просто *плотностью*) на M будем называть неотрицательную измеримую функцию $\nu : \Lambda^n TM \to \mathbf{R}$, сужение которой на каждый слой симметрично и положительно однородно. (Здесь $\Lambda^n TM$ — одномерное векторное расслоение над M, слоем которого над точкой $x \in M$ являются n-кратное внешнее произведение $\Lambda^n T_x M$.)

Такую структуру можно интегрировать по многообразию точно так же, как дифференциальную n-форму, при этом (в отличие от дифференциальной формы) интеграл не зависит от ориентации многообразия. Таким образом, функция ν определяет некоторую меру μ на M. Мы будем записывать это отношение между μ и ν формулой

$\mu = \int \nu$ или $\mu(U) = \int_U \nu$ для произвольного измеримого множества $U \subset M$.

Пусть V — конечномерное векторное пространство, $\dim V \geq n$.

Определение (1.1.3). *n-мерной плотностью* (или просто *n-плотностью*) в пространстве V будем называть любую локально ограниченную неотрицательную борелевскую функцию $\theta : \Lambda_s^n V \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условию положительной однородности: $\theta(t\sigma) = t\theta(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Lambda_s^n V$ и $t \geq 0$.

Такая функция θ называется *симметричной*, если $\theta(-\sigma) = \theta(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Lambda_s^n V$.

Естественные примеры n-плотностей симметричны и непрерывны. Разрывные и несимметричные n-плотности нужны для вспомогательных построений в некоторых доказательствах в главе 2.

Самыми важными примерами для наших целей являются плотности финслеровых площадей: если на V задана норма $\|\cdot\|$ и зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема (см. ниже), значение θ на простом n-векторе $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n$ полагается равным финслерову объему параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$, относительно нормы $\|\cdot\|$.

Если на V задана вспомогательная евклидова структура, достаточно определить n-плотность θ только на единичных простых n-векторах, то есть можно рассматривать θ как функцию на грассмановом многообразии $G_n^+(V)$.

Определение (1.1.4). *Липшицевой поверхностью* размерности n в пространстве V будем называть локально липшицево отображение $f : M \to V$, где M — n-мерное гладкое многообразие. Поверхность называется *ориентированной*, если ее область определения ориентирована.

По теореме Радемахера (см. [15, теорема 3.1.6]), любая липшицева поверхность $f : M \to V$ дифференцируема почти всюду. Ее дифференциал df есть почти всюду определенное измеримое отображение из TM в V, линейное на слоях. Он естественно индуцирует измеримое отображение $f_* : \Lambda^n TM \to \Lambda_s^n V$.

Определение (1.1.5). Пусть θ — n-плотность в V, $f : M \to V$ — n-мерная липшицева поверхность. Если θ симметрична, определим *θ-площадь* $A_\theta(f|_U)$ измеримого множества $U \subset M$ на поверхности f равенством

$$A_\theta(f|_U) = \int_U \theta \circ f_*.$$

Величину

$$A_\theta(f) = A_\theta(f|_M)$$

будем называть *θ-площадью* поверхности f.

В случае несимметричной n-плотности θ-площадь определяется аналогично, при этом поверхность должна быть ориентированной.

В §1.2 вводятся термины и обозначения, связанные с симплициальными структурами, и доказываются вспомогательные утверждения о параметризации цепей псевдомногообразиями и приближении их поверхностями. *n-мерным симплексом* (или просто *n-симплексом*) в пространстве V будем называть выпуклую оболочку набора $n+1$ точек из V, называемых *вершинами* симплекса, вместе с указанием порядка этих точек. По определению, *n-мерная цепь* в пространстве V — это формальная линейная комбинация вида $\sum_{i=1}^{N} a_i \Delta_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$, Δ_i — n-симплексы в V. Такие цепи образуют векторное пространство, обозначаемое через $S_n(V)$. Множество цепей с коэффициентами из кольца $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ обозначается через $S_n(V; \mathbf{K})$. Граница ∂s цепи $s \in S_n(V)$ определяется стандартным образом. Каждое кусочно линейное отображение n-мерного многообразия (более общо, псевдомногообразия) в пространство V естественным образом параметризует целочисленную цепь. Для n-плотности θ и цепи $s \in S_n(V)$ естественным образом определяется θ-площадь $A_\theta(s)$.

В §1.3 вводится ключевое понятие полуэллиптичности n-плотности θ. Свойство полуэллиптичности состоит в том, что области в n-мерных аффинных подпространствах минимизируют площадь среди всех "поверхностей" с тем же краем. Уточнение класса "поверхностей" приводит к различным вариантам определения: полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$, над $\mathbf{R}$ и топологическая полуэллиптичность.

Определение (1.3.2)**.** Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ — подкольцо (например, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{Z}$). n-плотность θ в пространстве V называется *полуэллиптической* над $\mathbf{K}$ если любой n-симплекс Δ имеет минимальную θ-площадь среди всех цепей $s \in S_n(V; \mathbf{K})$, для которых $\partial s = \partial \Delta$.

θ называется *топологически полуэллиптической*, если любой невырожденный n-симплекс $\Delta \subset V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех кусочно линейных поверхностей, параметризованных симплексом Δ так, что параметризация тождественна на краю.

Ясно, что полуэллиптичность n-плотности над $\mathbf{R}$ влечет ее полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$. Полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$, очевидно, влечет топологическую полуэллиптичность, а при $n \geq 3$ эти два свойства эквивалентны, см. [63, App. 2, Prop. A′]. Хотя топологическая полуэллиптичность как отдельное свойство интересна лишь для двумерных площадей, она позволяет упростить формулировки некоторых результатов о финслеровых объемах в следующих главах. Из топологической полуэллиптичности n-плотности следует ее непрерывность, это доказывается в следствии 1.3.8.

Определение (1.3.5)**.** n-плотность θ в пространстве V называется *выпукло продолжимой*, если существует такая выпуклая положительно однородная функция

$$\tilde{\theta} : \Lambda^n V \to \mathbf{R}_+,$$

что $\tilde{\theta}|_{\Lambda_s^n V} = \theta$.

Хорошо известно, что выпуклая продолжимость n-плотности влечет ее полуэллиптичность над $\mathbf{R}$.

В оставшихся двух параграфах главы рассматриваются вспомогательные понятия заполняющей θ-площади и полуэллиптической оболочки n-плотности θ, а также эквивалентные переформулировки понятий полуэллиптичности на языке липшицевых поверхностей. В частности, в предложении 1.5.1(1) доказывается, что непрерывная симметричная n-плотность θ топологически полуэллиптична тогда и только тогда, когда любой аффинный диск $E : D^n \to V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех липшицевых поверхностей вида $f : D^n \to V$ таких, что $f|_{\partial D^n} = E|_{\partial D^n}$. (Аффинным диском называется любое невырожденное аффинное отображение стандартного евклидова шара D^n или образ шара при таком отображении.)

Глава 2. Полуэллиптичность над R и Z

Целью этой главы является выяснение соотношений между различными видами полуэллиптичности. В случае $n = \dim V - 1$ хорошо известно, что все виды полуэллиптичности эквивалентны выпуклости плотности (заметим, что в этом случае все n-векторы простые, то есть $\Lambda_s^n V = \Lambda^n V$ — векторное пространство). В главе рассматриваются аналогичные вопросы для старших коразмерностей. Результаты этой главы получены совместно с Д. Бураго и опубликованы в статье [40].

В §2.1 вводится вспомогательное понятие результирующего n-вектора цепи.

Определение (2.1.1)**.** Для n-симплекса Δ с вершинами $p_0, p_1, \ldots, p_n$ определим результирующий n-вектор $\mathbf{I}(\Delta) \in \Lambda_s^n V$ равенством

$$\mathbf{I}(\Delta) = \frac{1}{n!} \bigwedge_{i=1}^{n} (p_i - p_0).$$

Другими словами, если Δ невырожден, то $\mathbf{I}(\Delta)$ — единственный простой n-вектор, лежащий в n-мерном подпространстве, сонаправленном с Δ и имеющий такую же и площадь, как Δ; если же Δ вырожден, то $\mathbf{I}(\Delta) = 0$.

Результирующий вектор $\mathbf{I}(s)$ цепи $s \in S_n(V)$ определяется по линейности.

Аналогично определяется результирующий вектор любой ориентированной n-мерной липшицевой поверхности. Легко проверить, что результирующий вектор цепи или поверхности однозначно определяется границей этой цепи или поверхности.

В §2.2 доказывается

Теорема (2.2.3)**.** *n-плотность θ в пространстве V полуэллиптична над $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда она выпукло продолжима.*

Доказательство основано на идеях, аналогичных доказательству двойственности стабильных норм в гомологиях и когомологиях римановых многообразий, см. [62]. А именно, пользуясь минимальностью плоских поверхностей, с помощью теоремы Хана–Банаха для данной n-плотности и любого n-мерного подпространства строится калибрующая внешняя форма. Из существования таких форм следует выпуклая продолжимость.

Несмотря на естественность формулировки и относительно типовой метод доказательства, результат, по-видимому, является новым.

В §2.3 доказывается

Теорема (2.3.1). *Пусть $n < N$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — попарно различные ориентированные n-мерные линейные подпространства в $\mathbf{R}^N$, и пусть числа $a_1, \dots, a_m > 0$ таковы, что $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$, где $\overline{\alpha}_i \in \Lambda^n_s \mathbf{R}^N$ — единичный простой n-вектор, соответствующий подпространству α_i.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутая ориентированная n-мерная кусочно линейная поверхность в $\mathbf{R}^N$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для каждого $i = 1, \dots, m$ сумма (евклидовых) площадей всех граней, сонаправленных с α_i, равна a_i.

2. Сумма площадей всех граней, не сонаправленных ни с одним из подпространств α_i, меньше ε.

Эта теорема обобщает на старшие коразмерности классическую теорему Минковского (см. [78], а также [1, гл. VII]) о существовании выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями $(N-1)$-мерных граней. Условие $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$ является необходимым и соответствует условию из теоремы Минковского: сумма единичных внешних нормалей, умноженных на площади граней, равна нулю.

Теорема 2.3.1 не является прямым обобщением теоремы Минковского, так как она не гарантирует выпуклости (которая просто не имеет смысла в старших коразмерностях) и требует наличия "дополнительных" граней сколь угодно малой площади. Эти дополнительные грани необходимы, так как уже в $\mathbf{R}^4$ можно построить такой набор плоскостей α_i и коэффициентов a_i, что условие $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$ выполнено, но плоскости попарно трансверсальны (не имеют общих прямых). Из таких направлений невозможно построить кусочно линейную поверхность (без дополнительных граней), так как соседние грани поверхности должны иметь общие ребра.

Идея доказательства теоремы 2.3.1 состоит в применении теоремы 2.2.3 к полуэллиптической оболочке специальной n-плотности, которая равна нулю на подпространствах α_i и евклидовой площади на остальных n-мерных направлениях.

В §2.4 вводится понятие взвешенного гауссова образа n-мерной поверхности в $\mathbf{R}^N$.

Определение (2.4.1). *Взвешенным гауссовым образом* n-мерной ориентированной липшицевой поверхности $f : M \to \mathbf{R}^N$ назовем борелевскую меру G_f на $G^+_{n,N} =$

$G_n^+(\mathbf{R}^N)$, определяемую равенством

$$G_f(U) = \bigl|\{x \in M : T_x f \in U\}\bigr|,$$

для каждого борелевского подмножества $U \subset G_{n,N}^+$, где модуль означает n-мерную евклидову площадь на поверхности (индуцируемую параметризацией f).

Если поверхность f кусочно линейна, то определение принимает более простой вид. А именно, в этом случае G_f сосредоточена на конечном множестве, и мера точки $\alpha \in G_{n,N}^+$ равна сумме площадей всех граней поверхности, сонаправленных с α.

Легко проверить, что результирующий n-вектор $\mathbf{I}(f)$ поверхности однозначно определяется мерой G_f, а именно $\mathbf{I}(f)$ равен результирующему n-вектору $\mathbf{I}(G_f)$, где результирующий n-вектор меры μ на $G_{n,N}^+$ определяется равенством

$$\mathbf{I}(\mu) = \int_{G_{n,N}^+} i \, d\mu,$$

где $i : G_{n,N}^+ \to \Lambda^n \mathbf{R}^N$ — отображение, сопоставляющее подпространству $\alpha \in G_n^+(V)$ представляемый им простой единичный n-вектор.

Поскольку $\mathbf{I}(f)$ определяется границей поверхности, фиксирование границы задает соответствующее линейное ограничение на меру G_f, в частности, $\mathbf{I}(G_f) = 0$ для замкнутой поверхности. Теорема 2.3.1 означает, что это необходимое условие является и достаточным для существования замкнутой поверхности, взвешенный гауссов образ которой сколь угодно близок к данной мере.

В §2.5 рассматривается аналогичный вопрос для поверхностей с заданным краем, лежащим в n-мерном подпространстве. Оказывается, что в этом случае существуют дополнительные нелинейные ограничения на взвешенный гауссов образ.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Ориентированную плоскость (e_1, e_2) будем обозначать через e_{12} и называть *горизонтальной* плоскостью, а ориентированную плоскость (e_3, e_4) будем обозначать через e_{34} и называть *вертикальной* плоскостью. Введем на $G_2^+(\mathbf{R}^4)$ стандартную угловую метрику. Для $\alpha \in G_2^+(\mathbf{R}^4)$ через $U_\varepsilon(\alpha)$ будем обозначать ε-окрестность плоскости α в этой метрике.

Одно из нелинейных ограничений на гауссов образ содержится в следующей теореме.

Теорема (2.5.1)**.** *Пусть f — компактная связная ориентированная двумерная липшицева поверхность в $\mathbf{R}^4$, край которой — положительно ориентированная простая замкнутая кривая в горизонтальной плоскости. Тогда взвешенный гауссов образ G_f этой поверхности удовлетворяет неравенству*

$$G_f(G_{2,4}^+ \setminus U_\varepsilon(e_{12}) \setminus U_\varepsilon(e_{34})) \geq \frac{1}{300} G_f(e_{34})$$

для $\varepsilon = 10^{-10}$.

Доказательство теоремы основано на изопериметрических неравенствах для шаров внутренней метрики поверхности и их проекций на координатные плоскости.

Следствие (2.5.5). *Рассмотрим в* $\mathbf{R}^4$ *простые единичные 2-векторы*

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_3) \wedge (e_2 + e_4), \\ w_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_3) \wedge (e_2 - e_4), \\ w_3 &= e_4 \wedge e_3, \end{aligned}$$

и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *— соответствующие им ориентированные плоскости. Существуют такая окрестность* U *множества* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *в* $G^+_{2,4}$ *и такая константа* $c > 0$, *что верно следующее.*

Для любой компактной ориентированной двумерной кусочно линейной поверхности f *в* $\mathbf{R}^4$, *граница которой — положительно ориентированная простая кривая в координатной плоскости* e_{12}, *ограничивающая единичную площадь, имеет место неравенство*

$$G_f(G^+_{2,4} \setminus U) \geq c,$$

где G_f *— взвешенный гауссов образ поверхности.*

Это следствие демонстрирует, что аналог теоремы 2.3.1 для поверхностей с фиксированным краем неверен. Действительно, $w_1 + w_2 + w_3 = e_1 \wedge e_2$, поэтому линейное ограничение на $\mathbf{I}(f)$ не противоречит существованию поверхности, край которой ограничивает единичную область в e_{12}, а направления граней, за исключением сколь угодно малой площади, параллельны ориентированным плоскостям $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

В §2.6 из этого наблюдения и теоремы 2.2.3 выводится

Теорема (2.6.1). *Существует непрерывная симметричная 2-плотность в* $\mathbf{R}^4$, *полуэллиптичная над* $\mathbf{Z}$, *но не над* $\mathbf{R}$.

Глава 3. Финслеровы объемы

Это еще одна вводная глава, в ней собраны предварительные сведения о финслеровых метриках и финслеровых объемах и доказаны необходимые для дальнейшего вспомогательные факты.

В §3.1 рассматриваются конечномерные нормированные пространства. Норма $\|\cdot\|$ на векторном пространстве V однозначно определяется своим единичным шаром $B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$, который является симметричным относительно 0 выпуклым телом. Хорошо известно, что среди всех эллипсоидов, содержащихся в B, существует единственный эллипсоид максимального объема [70]. Он называется *эллипсоидом Джона* тела B. Эллипсоидом Джона нормы $\|\cdot\|$ будем называть эллипсоид Джона ее единичного шара. Он является единичным шаром некоторой положительно определенной квадратичной формы $Q \geq \|\cdot\|^2$.

Важную роль играет специальное представление формы Q через опорные элементы тела B (предложение 3.1.1), аналогичное известному представлению Болла [26], но учитывающее симметрию. Это представление было впервые использовано в совместной с Д. Бураго работе [35] для доказательства гипотезы Хопфа о торах без сопряженных точек.

В §3.2 собраны предварительные сведения из финслеровой геометрии. *Симметричная финслерова структура* (далее просто *финслерова структура*) на гладком многообразии M — это непрерывная функция $\varphi : TM \to \mathbf{R}_+$ такая, что для любой точки $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_xM}$ является нормой на векторном пространстве T_xM. Мы будем обозначать это сужение через φ_x или $\|\cdot\|_x$, если из контекста ясно, какая функция φ имеется в виду. Значение $\varphi(v)$, где $v \in TM$, называется *длиной* касательного вектора v (относительно φ).

Финслеровы структуры также называют *финслеровыми метриками.* Многообразие, снабженное финслеровой структурой, называется *финслеровым многообразием.*

Примерами финслеровых многообразий являются римановы многообразия, конечномерные нормированные пространства и гладкие поверхности в них. Так же, как в римановом случае, для финслерова многообразия (M, φ) определяется длина $L_\varphi(\gamma)$ гладкой кривой γ и функция расстояния $d_\varphi : M \times M \to \mathbf{R}$.

Финслерова структура φ называется *гладкой*, если функция $\varphi : TM \to \mathbf{R}$ является гладкой (класса C^∞) вне нулевого сечения, и *строго выпуклой*, если для любой точки $x \in M$ второй дифференциал функции $\varphi^2|_{T_xM}$ положительно определен всюду на $T_xM \setminus \{0\}$. Гладкость и строгая выпуклость финслеровой метрики обеспечивают наличие гладких геодезических и геодезического потока на финслеровом многообразии.

В §§3.3,3.4 обсуждается понятие объема для финслеровых метрик. Мы не фиксируем определение объема, но требуем, чтобы он удовлетворял некоторым естественным требованиям. А именно, n-мерный финслеров объем сопоставляет каждому n-мерному финслерову многообразию (M, φ) борелевскую меру vol_φ на M так, что выполняются следующие свойства:

1. Мера vol_φ монотонно зависит от φ, то есть $\mathrm{vol}_{\varphi'} \le \mathrm{vol}_\varphi$, если $\varphi' \le \varphi$.

2. Мера сохраняется при изометриях, то есть если (M, φ) и (M', φ') — n-мерные финслеровы многообразия, $f : M \to M'$ — инъективное гладкое отображение, такое, что $\varphi = \varphi' \circ df$, то $\mathrm{vol}_{\varphi'}|_{f(M)} = f_* \mathrm{vol}_\varphi$, где звездочка обозначает перенос меры отображением f.

3. Если $M = \mathbf{R}^n$ и φ — стандартная евклидова структура, то vol_φ — стандартный евклидов объем (n-мерная мера Лебега).

Некоторые авторы (см., например [43], [90]) вместо условия монотонности накладывают более слабое требование непрерывности. Условие монотонности выполняется для всех естественных определений объема и существенно для применения техники, развиваемой в диссертации.

Для определения n-мерного финслерова объема достаточно задать его только для n-мерных нормированных пространств . Объем в n-мерном нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ пропорционален мере Лебега (так как сохраняется при параллельных переносах), поэтому задается нормой на одномерном пространстве $\Lambda^n V$. Эти соображения приводят к следующему определению.

Определение (3.4.1)**.** Пусть n — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что задан *функционал n-мерного финслерова объема* (или просто n-мерного объема), если каждому n-мерному нормированному пространству $(V, \|\cdot\|)$ сопоставлена норма $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ на $\Lambda^n V$ так, что выполняются следующие свойства.

1. Монотонность: если $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на одном векторном пространстве и $\|\cdot\| \le \|\cdot\|'$, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}$.

2. Инвариантность относительно изометрий: если $(V, \|\cdot\|)$ и $(V', \|\cdot\|')$ — n-мерные нормированные пространства, $f : V \to V'$ — линейная изометрия между ними, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\sigma) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}(f_*(\sigma))$ для всех $\sigma \in \Lambda^n V$, где звездочка обозначает естественное действие изоморфизма на n-формах.

3. Если $|\cdot|$ — евклидова норма, то $\mathrm{vol}_{|\cdot|}$ — соответствующий евклидов объем.

Если задан функционал $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ n-мерного финслерова объема, то объем vol_φ на финслеровом многообразии (M, φ) естественно определяется интегрированием плотности, а именно

$$\mathrm{vol}_\varphi = \int \nu_\varphi,$$

где ν_φ — плотность меры на M, определяемая равенством

$$\nu_\varphi(\sigma) = \mathrm{vol}_{\varphi_x}(\sigma), \qquad \sigma \in \Lambda^n T_x M,\ x \in M,$$

где $\varphi_x = \varphi|_{T_x M}$.

Отметим, что для определения объема в нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ достаточно задать объем одного множества (ограниченного и имеющего непустую внутренность). Например, объем по Буземану (наиболее известный из финслеровых объемов) задается условием, что объем единичного шара в n-мерном нормированном пространстве не зависит от нормы и равен ω_n.

В дальнейшем особое внимание уделяется двум конкретным функционалам финслерова объема: объему по Холмсу–Томпсону и объему по Лёвнеру.

Объем по Холмсу–Томпсону [68], иногда также называемый *симплектическим финслеровым объемом*, может быть определен следующим образом. Пусть $\|\cdot\|$ —

произвольная норма в $\mathbf{R}^n$, тогда объем $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ нормируется условием

$$\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}([0,1]^n) = \frac{1}{\omega_n}|B^*|,$$

где модуль обозначает меру Лебега в $\mathbf{R}^n$, B^* — полярное множество единичного шара B нормы $\|\cdot\|$.

Полезность этого объема обусловлена тем, что объем по Холмсу–Томпсону финслерова многообразия (M,φ) равен, с точностью до множителя $\frac{1}{\omega_n}$, каноническому симплектическому объему единичного кокасательного расслоения, который, в свою очередь, соответствует инвариантной относительно геодезического потока мере Лиувилля на единичном касательном расслоении. Для многих вопросов дифференциальной и интегральной геометрии, а также теории динамических систем, объем по Холмсу–Томпсону оказывается более естественным и удобным, чем более традиционный объем по Буземану. В диссертации он применяется для доказательства двумерного случая гипотезы о минимальном заполнении.

Объем по Лёвнеру [90, 5.1.4(iv)], или *вписанный риманов объем*, можно определить следующим образом. Пусть $(V,\|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство, E — эллипсоид Джона единичного шара нормы $\|\cdot\|$. Тогда объем $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ нормируется условием

$$\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(E) = \omega_n.$$

Объем по Лёвнеру финслерова многообразия (M,φ) равен инфимуму объемов всех римановых метрик g на M, удовлетворяющих неравенству $g \geq \varphi^2$.

Для целей финслеровой геометрии этот объем не удобен, но он оказывается полезным для оценок римановых объемов, требующих вспомогательных финслеровых построений. В частности, именно это определение объема обеспечивает совпадение заполняющих объемов в классах римановых и финслеровых метрик и, как следствие, соответствие между минимальными заполнениями и минимальными поверхностями.

В последнем параграфе главы содержатся некоторые технические факты, полезные для дальнейшего. В частности, там даны выражения для плотностей рассматриваемых объемов и показано, что отношение любых двух функционалов n-мерного объема ограничено константой, зависящей только от размерности.

Глава 4. Липшицевы метрики

В этой главе строится технический аппарат для работы с произвольными липшицевыми метриками на многообразиях и липшицевыми поверхностями в бесконечномерных банаховых пространствах. Результаты опубликованы в статье [11].

Главной целью является определение площади липшицевой поверхности в банаховом пространстве. Для того, чтобы такое определение было полезным, оно должно быть согласованным как с внешней геометрией поверхности (т. е. вычисляться через производные параметризующего отображения), так и с внутренней геометрией (т. е. метрикой на многообразии, индуцированной этим отображением). Класс банаховых пространств, для которых определение работает, должен включать области значений вложений Куратовского, то есть пространства вида $L^\infty(\mu)$, где μ — σ-конечная мера.

Одна из возникающих трудностей — отсутствие теоремы Радемахера о дифференцируемости почти всюду для липшицевых отображений со значениями в L^∞. Другая — недостаточная регулярность индуцированных метрик (это, по существу, произвольные липшицевы метрики).

В §4.1 содержатся предварительные сведения из метрической геометрии. Некоторые общеизвестные факты снабжены доказательствами, так как отсутствуют в литературе в требуемой общности.

Мы понимаем термины "метрическое пространство" и "метрика" в расширенном смысле, а именно, допускаются нулевые расстояния между различными точками. (При этом все рассматриваемые метрики непрерывны относительно предписанной топологии на рассматриваемых пространствах.)

Необходимость рассмотрения такой общности вызвана использованием следующей конструкции. Пусть X — банахово пространство (более общо, метрическое пространство), M — многообразие, $f : M \to X$ — непрерывное отображение (поверхность). Тогда на M существует единственная метрика, обозначаемая f^*d_X, относительно которой f является изометрическим отображением, а именно

$$f^*d_X(x, y) = d_X(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\|_X.$$

Многие инварианты поверхности f определяются или вычисляются по этой метрике, но она не обязательно положительна, если f не инъективно.

Если из контекста ясно, о какой метрике идет речь, мы обозначаем расстояние между точками x и y через $|xy|$ или $|x, y|$. Отображение $f : X \to Y$ между метрическими пространствами называется *нерастягивающим*, если оно не увеличивает расстояния, и *изометрическим*, если оно сохраняет расстояния, то есть $|f(x)f(y)| = |xy|$ для любых $x, y \in X$.

В дальнейшем важную роль играют конечномерные приближения изометрических вложений Куратовского, обеспечиваемые следующим предложением.

Предложение (4.1.5)**.** *Пусть (X, d) — сепарабельное метрическое пространство. Тогда существует неубывающая последовательность $\{d_n\}$ метрик на X, сходящаяся к d равномерно на компактах и такая, что для каждого n пространство (X, d_n) допускает изометрическое отображение в $\mathbf{R}^n_\infty$.*

Кривая (или *путь*) в топологическом пространстве X — это непрерывное отображение вида $\gamma : [a, b] \to X$, где $a \le b$. Длина $L(\gamma) = L_d(\gamma)$ кривой γ в метрическом пространстве (X,d) определяется стандартным образом как супремум длин "вписанных ломаных" (пунктиров).

Определение (4.1.12)**.** Пусть $\gamma : [a,b] \to X$ — кривая в метрическом пространстве. Определим *верхнюю метрическую скорость* $\overline{s}_\gamma(t)$ кривой γ в точке $t \in [a,b]$ равенством

$$\overline{s}_\gamma(t) = \varlimsup_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t-t'|}.$$

Аналогичный нижний предел называется *нижней метрической скоростью* и обозначается $\underline{s}_\gamma(t)$. Если верхняя и нижняя скорости совпадают, то их общее значение называется *метрической скоростью* и обозначается через $s_\gamma(t)$.

Если кривая $\gamma : [a,b] \to X$ в метрическом пространстве X абсолютно непрерывна, то метрическая скорость $s_\gamma(t)$ определена и конечна для почти всех $t \in [a,b]$, и при этом

$$L(\gamma) = \int_a^b s_\gamma(t)\,dt.$$

(предложение 4.1.13).

В §4.2 рассматривается *касательная финслерова структура* (аналог касательного конуса) произвольной липшицевой метрики на многообразии M. Построение аналогично изложенному в [51], но отличается некоторыми деталями и большей общностью.

Метрика d на M называется *липшицевой*, если она локально липшицева относительно (произвольной) вспомогательной римановой метрики d_{riem}, то есть для любой точки $x \in M$ существуют такая окрестность $U \ni x$ и такое $C > 0$, что

$$d(y,z) \le C \cdot d_{riem}(y,z)$$

для любых $y, z \in U$.

Определение (4.2.3)**.** Пусть d — липшицева метрика на M. Для каждого $v \in TM$ определим число $\varphi_d(v)$ равенством

$$\varphi_d(v) = \overline{s}_\gamma(0),$$

где γ — произвольная дифференцируемая в нуле кривая вида $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, такая, что $\dot\gamma(0) = v$, $\overline{s}_\gamma$ — верхняя метрическая скорость относительно d. Определенную таким образом функцию $\varphi_d : TM \to \mathbf{R}$ будем называть *касательной финслеровой структурой* метрики d.

Касательная финслерова структура корректно определена и является локально ограниченной борелевской функцией на TM. Кроме того, она обладает следующими полезными свойствами:

- Является полунормой на почти каждом слое T_xM, $x \in M$.
- Сохраняется при переходе к индуцированной внутренней метрике.
- Если липшицева метрика d является пределом неубывающей последовательности $\{d_n\}$ метрик на M, то $\varphi_{d_n} \to \varphi_d$ почти всюду на TM.

В §4.3 определяется понятие объема липшицевой метрики. Точнее для каждого функционала n-мерного финслерова объема строится его естественное продолжение с класса финслеровых метрик на класс всех липшицевых метрик на n-мерных многообразиях. Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$.

Определение (4.3.1)**.** Пусть d — липшицева метрика на n-мерном гладком многообразии M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Рассмотрим плотность $\nu = \nu_d$ на M, значение которой на n-векторе $\sigma \in \Lambda^n T_xM$ равно $\mathrm{vol}_{\varphi|_{T_xM}}(\sigma)$, если $\varphi|_{T_xM}$ — норма, и 0 в противном случае. Меру $\mathrm{vol}_d = \int \nu_d$ будем называть *объемом* липшицевой метрики d.

Так определенный объем согласован с финслеровым объемом, обладает свойством монотонности относительно метрики, не увеличивается при нерастягивающих отображениях, сохраняется при переходе к индуцированной внутренней метрике и выдерживает предельный переход по неубывающим последовательностям метрик. Кроме того, он согласован с понятием площади, введенным в главе 1.

А именно, для любого метрического пространства X и липшицевой поверхности $f : M \to X$ определим площадь $\mathrm{area}(f)$ равенством $\mathrm{area}(f) = \mathrm{vol}_{f^*d_X}(M)$. Тогда в случае конечномерного нормированного пространства X верно равенство

$$\mathrm{area}(f) = A_\theta(f),$$

где θ — плотность n-мерной площади в пространстве X, определяемая данным функционалом финслерова объема.

В §4.4 вводится понятие слабой дифференцируемости липшицева отображения $f : M \to L^\infty$ (получаемое из обычной дифференцируемости переходом к слабой топологии) и доказывается аналог теоремы Радемахера о слабой дифференцируемости почти всюду (теорема 4.4.3). Отметим, что обычная теорема Радемахера в L^∞ неверна, так как это пространство не обладает свойством Радона–Никодима, см. [29, гл. 5].

Слабая дифференцируемость определяется для отображений со значениями в любом пространстве X^*, сопряженном сепарабельному банахову пространству X. В важнейшем случае, когда областью значений является L^∞, в качестве X следует брать соответствующее пространство L^1.

Определение (4.4.1)**.** Пусть X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — произвольное отображение. Для каждого $u \in X$ рассмотрим функцию f_u :

$M \to \mathbf{R}$, заданную равенством

$$f_u(x) = \langle f(x), u \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ обозначает стандартное спаривание X^* и X. Будем говорить, что f *слабо дифференцируема* в точке $p \in M$, если существует такое линейное отображение $L : T_pM \to X^*$, что для любого $u \in X$ функция f_u дифференцируема в точке p и ее дифференциал удовлетворяет равенству

$$d_p f_u(v) = \langle L(v), u \rangle \qquad \text{для всех } v \in T_pM.$$

Отображение L будем называть *слабым дифференциалом* f в точке p и обозначать через $d_p^w f$.

Теорема (4.4.3)**.** *Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Тогда любое липшицево отображение $f : M \to X^*$ слабо дифференцируемо почти всюду на M.*

В §4.5 доказывается согласованность почти всюду слабого дифференциала отображения и касательной финслеровой структуры индуцированной метрики на M, а именно

Теорема (4.5.1)**.** *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура, X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — изометрическое отображение пространства (M, d). Тогда для почти всех точек $p \in M$ слабый дифференциал $d_p^w f$ является изометрическим отображением из $(T_pM, \varphi|_{T_pM})$ в X^*, то есть*

$$\varphi_d(v) = \|d_p^w f(v)\|$$

для всех $v \in T_pM$.

Как следствие, слабый дифференциал любого нерастягивающего отображения $f : M \to X^*$ является нерастягивающим линейным отображением (относительно касательной финслеровой структуры) в почти каждом слое T_xM, $x \in M$.

Отметим, что кажущееся естественным утверждение о том, что слабый дифференциал изометрического отображения сам является изометрическим всюду, где он определен, на самом деле неверно. Доказательство теоремы основано на более тонких свойствах, использующих конечномерные приближения.

Важным следствием теоремы является аналогичная конечномерному случаю согласованность "внутреннего" определения площади поверхности (как объема индуцированной липшицевой метрики) и "внешнего", получаемого интегрированием плотности, индуцируемой слабым дифференциалом (следствие 4.5.3).

В §4.6 дается явное выражение для слабого дифференциала липшицева отображения $f : M \to L^\infty(S)$, где S — произвольное пространство с конечной мерой. А именно, каждому такому отображению f соответствует семейство липшицевых "координатных функций" $\{f_s\}_{s\in S}$, $f_s : M \to \mathbf{R}$, связанное с f соотношением

$$f(x)(s) = f_s(x)$$

для всех $x \in M$ и (при фиксированном x) для почти всех $s \in S$ (предложение 4.6.2). Координатные функции слабого дифференциала получаются дифференцированием координатных функций отображения (предложение 4.6.5).

Глава 5. Заполняющие объемы

В этой главе рассматриваются заполняющие объемы по Громову и минимальные заполнения. Целью является установление соответствия между минимальными заполнениями и минимизирующими площадь поверхностями в банаховых пространствах. Результаты опубликованы в статье [11].

В §5.1 вводится определение заполняющего объема и минимального заполнения, учитывающее необходимость рассмотрения более широкого класса метрик, чем римановы. Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема. Тогда, согласно главе 4, каждому n-мерному многообразию M с липшицевой метрикой d сопоставляется мера vol_d на M.

Определение (5.1.1)**.** Пусть S — замкнутое многообразие, $d : S \times S \to \mathbf{R}_+$ — произвольная метрика на S. Будем называть компактное многообразие M с метрикой d_M *заполнением* пространства (S, d), если $\partial M = S$ и

$$d_M(x, y) \geq d(x, y)$$

для любых $x, y \in S$. В этом случае будем также говорить, что (M, d_M) *заполняет* (S, d).

Определение (5.1.4)**.** Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс компактных n-мерных многообразий с липшицевыми метриками. Пусть S — $(n-1)$-мерное многообразие, d_0 — липшицева метрика на S. Будем называть *заполняющим объемом* пространства (S, d_0) в классе $\mathfrak{M}$ (относительно данного функционала объема) величину

$$\mathrm{FillVol}_{\mathfrak{M}}(S, d_0) = \inf_{(M,d)\in\mathfrak{M}} \{\mathrm{vol}_d(M) : (M, d) \text{ заполняет } (S, d_0)\}.$$

Будем называть метризованное многообразие $(M, d) \in \mathfrak{M}$ *минимальным заполнением* в классе $\mathfrak{M}$, если $\mathrm{vol}_d(M)$ равно заполняющему объему пространства $(\partial M, d|_{\partial M\times\partial M})$ в классе $\mathfrak{M}$.

Стандартные определения, применяемые "по умолчанию", соответствуют классу $\mathfrak{M}$ всех римановых многообразий. Отметим, что в этом случае выбор функционала объема не важен, так как на классе римановых метрик объем определен однозначно.

В §5.2 доказываются технические результаты о сглаживании липшицевых метрик, из которых выводится

Теорема (5.2.3). *Пусть M — n-мерное многообразие, $S = \partial M$, d_0 — метрика на S. Тогда*

1. Заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе всех липшицевых метрик на M равен его заполняющему объему в классе гладких строго выпуклых финслеровых метрик на M.

2. Если в качестве функционала объема выбран объем по Лёвнеру, то этот заполняющий объем также равен заполняющему объему в классе всех римановых метрик на M.

Следствие (5.2.4). *Если риманово многообразие M является минимальным заполнением, то любое его компактное подмногообразие $M_1 \subset M$ той же размерности тоже является минимальным заполнением.*

В §5.3 доказываются вспомогательные факты о продолжении нерастягивающих отображений со значениями в L^∞. Из них в §5.4 выводится

Теорема (5.4.1). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное n-мерное многообразие, $S = \partial M$. Пусть d_0 — метрика на S, $f : (S, d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе липшицевых (или, что то же самое, гладких строго выпуклых финслеровых) метрик на M равен*

$$\inf\{\operatorname{area}(F) : F : M \to X \text{ — \textit{липшицево}, } F|_S = f\}.$$

Для минимальных заполнений имеем

Следствие (5.4.2). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, (M, d) — компактное многообразие с липшицевой метрикой. Тогда для любого изометрического отображения $F : (M, d) \to X$ верно следующее: (M, d) является минимальным заполнением в классе всех многообразий с липшицевыми метриками тогда и только тогда, когда F минимизирует площадь среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

Подчеркнем, что вышеуказанные результаты верны для любого определения финслерова объема. Для изучения минимальных заполнений в римановой категории достаточно в качестве определения объема выбрать объем по Лёвнеру.

Следствие (5.4.3). *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное многообразие, $S = \partial M$. Пусть d_0 — метрика на S, $f : (S, d_0) \to$*

X — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе римановых метрик на M равен

$$\inf\{\operatorname{area}(F) : F : M \to X \text{ — липшицево, } F|_S = f\},$$

где area *— площадь, определяемая объемом по Лёвнеру.*

Следствие (5.4.4)**.** *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное риманово многообразие. Тогда для любого изометрического отображения $F : M \to X$ верно следующее: M является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда F минимизирует площадь по Лёвнеру среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

Подставляя в качестве изометрического отображения представление краевыми расстояниями, получаем

Следствие (5.4.5)**.** *Компактное риманово многообразие M с выпуклым краем и минимальными геодезическими является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда его представление краевыми расстояниями в $L^\infty(\partial M)$ минимизирует площадь по Лёвнеру среди всех липшицевых поверхностей в $L^\infty(\partial M)$ с тем же краем.*

Глава 6. Следствия полуэллиптичности

Будем называть функционал n-мерного финслерова объема *топологически полуэллиптическим*, если в любом конечномерном нормированном пространстве X (любой размерности $\geq n$) порождаемая этим функционалом плотность n-мерной площади топологически полуэллиптична (то есть n-мерные плоские поверхности минимизируют площадь в классе поверхностей, параметризованных n-мерным диском).

В этой главе доказывается эквивалентность полуэллиптичности объема и нескольких важных гипотез метрической геометрии. В §§6.1–6.3 гипотезы выводятся из полуэллиптичности, в §6.4 доказывается их эквивалентность (теорема 6.4.1). В доказательствах используется техника вспомогательных вложений, аналогичная предыдущей главе. Результаты получены совместно с Д. Бураго и опубликованы в статье [39].

Первой из гипотез является минимальность плоских заполнений.

Теорема (6.1.2)**.** *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то верно следующее.*

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство, $D \subset V$ — n-мерный аффинный диск. Тогда D с метрикой $d_{\|\cdot\|}$ является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D.

Вторая гипотеза — полунепрерывность объема снизу относительно равномерной сходимости метрик.

Теорема (6.2.1)**.** *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то он полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик, а именно верно следующее.*

Пусть M — многообразие размерности n, и пусть последовательность $\{d_i\}$ финслеровых метрик на M равномерно сходится (как последовательность функций на $M \times M$) к финслеровой метрике d. Тогда

$$\mathrm{vol}(M, d) \leq \varliminf_{i\to\infty} \mathrm{vol}(M, d_i).$$

Отметим, что объем не непрерывен в топологии равномерной сходимости даже для римановых метрик (ситуация аналогична полунепрерывности, но не непрерывности длины относительно равномерной сходимости кривых).

В §6.3 рассматриваются периодические метрики в $\mathbf{R}^n$, то есть внутренние метрики, инвариантную относительно стандартного действия группы $\mathbf{Z}^n$ параллельными переносами. Другими словами, периодическая метрика — это поднятие внутренней метрики с тора T^n в его универсальное накрывающее.

Определение (6.3.2)**.** Пусть d — периодическая метрика в $\mathbf{R}^n$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и определим функцию $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$\|v\| = \lim_{t\to+\infty} \frac{d(x_0, x_0 + tv)}{t}.$$

Нетрудно проверить (см., например, [6, §8.5]), что эта функция корректно определена, не зависит от выбора x_0 и является нормой на $\mathbf{R}^n$. Она называется *стабильной нормой* метрики d.

Из определения следует, что метрика d асимптотически эквивалентна своей стабильной норме при расстояниях стремящихся к бесконечности.

Понятие стабильной нормы введено Федерером [62]. Обычно ее определяют на группе $H_1(M; \mathbf{R})$ вещественных гомологий компактного многообразия M, снабженного внутренней метрикой. Определение 6.3.2 соответствует случаю $M = T^n$.

Определение (6.3.7)**.** Пусть d — периодическая финслерова метрика в $\mathbf{R}^n$. *Асимптотическим объемом* метрики d называется число

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}_d(B_r(x_0))}{r^n},$$

где $B_r(x_0)$ — метрический шар в $(\mathbf{R}^n, d)$ радиуса r с центром в фиксированной точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Нетрудно убедиться, что асимптотический объем однозначно определяется стабильной нормой и объемом фундаментальной области действия группы $\mathbf{Z}^n$ (или факторпространства $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$). Основным результатом §6.3 является следующая

Теорема (6.3.9). *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то верно следующее.*

Для любой периодической финслеровой метрики d на $\mathbf{R}^n$ верно неравенство

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d_{\|\cdot\|_{st}}) = \operatorname{vol}(B_{st}, d_{\|\cdot\|_{st}}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d, B_{st} — единичный шар этой нормы.

Наконец, в §6.4 доказывается, что все вышеуказанные следствия полуэллиптичности на самом деле эквивалентны ей:

Теорема (6.4.1). *Следующие свойства функционала n-мерного финслерова объема эквивалентны.*

1. Он топологически полуэллиптичен.

2. Любой n-мерный диск D в n-мерном нормированном пространстве является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D.

3. Объем полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик.

4. Для любой периодической финслеровой метрики d в $\mathbf{R}^n$ верно, что

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d.

Глава 7. Двумерный объем по Холмсу–Томпсону

В этой главе доказывается гипотеза о минимальном заполнении для двумерного объема по Холмсу–Томпсону (и, как следствие, в римановом случае) для метрик на двумерном диске (теорема 7.1.2) и выводятся некоторые следствия. Результаты опубликованы в статье [9].

Будем говорить, что гладкая строго выпуклая финслерова структура на многообразии M обладает *свойством минимальности геодезических*, если любая геодезическая, лежащая внутри M, является минимальной.

Теорема (7.1.2). *Пусть φ_0 — гладкая строго выпуклая финслерова структура на диске D^2, обладающая свойством единственности геодезических. Тогда (M, φ_0) является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на диске (относительно двумерного объема по Холмсу–Томпсону).*

Следствие (7.1.3). *Двумерный объем по Холмсу–Томпсону топологически полуэллиптичен.*

Отметим, что двумерный объем по Холмсу–Томпсону не полуэллиптичен над $\mathbf{R}$ уже в размерности 4. Соответствующий пример нормы в $\mathbf{R}^4$ (являющийся модификацией известного примера из [46]) описан в §7.5. Там же построен явный пример вещественной цепи, имеющей общую границу с плоским диском, но меньшую площадь. Интересно, что эта цепь получается умножением на константу из целочисленной цепи, параметризованной диском.

Следующее следствие теоремы 7.1.2 показывает, что изосистолическое неравенство Пу [83] верно не только для римановых, но и для финслеровых метрик. Финслерово обобщение неравенства Пу имеет приложения в геометрии выпуклых тел и пространств Минковского, см., например, [19] и [17]. Отметим, что даже в римановом случае доказательство теоремы 7.1.2 дает принципиально новое доказательство неравенства Пу, не опирающееся на теорему об униформизации.

Следствие (7.1.4)**.** *Пусть φ — финслерова метрика на $\mathbf{RP}^2$, и пусть L — длина кратчайшей нестягиваемой петли в $(\mathbf{RP}^2, \varphi)$. Тогда*

$$\mathrm{vol}(\mathbf{RP}^2, \varphi) \geq \frac{2L^2}{\pi},$$

где vol *— двумерный объем по Холмсу–Томпсону.*

Теорема 7.1.2 содержательна и в римановом случае (и других доказательств, кроме применения финслеровой теоремы, для риманова случая не известно). В римановом случае также удается доказать единственность минимального заполнения, то есть усиленную гипотезу о минимальном заполнении для размерности 2:

Следствие (7.1.5)**.** *Пусть g — простая по Мичелу риманова метрика на $D = D^2$ (то есть метрика со строго выпуклым краем и без сопряженных точек). Тогда g — единственное (с точностью до изометрии) минимальное заполнение своей границы в классе римановых метрик на D^2.*

Доказательство следствия опирается на теорему Пестова и Ульмана [81] о граничной жесткости простых метрик в размерности 2.

Теорема 7.1.2 вместе с общими результатами из главы 6 дает следующее

Следствие (7.1.7)**.** *Пусть φ — периодическая гладкая строго выпуклая финслерова метрика на плоскости. Тогда*

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^2, d_\varphi) \geq \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d_φ, AsVol *— асимптотический объем, соответствующий двумерному объему по Холмсу–Томпсону.*

Равенство в достигается тогда и только тогда, когда метрика φ не имеет сопряженных точек.

Описание случая равенства в этом следствии указывает на правдоподобность финслерова аналога гипотезы Хопфа о метриках без сопряженных точек на торах. (Гипотеза состоит в том, что геодезический поток такой метрики гладко сопряжен потоку плоской метрики, соответствующей стабильной норме; при таком сопряжении симплектический объем всегда сохраняется.)

Глава 8. Объем по Лёвнеру

В этой главе доказываются специальные свойства объема по Лёвнеру и их приложения к вопросам полунепрерывности объема. Результаты опубликованы в статьях [7] и [11].

В §8.1 показано, что n-мерный объем по Лёвнеру в любом нормированном пространстве обладает свойством сжатия, или, в терминологии из [47], является тотально выпуклым.

Теорема (8.1.1)**.** *Пусть X — нормированное пространство, $Y \subset X$ — n-мерное линейное подпространство. Тогда существует такое непрерывное линейное отображение $P\colon X \to Y$, что*

1. P является проектором на Y, то есть $P|_Y = id_Y$.

2. Для любой n-мерной липшицевой поверхности $f : M \to X$ верно, что

$$\operatorname{area}(P \circ f) \le \operatorname{area}(f),$$

где area *— площадь, порождаемая функционалом n-мерного объема по Лёвнеру.*

В §8.1 также охарактеризован случай равенства в неравенстве $\operatorname{area}(P \circ f) \le \operatorname{area}(f)$ из этой теоремы.

Следствие (8.1.2)**.** *Функционал n-мерного объема по Лёвнеру полуэллиптичен над $\mathbf{R}$ для любого n.*

В §8.2 исследуется вопрос о полунепрерывности объема. Из полуэллиптичности и результатов главы 6 следует, что объем по Лёвнеру (и, как следствие, обычный риманов объем) полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости расстояний. Рассмотрим аналогичный вопрос для более слабой сходимости по Громову–Хаусдорфу. Вместо исходного определения сходимости по Громову–Хаусдорфу [64] мы используем приводимую ниже эквивалентную переформулировку.

Определение (8.2.1)**.** Пусть X и Y – метрические пространства, $f : X \to Y$ – отображение (не обязательно непрерывное) и $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что f является *ε-изометрией*, если выполнены два условия:

(1) $f(X)$ образует ε-сеть в Y;

(2) $|d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| < \varepsilon$ для любых $x, x' \in X$.
Нижняя грань тех ε, для которых f является ε-изометрией, будем называть *погрешностью* отображения φ и обозначать через $\operatorname{err}(\varphi)$.

Последовательность $\{X_k\}$ метрических пространств сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству X (обозначение: $X_k \xrightarrow[GH]{} X$) тогда и только тогда, когда существует последовательность отображений $f_k : X_k \to X$ с $\operatorname{err}(f_k) \to 0$. Такие последовательности будут называться *последовательностями почти изометрий.*

Если топология пространства X достаточно хорошая (например, X является многообразием), то почти изометрии можно сделать непрерывными. Равномерная сходимость метрик на одном пространстве — частный случай сходимости по Громову–Хаусдорфу. В этом случае в качестве почти изометрий можно взять тождественное отображение.

Далее мы ограничиваемся случаем, когда сходящиеся и предельное пространства являются многообразиями, имеющими одинаковую размерность $n \geq 2$. Нетрудно убедиться, что даже риманов объем на классе замкнутых многообразий не полунепрерывен снизу. Мы доказываем полунепрерывность объема при естественных топологических ограничениях.

Пусть M и M' — многообразия одинаковой размерности, $f : M' \to M$ — непрерывное отображение. Пусть $U \subset M'$ — открытое множество, $U \cap \partial M' = \emptyset$. Будем говорить, что f *имеет ненулевую степень над* U, если сужение f на $f^{-1}(U) \setminus \partial M'$, рассматриваемое как отображение в U, является собственным (то есть прообраз любого компакта компактен) и имеет ненулевую топологическую степень над $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$. Отображение $f : M' \to M$ *имеет ненулевую степень*, если оно имеет ненулевую степень над $M \setminus \partial M$. (Как нетрудно видеть, из этого следует, что $f(\partial M') \subset \partial M$.)

Теорема (8.2.3)**.** *Пусть (M, d), (M_k, d_k), $k = 1, 2, \dots,$ — n-мерные многообразия с липшицевыми метриками. Предположим, что существует последовательность непрерывных почти изометрий $f_k : (M_k, d_k) \to (M, d)$, которые, начиная с некоторого k, имеют ненулевую степень. Тогда*

$$\operatorname{vol}(M, d) \leq \varliminf_{k\to\infty} \operatorname{vol}(M_k, d_k)$$

где vol *— n-мерный объем по Лёвнеру.*

В §8.3 выводятся достаточные условия полунепрерывности, формулируемые в терминах самих пространств, а не почти изометрий между ними. Для начала ограничимся случаем римановых на фиксированном замкнутом многообразии M. В [7] приведены примеры, показывающие, что даже в этом случае полунепрерывность объема может нарушаться при $M = S^3$. Тем не менее, для многих топологических типов многообразий полунепрерывность гарантирована. Так, имеет место следующая

Теорема (8.3.6). *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — гомотопически эквивалентные замкнутые n-мерные римановы многообразия, и пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$ и M допускает отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда*

$$\operatorname{vol}(M) \le \liminf_{k\to\infty} \operatorname{vol}(M_k).$$

То же верно для любых положительных липшицевых внутренних метрик, если в качестве определения объема выбран объем по Лёвнеру.

Следствие (8.3.7). *Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, допускающее отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда n-мерный риманов объем полунепрерывен снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на классе всех римановых метрик на M.*

В §8.4 рассматривается сходимость по Громову–Хаусдорфу в двумерном случае. Пусть M и M' – двумерные многообразия. Будем называть непрерывное отображение $\varphi : M' \to M$ *почти гомеоморфизмом*, если существует конечное множество точек $P \subset M \setminus \partial M$ такое, что

1. φ гомеоморфно отображает $\varphi^{-1}(M \setminus P)$ на $M \setminus P$;
2. прообраз $\varphi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in P$ представляет собой либо компоненту края многообразия M', либо двумерное подмногообразие, ограниченное (в M') простой замкнутой кривой.

Отметим, что любой почти гомеоморфизм между замкнутыми многообразиями имеет степень ± 1.

Теорема (8.4.2). *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные двумерные многообразия с внутренними метриками, такие, что $\sup_k g(M_k) < \infty$, и пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$. Тогда существует последовательность почти изометрий $\varphi_k : M_k \to M$, которые, начиная с некоторого k, являются почти гомеоморфизмами.*

Следствие (8.4.3). *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные двумерные многообразия с положительными внутренними липшицевыми метриками. Пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$ и $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$. Тогда*

$$\operatorname{vol}(M) \le \liminf_{k\to\infty} \operatorname{vol}(M_k),$$

где vol *— двумерный объем по Лёвнеру.*

Следствие (8.4.4). *Для любого натурального N риманова площадь полунепрерывна снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на классе всех компактных двумерных римановых многообразий, эйлеровы характеристики которых по модулю не превосходят N.*

Глава 9. Периодические римановы метрики

В этой главе рассматриваются асимптотические объемы периодических метрик и систолические неравенства для замкнутых римановых многообразий. Результаты получены совместно с Д. Бураго (§9.3) и М. Кацем (§9.4) и опубликованы в статьях [36] и [69].

В §9.1 и §9.2 даются предварительные определения и доказываются вспомогательные технические факты. В §9.3 доказывается

Теорема (9.3.1)**.** *Пусть g — периодическая риманова метрика в $\mathbf{R}^n$, B_{st} — единичный шар ее стабильной нормы, E_{st} — его эллипсоид Джона. Тогда*

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \geq \frac{|B_{st}|}{|E_{st}|} \cdot \omega_n,$$

где знак модуля обозначает n-мерный евклидов объем, причем равенство достигается тогда и только тогда когда метрика g плоская.

Как следствие получается оптимальная оценка на асимптотический объем периодической метрики, высказанная в качестве гипотезы М. Громовым [63]:

Следствие (9.3.2)**.** *Для любой периодической римановой метрики g в $\mathbf{R}^n$ верно неравенство*

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \geq \omega_n,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда метрика g плоская.

В §9.4 доказываются некоторые обобщения изосистолического неравенства Лёвнера. Для компактного риманова многообразия M через $\operatorname{sys}\pi_1(M)$ будем обозначать его одномерную *гомотопическую систолу*, то есть длину кратчайшей нестягиваемой петли в M. Через $\operatorname{stsys}_1(M)$ обозначается одномерная *стабильная систола*, то есть длина кратчайшего одномерного вещественного цикла, представляющего ненулевой элемент целочисленной решетки $H_1(M;\mathbf{R})_\mathbf{Z}$ группы гомологий $H_1(M;\mathbf{R})$.

Классическое изосистолическое неравенство Лёвнера (см. [83], [73, гл. 1]) состоит в следующем: для любой римановой метрики g на двумерном торе T^2 верно, что

$$\operatorname{stsys}_1(T^2, g)^2 = \operatorname{sys}\pi_1(T^2, g)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{vol}_2(T^2, g).$$

Равенство в этом неравенстве достигается для плоского тора, склеенного из ромба с углом $\pi/3$ при вершине, поэтому константа $\frac{2}{\sqrt{3}}$ является оптимальной.

М. Громов [66, стр. 259–260], пользуясь теоремой 9.3.1, вывел аналогичное оптимальное неравенство для стабильных систол торов старших размерностей и некоторых других многообразий M, у которых первое число Бетти $b_1(M)$ равно размерности $\dim M$, см. теорему 9.4.6 ниже. В §9.4 доказывается дальнейшее обобщение этого неравенства на случай $b_1(M) \leq \dim M$.

Пусть M — замкнутое риманово многообразие размерности n. Обозначим через k его первое число Бетти:

$$k = b_1(M) = \operatorname{rank} H_1(M; \mathbf{Z}) = \dim H_1(M; \mathbf{R}).$$

Обозначим

$$\mathcal{T} = H_1(M; \mathbf{R}) / H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{R}^k / \mathbf{Z}^k.$$

Пространство $\mathcal{T}$ является k-мерным тором, его фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{T})$ канонически отождествляется факторгруппой группы $H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}})$ по кручению. Таким образом, имеется естественный гомоморфизм

$$P : \pi_1(M) \to \pi_1(\mathcal{T}) = H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}}.$$

Поскольку тор асферичен, существует единственное с точностью до гомотопии гладкое отображение

$$\mathcal{A}_M : M \to \mathcal{T},$$

индуцирующий вышеуказанный гомоморфизм P между фундаментальными группами. Мы будем называть $\mathcal{A}_M$ *отображением Абеля–Якоби* многообразия M. (Обычно отображением Абеля–Якоби называют единственное гармоническое отображение из этого гомотопического класса, см. [75], [65], но для наших целей выбор представителя в гомотопическом классе не существенен.) Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_M$ поднятие отображения $\mathcal{A}_M$ в накрывающие пространства универсальных свободных абелевых накрытий:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_M : \widetilde{M} \to \widetilde{\mathcal{T}} = H_1(M; \mathbf{R}).$$

Определение (9.4.2)**.** Обозначим через $[\widetilde{F}_M] \in H_{n-k}(\widetilde{M})$ гомологический класс прообраза $\widetilde{\mathcal{A}}_M^{-1}(y)$ регулярного значения y отображения $\widetilde{\mathcal{A}}_M$, где гомологии берутся над $\mathbf{Z}$ в случае ориентируемого $\widetilde{M}$ и над $\mathbf{Z}_2$ в противном случае. Определим *систолическую степень*

$$\operatorname{sysdeg}(\mathcal{A}_M)$$

отображения $\mathcal{A}_M$ как инфимум $(n-k)$-мерных объемов всех циклов, представляющих класс $[\widetilde{F}_M]$.

Теорема (9.4.7)**.** *Пусть M — замкнутое риманово многообразие. Предположим, что $n \geq k \geq 1$, где $n = \dim M$, $k = b_1(M)$. Тогда выполняется следующее оптимальное неравенство*

$$\operatorname{sysdeg}(\mathcal{A}_M) \operatorname{stsys}_1(M, g)^k \leq \gamma_k^{k/2} \operatorname{vol}_n(M, g),$$

где γ_k — константа Эрмита.

В частности, для случая $b_1(M) = \dim M - 1$, получаем

Следствие (9.4.9). *Пусть M — замкнутое многообразие, $k = b_1(M)$, $\dim M = k+1$. Предположим, что $[\widetilde{F}_M] \neq 0$, где $[\widetilde{F}_M]$ — гомологический класс типичного слоя отображения Абеля–Якоби, см. определение 9.4.2. Тогда для любой метрики g на M выполняется следующее неравенство*

$$\operatorname{stsys}_1(M,g)^k \operatorname{sys}\pi_1(M,g) \leq \gamma_k^{k/2} \operatorname{vol}_{k+1}(M,g).$$

В качестве примера случая равенства в следствии 9.4.9 достаточно взять риманово расслоение на окружности постоянной длины над плоским k-мерным тором, соответствующим критической решетке (слои должны быть достаточно короткими геодезическими, реализующими значение $\operatorname{sys}\pi_1(M,g)$). Такое строение имеет, например, факторпространство группы Гейзенберга с левоинвариантной метрикой по ее целочисленной решетке.

Этот пример объясняет, почему в определении систолической степени взят слой отображения накрывающих пространств, а не самого отображения $\mathcal{A}_M : M \to \mathcal{T}$. Дело в том, что в этом примере типичный слой представляет нулевой гомологический класс в M, но ненулевой в $\widetilde{M}$. Поэтому с другим исходным определением следствие 9.4.9 получилось бы бессодержательным.

Глава 10. Почти плоские метрики.

Эта глава содержит приложения к вопросам о минимальности и граничной жесткости для римановых метрик, близких к евклидовым. Результаты получены совместно с Д. Бураго и опубликованы в [42].

Напомним, что компактное риманово многообразие (M,g) с краем называется *гранично жестким*, если любое компактное риманово многообразие (M',g') с тем же краем $\partial M' = \partial M$ и такой же функцией расстояния на $\partial M \times \partial M$ изометрично (M,g) изометрией, тождественной на краю.

Теорема (10.1.2). *Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, g_E — стандартная евклидова метрика в этой области. Тогда существует такая окрестность U метрики g_E в C^2 топологии, что для любой метрики $g \in U$ пространство (M,g) является единственным минимальным заполнением своего края в классе всех ориентируемых многообразий с кусочно римановыми метриками.*

Другими словами, если $g \in U$ и (M',g') — ориентированное многообразие с кусочно римановой метрикой, заполняющее $(\partial M, d_g)$, то $\operatorname{vol}(M',g') \geq \operatorname{vol}(M,g)$, причем в случае равенства (M',g') изометрично (M,g) изометрией, тождественной на краю.

Из доказательства теоремы можно вывести явное описание окрестности U. А именно, если g — риманова метрика в $\mathbf{R}^n$, $g = g_E$ вне шара $B_R(0)$ и $|K_\sigma| < \frac{c(n)}{R^2}$, то для любой области $\Omega \subset B_R(0)$ пространство (Ω, g) является единственным ориентируемым минимальным заполнением. Здесь $c(n)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от размерности (константу можно выразить явно, значение $c(n) = n^{-100n}$ заведомо подходит).

Из теоремы 10.1.2 следует

Теорема (10.1.3)**.** *Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, g_E — стандартная евклидова метрика в этой области. Тогда существует такая окрестность U метрики g_E в C^2 топологии, что для любой метрики $g \in U$ пространство (M, g) является гранично жестким.*

Благодарности

Многие из результатов диссертации, а также близких результатов, оставшихся за ее рамками, получены в соавторстве с другими математиками: Д. Бураго, V. Bangert, C. Croke, M. Katz, B. Kleiner.

Автор выражает признательность им, а также всем, чьи идеи, замечания, предложения и обсуждения способствовали появлению и улучшению этих результатов: Ю. Бураго, С. Буяло, М. Громов, А. Каток, Я. Курылев, Н. Нецветаев, С. Подкорытов, J.-C. Alvarez-Paiva, F. Morgan, G. Uhlmann.

Глава 1

Плотности и площади

Всюду в этой и следующей главах V обозначает конечномерное векторное пространство, $n \le \dim V$ — целое неотрицательное число (размерность рассматриваемых поверхностей и цепей). В некоторых рассуждениях используется (произвольно выбранная) вспомогательная евклидова норма $|\cdot|$ на V.

Мы используем термин "площадь" (точнее, θ-площадь) для функционалов, определяемых n-мерным параметрическим интеграндом θ. Для наших целей достаточно рассмотрения интеграндов, инвариантных относительно параллельных переносов, которые мы называем n-плотностями, см. §1.1. Цель этой главы — ввести соответствующие термины и обозначения, а также доказать несколько технических фактов, используемых в дальнейшем.

1.1 Интегрирование плотностей

Цель этого параграфа — дать бескоординатные определения стандартных понятий из теории меры и вариационного исчисления.

Пусть X — n-мерное векторное пространство. Любая инвариантная относительно параллельных переносов локально конечная мера μ на X пропорциональна мере Лебега (определяемой произвольной евклидовой структурой на X). Поэтому такая мера μ корректно определяет функцию $\nu : \Lambda^n X \to \mathbf{R}_+$, где $\nu(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n)$ — мера параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, \dots, v_n \in X$. Мы будем называть ν *плотностью* меры μ. Функция ν положительно однородна, то есть является полунормой на (одномерном) векторном пространстве $\Lambda^n X$. Обратно, для любой полунормы ν на $\Lambda^n X$ существует единственная относительно параллельных переносов локально конечная мера μ на X, плотность которой равна ν. Таким образом, имеется каноническое взаимно однозначное соответствие между такими мерами на X и полунормами на $\Lambda^n X$. Это соответствие будет подразумеваться и использоваться всюду в этой и последующих главах.

Определение 1.1.1. Пусть M — n-мерное многообразие. *Плотностью меры* (или просто *плотностью*) на M будем называть неотрицательную измеримую функцию $\nu : \Lambda^n TM \to \mathbf{R}$, сужение которой на каждый слой симметрично и положительно однородно. (Здесь $\Lambda^n TM$ — одномерное векторное расслоение над M, слоем которого над точкой $x \in M$ являются n-кратное внешнее произведение $\Lambda^n T_x M$.)

Такую структуру можно интегрировать по многообразию точно так же, как дифференциальную n-форму, при этом (в отличие от дифференциальной формы) интеграл не зависит от ориентации многообразия. Таким образом, функция ν определяет некоторую меру μ на M. Мы будем записывать это отношение между μ и ν формулой $\mu = \int \nu$ или $\mu(U) = \int_U \nu$ для произвольного измеримого множества $U \subset M$.

Мера μ из определения 1.1.1 абсолютно непрерывна (относительно координатных мер Лебега). Обратно, любая абсолютно непрерывная мера на M задается некоторой плотностью, причем эта плотность определена однозначно с точностью до изменений на множестве меры 0.

В координатах плотность ν представляется локально суммируемой функцией ρ — плотностью меры μ относительно меры Лебега, которая связана с ν очевидным соотношением

$$\rho(x) = \nu(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n),$$

где $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис касательного пространства в точке x, соответствующий данной системе координат.

Определение 1.1.2. Пусть V — векторное пространство размерности $\geq n$. Рассмотрим внешнее произведение $\Lambda^n V$ (элементы которого будем называть n-векторами). Будем называть n-вектор $\sigma \in \Lambda^n V$ *простым*, если он представим в виде

$$\sigma = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n,$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Простые n-векторы образуют конус в $\Lambda^n V$, который мы будем называть *грассмановым конусом* и обозначать через $\Lambda^n_s V$.

С каждым ненулевым простым n-вектором $\sigma = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$ ассоциируется ориентированное n-мерное линейное подпространство $\alpha \in G^+_n(V)$ — ориентированная линейная оболочку векторов $v_1, \ldots, v_n$. Ясно, что α не зависит от представления σ в виде $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$. Мы будем говорить, что σ *лежит в* α и писать $\sigma \upuparrows \alpha$.

Название “грассманов конус” [45, 46] отражает тот факт, что при наличии евклидовой структуры на V множество $\Lambda^n_s V$ естественно отождествляется с конусом над $G^+_n(V)$. А именно, $G^+_n(V)$ отождествляется с множеством единичных (относительно евклидовой нормы) простых n-векторов.

Определение 1.1.3. *n-мерной плотностью* (или просто *n-плотностью*) в пространстве V будем называть любую локально ограниченную неотрицательную борелевскую функцию $\theta : \Lambda^n_s V \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условию положительной однородности: $\theta(t\sigma) = t\theta(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Lambda^n_s V$ и $t \geq 0$.

Такая функция θ называется *симметричной*, если $\theta(-\sigma) = \theta(\sigma)$ для всех $\sigma \in \Lambda^n_s V$.

Естественные примеры n-плотностей симметричны и непрерывны. Разрывные и несимметричные n-плотности нужны для вспомогательных построений в некоторых доказательствах (в первую очередь, в §2.3).

Если на V задана вспомогательная евклидова структура, достаточно определить n-плотность θ только на единичных простых n-векторах, то есть можно рассматривать θ как функцию на грассмановом многообразии $G^+_n(V)$. Симметричную n-плотность можно рассматривать как функцию на $G_n(V)$. Условие локальной ограниченности из определения 1.1.3 эквивалентно тому, что функция на грассмане ограничена.

Определение 1.1.4. *Липшицевой поверхностью* размерности n в пространстве V будем называть локально липшицево отображение $f : M \to V$, где M — n-мерное гладкое многообразие. Поверхность называется *ориентированной*, если ее область определения ориентирована.

По теореме Радемахера (см. [15, теорема 3.1.6]), любая липшицева поверхность $f : M \to V$ дифференцируема почти всюду. Ее дифференциал df есть почти всюду определенное измеримое отображение из TM в V, линейное на слоях. Он индуцирует измеримое отображение $f_* : \Lambda^n TM \to \Lambda^n_s V$ следующим образом: для точки $x \in M$ и касательных векторов $v_1, \dots, v_n \in T_x M$ полагаем

$$f_*(v_1 \wedge \dots \wedge v_n) = \begin{cases} df(v_1) \wedge \dots \wedge df(v_n), & \text{если } f \text{ дифференцируемо в } x, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $\theta : \Lambda^n_s V \to \mathbf{R}_+$ — симметричная n-плотность, то функция $\theta \circ f_*$ является плотностью меры на M (в смысле определения 1.1.1).

Для несимметричной n-плотности нужно другое определение, при этом поверхность должна быть ориентируемой. А именно, определим отображение $f^+_* : \Lambda^n TM \to \Lambda^n_s V$ равенствами

$$f^+_*(\sigma) = \begin{cases} f_*(\sigma), & \text{если } n\text{-вектор } \sigma \text{ положительно ориентирован,} \\ -f_*(\sigma), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда функция $\theta \circ f^+_*$ является плотностью меры на M. Если θ симметрична, то $\theta \circ f^+_* = \theta \circ f_*$.

Определение 1.1.5. Пусть θ — n-плотность в V, $f : M \to V$ — n-мерная липшицева поверхность. Если θ симметрична, определим *θ-площадь* $A_\theta(f|_U)$ измеримого множества $U \subset M$ на поверхности f равенством

$$A_\theta(f|_U) = \int_U \theta \circ f_*,$$

а если M ориентировано — равенством

$$A_\theta(f|_U) = \int_U \theta \circ f_*^+,$$

где $f_*, f_*^+ : \Lambda^n TM \to \Lambda_s^n V$ — те же, что выше. Величину

$$A_\theta(f) = A_\theta(f|_M)$$

будем называть *θ-площадью* поверхности f.

Из формулы замены переменных следует, что θ-площадь не меняется при липшицевых заменах параметра. А именно, если $\varphi : M' \to M$ — сохраняющий ориентацию билипшицев гомеоморфизм (а в симметричном случае — произвольный билипшицев гомеоморфизм), то $A_\theta(f \circ \varphi) = A_\theta(f)$.

Пример 1.1.6. Пусть $\alpha \subset V$ — ориентированное n-мерное аффинное подпространство. Любое борелевское множество в α можно рассматривать как измеримое множество на ориентированной n-мерной поверхности (например, параметризованной вложением самого подпространства α в V). Таким образом, для любого такого множества определена θ-площадь. Например, для параллелепипеда $P \subset \alpha$, порожденного векторами $v_1, \dots, v_n$, образующими правильно ориентированный базис в α, имеем

$$A_\theta(P) = \theta(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$$

Для n-мерного симплекса $\Delta \subset \alpha$ с вершинами $p_0, p_1, \dots, p_n$, где векторы $v_i = p_i - p_0$, $i = 1, \dots, n$, образуют правильно ориентированный базис в α, имеем

$$A_\theta(\Delta) = \frac{1}{n!}\theta(v_1 \wedge \dots \wedge v_n).$$

1.2 Кусочно линейные цепи и поверхности

Определение 1.2.1. *n-мерным симплексом* (или просто *n-симплексом*) в пространстве V будем называть выпуклую оболочку набора $n+1$ точек из V, называемых *вершинами* симплекса, вместе с указанием порядка этих точек (симплексы, отличающиеся порядком вершин, считаются различными). Будем обозначать симплекс с вершинами $p_0, p_1, \dots, p_n$ через $[p_0, p_1, \dots, p_n]$.

n-симплекс называется *вырожденным*, если он лежит в $(n-1)$-мерном аффинном подпространстве, и *невырожденным* в противном случае.

Два n-симплекса с одинаковым набором вершин называются *одинаково ориентированными*, если они отличаются четной перестановкой вершин, и *противоположно ориентированными*, если они отличаются нечетной перестановкой вершин. Соответствующий класс эквивалентности называется *ориентацией* симплекса.

Пусть $\Delta = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ — невырожденный n-симплекс, α — ориентированное n-мерное аффинное подпространство. Будем говорить, что Δ *сонаправлен с* α, если его аффинная оболочка параллельна α и набор векторов $\{a_i - a_0\}_{i=1}^n$ образует правильно ориентированный базис в α.

Ориентация n-мерного симплекса $\Delta = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ индуцирует ориентацию его $(n-1)$-мерных граней по следующему правилу: если i четно, то упорядоченный набор $p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n$ вершин согласован с ориентацией соответствующей грани, а если i нечетно, то он задает ориентацию, противоположную ориентации грани.

Определение 1.2.2. *n-мерная цепь* в пространстве V — это формальная линейная комбинация вида $\sum_{i=1}^N a_i \Delta_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$, Δ_i — n-симплексы в V. n-мерные цепи образуют векторное пространство, мы обозначаем это пространство через $S_n(V)$. При $n < 0$ полагаем $S_n(V) = \{0\}$.

Границей n-симплекса $\Delta = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ называется $(n-1)$-мерная цепь $\partial\Delta$, определяемая равенством

$$\partial\Delta = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n [p_0, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n].$$

(Для нульмерного симплекса $\Delta = [p_0]$ полагаем $\partial\Delta = 0$.) Граница ∂s цепи $s = \sum a_i \Delta_i$, где Δ_i — n-симплексы, определяется равенством $\partial s = \sum a_i \partial\Delta_i$. Таким образом, $\partial : S_n(V) \to S_{n-1}(V)$ — линейное отображение.

Цепи с нулевой границей называются *циклами*; мы обозначаем пространство всех n-мерных циклов через $C_n(V)$.

Для подкольца $\mathbf{K} \in \mathbf{R}$ обозначим через $S_n(V; \mathbf{K})$ и $C_n(V; \mathbf{K})$ соответственно множество цепей и циклов с коэффициентами из $\mathbf{K}$. Цепи, принадлежащие множеству $S_n(V; \mathbf{Z})$, называются *целочисленными*.

Из определения следует, что $\partial\partial s = 0$ для любой цепи s. Обратно, любой цикл $c \in C_{n-1}(V)$ является границей некоторой цепи $s \in S_n(V)$, например, в качестве s можно взять конус $\mathrm{Cone}(c)$, определяемый следующим образом.

Определение 1.2.3. Пусть $\Delta = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$ — n-симплекс. Определим $(n+1)$-симплекс $\mathrm{Cone}(\Delta)$ равенством

$$\mathrm{Cone}(\Delta) = [0, p_0, p_1, \ldots, p_n].$$

Для цепи $s = \sum a_i \Delta_i \in S_n(V)$ определим

$$\mathrm{Cone}(s) = \sum a_i \,\mathrm{Cone}(\Delta_i),$$

таким образом, $\mathrm{Cone} : S_n(V) \to S_{n+1}(V)$ — линейное отображение. Будем называть цепь $\mathrm{Cone}(s)$ *конусом с основанием* s.

Предложение 1.2.4. *Для любой цепи s имеет место равенство*

$$\partial \,\mathrm{Cone}(s) = s - \mathrm{Cone}(\partial s).$$

В частности, если s — цикл, то $\partial \,\mathrm{Cone}(s) = s$.

Доказательство. В случае, когда s — симплекс, равенство тривиально следует из определения, для произвольной цепи — по линейности. □

Определение 1.2.5. *Псевдомногообразием* размерности n будем называть симплициальный комплекс, склеенный из невырожденных n-симплексов по аффинным биекциям между некоторыми $(n-1)$-мерными гранями так, что каждая $(n-1)$-мерная грань в результате принадлежит одному или двум n-симплексам.

Край ∂M псевдомногообразия M — это объединение тех его $(n-1)$-мерных граней, к которым примыкает ровно по одному n-симплексу. Нетрудно убедиться, что ∂M является $(n-1)$-мерным псевдомногообразием.

Псевдомногообразие называется *ориентированным*, если каждый из составляющих его n-симплексов ориентирован так, что на любой общей $(n-1)$-мерной грани любых двух n-симплексов они индуцируют противоположные ориентации. Нетрудно убедиться, что край ориентированного псевдомногообразия тоже ориентирован.

Определение 1.2.6. Пусть M — псевдомногообразие. Отображение $f : M \to V$ называется *кусочно линейным*, если оно непрерывно и существует такая триангуляция псевдомногообразия M, что f является аффинным на каждом ее симплексе. Такую триангуляцию будем называть *согласованной* с отображением f. Как правило, мы будем подразумевать, что такая триангуляция зафиксирована. Образы n-мерных симплексов этой триангуляции при отображении f будем называть *гранями* этого отображения.

Если M — триангулированное гладкое многообразие, то мы будем также называть отображение f *кусочно линейной поверхностью*. Кусочно линейная поверхность $f : M \to V$ называется *замкнутой*, если M не имеет края.

Пусть M — ориентированное псевдомногообразие, $f : M \to V$ — кусочно линейное отображение. Будем говорить, что f *параметризует* цепь $s \in S_n(V; \mathbf{Z})$, если существует согласованная с f триангуляция $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ и представление s в виде несократимой линейной комбинации $s = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \Delta_i'$, где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ и каждый симплекс Δ_i'

отличается от $f(\Delta_i)$ лишь перестановкой вершин, причем эта перестановка четна при $\varepsilon_i = 1$ и нечетна при $\varepsilon_i = -1$. (Линейная комбинация $\sum \varepsilon_i \Delta'_i$ называется несократимой, если коэффициенты при совпадающих симплексах имеют одинаковые знаки.)

Предложение 1.2.7. *Для любой цепи $s \in S_n(V; \mathbf{Z})$ существует ориентированное n-мерное псевдомногообразие M и кусочно линейное отображение $f : M \to V$, такие, что f параметризует s и $f|_{\partial M}$ параметризует ∂s.*

Доказательство. Представим s в виде несократимой линейной комбинации $s = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \Delta_i$, где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, Δ_i — n-симплексы. Каждому симплексу Δ_i сопоставим "абстрактный" невырожденный n-симплекс Δ_i^0 и аффинное отображение $f_i : \Delta_i^0 \to \Delta_i$, переводящее вершины в вершины. Ориентируем каждый симплекс Δ_i^0 так, что f_i сохраняет ориентацию при $\varepsilon_i = 1$ и меняет при $\varepsilon_i = -1$.

Зафиксируем $(n-1)$-симплекс Δ, являющийся гранью хотя бы одного из симплексов Δ_i, и рассмотрим его вхождение в выражение $\partial s = \sum \varepsilon_i \partial \Delta_i$, где каждый член $\partial \Delta_i$ в правой части разложен в сумму $n+1$ слагаемых как в определении 1.2.2. Пусть Δ входит в это выражение p раз с коэффициентом $+1$ и q раз с коэффициентом -1. Выделим $\min\{p, q\}$ непересекающихся пар вхождений так, чтобы в каждой паре были вхождения разных знаков. Каждому вхождению соответствует грань одного из симплексов Δ_i^0. Склеим пары граней, соответствующие выбранным выше парам вхождений.

Проделав эту операцию для всех $(n-1)$-симплексов Δ, получим псевдомногообразие M, склеенное из симплексов Δ_i^0. Отображение $f : M \to V$, полученное из отображений f_i в результате этого склеивания, является искомой параметризацией цепи s. $\square$

Если в V зафиксирована вспомогательная евклидова норма, то для каждого n-симплекса $\Delta \subset V$ определен его n-мерный евклидов объем, который мы будем называть *площадью* данного симплекса и обозначать через $|\Delta|$. Отметим, что площадь вырожденного симплекса равна 0. Площадью кусочно линейного отображения называется сумма площадей его граней.

Следующее предложение показывает, что любое кусочно линейное отображение подмногообразия можно превратить в кусочно линейную поверхность с помощью топологической перестройки, затрагивающей сколь угодно малую площадь.

Предложение 1.2.8. *Пусть M_0 — n-мерное ориентированное псевдомногообразие без края, $f_0 : M_0 \to V$ — кусочно линейное отображение. Зафиксируем триангуляцию M_0, согласованную с f. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой окрестности U_0 $(n-2)$-мерного остова этой триангуляции существует замкнутая кусочно линейная поверхность $f : M \to V$, где $M \supset M_0 \backslash U_0$, f совпадает с f_0 на $M_0 \backslash U_0$, и грани f,* *соответствующие не входящим в $M_0 \setminus U_0$ симплексам, имеют суммарную площадь меньше ε.*

Доказательство. Заметим, что дополнение $(n-2)$-мерного остова псевдомногообразия M_0 является топологическим многообразием и допускает гладкую структуру, согласованную с триангуляцией. Действительно, введем на каждом симплексе евклидову метрику, положив длины всех ребер равными 1. Склеивание этих метрик определяет внутреннюю метрику на M_0, которая является локально евклидовой в дополнении $(n-2)$-мерного остова. Эта локально евклидова метрика определяет искомую дифференциальную структуру.

Пусть $U \subset U_0$ — окрестность $(n-2)$-мерного остова со сглаживаемой кусочно-линейной границей, такая, что ее n-мерная площадь и $(n-1)$-мерная площадь ее границы очень малы. Склеим многообразие M из двух копий многообразия $M_0 \setminus U$ и соединяющей их "трубки" вида $\partial U \times [0,1]$, или, формально,

$$M = ((M_0 \setminus U) \times \{0,1\}) \cup (\partial U \times [0,1]) \subset M \times [0,1].$$

Выберем малое $\delta > 0$ и определим кусочно линейное отображение $f : M \to V$ формулой

$$f(x,t) = (t\delta + 1 - t) \cdot f_0(x), \qquad (x,t) \in M.$$

На множестве $(M_0 \setminus U) \times \{0\}$ отображение f совпадает с f_0. Отождествим это множество с $M_0 \setminus U$. На множестве $(M_0 \setminus U) \times \{1\}$ отображение f отличается от f_0 гомотетией с коэффициентом δ, поэтому площадь этой части может быть сделана сколь угодно малой. Площадь части поверхности, соответствующей трубке $\partial U \times [0,1]$, оценивается сверху произведением $(n-1)$-мерной площади поверхности ∂U и радиуса шара с центром в нуле, содержащего множество $f_0(M)$. За счет выбора U эта площадь также может быть сделана сколь угодно малой. $\square$

1.3 Полуэллиптичность

Определение 1.3.1. Пусть θ — n-плотность в V. Для n-симплекса $\Delta = [p_0, \dots, p_n]$ положим

$$A_\theta(\Delta) = \frac{1}{n!}\theta(v_1 \wedge \dots \wedge v_n),$$

где $v_i = p_i - p_0$ (см. также пример 1.1.6).

Пусть $s = \sum a_i \Delta_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$, Δ_i — попарно различные n-симплексы. Определим *θ-площадь* $A_\theta(s)$ цепи s равенством

$$A_\theta(s) = \sum |a_i| \cdot A_\theta(\Delta_i'),$$

где n-симплексы Δ_i' совпадают с Δ_i при $a_i \geq 0$, и отличаются от Δ_i заменой ориентации на противоположную при $a_i < 0$.

Из определений следует, что функция A_θ на $S_n(V)$ положительно однородна и субаддитивна, то есть $A_\theta(ts) = tA_\theta(s)$ и $A_\theta(s + s') \le A_\theta(s) + A_\theta(s')$ для любых $s, s' \in S_n(V)$ и $t \ge 0$. Если θ симметрична, то A_θ тоже симметрична ($A_\theta(-s) = A_\theta(s)$), то есть является полунормой.

Определение 1.3.2. Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ — подкольцо (например, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{Z}$). n-плотность θ в пространстве V называется *полуэллиптической* над $\mathbf{K}$ если любой n-симплекс Δ имеет минимальную θ-площадь среди всех цепей $s \in S_n(V; \mathbf{K})$, для которых $\partial s = \partial\Delta$.

Понятие полуэллиптичности над кольцом введено Альмгреном [16]. Для симметричных n-плотностей имеет смысл понятие полуэллиптичности над $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, но мы не будем его рассматривать.

Ясно, что полуэллиптичность n-плотности над $\mathbf{R}$ влечет ее полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$. Обратное неверно, как будет показано в главе 2. Полуэллиптичность влечет непрерывность n-плотности, см. следствие 1.3.8.

Определим θ-площадь $A_\theta(f)$ кусочно линейной поверхности $f : M \to V$ как сумму θ-площадей ее граней. Ясно, что θ-площадь кусочно линейной поверхности равна θ-площади любой из цепей, параметризованных этой поверхностью.

Определение 1.3.3. n-плотность θ в пространстве V называется *топологически полуэллиптической*, если любой невырожденный n-симплекс $\Delta \subset V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех кусочно линейных поверхностей, параметризованных симплексом Δ так, что параметризация тождественна на краю.

Полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$, очевидно, влечет топологическую полуэллиптиность, а при $n \ge 3$ эти два свойства эквивалентны, см. [63, App. 2, Prop. A′]. Хотя топологическая полуэллиптичность как отдельное свойство интересна лишь для двумерных площадей, она позволяет упростить формулировки некоторых результатов о финслеровых объемах в следующих главах.

Замечание 1.3.4. Если n-плотность θ полуэллиптична (над $\mathbf{R}$, над $\mathbf{Z}$ или топологически), то θ-площадь минимизируют (в соответствующем классе цепей) не только одиночные симплексы, но и любые цепи вида $s = \sum \Delta_i$, где Δ_i — симплексы с попарно непересекающимися внутренностями, лежащие в одном n-мерном подпространстве α и одинаково ориентированные. Действительно, предположим что существует цепь s' с $\partial s' = \partial s$ и $A_\theta(s') < A_\theta(s)$. Пусть Δ — произвольный n-симплекс, лежащий в α и содержащий все симплексы Δ_i. Тогда, добавив к цепи s подходящую триангуляцию множества $\Delta \setminus \bigcup \Delta_i$, получим цепь, имеющую ту же границу, но меньшую θ-площадь, чем Δ, что противоречит полуэллиптичности.

Определение 1.3.5. n-плотность θ в пространстве V называется *выпукло продолжимой*, если существует такая выпуклая положительно однородная функция $\tilde{\theta} : \Lambda^n V \to \mathbf{R}_+$, что $\tilde{\theta}|_{\Lambda^n_s V} = \theta$. Такую функцию $\tilde{\theta}$ будем называть *выпуклым продолжением* n-плотности θ.

В силу положительной однородности, выпуклая продолжимость n-плотности θ эквивалентна следующему условию: для любых простых n-векторов $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in \Lambda^n_s V$, сумма которых тоже является простым n-вектором, выполняется неравенство

$$\theta(\sigma_1 + \dots + \sigma_k) \le \theta(\sigma_1) + \dots + \theta(\sigma_k).$$

Хорошо известно, что выпуклая продолжимость влечет полуэллиптичность над $\mathbf{R}$ (см., например, [15, §5.2.1], а также §2.2). Одним из результатов главы 2 является доказательство того, что эти два свойства эквивалентны.

Полуэллиптичность и непрерывность

Определение 1.3.6. Введем метрику на множестве всех n-симплексов следующим образом: расстояние между симплексами $\Delta = [p_0, \dots, p_n]$ и $\Delta' = [p'_0, \dots, p'_n]$ определяется равенством

$$\operatorname{dist}(\Delta, \Delta') = \max_i |p_i - p'_i|,$$

где $|\cdot|$ — вспомогательная евклидова норма. Задаваемая этим расстоянием топология, очевидно, не зависит от выбора вспомогательной нормы.

Лемма 1.3.7. *Пусть θ — n-плотность в V. Тогда существует такое $C > 0$, что для любых n-симплексов Δ и Δ' существует цепь $s \in S_n(V; \mathbf{Z})$, параметризуемая кусочно линейным отображением цилиндра $\partial\Delta \times [0,1]$ и такая, что $\partial s = \partial\Delta' - \partial\Delta$ и*

$$A_\theta(s) \le C \cdot \operatorname{diam}(\Delta \cup \Delta')^{n-1} \cdot \operatorname{dist}(\Delta, \Delta').$$

Как следствие,

$$F^{\mathbf{R}}_\theta(\partial\Delta' - \partial\Delta) \le F^{\mathbf{Z}}_\theta(\partial\Delta - \partial\Delta') \le C \cdot \operatorname{diam}(\Delta \cup \Delta')^{n-1} \cdot \operatorname{dist}(\Delta, \Delta').$$

Доказательство. Пусть $\Delta = [p_0, \dots, p_n]$, $\Delta' = [p'_0, \dots, p'_n]$, положим $D = \operatorname{diam}(\Delta \cup \Delta')$ и $\delta = \operatorname{dist}(\Delta, \Delta')$. Рассмотрим "призму" $P \in S_{m+1}(V)$, определяемую равенством

$$P = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i [p_0, p_1, \dots, p_i, p'_i, p'_{i+1}, \dots, p'_m].$$

Ее граница имеет вид

$$\partial P = \Delta' - \Delta + s,$$

где

$$s = \sum_{i \neq j} \varepsilon_{ij} \Delta_{ij},$$

$\varepsilon_{ij} = \pm 1$, Δ_{ij} получается из $[p_0, p_1, \dots, p_i, p'_i, p'_{i+1}, \dots, p'_m]$ выкидыванием вершины p_j или p'_j. Ясно, что s параметризуется боковой поверхностью $\partial\Delta \times [0,1]$ призмы $\Delta \times [0,1] \subset V \times \mathbf{R}$. Из равенства $\partial\partial P = 0$ следует, что $\partial s = \partial\Delta - \partial\Delta'$. Ребро $[p_i, p'_i]$ симплекса Δ_{ij} по длине не превосходит δ, а остальные ребра по длине не превосходят D, поэтому n-мерная евклидова площадь этого симплекса не превосходит $D^{n-1}\delta$. Следовательно, евклидова площадь цепи s не превосходит $n^2 D^{n-1}\delta$. Поскольку θ однородна и локально ограничена, ее отношение к евклидовой площади ограничено некоторой константой C_θ, откуда

$$A_\theta(s) \leq n^2 C_\theta D^{n-1} \delta.$$

Положив $C = n^2 C_\theta$, получаем требуемое неравенство. □

Следствие 1.3.8. *Если n-плотность топологически полуэллиптична, то она непрерывна.*

Доказательство. Пусть θ — топологически полуэллиптическая n-плотность. Чтобы доказать ее непрерывность, достаточно проверить следующее: если последовательность n-симплексов $\{\Delta_i\}$ сходится к n-симплексу Δ в метрике из определения 1.3.6, то $A_\theta(\Delta_i) \to A_\theta(\Delta)$. Пусть s_i — цепь, соединяющая границы симплексов Δ и Δ_i как в лемме 1.3.7. В силу топологической полуэллиптичности,

$$A_\theta(\Delta) \leq A_\theta(\Delta_i) + A_\theta(s_i),$$

так как приклеивание к Δ_i цилиндрической поверхности, параметризующей s, дает кусочно линейную поверхность, параметризуемую симплексом, граница которой совпадает с $\partial\Delta$. Аналогично

$$A_\theta(\Delta_i) \leq A_\theta(\Delta) + A_\theta(s_i).$$

Следовательно,

$$|A_\theta(\Delta_i) - A_\theta(\Delta)| \leq A_\theta(s_i) \leq C \cdot \operatorname{diam}(\Delta, \Delta_i) \operatorname{dist}(\Delta, \Delta_i) \to 0,$$

что и требовалось доказать. □

1.4 Заполняющие площади и полуэллиптические оболочки

В этом параграфе через $\mathbf{K}$ обозначается любое подкольцо поля $\mathbf{R}$. Далее в качестве $\mathbf{K}$ будут использоваться $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$. Через θ обозначается n-плотность в V.

Определение 1.4.1. *Заполняющей θ-площадью* цикла $c \in C_{n-1}(V;\mathbf{K})$ над $\mathbf{K}$ называется число

$$F_\theta^{\mathbf{K}}(c) = \inf\{A_\theta(s) : s \in S_n(V;\mathbf{K}),\ \partial s = c\}.$$

Теперь определение полуэллиптичности можно переформулировать следующим образом: θ полуэллиптична над $\mathbf{K}$ тогда и только тогда, когда $F_\theta^{\mathbf{K}}(\Delta) = A_\theta(\partial\Delta)$ для любого n-симплекса Δ.

Из свойств площади следует, что функция $F_\theta^{\mathbf{K}}$ субаддитивна, то есть

$$F_\theta^{\mathbf{K}}(c + c') \le F_\theta^{\mathbf{K}}(c) + F_\theta^{\mathbf{K}}(c')$$

для любых $c, c' \in C_{n-1}(V;\mathbf{K})$. В случае $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ она положительно однородна, то есть

$$F_\theta^{\mathbf{K}}(tc) = tF_\theta^{\mathbf{K}}(c)$$

для любого $c \in C_{n-1}(V;\mathbf{K})$ и любого неотрицательного $t \in \mathbf{K}$. Как следствие, функция $F_\theta^{\mathbf{R}}$ выпукла. Если θ симметрична, то $F_\theta^{\mathbf{R}}$ является полунормой на пространстве $C_{n-1}(V)$.

Из определения немедленно следуют неравенства $F_\theta^{\mathbf{R}} \le F_\theta^{\mathbf{Q}} \le F_\theta^{\mathbf{Z}}$.

Предложение 1.4.2. *Для любого $c \in C_{n-1}(V;\mathbf{Z})$*

$$F_\theta^{\mathbf{R}}(c) = F_\theta^{\mathbf{Q}}(c) = \inf_{m\in\mathbf{N}} \frac{F_\theta^{\mathbf{Z}}(mc)}{m}.$$

Доказательство. Второе равенство очевидно. Для доказательства первого достаточно проверить, что $F_\theta^{\mathbf{Q}}(c) \le F_\theta^{\mathbf{R}}(c)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По определению заполняющей площади, существует такая цепь $s \in S_n(V)$, что $\partial s = c$ и $A_\theta(s) < F_\theta^{\mathbf{R}}(c) + \varepsilon$. Пусть $s = \sum_{i=1}^N a_i\Delta_i$, где Δ_i — n-симплексы, $\lambda_i \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим условие $\partial s = c$ как систему линейных уравнений относительно неизвестных a_i. А именно, для каждого $(n-1)$-симплекса, являющегося гранью хотя бы одного из симплексов Δ_i, сумма соответствующих переменных a_i со знаками, определяемыми ориентацией, должна быть равна коэффициенту, с которым данный $(n-1)$-симплекс входит в c.

Поскольку эта система разрешима и ее коэффициенты целые, у нее есть рациональное решение $\{a_i'\}$, причем оно может быть выбрано сколь угодно близким к наперед заданному вещественному решению $\{a_i\}$. Выберем a_i' столь близкими к a_i, что $sign(a_i') = sign(a_i)$ для всех i и

$$\sum |a_i' - a_i| \cdot A_\theta(\Delta_i) < \varepsilon.$$

Тогда для цепи $s' = \sum a_i'\Delta_i \in S_n(V;\mathbf{Q})$ имеем $\partial s' = c$ и

$$A_\theta(s') < A_\theta(s) + \varepsilon < F_\theta^{\mathbf{R}}(c) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что $F_\theta^{\mathbf{Q}}(c) \le F_\theta^{\mathbf{R}}(c)$. $\square$

Предложение 1.4.3. *Пусть n-симплексы Δ и Δ' лежат в параллельных n-мерных аффинных подпространствах и одинаково ориентированы. Тогда*

$$\frac{F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta')}{F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta)} = \frac{|\Delta'|}{|\Delta|},$$

где модуль обозначает евклидову площадь (относительно произвольной евклидовой структуры).

Доказательство. Из теоремы Витали о покрытиях следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой дизъюнктный набор $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ симплексов, содержащихся в Δ' и гомотетичных симплексу Δ с некоторыми коэффициентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$, что $\sum |\Delta_i| > (1-\varepsilon)|\Delta'|$. Пусть $|\Delta'| = a|\Delta|$, тогда

$$\sum |\Delta_i| = \sum \lambda_i^n |\Delta| = a^{-1} \sum \lambda_i^n |\Delta'|.$$

Из этого тождества и неравенства $\sum |\Delta_i| \leq |\Delta'|$ следует, что $\sum \lambda_i^n \leq a$.

Обозначим через s цепь, соответствующую какой-нибудь триангуляции множества $\Delta' \setminus \bigcup \Delta_i$, выбранной так, что $\partial\Delta' = \partial s + \sum \partial\Delta_i$. Тогда

$$F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta') \leq \sum F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta_i) + F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial s) \leq \sum F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta_i) + A_\theta(s).$$

Очевидно, что при гомотетии с коэффициентом $\lambda > 0$ заполняющая θ-площадь цикла умножается на λ^n. Следовательно,

$$\sum F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta_i) = \sum \lambda_i^n F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta) \leq a F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta),$$

так как $\sum \lambda_i^n \leq 1$. Таким образом,

$$F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta') \leq a F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta) + A_\theta(s).$$

Поскольку Δ' и все симплексы, составляющие цепь s, лежат в одном n-мерном аффинном подпространстве и одинаково ориентированы, имеем

$$A_\theta(s) = A_\theta(\Delta') \cdot \frac{|\Delta' \setminus \bigcup \Delta_i|}{|\Delta'|} < \varepsilon A_\theta(\Delta').$$

Таким образом, $F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta') \leq a F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta) + \varepsilon A_\theta(\Delta')$. В силу произвольности ε отсюда следует, что $F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta') \leq a F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta)$. Аналогично $F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta) \leq a^{-1} F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta')$. Из этих двух неравенств следует требуемое тождество. □

Определение 1.4.4. *Полуэллиптической оболочкой* n-плотности θ над $\mathbf{K}$ называется n-плотность $E_{\mathbf{K}}\theta$, максимальная среди всех n-плотностей, не превосходящих θ и полуэллиптических над $\mathbf{K}$.

Полуэллиптическая оболочка $E_{\mathbf{K}}\theta$ существует, так как супремум любого набора полуэллиптических n-плотностей, очевидно, является полуэллиптической n-плотностью (над тем же кольцом).

Следующее предложение дает явное описание полуэллиптической оболочки в терминах заполняющих площадей.

Предложение 1.4.5. *Пусть $\sigma \in \Lambda_s^n(V)$. Тогда*

$$E_{\mathbf{K}}\theta(\sigma) = F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta)$$

где Δ — произвольный n-симплекс, представляющий σ.

Доказательство. По определению имеем $E_{\mathbf{K}}\theta \le \theta$, откуда

$$E_{\mathbf{K}}\theta(\sigma) = F_{E_{\mathbf{K}}\theta}^{\mathbf{K}}(\sigma) \le F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta)$$

(первое соотношение следует из полуэллиптичности n-плотности $E_{\mathbf{K}}\theta$). Остается доказать неравенство $E_{\mathbf{K}}\theta(\sigma) \ge F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta)$.

Определим функцию $\varphi : \Lambda_s^n(V) \to \mathbf{R}_+$ следующим образом. Для каждого $\sigma \in \Lambda_s^n(V)$ положим $\varphi(\sigma) = F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta)$, где Δ — произвольный симплекс, представляющий σ. Из предложения 1.4.3 следует, что φ корректно определена и является n-плотностью. Докажем, что φ полуэллиптична над $\mathbf{K}$. Пусть Δ — произвольный n-симплекс, $s \in S_n(V;\mathbf{K})$, $\partial s = \partial\Delta$. Пусть $s = \sum a_i\Delta_i$, где $a_i \in \mathbf{K}$, Δ_i — n-симплексы. Изменив ориентацию некоторых симплексов Δ_i (и при необходимости добавляя вырожденные симплексы, чтобы сохранить границу цепи) добьемся того, чтобы все коэффициенты a_i были неотрицательными. Тогда

$$A_\varphi(s) = \sum a_i A_\varphi(\Delta_i) = \sum a_i F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta_i).$$

Для каждого i приблизим заполняющую θ-площадь $F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta_i)$ θ-площадью $A_\theta(s_i)$, где $s_i \in S_n(V;\mathbf{K})$ и $\partial s_i = \partial\Delta_i$. Получим

$$A_\varphi(s) = \sum a_i F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta_i) \approx \sum a_i A_\theta(s_i) = A_\theta(s'),$$

где $s' = \sum a_i s_i$. Заметим, что $\partial s' = \partial s = \partial\Delta$, откуда

$$A_\theta(s') \ge F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial s') = F_\theta^{\mathbf{K}}(\partial\Delta) = A_\varphi(\Delta).$$

Поскольку приближение может быть выбрано сколь угодно точным, отсюда следует, что $A_\varphi(s) \ge A_\varphi(\Delta)$. Поскольку Δ — произвольный n-симплекс, а s — произвольная цепь с $\partial s = \partial\Delta$, это неравенство означает, что φ полуэллиптична над $\mathbf{K}$.

Поскольку φ полуэллиптична и $\varphi \le \theta$, имеем $E_\theta^{\mathbf{K}} \ge \varphi$ по определению полуэллиптической оболочки. В частности, если простой n-вектор σ представлен симплексом Δ, то $E_{\mathbf{K}}\theta(\sigma) \ge \varphi(\sigma) = F_\sigma(\partial\Delta)$, что и требовалось доказать. □

1.5 Приближение цепей поверхностями

В этом параграфе мы переформулируем определения полуэллиптичности в терминах липшицевых поверхностей. Все рассматриваемые здесь n-плотности предполагаются симметричными и непрерывными.

Будем называть *n-мерным аффинным диском* поверхность, представленную инъективным аффинным отображением $E : D^n \to V$, где D^n — стандартный единичный шар в $\mathbf{R}^n$. Множество $E(D^n) \subset V$ тоже будем называть аффинным диском. Через S^{n-1} обозначается граница шара D^n.

Предложение 1.5.1. *Пусть θ — непрерывная симметричная n-плотность в V. Тогда*

1. θ топологически полуэллиптична тогда и только тогда, когда любой аффинный диск $E : D^n \to V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех липшицевых поверхностей вида $f : D^n \to V$ таких, что $f|_{S^{n-1}} = L|_{S^{n-1}}$.

2. θ полуэллиптична над $\mathbf{Z}$ тогда и только тогда, когда любой аффинный диск $E : D^n \to V$ имеет минимальную θ-площадь среди всех ориентированных липшицевых поверхностей вида $f : M \to V$, где M — компактное многообразие, $\partial M = S^{n-1}$ и $f|_{S^{n-1}} = E|_{S^{n-1}}$.

3. θ полуэллиптична над $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда для любого аффинного диска $E : D^n \to V$ и любой компактной ориентированной липшицевой поверхности $f : M \to V$, для которой $f|_{\partial M} \subset L(S^{n-1})$, имеет место неравенство

$$A_\theta(f) \geq |\deg f|_{\partial M}| \cdot A_\theta(E), \tag{1.5.1}$$

где $\deg f|_{\partial M}$ — топологическая степень отображения $f|_{\partial M}$, рассматриваемого как отображение из ∂M в $(n-1)$-мерную сферу $L(S^{n-1})$.

Доказательство. 1. Если θ не является топологически полуэллиптичной, то в V существует n-мерный симплекс Δ и кусочно-линейное отображение $f : \Delta \to V$, тождественное на $\partial\Delta$, θ-площадь которого меньше, чем у Δ. Поместим Δ в аффинный диск $E(D^n)$ и продолжим f на $E(D^n) \setminus \Delta$ тождественным отображением. Тогда отображение $f_1 = f \circ E : D^n \to V$ липшицево и $A_\theta(f_1|_{D^n}) < A_\theta(E|_{D^n})$. Это доказывает импликацию "тогда".

Обратно, предположим, что θ топологически полуэллиптична, но существует аффинный диск $E : D^n \to V$ и липшицева поверхность $f : D^n \to V$ такие, что $f|_{S^{n-1}} = L|_{S^{n-1}}$ и $A_\theta(f) < A_\theta(E)$. Подклеив подходящий "воротник", дополняющий шар D^n до симплекса $\Delta \subset \mathbf{R}^n$, получим аналогичную пару отображений $E : \Delta \to V$ и $f : \Delta \to V$. При этом f совпадает с E в некоторой окрестности края $\partial\Delta$, Сгладив отображение f, получим последовательность гладких отображений $f_i : \Delta \to V$, $i = 1, 2, \ldots$, такую, что $f_i = f = E$ в некоторой окрестности края и $df_i \to df$ почти всюду. Из определения θ-площади и непрерывности θ следует, что $A_\theta(f_i) \to A_\theta(f)$, значит, $A_\theta(f_i) < A_\theta(E)$ при достаточно больших i. Таким образом, можно считать, что исходная поверхность f — гладкая. Приблизим f кусочно линейными отображениями f_i, совпадающими с f вблизи края, дифференциалы которых сходятся к df почти всюду. Для этого достаточно построить последовательность триангуляций Δ на равномерно невырожденные симплексы с мелкостью, стремящейся к нулю, и для каждой триангуляции определить соответствующее приближение аффинным на каждом симплексе триангуляции и совпадающим с f на ее вершинах. Аналогично рассуждению со сглаживанием получаем, что $A_\theta(f_i) < A_\theta(E)$ при некотором i, что противоречит топологической полуэллиптичности.

2. Пусть θ не полуэллиптична над $\mathbf{Z}$. Тогда существуют n-симплекс $\Delta \subset V$ и цепь $s \in S_n(V)$, для которых $\partial s = \partial\Delta$ и $A_\theta(s) < A_\theta(\Delta)$. Параметризуем замкнутую цепь $s - \Delta$ кусочно линейным отображением псевдомногообразия без края (см. предложение 1.2.7), а затем с помощью предложения 1.2.8 превратим его в ориентированную замкнутую кусочно линейную поверхность топологической перестройкой, мало влияющей на площадь. Пусть Δ' — n-симплекс, лежащий внутри Δ и такой, что разность площадей $|\Delta| - |\Delta'|$ мала по сравнению с $A_\theta(\Delta) - A_\theta(s)$. Можно считать, что вышеуказанная топологическая перестройка не затрагивает Δ' (так как она может быть осуществлена в сколь угодно малой окрестности $(n-2)$-мерного остова). Тогда, вырезав из поверхности симплекс Δ', получим поверхность f с краем, который параметризует цепь $\partial\Delta'$, причем $A_\theta(f) < A_\theta(\Delta')$. Подклеив “воротник”, дополняющий симплекс Δ' до аффинного диска, получим ориентированную липшицеву поверхность, затягивающую границу аффинного диска и имеющую меньшую θ-площадь, чем этот диск. Это доказывает импликацию “тогда”.

Обратно, пусть существует аффинный диск $E : D^n \to V$ и ориентированная липшицева поверхность вида $f : M \to V$, такие, что край f совпадает с краем диска и $A_\theta(f) < A_\theta(E)$. Так же, как в доказательстве первой части, дополним диск до симплекса, а липшицеву поверхность приблизим кусочно линейной. Таким образом, существует n-симплекс Δ и ориентированная кусочно линейная поверхность $f : M \to V$ такие, что край f параметризует $\partial\Delta$ и $A_\theta(f) < A_\theta(\Delta)$. Сделаем из этой поверхности целочисленную цепь следующим образом. Зафиксируем триангуляцию $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ многообразия M, согласованную с f, и введем линейный порядок на множестве всех вершин этой триангуляции. Для каждого симплекса Δ_i обозначим через $v_{i,0}, \dots, v_{i,n}$ его вершины, перечисленные в соответствии с этим линейным порядком. Положим $\Delta_i' = [f(v_{i,0}), \dots, f(v_{i,n})]$ и рассмотрим цепь $s = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \Delta_i'$, где $\varepsilon_i = 1$, если порядок вершин согласован с ориентацией симплекса Δ_i, и $\varepsilon_i = -1$ в противном случае. По построению имеем $A_\theta(s) \le A_\theta(f)$ (отметим, что неравенство может быть строгим, так как в формуле для s возможны сокращения). При вычислении границы ∂s все $(n-1)$-симплексы, соответствующие внутренним $(n-1)$-мерным граням M, попарно сокращаются, поэтому цепь ∂s параметризуется тождественным отображением края $\partial\Delta$, рассматриваемого как ориентированное псевдомногообразие. Добавив к s несколько вырожденных симплексов, получим целочисленную цепь s_1, для которой $\partial s_1 = \partial\Delta$ в смысле равенства цепей. При этом $A_\theta(s_1) = A_\theta(s) < A_\theta(\Delta)$, что противоречит полуэллиптичности θ над $\mathbf{Z}$.

3. Предположим, что θ не полуэллиптична над $\mathbf{R}$. Тогда в V найдется n-симплекс Δ, для которого, $F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta) < A_\theta(\Delta)$, где $F^{\mathbf{R}}$ — заполняющая θ-площадь. По предложению 1.4.2,

$$F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta) = \inf_{n\in\mathbf{N}} \frac{F_\theta^{\mathbf{Z}}(\partial\Delta)}{n},$$

поэтому найдутся такие $N \in \mathbf{N}$ и $s \in S_n(V;\mathbf{Z})$, что $\partial s = N\cdot\partial\Delta$ и $A_\theta(s) < N\cdot A_\theta(\Delta)$. Повторив рассуждения из второй части доказательства, превратим замкнутую цепь $s - N\Delta$ в замкнутую ориентированную липшицеву поверхность, N раз покрывающую симплекс Δ', содержащийся внутри симплекса Δ и очень близкий к нему. Вырезав эти N копий симплекса Δ' и подклеив вместо них "воротники", дополняющие симплекс до аффинного диска, получим поверхность, не удовлетворяющую неравенству (1.5.1).

Обратно, пусть существует поверхность f, не удовлетворяющая (1.5.1). Можно считать, что $N = \deg f|_{\partial M} > 0$. Соединим отображение $f|_{\partial M} : \partial M \to \partial E(D^n) \simeq S^{n-1}$ липшицевой гомотопией с таким кусочно гладким отображением $f_1 : \partial M \to \partial E(D^n)$, у которого все точки образа, за исключением конечного набора, являются регулярными значениями и покрыты ровно N раз. Подклеим эту гомотопию в качестве "воротника" к поверхности f (площадь добавленной части равна 0, так как она содержится в $(n-1)$-сфере). Теперь можно добавить еще один воротник, N-кратно покрывающий множество $\Delta \setminus E(D^n)$, где Δ — n-симплекс, содержащий $E(D^n)$. Обозначим полученную поверхность через $f_2 : M_2 \to V$. Для нее выполняются соотношения $f_2(\partial M_2) \subset \partial\Delta$, $\deg f_2|_{\partial M_2} = N$, $A_\theta(f_2) < NA_\theta(\Delta)$, и при этом все точки множества $\partial\Delta$, за исключением конечного числа, покрываются отображением $f_2|_{\partial M_2}$ с кратностью N. Поверхность f_2 можно считать кусочно линейной вблизи края, этого можно добиться выбором подходящего f_1 на предыдущем этапе. Теперь, аналогично доказательству второй части, приблизим поверхность f_2 кусочно линейной поверхностью f_3, из которой сделаем целочисленную цепь s, а к ней добавим несколько вырожденных симплексов, чтобы полученная цепь s_1 удовлетворяла равенству $\partial s_1 = N\cdot\partial\Delta$. Цепь $s_2 = \frac{1}{N}s_1$ удовлетворяет соотношениям $\partial s_2 = \partial\Delta$ и

$$A_\theta(s_2) = \tfrac{1}{N}A_\theta(s_1) \le \tfrac{1}{N}A_\theta(f_3) \approx \tfrac{1}{N}A_\theta(f_2) < A_\theta(\Delta),$$

что противоречит полуэллиптичности θ над $\mathbf{R}$. $\square$

Глава 2

Полуэллиптичность над R и Z

Целью этой главы является исследование соотношений между различными видами полуэллиптичности, определенными в §1.3. Доказанные результаты: полуэллиптичность над **R** эквивалентна выпуклой продолжимости (теорема 2.2.3) и не эквивалентна (строго сильнее) полуэллиптичности над **Z** (теорема 2.6.1). Интересным “побочным продуктом” первой теоремы является обобщение на произвольные коразмерности классической теоремы Минковского о существовании многогранника с данными направлениями и площадями граней (теорема 2.3.1).

2.1 Результирующий n-вектор цепи

Определение 2.1.1. Для n-симплекса $\Delta = [p_0, p_1, \dots, p_n]$ определим n-вектор $\mathbf{I}(\Delta) \in \Lambda^n_s V$ равенством

$$\mathbf{I}(\Delta) = \frac{1}{n!}\bigwedge_{i=1}^{n}(p_i - p_0).$$

Другими словами, если Δ невырожден, то $\mathbf{I}(\Delta)$ — единственный простой n-вектор, лежащий в n-мерном подпространстве, сонаправленном с Δ и имеющий такую же и площадь, как Δ; если же Δ вырожден, то $\mathbf{I}(\Delta) = 0$. Будем говорить, что симплекс Δ *представляет* простой n-вектор $\mathbf{I}(\Delta)$.

Для цепи $s = \sum a_i \Delta_i$, где Δ_i — n-симплексы, определим

$$\mathbf{I}(s) = \sum a_i \mathbf{I}(\Delta_i),$$

таким образом, $\mathbf{I} : S_n(V) \to \Lambda^n(V)$ — линейное отображение. Мы будем называть $\mathbf{I}(s)$ *результирующим n-вектором* цепи s.

Определение 2.1.2. Пусть $f : M \to V$ — компактная ориентированная n-мерная липшицева поверхность. Дифференциал df индуцирует измеримое послойно линейное отображение $f_* : \Lambda^n TM \to \Lambda^n V$. Такое отображение можно рассматривать как дифференциальную форму ω_f на M с измеримыми коэффициентами и со значениями в $\Lambda^n V$. Определим *результирующий n-вектор* $\mathbf{I}(f)$ поверхности f равенством

$$\mathbf{I}(f) = \int_M \omega_f.$$

Ясно, что для кусочно линейной поверхности результирующий n-вектор совпадает с результирующим n-вектором любой параметризуемой этой поверхностью цепи.

Предложение 2.1.3. *Пусть $s, s' \in S_n(V)$. Тогда*

1. Если $\partial s = 0$, то $\mathbf{I}(s) = 0$.

2. Если $\partial s = \partial s'$, то $\mathbf{I}(s) = \mathbf{I}(s')$.

Аналогичные свойства верны и для липшицевых поверхностей.

Доказательство. 1. Пространство $\Lambda^n V$ двойственно к пространству $\Lambda^n V^*$ внешних n-форм на V. Поэтому достаточно доказать, что для любой внешней n-формы $\omega \in \Lambda^n V^*$ имеет место равенство $\omega(\mathbf{I}(s)) = 0$. Рассмотрим ω как дифференциальную n-форму (с постоянными коэффициентами) на V. Тогда

$$\omega(\mathbf{I}(s)) = \int_s \omega.$$

Кроме того, $d\omega = 0$, следовательно, $\omega = d\Omega$ для некоторой дифференциальной $(n+1)$-формы Ω на V. Отсюда по теореме Стокса

$$\int_s \omega = \int_{\partial s} \Omega = 0,$$

так как $\partial s = 0$.

2. Применим первое утверждение к разности $s - s'$.

В случае поверхностей доказательство полностью аналогично. $\square$

2.2 Полуэллиптичность и выпуклая продолжимость

Напомним (см. определение 1.3.5), что n-плотность $\theta : \Lambda^n_s V$ в пространстве V называется *выпукло продолжимой*, если она имеет выпуклое продолжение $\tilde{\theta}$ на пространство $\tilde{\theta} : \Lambda^n V \to \mathbf{R}_+$ всех n-векторов.

Максимальную выпукло продолжимую n-плотность, не превосходящую θ, будем называть *выпуклой оболочкой* θ и обозначать через $\operatorname{Conv}\theta$.

Определение 2.2.1. Пусть θ — n-плотность, $\alpha \in G^+_n(V)$, $\omega \in \Lambda^n V^*$ — внешняя n-форма в пространстве V. Будем говорить, что ω *калибрует* α относительно θ, если $\omega(\sigma) \leq \theta(\sigma)$ для любого $\sigma \in \Lambda^n_s V$, причем если $\sigma \upuparrows \alpha$, то достигается равенство $\omega(\sigma) = \theta(\sigma)$.

Предложение 2.2.2. *n-плотность θ выпукло продолжима тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in G_n^+(V)$ существует внешняя n-форма, калибрующая α относительно θ.*

Доказательство. Предположим, что θ выпукло продолжима, и пусть $\tilde{\theta}$ — ее продолжение на $\Lambda^n V$. Пусть $\alpha \in G_n^+(V)$, σ — произвольный простой n-вектор в α. Поскольку $\tilde{\theta}$ выпукла, по теореме Хана–Банаха существует линейная функция $\omega : \Lambda^n V \to \mathbf{R}$, то есть такая, что $\omega \leq \tilde{\theta}$ на $\Lambda^n V$ и $\omega(\sigma) = \theta(\sigma)$. Это и есть искомая калибрующая форма.

Обратно, предположим, что для любого $\alpha \in G_n^+(V)$ существует калибрующая форма. Тогда супремум всех таких форм (по всем α) является выпуклым продолжением θ на $\Lambda^n V$. □

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 2.2.3. *n-плотность θ в пространстве V полуэллиптична над $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда она выпукло продолжима.*

Доказательство. Тот факт, что выпуклость влечет полуэллиптичность, хорошо известен, см., например, [15, §5.2.1]. Для полноты изложения приведем короткое доказательство. Пусть θ — выпукло продолжимая n-плотность, $\tilde{\theta}$ — ее выпуклое продолжение. Пусть Δ — n-симплекс, $s \in S_n(V)$ — такая цепь, что $\partial s = \partial\Delta$, $s = \sum a_i \Delta_i$. В силу выпуклости и положительной однородности функции $\tilde{\theta}$ имеем $\tilde{\theta}(t\sigma) = t\tilde{\theta}(\sigma)$ и $\tilde{\theta}(\sigma + \sigma') \leq \tilde{\theta}(\sigma) + \tilde{\theta}(\sigma')$ для любых $\sigma, \sigma' \in \Lambda^n V$, $t \geq 0$. Пользуясь этими соотношениями, получаем

$$A_\theta(s) = \sum |a_i| \tilde{\theta}(sign(a_i)\mathbf{I}(\Delta_i)) \\ \geq \tilde{\theta}\big(\sum a_i \mathbf{I}(\Delta_i)\big) = \tilde{\theta}(\mathbf{I}(s)) = \theta(\mathbf{I}(\Delta)) = A_\theta(\Delta)$$

(предпоследнее равенство следует из предложения 2.1.3). Из доказанного неравенства $A_\theta(s) \geq A_\theta(\Delta)$ по определению следует полуэллиптичность.

Перейдем к доказательству обратного утверждения. Пусть θ — n-плотность, полуэллиптичная над $\mathbf{R}$. Зафиксируем произвольное $\alpha \in G_n^+(V)$. По предложению 2.2.2, достаточно доказать, что существует внешняя n-форма, калибрующая α относительно θ.

Будем называть n-симплекс Δ *сонаправленным* с α, если невырожден, лежит в аффинном подпространстве, параллельном α, и его ориентация согласована с ориентацией α. Обозначим через $S_n^\alpha(V)$ линейное подпространство в $S_n(V)$, порожденное всеми n-симплексами, сонаправленными с α. Обозначим через $C_{n-1}^\alpha(V)$ образ подпространства $S_n^\alpha(V)$ при граничном операторе $\partial : S_n(V) \to C_{n-1}(V)$.

Заметим, что для каждой цепи $s \in S_n^\alpha(V)$ результирующий n-вектор $\mathbf{I}(s)$ параллелен α; такие n-векторы образуют одномерное подпространство в $\Lambda^n V$. Определим линейную функцию $L_0 : C_{n-1}^\alpha(V) \to \mathbf{R}$ равенством

$$L_0(c) = \begin{cases} \theta(\mathbf{I}(s)), & \text{если } \mathbf{I}(s) \upuparrows \alpha \\ -\theta(-\mathbf{I}(s)), & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $s \in S_n(V)$ — такая цепь, что $\partial s = c$. По предложению 2.1.3 $L(c)$ определено корректно (не зависит от выбора s). Заметим, что

$$L_0(\partial\Delta) = A_\theta(\Delta) \tag{2.2.1}$$

для любого симплекса Δ, сонаправленного с α.

Лемма 2.2.4. *$L_0(c) \le F_\theta^{\mathbf{R}}(c)$ для любого $c \in C_{n-1}^\alpha(V)$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $F_\theta^{\mathbf{R}}(c) < L_0(c)$ для некоторого $c \in C_{n-1}^\alpha(V)$.

Заметим, что для любого $a > 0$ и любого n-симплекса Δ, сонаправленного с α, имеет место неравенство

$$L_0(c + a\partial\Delta) - F_\theta^{\mathbf{R}}(c + a\partial\Delta) \ge L_0(c) - F_\theta^{\mathbf{R}}(c). \tag{2.2.2}$$

Действительно,

$$L_0(c + a\partial\Delta) = L_0(c) + aL_0(\partial\Delta) = L_0(c) + aA_\theta(\Delta)$$

по (2.2.1), и

$$F_\theta^{\mathbf{R}}(c + a\partial\Delta) \le F_\theta^{\mathbf{R}}(c) + aF_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta) = F_\theta^{\mathbf{R}}(c) + aA_\theta(\Delta).$$

Вычитая эти соотношения, получаем (2.2.2).

Пусть $c = \sum_{i=1}^N a_i\partial\Delta_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$, Δ_i — симплексы, сонаправленные с α (такое представление существует по определению $C_{n-1}^\alpha(V)$). Если среди коэффициентов a_i есть отрицательные, рассмотрим цикл

$$c' = c + \sum_{i:\, a_i<0} (-a_i)\partial\Delta_i = \sum_{i:\, a_i>0} a_i\partial\Delta_i.$$

Из (2.2.2) следует, что $L_0(c') - F_\theta^{\mathbf{R}}(c') \ge L_0(c) - F_\theta^{\mathbf{R}}(c) > 0$, поэтому (заменяя c на c') можно считать, что все коэффициенты a_i положительны.

Выбрав подходящий базис $e_1, \dots, e_m \in V$, отождествим V с $\mathbf{R}^m$ так, что α — координатное подпространство, порожденная векторами $e_1, \dots, e_n$, и все симплексы Δ_i содержатся в некотором единичном кубе с ребрами, параллельными координатным осям. Можно считать, что это куб $[0,1]^m$.

Положим $\varepsilon = L_0(c) - F^{\mathbf{R}}_\theta(c) > 0$. Пусть M — достаточно большое натуральное число, обозначим $\mathbf{Z}_M = \{0, 1, \dots, M-1\}$. Для каждого вектора $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{Z}^n_M$ обозначим через T^v параллельный перенос в $\mathbf{R}^m$ на вектор $\sum_{i=1}^n v_i e_i$. Рассмотрим цикл

$$c' = \sum_{v \in \mathbf{Z}^n_M} T^v(c).$$

Функции L_0 и $F^{\mathbf{R}}_\theta$ инвариантны относительно параллельных переносов, поэтому

$$L_0(c') = \sum_{v \in \mathbf{Z}^n_M} L_0(T^v(c)) = m^n L_0(c)$$

$$F^{\mathbf{R}}_\theta(c') \leq \sum_{v \in \mathbf{Z}^n_M} F^{\mathbf{R}}_\theta(T^v(c)) = m^n L_0(c).$$

Следовательно,

$$L_0(c') - F^{\mathbf{R}}_\theta(c') \geq m^n (L(c) - F^{\mathbf{R}}_\theta(c)) = m^n \varepsilon.$$

Для каждого $i = 1, \dots, N$ симплекс Δ_i лежит в подпространстве α_i, которое получается из α параллельным переносом на некоторый вектор w_i, ортогональный α. Заметим, что $|w_i| \leq 1$, так как Δ_i содержится в кубе $[0,1]^m$. Зафиксируем n-симплекс $\Delta^1 \subset \alpha$, содержащий куб $[0,1]^n$. Пусть Δ^m — симплекс, полученный из Δ^1 гомотетией с коэффициентом m (относительно начала координат), Δ^m_i — симплекс, полученный из Δ^m параллельным переносом на вектор w_i.

Заметим, что при фиксированном i симплексы вида $T^v \Delta_i$, где $v \in \mathbf{Z}^n_M$, попарно не пересекаются и содержатся в Δ^M_i. Триангулируем множество $\Delta^m_i \setminus \bigcup_{v \in \mathbf{Z}^n_m} T^v \Delta_i$ на симплексы $\Delta_{i,j}$, $j = 1, \dots, N_i$, так, что

$$\partial \Delta^m_i = \sum_{v \in \mathbf{Z}^n_m} T^v \partial \Delta_i + \sum_{j=1}^{N_i} \partial \Delta_{i,j}.$$

Складывая эти равенства по всем i с коэффициентами a_i, получаем

$$\sum_{i=1}^N a_i \partial \Delta^m_i = \sum_{i=1}^N \sum_{v \in \mathbf{Z}^n_m} a_i T^v(\partial \Delta_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} a_i \partial \Delta_{i,j} = c' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_i} a_i \partial \Delta_{i,j}.$$

Применяя (2.2.2) к циклу c' и симплексам $\Delta_{i,j}$, получаем

$$L_0\bigl(\sum a_i \partial \Delta^m_i\bigr) - F^{\mathbf{R}}_\theta\bigl(\sum a_i \partial \Delta^m_i\bigr) \geq L_0(c') - F^{\mathbf{R}}_\theta(c') \geq m^n \varepsilon.$$

Обозначим $a = \sum a_i$, тогда

$$L_0\bigl(\sum a_i \partial \Delta^m_i\bigr) = a L_0(\partial \Delta^m),$$

так как симплексы Δ^m_i получаются из Δ^m параллельными переносами. Теперь предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$F^{\mathbf{R}}_\theta\bigl(\sum a_i \Delta^m_i\bigr) \leq a L_0(\partial \Delta^m) - m^n \varepsilon. \tag{2.2.3}$$

Поскольку расстояние между Δ^m и Δ_i^m не превосходит 1, из леммы 1.3.7 следует, что

$$F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta^m - \partial\Delta_i^m) \le Cm^{n-1}$$

(для некоторой константы C, не зависящей от m), откуда

$$\begin{aligned} aF_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta^m) - F_\theta^{\mathbf{R}}\bigl(\sum a_i\partial\Delta_i^m\bigr) &\le F_\theta^{\mathbf{R}}\bigl(a\partial\Delta^m - \sum a_i\partial\Delta_i^m\bigr) \\ &= F_\theta^{\mathbf{R}}\bigl(\sum a_i(\partial\Delta^m - \partial\Delta_i^m)\bigr) \le aCm^{n-1} \end{aligned}$$

(оба неравенства в цепочке следуют из неравенства треугольника для $F_\theta^{\mathbf{R}}$). Складывая с (2.2.3), получаем

$$aF_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta^m) \le aL_0(\partial\Delta^m) - m^n\varepsilon + aCm^{n-1},$$

или, эквивалентно,

$$F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta^m) \le L_0(\partial\Delta^m) - \frac{m^{n-1}}{a}\bigl(m\varepsilon - aC\bigr)$$

Число m может быть выбрано столь большим, что $m\varepsilon - aC > 0$, тогда

$$F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta^m) < L_0(\partial\Delta^m) = A_\theta(\Delta^m)$$

(где последнее равенство следует из (2.2.1)), что противоречит полуэллиптичности. Лемма 2.2.4 доказана. □

Лемма 2.2.5. *Существует линейная функция $L : S_{n-1}(V) \to \mathbf{R}$, обладающая следующими свойствами.*

1. $L(\partial s) \le A_\theta(s)$ для любой n-мерной цепи s.

2. $L(\partial\Delta) = A_\theta(\Delta)$, если n-симплекс Δ сонаправлен с α.

3. $L(s) = 0$, если цепь s — линейная комбинация вырожденных $(n-1)$-симплексов и границ вырожденных n-симплексов.

4. L непрерывна на множестве $(n-1)$-мерных симплексов.

5. Для любого компакта $K \subset V$ существует такая константа $C > 0$, что $L(\Delta) \le C|\Delta|$ для любого $(n-1)$-мерного симплекса Δ, лежащего в K, где $|\Delta|$ обозначает евклидову площадь симплекса Δ (относительно вспомогательной евклидовой структуры).

Доказательство. Поскольку $F_\theta^{\mathbf{R}} : C_{n-1}(V) \to \mathbf{R}$ — выпуклая функция, и по лемме 2.2.4 $L_0 \le F_\theta^{\mathbf{R}}$ всюду на $C_{n-1}^\alpha(V)$, по теореме Хана–Банаха существует линейная функция $L_1 : C_{n-1}(V) \to \mathbf{R}$, продолжающая L_0 и удовлетворяющая неравенству $L_1 \le F_\theta^{\mathbf{R}}$ всюду на $C_{n-1}(V)$.

Для $s \in S_{n-1}(V)$ положим

$$L(s) = L_1(\partial\,\mathrm{Cone}(s)),$$

где $\mathrm{Cone}(s)$ — конус с основанием s, см. определение 1.2.3. Если s является циклом, то $\partial\,\mathrm{Cone}(s) = s$ по предложению 1.2.4, откуда $L(s) = L_1(s)$. Таким образом, L — продолжение L_1. Докажем, что функция L — искомая.

1. Поскольку L — продолжение L_1, для любой цепи $s \in S_n(V)$ имеем

$$L(\partial s) = L_1(\partial s) \leq F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial s) \leq A_\theta(s),$$

где первое неравенство следует из определения L_1, второе — из определения $F_\theta^{\mathbf{R}}$.

2. Поскольку L — продолжение L_0 и $\partial\Delta \in C_{n-1}^\alpha(V)$, имеем

$$L(\partial\Delta) = L_0(\partial\Delta) = \theta(\mathbf{I}(\Delta)) = A_\theta(\Delta).$$

3. Если s — граница вырожденного симплекса, то $F_\theta^{\mathbf{R}}(s) = 0$, откуда $L(s) = L_1(s) \leq F_\theta^{\mathbf{R}}(s) = 0$ по лемме 2.2.4. Аналогично, $-L(s) = L(-s) \leq 0$, откуда $L(s) = 0$. Теперь пусть s — вырожденный $(n-1)$-симплекс. Тогда n-симплекс $\mathrm{Cone}(s)$ тоже вырожден. Применяя те же рассуждения к симплексу $\mathrm{Cone}(s)$, получаем, что $L(s) = L_1(\partial\,\mathrm{Cone}(s)) = 0$.

4. Для любых $(n-1)$-симплексов Δ и Δ' по неравенству $L_1 \leq F_\theta^{\mathbf{R}}$ и лемме 1.3.7 имеем

$$\begin{aligned} |L(\Delta) - L(\Delta')| &= |L_1(\partial\,\mathrm{Cone}(\Delta) - \partial\,\mathrm{Cone}(\Delta'))| \\ &\leq C\,\mathrm{dist}(\Delta,\Delta')\,\mathrm{diam}(\Delta\cup\Delta'\cup\{0\})^{n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция L на множестве $(n-1)$-симплексов липшицева в окрестности Δ (с константой Липшица, близкой к $C\,\mathrm{diam}(\Delta\cup\{0\})$).

5. Из неравенства $L_1 \leq F_\theta^{\mathbf{R}}$ имеем

$$L(\Delta) = L_1(\partial\,\mathrm{Cone}(\Delta)) \leq F_\theta^{\mathbf{R}}(\mathrm{Cone}(\Delta)) \leq C_\theta \cdot |\,\mathrm{Cone}(\Delta)|,$$

где C_θ — константа, оценивающая отношение θ к евклидовой площади. Осталось заметить, что $|\,\mathrm{Cone}(\Delta)| \leq \mathrm{dist}(0,\Delta)\cdot|\Delta|$. $\square$

Для $v \in V$ будем обозначать через P_v параллельный перенос на вектор v, $P_v : V \to V$.

Лемма 2.2.6. *Существует линейная функция $L : S_{n-1}(V) \to \mathbf{R}$, обладающая свойствами из леммы 2.2.5 и, кроме того, следующим свойством гладкости.*

Для каждого $(n-1)$-мерного симплекса Δ функция $f_\Delta : V \to \mathbf{R}$, определяемая равенством

$$f_\Delta(v) = L(P_v(\Delta)),$$

является гладкой (класса C^∞). При этом для любого компакта $K \subset V$ и любого целого m существует такая константа $C = C(m,K)$, что

$$\|d^m f_\Delta\| \leq C|\Delta|$$

для любого $v \in K$ и любого $(n-1)$-симплекса $\Delta \subset K$. Здесь d^m обозначает дифференциал порядка m, норма $\|d^m f_\Delta\|$ и площадь $|\Delta|$ вычисляются относительно вспомогательной евклидовой структуры.

Доказательство. Пусть L — функция из леммы 2.2.5, μ — мерная мера Лебега на V, $F : V \to \mathbf{R}$ — неотрицательная гладкая функция с компактным носителем, такая, что $\int F\, d\mu = 1$. Определим функцию $\widetilde{L} : S_{n-1}(V) \to \mathbf{R}$ как свертку L с ядром V, а именно

$$\widetilde{L}(s) = \int L(P_v(s))F(v)\, d\mu(v).$$

Тогда $\widetilde{L}$ — искомая. Действительно, свойства из леммы 2.2.5, очевидно, сохраняется при свертке, гладкость и оценки на производные следуют из гладкости ядра и пятого свойства из леммы 2.2.5. □

Лемма 2.2.7. *Пусть $L : S_{n-1}(V) \to \mathbf{R}$ — такая, как в лемме 2.2.6. Тогда существует такая дифференциальная $(n-1)$-форма ω на V, что $L(s) = \int_s \omega$ для всех $s \in S_{n-1}(V)$.*

Доказательство. Пусть $\beta \subset V$ — ориентированное $(n-1)$-мерное линейное подпространство. Определим на β знакопеременную меру (заряд) μ_β следующим образом. Для каждого полиэдрального множества $P \subset \beta$ положим $\mu_\beta(P) = \sum L(\Delta_i)$, где $\{\Delta_i\}$ — произвольная триангуляция множества P на правильно ориентированные симплексы. Это определение не зависит от выбора триангуляции. Действительно, если $\{\Delta_i\}$ и $\{\Delta'_j\}$ — две триангуляции одного полиэдрального множества, то разность $\sum \Delta_i - \sum \Delta'_j$ представляется в виде суммы границ вырожденных n-симплексов, откуда по лемме 2.2.5(3) следует, что $\sum L(\Delta_i) - \sum L(\Delta'_j) = L\big(\sum \Delta_i - \sum \Delta'_j\big) = 0$.

В силу линейности L, функция μ_β конечно-аддитивна на полиэдральных множествах. По лемме 2.2.5(5), ее отношение к евклидовой $(n-1)$-мерной площади локально равномерно ограничено. Следовательно, μ_β продолжается до борелевской знакопеременной меры на β, абсолютно непрерывной относительно $(n-1)$-мерной меры Лебега на β. Пусть ρ_β — плотность этой меры относительно меры Лебега. Повторив эту конструкцию в каждом ориентированном $(n-1)$-мерном аффинном подпространстве $\beta' \upuparrows \beta$, получим семейство функций $\{\rho_{\beta'}\}$. Обозначим объединение этих функций тем же символом ρ_β, полученная частично определенная функция на V определена почти всюду и измерима в каждом аффинном подпространстве, параллельном β. Пусть $\Delta^1 \subset \beta$ — произвольный $(n-1)$-симплекс, содержащий 0 в своей внутренности, Δ^r — результат гомотетии Δ^1 с коэффициентом $r > 0$. Тогда плотность ρ_β задается равенством

$$\rho_\beta(v) = \lim_{r\to 0} \frac{L(P_v(\Delta^r))}{|\Delta^r|}. \tag{2.2.4}$$

Из оценки на первую производную функции f_Δ из леммы 2.2.6 следует, что для любого компакта $K \subset V$ существует такое $C > 0$, что для любых $v, v' \in K$ и любого $r \in [0,1]$ имеет место неравенство

$$|L(P_v(\Delta^r)) - L(P_{v'}(\Delta^r))| \le C_1 \cdot |\Delta^r| \cdot |v - v'|.$$

Отсюда следует, что функция ρ_β всюду определена и непрерывна (более того, локально липшицева). Применяя те же рассуждения к производным функций f_Δ, получаем, что $\rho_\beta : V \to \mathbf{R}$ — гладкая функция.

Таким образом, каждому ориентированному $(n-1)$-мерному подпространству $\beta \subset V$ сопоставлена гладкая функция $\rho_\beta : V \to \mathbf{R}$, удовлетворяющая равенству (2.2.4). Очевидно, что при обращении ориентации подпространства β функция ρ_β меняет знак. Построим $(n-1)$-форму ω, определяемую функциями ρ_β, следующим образом.

Для $p \in V$ и линейно независимых $v_1, \dots, v_{n-1} \in T_pV \simeq V$, положим

$$\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = \rho_{\beta(v_1,\dots,v_{n-1})}|v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}|,$$

где $\beta(v_1, \dots, v_{n-1})$ — ориентированная линейная оболочка векторов $v_1, \dots, v_{n-1}$. Значение ω_p на линейно зависимых наборах векторов полагаем равным нулю. Докажем, что функция $\omega_p : (T_pV)^{n-1} \to \mathbf{R}$ является внешней $(n-1)$-формой. Для этого надо проверить, что ω_p кососимметрична и линейна по каждому аргументу. Кососимметричность следует из нечетности функций ρ_β относительно обращения ориентации. Докажем линейность функции ω_p по последнему аргументу. Однородность тривиально следует из определения, остается доказать аддитивность, то есть что для любых $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}, v'_{n-1} \in V$ имеет место равенство

$$\omega_p(\mathbf{v}, v_{n-1} + v'_{n-1}) = \omega_p(\mathbf{v}, v_{n-1}) + \omega_p(\mathbf{v}, v'_{n-1}) \tag{2.2.5}$$

где $\mathbf{v}$ — сокращенное обозначение для $v_1, v_2, \dots, v_{n-2}$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-2} \times \mathbf{R}^2$ “призму” $P = Q \times T$, где $Q = [0,1]^{n-2}$ — единичный куб в $\mathbf{R}^{n-2}$, T — треугольник с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ в $\mathbf{R}^2$. Превратим эту призму в симплициальную цепь, триангулировав ее на правильно ориентированные симплексы так, что формальная сумма границ этих симплексов представляет триангуляцию границы призмы (т. е. все внутренние грани триангуляции должны попарно сокращаться). Пусть $F : \mathbf{R}^n \to V$ — линейное отображение, переводящее векторы $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n$ стандартного базиса в $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v'_{n-1}$ соответственно. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через P_ε образ цепи P при аффинном отображении $F_\varepsilon = p + \varepsilon \cdot F$.

По свойству 1 из леммы 2.2.5 имеем

$$L(\partial P_\varepsilon) \le A_\theta(P_\varepsilon) = \varepsilon^n A_\theta(P_1) = o(\varepsilon^{n-1}), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{2.2.6}$$

Граница $\partial P_\varepsilon = F_\varepsilon(\partial P)$ состоит из двух частей: $F_\varepsilon(Q \times \partial T)$ и $F_\varepsilon(\partial Q \times T)$. Первая состоит из трех параллелепипедов, лежащих в окрестности точки p радиуса порядка ε, один из которых натянут на векторы $v_1, \dots, v_{n-2}, v_{n-1}$, другой — на $v_1, \dots, v_{n-2}, v'_{n-1}$, третий — на $v_1, \dots, v_{n-2}, -v_{n-1} - v'_{n-1}$. Записывая значение L для первого параллелепипеда Q^1_ε как интеграл соответствующей плотности ρ_β, $\beta = \beta(v_1, \dots, v_{n-1})$ и учитывая, что в рассматриваемой окрестности точки p изменение ρ_β оценивается величиной порядка ε, получаем

$$L(Q^1_\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}\big(\rho_\beta(p)|v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}| + O(\varepsilon)\big) = \varepsilon^{n-1}\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1}) + o(\varepsilon^{n-1}).$$

при $\varepsilon \to 0$. Складывая аналогичные соотношения для всех трех параллелепипедов получаем

$$L(F_\varepsilon(Q \times \partial T)) = \varepsilon^{n-1}\big(\omega_p(\mathbf{v}, v_{n-1}) + \omega_p(\mathbf{v}, v'_{n-1}) - \omega_p(\mathbf{v}, v_{n-1} + v'_{n-1})\big) + o(\varepsilon^{n-1})$$

при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим вторую часть $F_\varepsilon(\partial Q \times T)$ границы ∂P_ε. Ее грани разбиваются на пары $\{X^\varepsilon_i, Y^\varepsilon_i\}$, $i = 1, \dots, n-2$, где X^ε_i и Y^ε_i — триангуляции многогранников

$$F_\varepsilon([0,1]^{i-1} \times \{0\} \times [0,1]^{n-2-i} \times T$$

и

$$F_\varepsilon([0,1]^{i-1} \times \{1\} \times [0,1]^{n-2-i} \times T$$

соответственно, снабженные противоположными ориентациями. Пусть β — ориентированное $(n-1)$-мерное подпространство, соответствующее грани X^ε_i. Тогда

$$\begin{aligned} L(X^\varepsilon_i + Y^\varepsilon_i) &= \int_{X^\varepsilon_i} \rho_\beta(x)\, dm_{n-1}(x) - \int_{Y^\varepsilon_i} \rho_\beta(x)\, dm_{n-1}(x) = \\ &= \int_{X^\varepsilon_i} (\rho_\beta(x) - \rho_\beta(x + v_i))\, dm_{n-1}(x) = \int_{X^\varepsilon_i} O(\varepsilon)\, dm_{n-1}(x) = o(\varepsilon^{n-1}), \end{aligned}$$

где m_{n-1} обозначает $(n-1)$-мерный евклидов объем. Складывая такие равенства для всех i и полученное выше выражение для $L(F_\varepsilon(Q \times \partial T))$, получаем

$$L(\partial P_\varepsilon) = \varepsilon^{n-1}\big(\omega_p(\mathbf{v}, v_{n-1}) + \omega_p(\mathbf{v}, v'_{n-1}) - \omega_p(\mathbf{v}, v_{n-1} + v'_{n-1})\big) + o(\varepsilon^{n-1}),$$

откуда с учетом (2.2.6) следует требуемое равенство (2.2.5).

Таким образом, ω_p является внешней $(n-1)$-формой для всех $p \in V$. В силу гладкости плотностей ρ_β, при фиксированных $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ значение $\omega_p(v_1, \dots, v_{n-1})$ является гладкой функцией от p. Следовательно, семейство $\omega = \{\omega_p\}_{p \in V}$ является дифференциальной $(n-1)$-формой на V. По построению имеем $L(\Delta) = \int_\Delta \omega$ для любого $(n-1)$-симплекса Δ. По линейности это тождество продолжается на все пространство $S_{n-1}(V)$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть L и ω — те же, что в лемме 2.2.7. Рассмотрим внешнюю производную $\Omega = d\omega$, и пусть Ω_0 — ее значение в нуле. Докажем, что внешняя n-форма Ω_0 калибрует α относительно θ (см. определение 2.2.1). Пусть $\sigma \in \Lambda^n_s V$, Δ — невырожденный n-симплекс, содержащий 0, такой, что $\mathbf{I}(\Delta) = \sigma$. Для каждого $\varepsilon > 0$ обозначим через Δ^ε результат линейной гомотетии симплекса Δ с коэффициентом ε. По лемме 2.2.7 и формуле Стокса имеем

$$L(\partial\Delta^\varepsilon) = \int_{\partial\Delta^\varepsilon} \omega = \int_\Delta \Omega = \varepsilon^n \Omega_0(\sigma) + o(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \to 0,$$

По свойству 1 из леммы 2.2.5 имеем

$$L(\partial\Delta^\varepsilon) \le A_\theta(\Delta^\varepsilon) = \varepsilon^n \theta(\sigma),$$

откуда с учетом предыдущего равенства получаем, что $\Omega_0(\sigma) \le \theta(\sigma)$. В случае $\sigma \upuparrows \alpha$ из свойства 2 из леммы 2.2.5 аналогичным образом следует, что $\Omega_0(\sigma) = \theta(\sigma)$. Следовательно, Ω_0 калибрует α относительно θ.

Таким образом, для произвольного $\alpha \in G^+_n(V)$ существует калибрующая ее внешняя n-форма. По предложению 2.2.2 отсюда следует, что θ выпукло продолжима. Доказательство теоремы 2.2.3 закончено. $\square$

Следствие 2.2.8. *Для любой n-плотности θ ее полуэллиптическая оболочка над $\mathbf{R}$ ($E_\mathbf{R}\theta$, см. определение 1.4.4) и выпуклая оболочка $\operatorname{Conv}\theta$ совпадают.*

Доказательство. По теореме 2.2.3, n-плотность $E_\mathbf{R}\theta$ выпукло продолжима. Поскольку $\operatorname{Conv}_\theta$ — максимальная выпукло продолжимая n-плотность, не превосходящая θ, отсюда следует неравенство $\operatorname{Conv}_\theta \ge E_\mathbf{R}\theta$. Аналогично $E_\mathbf{R}\theta \ge \operatorname{Conv}\theta$. $\square$

2.3 Теорема Минковского для старших коразмерностей

Классическая теорема Минковского [78], см. также [1, гл. VII], устанавливает необходимое и достаточное условие существования многогранника с данными направлениями и площадями граней. А именно, она утверждает следующее: для любого набора различных единичных векторов $v_1, \dots, v_m \in \mathbf{R}^N$, не лежащих в одной гиперплоскости, и чисел $a_1, \dots, a_m > 0$, таких, что $\sum a_i v_i = 0$, существует единственный выпуклый многогранник с m гранями, у которых внешние нормали совпадают с векторами v_i, а $(N-1)$-мерные площади равны соответствующим числам a_i.

Условие теоремы можно переформулировать на аффинно инвариантном языке, заменив каждую пару (v_i, a_i) на простой $(N-1)$-вектор, двойственный к вектору $a_i v_i$. Условие $\sum a_i v_i = 0$ при этом превращается в условие о том, что результирующий

$(N-1)$-вектор полиэдральной цепи, соответствующей границе многогранника, равен нулю. По предложению 2.1.3, это условие является необходимым для существования замкнутой полиэдральной цепи (не обязательно границы выпуклого многогранника) с данными направлениями и площадями граней.

Целью этого параграфа является доказательство теоремы 2.3.1, которая является аналогом теоремы Минковского для поверхностей произвольной коразмерности.

Теорема 2.3.1. *Пусть $n < N$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — попарно различные ориентированные n-мерные линейные подпространства в $\mathbf{R}^N$, и пусть числа $a_1, \dots, a_m > 0$ таковы, что $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$, где $\overline{\alpha}_i \in \Lambda^n_s \mathbf{R}^N$ — единичный простой n-вектор, соответствующий подпространству α_i.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутая ориентированная n-мерная кусочно линейная поверхность в $\mathbf{R}^N$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Для каждого $i = 1, \dots, m$ сумма (евклидовых) площадей всех граней, сонаправленных с α_i, равна a_i.

2. Сумма площадей всех граней, не сонаправленных ни с одним из подпространств α_i, меньше ε.

Эта теорема не является прямым обобщением классической теоремы Минковского, так как она не гарантирует выпуклости, и набор направлений и площадей граней лишь “приближенно” совпадает с предписанным. Следующие два замечания объясняют, почему эти отличия неизбежны.

Замечание 2.3.2. Рассмотрим в $\mathbf{R}^4$ простые 2-векторы

$$(e_1 + e_3) \wedge (e_2 + e_4), \quad (e_1 - e_3) \wedge (e_2 - e_4), \quad 2e_2 \wedge e_1, \quad 2e_4 \wedge e_3.$$

Их сумма равна нулю, но соответствующие им плоскости в $\mathbf{R}^4$ попарно трансверсальны, то есть не имеют общих прямых. Грани поверхности, сонаправленные с такими плоскостями, не могут быть соседними. Чтобы их “состыковать”, необходимы вспомогательные грани (сколь угодно малой суммарной площади), упомянутые во второй части утверждения теоремы.

Замечание 2.3.3. В теореме Минковского каждому из предписанных направлений соответствует ровно одна грань (являющаяся выпуклым многогранником соответствующей размерности). В теореме 2.3.1 предписанная площадь a_i составляется из нескольких граней, которые, вообще говоря, лежат в различных (параллельных друг другу) n-мерных аффинных подпространствах.

Из результатов §2.4 следует, что данные о направлениях и площадях граней, указанные в предыдущем замечании, при достаточно малой допустимой площади “вспомогательных” граней невозможно реализовать поверхностью, у которой грани, сонаправленные с $e_2 \wedge e_1$, лежат в одной плоскости и дизъюнктны (в частности, они не могут образовывать одну многоугольную грань).

Доказательство теоремы 2.3.1. 1. Достаточно доказать более слабое утверждение, в котором первое требование из формулировки теоремы заменено на следующее: для каждого $i = 1, \dots, m$ сумма площадей всех граней, сонаправленных с α_i, отличается от a_i менее, чем на ε. Действительно, предположим, что это более слабое утверждение уже доказано. Применив его для достаточно малого числа вместо ε и сделав гомотетию с коэффициентом, чуть большим 1, получим поверхность, у которой сумма площадей граней, не сонаправленных ни с одним из подпространств α_i, меньше $\varepsilon/2$, а сумма площадей граней, сонаправленных с α_i, лежит в интервале $(a_i, a_i + \frac{\varepsilon}{2m})$ для каждого $i = 1, \dots, m$. Подразобьем грани, сонаправленные с α_i, так, чтобы можно было выбрать набор граней с суммой площадей ровно a_i. Остальные грани (сумма площадей которых меньше $\frac{\varepsilon}{2m}$) изменим следующим образом: разобьем каждый симплекс на $n+1$ симплексов, добавив вершину в центре, затем пошевелим эту центральную вершину так, чтобы полученные симплексы не были сонаправлены ни с одним из данных подпространств и при этом сумма площадей всех таких симплексов оставалась меньше $\frac{\varepsilon}{2m}$. Полученная в результате поверхность удовлетворяет требованиям теоремы.

2. Перейдем к основной части доказательства.Если $m = 2$, то утверждение тривиально: в этом случае $\overline{\alpha}_2 = -\overline{\alpha}_2$ и $a_1 = a_2$, и в качестве искомой поверхности можно взять дважды покрытый симплекс площади a_1, лежащий в α_1. Далее будем считать, что $m > 2$.

Сначала сведем теорему к случаю, когда n-векторы $\overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_m$ линейно независимы. Для этого воспользуемся индукцией по m. Предположим, что $\overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_m$ линейно зависимы. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация вида $\sum \lambda_i \overline{\alpha}_i = 0$, где $\lambda_1 = 0$. Вычитая ее с подходящим коэффициентом $t > 0$ из исходной комбинации $\sum a_i \overline{\alpha}_i = 0$, получим нетривиальную комбинацию вида $\sum \mu_i \overline{\alpha}_i = 0$, в которой все коэффициенты неотрицательны и хотя бы один из них равен нулю. Повторяя то же рассуждение для набора коэффициентов μ_i вместо λ_i, получим разложение коэффициентов a_i в сумму $a_i = b_i + c_i$, где $b_i, c_i \geq 0$, $\sum b_i \overline{\alpha}_i = \sum c_i \overline{\alpha}_i = 0$, и в каждом из наборов $\{b_i\}$ и $\{c_i\}$ хотя бы один коэффициент (но не все) равен нулю. Выкинув из набора $\{\alpha_i\}$ те подпространства, которым соответствуют нулевые коэффициенты b_i, применим индукционное предположение к оставшимся подпространствам и коэффициентам b_i. Получим поверхность S_1, у которой сумма площадей граней, сонаправленных с α_i, близка к b_i, а сумма площадей остальных граней мала. Аналогично построим поверхность S_2 для коэффициентов $\{c_i\}$. Теперь в качестве искомой поверхности можно взять несвязное объединение S_1 и S_2.

3. Остается разобрать случай, когда n-векторы $\overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_m$ линейно независимы. Если один из них пропорционален $\overline{\alpha}_1$, то можно перенумеровать их и повторить предыдущее рассуждение. Таким образом, можно считать, что неориентированные направления n-векторов $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_m$ попарно различны.

Определим n-плотность θ в $\mathbf{R}^N$, положив для каждого $\sigma \in \Lambda_s^n \mathbf{R}^N$

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \text{ сонаправлен с одним из подпространств } \alpha_2, \dots, \alpha_m, \\ |\sigma|, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $|\sigma|$ обозначает евклидову норму n-вектора. По следствию 2.2.8 имеем $E_{\mathbf{R}}\theta = \operatorname{Conv}\theta$. Поскольку n-вектор $-a_1\overline{\alpha}_1$ представляется в виде положительной линейной комбинации n-векторов $\overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_m$ и $\theta(\overline{\alpha}_2) = \dots = \theta(\overline{\alpha}_m) = 0$, имеем $\operatorname{Conv}\theta(-a_1\overline{\alpha}_1) = 0$. Следовательно, $E_{\mathbf{R}}\theta(-a_1\overline{\alpha}_1) = 0$.

Пусть Δ — произвольный n-симплекс, представляющий n-вектор $-a_1\overline{\alpha}_1$. Из предложений 1.4.2 и 1.4.5 имеем

$$F_\theta^{\mathbf{Q}}(\partial\Delta) = F_\theta^{\mathbf{R}}(\partial\Delta) = E_{\mathbf{R}}\theta(-a_1\overline{\alpha}_1) = 0.$$

Значит, для любого $\delta > 0$ существует цепь $s \in S_n(\mathbf{R}^N; \mathbf{Q})$ с $\partial s = \partial\Delta$ и $A_\theta(s) < \delta$. Выберем такую цепь s для достаточно малого $\delta \ll \varepsilon$ (выбор δ уточняется ниже).

Пусть $s = \sum_{j=1}^M \lambda_j \Delta_j$, где Δ_j — n-симплексы, $\lambda_j \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Будем называть гранями цепи s слагаемые $\lambda_j\Delta_j$, для которых симплекс Δ_j невырожден. Площадью грани $\lambda_j\Delta_j$ назовем число $|\lambda_j| \cdot |\Delta_j|$. Будем говорить, что грань $\lambda_j\Delta_j$ *сонаправлена* с α_i, если n-вектор $\lambda_j\mathbf{I}(\Delta_j)$ пропорционален соответствующему n-вектору $\overline{\alpha}_i$ (это означает, что Δ_j лежит в аффинном подпространстве, параллельном α_j и ориентирован в соответствии со знаком коэффициента λ_j. Для каждого $i = 2, \dots, m$ обозначим через J_i множество всех индексов j, для которых грань $\lambda_j\Delta_j$ сонаправлена с α_i. Через J_0 обозначим множество всех индексов j, не вошедших ни в одно из множеств $J_2, \dots, J_m$.

Рассмотрим результирующий вектор $\mathbf{I}(s)$. Имеем

$$\mathbf{I}(s) = \sum \lambda_j \mathbf{I}(\Delta_j) = \sigma_0 + \sum_{i=2}^m b_i\overline{\alpha}_i,$$

где

$$\sigma_0 = \sum_{j \in J_0} \lambda_j \mathbf{I}(\Delta_j)$$

и

$$b_i = \sum_{j \in J_i} |\lambda_j| \cdot |\Delta_j|, \qquad i = 2, \dots, m.$$

(другими словами, b_i — это сумма площадей всех граней, сонаправленных с α_i). По определению θ имеем

$$A_\theta(s) = \sum_{j \in J_0} |\lambda_j| \cdot |\mathbf{I}(\Delta_j)|.$$

Следовательно,

$$|\sigma_0| \le \sum_{j \in J_0} |\lambda_j \mathbf{I}(\Delta_j)| = A_\theta(s) < \delta.$$

По предложению 2.1.3 имеем $\mathbf{I}(s) = \mathbf{I}(\Delta) = -a_1\overline{\alpha}_1$. Следовательно,

$$\sigma_0 + \sum_{i=2}^{m} b_i\overline{\alpha}_i = -a_1\overline{\alpha}_1 = \sum_{i=2}^{m} a_i\overline{\alpha}_i,$$

откуда

$$\sigma_0 = \sum_{i=2}^{m}(a_i - b_i)\overline{\alpha}_i.$$

Поскольку $\overline{\alpha}_2, \dots, \overline{\alpha}_m$ линейно независимы, коэффициенты $a_i - b_i$ в правой части тождества однозначно определяются значением σ_0, причем их зависимость от σ_0 непрерывна. Следовательно, $\sum_{i=2}^{m} |a_i - b_i| \to 0$ при $|\sigma_0| \to 0$. Можно считать, что δ выбрано столь малым, что неравенство $|\sigma_0| < \delta$ влечет неравенство $\sum_{i=2}^{m} |a_i - b_i| < \varepsilon$. Таким образом, для каждого $i = 2, \dots, m$ сумма площадей граней цепи s, сонаправленных с α_i, отличается от a_i менее, чем на ε, а сумма площадей остальных граней не превосходит $\delta < \varepsilon$.

4. Следовательно, замкнутая цепь $s_1 = s - \Delta$ удовлетворяет требуемому условию на направления и площади граней. Остается превратить эту цепь в кусочно линейную поверхность. Напомним, что все коэффициенты цепи рациональны. Пусть K — наименьшее общее кратное их знаменателей. Применив к цепи s_1 гомотетию с коэффициентом $K^{-1/n}$ и умножив все ее коэффициенты на K, получим цепь s_0 с целыми коэффициентами, при этом направления граней и суммарные площади, соответствующие каждому направлению, сохранятся. По предложению 1.2.7 цепь s_0 можно параметризовать кусочно линейным отображением $f_0 : M_0 \to V$, где M_0 — псевдомногообразие без края. По предложению 1.2.8 это отображение можно превратить в кусочно линейную поверхность $f : M \to \mathbf{R}^N$ удалением и добавлением частей сколь угодно малой площади. $\square$

Замечание 2.3.4. Построенная в доказательстве теоремы поверхность обладает дополнительным свойством: все ее грани, сонаправленные с α_1, совпадают. Более того, они совпадают с гомотетичным образом наперед заданного симплекса Δ.

2.4 Взвешенный гауссов образ поверхности

Пусть $f : M \to \mathbf{R}^N$ — компактная ориентированная n-мерная липшицева поверхность. Евклидова структура определяет стандартную n-плотность θ_e в $\mathbf{R}^N$ (соответствующую n-мерному евклидову объему), где $\theta_e(\sigma) = |\sigma|$ для всех $\sigma \in \Lambda_s^n\mathbf{R}^N$. Соответствующую θ_e-площадь на поверхности M (см. определение 1.1.5) будем называть евклидовой площадью и обозначать знаком модуля: $|U| = A_{\theta_e}(f|_U)$ для $U \subset M$.

Если f дифференцируема в точке $x \in M$ и дифференциал $d_xf : T_xM \to \mathbf{R}^N$ невырожден (то есть имеет ранг n), то его образ $d_xf(T_xM)$ является ориентированным

n-мерным подпространством в $\mathbf{R}^N$. Оно называется *касательным пространством* f в точке x и обозначается через $T_x f$.

Определение 2.4.1. *Взвешенным гауссовым образом* n-мерной ориентированной липшицевой поверхности $f : M \to \mathbf{R}^N$ назовем борелевскую меру G_f на $G^+_{n,N} = G^+_n(\mathbf{R}^N)$, определяемую равенством

$$G_f(U) = \big|\{x \in M : T_x f \in U\}\big|,$$

для каждого борелевского подмножества $U \subset G^+_{n,N}$, где модуль означает евклидову площадь на поверхности f, см. выше. Другими словами, мера G_f индуцирована из площади поверхности отображением $x \mapsto T_x f$. Поскольку это отображение измеримо, G_f является борелевской мерой на $G^+_{n,N}$.

Если поверхность f кусочно линейна, то определение принимает более простой вид. А именно, в этом случае G_f сосредоточена на конечном множестве, и мера точки $\alpha \in G^+_{n,N}$ равна сумме площадей всех граней поверхности, сонаправленных с α.

Следующие свойства немедленно следуют из определения:

1. Пусть $f_i : M \to \mathbf{R}^N$, $i - 1, 2, \dots$ — такая последовательность липшицевых поверхностей, что $df_i \to df$ почти всюду на TM. Тогда меры G_{f_i} слабо сходятся к G_f.

2. Пусть θ — n-плотность в $\mathbf{R}^N$. Рассмотрим θ как функцию на $G^+_{n,N}$, отождествив ориентированные n-мерные подпространства с единичными простыми n-векторами. Тогда θ-площадь поверхности f выражается через взвешенный гауссов образ G_f следующим образом:

$$A_\theta(f) = \int_{G^+_{n,N}} \theta \, dG_f.$$

Определение 2.4.2. Пусть μ — конечная борелевская мера на $G^+_{n,N}$. *Результирующим n-вектором* меры μ назовем n-вектор $\mathbf{I}(\mu)$, определяемый равенством

$$\mathbf{I}(\mu) = \int_{G^+_{n,N}} i \, d\mu,$$

где $i : G^+_{n,N} \to \Lambda^n \mathbf{R}^N$ — отображение, сопоставляющее подпространству $\alpha \in G^+_n(V)$ представляемый им простой единичный n-вектор.

Из определений немедленно следует

Предложение 2.4.3. $\mathbf{I}(G_f) = \mathbf{I}(f)$ *для любой липшицевой поверхности* f. *В частности,* $\mathbf{I}(G_f) = 0$, *если поверхность* f *замкнута.*

С помощью введенных терминов теорему 2.3.1 можно переформулировать следующим образом: конечная мера μ на $G^+_n(\mathbf{R}^N)$, сосредоточенная на конечном множестве, может быть аппроксимирована (в сильной топологии) взвешенными гауссовыми образами замкнутых кусочно линейных поверхностей тогда и только тогда, когда $\mathbf{I}(\mu) = 0$. Как следствие, то же верно и без условия, что мера сосредоточена на конечном множестве, но с заменой сильной топологии на слабую.

Таким образом, линейное условие $\mathbf{I}(\mu) = 0$ дает полное описание мер на $G^+_{n,N}$, приближаемых взвешенными гауссовыми образами замкнутых поверхностей.

Зададимся аналогичным вопросом для поверхностей, граница которых совпадает с границей данного n-симплекса. Если бы вместо поверхностей рассматривались цепи с вещественными коэффициентами (или поверхности с кратностью вида $\frac{1}{N}$, где $N \in \mathbf{N}$), то аналогичное линейное условие было бы и достаточным — см. замечание 2.3.4. В следующем параграфе будет показано, что для поверхностей (и, следовательно, для цепей с целыми коэффициентами) этого недостаточно уже для размерностей $N = 4$ и $n = 2$.

А именно, в предложении 2.5.2 получены ограничения на взвешенный гауссов образ (имеющие вид линейных неравенств), которые не следуют из вышеуказанных линейных условий. В частности (см. следствие 2.5.5), взвешенный гауссов образ двумерной поверхности в $\mathbf{R}^4$, граница которой совпадает с границей треугольника в координатной плоскости (e_1, e_2), не может быть сколь угодно близка к мере, сконцентрированной в точках из $G^+_{2,4}$, соответствующих 2-векторам

$$
\begin{aligned}
&w_1 = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_3) \wedge (e_2 + e_4),\\
&w_2 == \tfrac{1}{2}(e_1 - e_3) \wedge (e_2 - e_4),\\
&w_3 = e_4 \wedge e_3,
\end{aligned}
$$

хотя линейное ограничение этому не противоречит: $w_1 + w_2 + w_3 = e_1 \wedge e_2$.

2.5 Нелинейное ограничение

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Ориентированную плоскость (e_1, e_2) будем обозначать через e_{12} и называть *горизонтальной* плоскостью, а ориентированную плоскость (e_3, e_4) будем обозначать через e_{34} и называть *вертикальной* плоскостью. Введем на $G^+_2(\mathbf{R}^4)$ стандартную угловую метрику. Для $\alpha \in G^+_2(\mathbf{R}^4)$ через $U_\varepsilon(\alpha)$ будем обозначать ε-окрестность плоскости α в этой метрике.

Теорема 2.5.1. *Пусть f — компактная связная ориентированная двумерная липшицева поверхность в $\mathbf{R}^4$, край которой — положительно ориентированная простая замкнутая кривая в горизонтальной плоскости. Тогда взвешенный гауссов образ G_f этой поверхности удовлетворяет неравенству*

$$
G_f(G^+_{2,4} \setminus U_\varepsilon(e_{12}) \setminus U_\varepsilon(e_{34})) \geq \frac{1}{300} G_f(e_{34}) \tag{2.5.1}
$$

для $\varepsilon = 10^{-10}$.

Будем называть *ε-горизонтальными* ориентированные плоскости, принадлежащие $U_\varepsilon(e_{12})$, а *ε-вертикальными* — принадлежащие $U_\varepsilon(e_{34})$. Отметим, что плоскость e_{12}, снабженная противоположной ориентацией, не является ε-горизонтальной.

Поверхность f из теоремы можно приблизить кусочно линейными поверхностями $f_i : M \to \mathbf{R}^4$, края которых — простые замкнутые ломаные в e_{12}, так что $df_i \to df$ почти всюду. Для таких последовательностей взвешенные гауссовы образы слабо сходятся. Так как неравенство (2.5.1) сохраняется при таком предельном переходе, достаточно доказать его для поверхностей f_i. Таким образом, теорема 2.5.1 сводится к следующему предложению.

Предложение 2.5.2. *Пусть $f : M \to \mathbf{R}^4$ — двумерная компактная связная ориентированная кусочно линейная поверхность в $\mathbf{R}^4$, край которой — положительно ориентированная простая замкнутая ломаная в плоскости e_{12}. Положим $\varepsilon = 10^{-10}$ и определим следующие подмножества в M:*

S^H — множество всех $x \in M$, для которых ориентированная касательная плоскость $T_x f$ определена и ε-горизонтальна;

S^V — множество всех x, для которых $T_x f$ ε-вертикальна;

$S^M = M \setminus (S^H \cup S^V)$.

Тогда $|S^M| \geq \frac{1}{300}|S^V|$, где модуль обозначает индуцированную евклидову площадь на M.

Доказательство. Малым шевелением можно добиться того, что все грани поверхности невырождены. Тогда отображение f индуцирует на M внутреннюю метрику, которая является локально евклидовой вне нульмерного остова. Форма площади, определяемая этой локально евклидовой структурой, совпадает с площадью, индуцируемой отображением f в смысле §1.5. Площадь множества $E \subset M$ мы обозначаем через $|E|$. Всякую функцию, определенную на $\mathbf{R}^4$, мы считаем определенной и на M, неявно подразумевая композицию с f. Это в первую очередь относится к ортогональным проекциям $\mathbf{R}^4$ на координатные плоскости.

Увеличим поверхность f, добавив к ней неограниченную область горизонтальной плоскости, граница которой совпадает с границей исходной поверхности. Полученная поверхность совпадает с горизонтальной плоскостью всюду, кроме некоторой компактной части. Заменим, что это увеличение не изменяет множества S^V и S^M. Далее мы всюду рассматриваем расширенную поверхность вместо исходной.

Для измеримого множества $E \subset M$ обозначим через $A_h(E)$ и $A_v(E)$ соответственно ориентированные площади его проекций на горизонтальную и вертикальную плоскости (с учетом кратности). Так как проекции 1-липшицевы, они не увеличивают площади, откуда

$$|A_h(E)| \leq |E| \qquad \text{и} \qquad |A_v(E)| \leq |E| \tag{2.5.2}$$

для любого измеримого $E \subset M$. Проекция на горизонтальную плоскость является ε-липшицевой на любой ε-вертикальной плоскости и наоборот, откуда

$$|A_h(E^v)| \leq \varepsilon^2 |E^v| \qquad \text{и} \qquad |A_v(E^h)| \leq \varepsilon^2 |E^h| \tag{2.5.3}$$

для любых измеримых множеств $E^h \subset S^H$ и $E^v \subset S^V$. Кроме того, проекция ε-горизонтальной плоскости на горизонтальную билипшицева с константой $(1-\varepsilon)^{-1}$ и сохраняет ориентацию, откуда

$$A_h(E^h) \geq (1-\varepsilon)^2 |E^h| \qquad \text{и} \qquad A_v(E^v) \geq (1-\varepsilon)^2 |E^v| \tag{2.5.4}$$

для любых измеримых множеств $E^h \subset S^H$ и $E^v \subset S^V$.

Введем следующие (полиэдральные) множества $S^v, S^h, S^m \subset M$:

$S^v = S^V$,

S^h — произвольное максимальное по включению подмножество S^H, которое проецируется на горизонтальную плоскость инъективно и с сохранением ориентации;

$S^m = M \setminus (S^v \cup S^h)$.

Через $B_r(p)$ обозначим шар внутренней метрики радиуса r с центром в точке $p \in M$. Через $B_r^v(p)$, $B_r^h(p)$ и $B_r^m(p)$ обозначается пересечение шара $B_r(p)$ с множествами S^v, S^h и S^m соответственно. Если точка p ясна из контекста, мы будем опускать ее и использовать сокращенные обозначения B_r, B_r^v, B_r^h и B_r^m

Введем константу $a = \frac{1}{100}$.

Лемма 2.5.3. *Пусть $p \in M$ и $r > 0$ таковы, что $|B_r^v(p)| \geq a\pi r^2$ и $|B_{2r}^v(p)| \leq a\pi(2r)^2$. Тогда $|B_{2r}^m(p)| \geq \frac{a}{2}\pi r^2$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $|B_{2r}^m| \leq \frac{a}{2}\pi r^2$.

Рассмотрим множество $B_\rho^h = B_\rho^h(p)$ для произвольного $\rho > 0$. Его образ в $\mathbf{R}^4$ содержится в евклидовом шаре радиуса ρ (так как внутренняя метрика не меньше внешней). Следовательно, его проекция на горизонтальную плоскость содержится в круге радиуса ρ, а так как оно проецируется инъективно (по определению S^h), отсюда следует неравенство $A_h(B_\rho^h) \leq \pi\rho^2$. Применяя (2.5.4), получаем

$$|B_\rho^h| \leq (1-\varepsilon)^{-2} A_h(B_\rho^h) \leq (1-\varepsilon)^{-2}\pi\rho^2 \leq 2\pi\rho^2. \tag{2.5.5}$$

Пусть $L^v(t)$, $L^h(t)$ и $L^m(t)$ — длины пересечений границы шара $B_t(p)$ с множествами S^v, S^h и S^m соответственно. Из формулы коплощади следует, что $\int_0^{2r} L^v(t)\,dt = |B_r^v|$, и аналогично для L^h и L^m.

Пусть $t \in [r, 2r]$. Тогда

$$A_v(B_t^v) \geq A_v(B_r^v) \geq a\pi r^2(1-\varepsilon)^2 \geq a\pi r^2(1-2\varepsilon),$$

так как множество S^v проецируется на вертикальную плоскость с сохранением ориентации, и при этом длины касательных векторов умножаются не менее, чем на $(1-\varepsilon)$. Из 2.5.2 и предположения $|B_{2r}^m| \le \frac{a}{2}\pi r^2$ имеем

$$|A_v(B_t^m)| \le |B_t^m| \le |B_{2r}^m| \le \frac{a}{2}\pi r^2.$$

Для "горизонтальной" части шара B_t из (2.5.3) и (2.5.5) имеем

$$|A_v(B_t^h)| \le \varepsilon^2 |B_t^h| \le \varepsilon^2 |B_{2r}^h| \le 8\pi\varepsilon^2 r^2.$$

Из полученных трех неравенств следует, что

$$A_v(B_t) \ge A_v(B_t^v) - |A_v(B_t^m)| - |A_v(B_t^h)| \ge \pi r^2(a/2 - 10\varepsilon).$$

Отсюда и из изопериметрического неравенства для плоскости следует, что длина проекции границы шара B_t на вертикальную плоскость не меньше $2\pi r\sqrt{a/2-10\varepsilon}$. С другой стороны, эта длина проекции не превосходит $L^v(t) + L^m(t) + \varepsilon L^h(t)$, так как отображение проекции 1-липшицево всюду и ε-липшицево на ε-горизонтальных направлениях.

Таким образом,

$$L^v(t) + L^m(t) + \varepsilon L^h(t) \ge 2\pi r\sqrt{a/2-10\varepsilon}$$

для любого $t \in [r, 2r]$. Для $t \in [0, r]$ оценим левую часть нулем. Интегрируя эти неравенства по t от 0 до $2r$, получаем

$$|B_{2r}^v| + |B_{2r}^m| + \varepsilon |B_{2r}^h| \ge 2\pi r^2\sqrt{a/2-10\varepsilon}\,.$$

С другой стороны, $|B_{2r}^h| \le 8\pi r^2$ по (2.5.5), и $|B_{2r}^v| \le 4a\pi r^2$ по условиям леммы. Отсюда

$$|B_{2r}^m| \ge \pi r^2(2\sqrt{a/2-10\varepsilon} - 8\varepsilon - 4a) > \frac{a}{2}\pi r^2,$$

где второе неравенство следует из численных значений $a = \frac{1}{100}$ и $\varepsilon = 10^{-10}$. Следовательно, предположение $|B_{2r}^m| \le \frac{a}{2}\pi r^2$ неверно, и лемма доказана. $\square$

Пусть $p \in S^v$. Заметим, что S^v открыто (оно является объединением внутренностей нескольких симплексов триангуляции). Следовательно, для всех достаточно малых $r > 0$ имеем $|B_r^v(p)| = 2\pi r^2$. С другой стороны, $|B_r^v(p)|/r^2 \to 0$ при $r \to \infty$, так как вся поверхность, кроме компактного множества, лежит в горизонтальной плоскости. Обозначим через $r(p)$ максимальный радиус r, для которого $|B_r^v(p)| \ge a\pi r^2$.

Нам понадобится следующая известная фольклорная лемма.

Лемма 2.5.4. *Пусть во вполне ограниченном метрическом пространстве X задано семейство шаров $\{B_{r(x)}(x)\}_{x\in Y}$, где $Y \subset X$. Тогда из этого семейства можно выбрать счетный дизъюнктный набор $\{B_{r_i}(x_i)\}$ так, что утроенные шары $B_{3r_i}(x_i)$ покрывают Y.*

Доказательство. Выберем в качестве первого шара $B_{r_1}(x_1)$ почти максимальный из шаров семейства (понимая "почти максимальным" такой, радиус которого не меньше, чем $\frac{9}{10}$ от всех радиусов). В качестве второго шара выберем почти максимальный из тех, которые не пересекаются с первым, в качестве третьего — почти максимальный из тех, которые не пересекаются с первым и вторым, и так далее. Поскольку пространство вполне ограничено и выбираемые шары дизъюнктны, их радиусы стремятся к нулю.

Докажем, что утроенные шары покрывают Y. Пусть x — произвольная точка из Y, $B = B_r(x)$ — соответствующий шар семейства. Среди выбранных шаров $B_{r_i}(x_i)$ есть пресекающиеся с B, иначе при больших i (таких, что $r_i \le \frac{9}{10}r$) выбираемые шары не удовлетворяли бы условию почти максимальности. Пусть k — наименьший номер, для которого шар $B_{r_k}(x_k)$ пересекается с B. Тогда $r \le \frac{10}{9}r_k$, откуда $|xx_k| \le r+r_k < 3r_k$, то есть шар $B_{3r_k}(x_k)$ покрывает x. $\square$

Применяя эту лемму к семейству шаров $\{B_{2r(p)}(p)\}_{p\in S^v}$, получаем последовательность точек $p_i \in S^v$ и радиусов $r_i = r(p_i)$, таких, что

1. $|B^v_{r_i}(p_i)| \ge a\pi r_i^2$;
2. $|B^v_{2r_i}(p_i)| \le 4a\pi r_i^2$;
3. $|B^v_{6r_i}(p_i)| \le 36a\pi r_i^2$;
4. шары $B^v_{2r_i}(p_i)$ не пересекаются;
5. шары $B^v_{6r_i}(p_i)$ покрывают S^v.

Первые два свойства позволяют применить лемму 2.5.3 к $p = p_i$ и $r = r_i$, откуда

$$|B^m_{2r_i}(p_i)| \ge \frac{a}{2}\pi r_i^2 \ge \frac{1}{72}|B^v_{6r_i}(p_i)|$$

(второе неравенство следует из свойства 3). Так как шары $B^v_{2r_i}(p_i)$ не пересекаются и шары $B^v_{6r_i}(p_i)$ покрывают S^v, получаем, что

$$|S^m| \ge \sum |B^m_{2r_i}(p_i)| \ge \frac{1}{72}\sum |B^v_{6r_i}(p_i)| \ge \frac{1}{72}|S^v| = \frac{1}{72}|S^V|. \qquad (2.5.6)$$

Теперь выведем из полученного неравенства оценку на $|S^M|$ (вместо $|S^m|$). Из определения множеств S^m и S^h следует, что $S^M \subset S^m$ и $S^m \setminus S^M = S^H \setminus S^h$. Оценим площадь этой разности.

Так как поверхность совпадает с горизонтальной плоскостью вне компактной области, проекция на горизонтальную плоскость является отображением степени 1 из M в $\mathbf{R}^2$. Следовательно, все точки горизонтальной плоскости, за исключением проекции одномерного остова, накрываются этим отображением с суммарной кратностью 1. (Именно здесь по существу используется предположение, что исходная поверхность ограничена простой замкнутой кривой, а не, например, многократно пройденной кривой.) Поскольку S^h проецируется биективно и с сохранением ориентации, оставшееся множество $S \setminus S^h$ проецируется на горизонтальную плоскость с суммарной кратностью 0, откуда $A_h(S \setminus S^h) = 0$. Поскольку $S \setminus S^h$ — дизъюнктное объединение множеств S^V, S^M и $S^H \setminus S^h$, имеем

$$0 = A_h(S \setminus S^h) = A_h(S^V) + A_h(S^M) + A_h(S^H \setminus S^h).$$

Отсюда и из (2.5.2), (2.5.3) получаем

$$A_h(S^H \setminus S^h) \leq |A_h(S^M)| + |A_h(S^V)| \leq |S^M| + \varepsilon^2 |S^V|.$$

Из (2.5.4) следует, что

$$A_h(S^H \setminus S^h) \geq (1-\varepsilon)^2 |S^H \setminus S^h| \geq \frac{1}{2} |S^H \setminus S^h|,$$

откуда, учитывая равенство $S^m \setminus S^M = S^H \setminus S^h$,

$$|S^m| - |S^M| \leq |S^H \setminus S^h| \leq 2|A_h(S^H \setminus S^h)| \leq 2(|S^M| + \varepsilon^2 |S^V|),$$

или, эквивалентно, $3|S^M| \geq |S^m| - 2\varepsilon^2 |S^V|$. Подставляя оценку на $|S^m|$ из (2.5.6), получаем

$$|S^M| \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{72} - 2\varepsilon^2\right)|S^V| \geq \frac{1}{300}|S^V|.$$

Предложение 2.5.2, а с ним и теорема 2.5.1 доказано. □

Следствие 2.5.5. *Рассмотрим в $\mathbf{R}^4$ простые единичные 2-векторы*

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_3) \wedge (e_2 + e_4), \\ w_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 - e_3) \wedge (e_2 - e_4), \\ w_3 &= e_4 \wedge e_3, \end{aligned}$$

и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — соответствующие им ориентированные плоскости. Существуют такая окрестность U множества $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ в $G^+_{2,4}$ и такая константа $c > 0$, что верно следующее.

Для любой компактной ориентированной двумерной кусочно линейной поверхности f в $\mathbf{R}^4$, граница которой — положительно ориентированная простая кривая в координатной плоскости e_{12}, ограничивающая единичную площадь, имеет место неравенство

$$G_f(G^+_{2,4} \setminus U) \geq c,$$

где G_f — взвешенный гауссов образ поверхности.

Доказательство. Доказываемое утверждение аффинно инвариантно, поэтому достаточно доказать его для набора 2-векторов, получающихся из данного любым линейным преобразованием (сохраняющим плоскость e_{12}). Применим линейное преобразование $(x, y, z, t) \mapsto (x, y, \frac{\varepsilon}{2}z, -\frac{\varepsilon}{2}t)$, где $\varepsilon = 10^{-10}$ — константа из предложения 2.5.2, и будем доказывать утверждение для полученного набора 2-векторов

$$\begin{aligned}
w_1 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + \tfrac{\varepsilon}{2}e_3) \wedge (e_2 - \tfrac{\varepsilon}{2}e_4),\\
w_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}e_3) \wedge (e_2 + \tfrac{\varepsilon}{2}e_4),\\
w_3 &= \tfrac{\varepsilon^2}{4}e_3 \wedge e_4.
\end{aligned}$$

и соответствующих плоскостей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (мы используем для них те же обозначения, исходные 2-векторы и плоскости больше не понадобятся). Отметим, что плоскости α_1 и α_3 ε-горизонтальны в смысле предложения 2.5.2, а плоскость α_3 вертикальна.

Заметим, что 2-вектор $e_1 \wedge e_2$ не является линейной комбинацией w_1 и w_2, поэтому существует такое $\delta > 0$, что расстояние (в $\Lambda^2\mathbf{R}^4$) от $e_1 \wedge e_2$ до линейной оболочки w_1 и w_2 не меньше 2δ. Пусть $U_1, U_2 \subset \Lambda^2\mathbf{R}^4$ — такие окрестности w_1 и w_2 соответственно, что расстояние от $e_1 \wedge e_2$ до любой линейной комбинации любых двух 2-векторов $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$ не меньше δ. Заменяя эти окрестности на их конические оболочки, можно считать, что они являются открытыми конусами в $\Lambda^2\mathbf{R}^4$. Уменьшив эти окрестности, добьемся того, чтобы эти конусы были выпуклыми и все лежащие в них простые 2-векторы были ε-горизонтальными.

Пусть f — поверхность, удовлетворяющая условию. По предложению 2.1.3 имеем $\mathbf{I}(f) = e_1 \wedge e_2$. Разобьем поверхность на три части S_0, S_1 и S_2, где S_1 и S_2 состоят из симплексов, направления которых принадлежат U_1 и U_2 соответственно, а S_0 — оставшаяся часть. Поскольку U_1 и U_2 — выпуклые конусы в $\Lambda^2\mathbf{R}^4$, имеем $\mathbf{I}(S_1) \in U_1$ и $\mathbf{I}(S_2) \in U_2$. Поскольку $\mathbf{I}(S_0) + \mathbf{I}(S_1) + \mathbf{I}(S_2) = \mathbf{I}(S) = e_1 \wedge e_2$, отсюда следует, что

$$|S_0| \ge |\mathbf{I}(S_0)| = |e_1 \wedge e_2 - \mathbf{I}(S_1) - \mathbf{I}(S_2)| \ge \delta,$$

где последнее неравенство следует из выбора окрестностей U_1 и U_2.

Пусть U_3 — окрестность α_3 в $G^+_{2,4}$, состоящая из всех ε-вертикальных плоскостей. Разобьем S_0 на две части S_3 и S_4, где S_3 состоит из симплексов, направления которых лежат в U_3, а S_4 — оставшаяся часть. В обозначениях из предложения 2.5.2, $S_3 = S^V$ и $S_4 \supset S^M$. Следовательно,

$$|S_4| \ge |S^M| \ge \frac{1}{300}|S^V| = \frac{1}{300}|S_3|.$$

Поскольку $|S_3| + |S_4| = |S_0| \ge \delta$, отсюда следует, что $|S_4| \ge \frac{\delta}{301}$.

Положим $U = G^+_{2,4} \cap (U_1 \cup U_2 \cup U_3)$. Тогда $|S_4| = G_S(G^+_{2,4} \setminus U)$. Следовательно, доказываемое утверждение верно для этой окрестности U и $c = \frac{\delta}{301}$. $\square$

2.6 Теорема неэквивалентности

Хорошо известно (см., например, [16] или [19]), что при $n = 1$ или $n = N - 1$ полуэллиптичность над $\mathbf{Z}$ n-плотности в $\mathbf{R}^N$ эквивалентна ее выпуклости и, как следствие, полуэллиптичности над $\mathbf{R}$. (Отметим, что в таких размерностях любой n-вектор является простым, то есть $\Lambda_s^n \mathbf{R}^N = \Lambda^n \mathbf{R}^N$, поэтому понятие выпуклой продолжимости упрощается до выпуклости.) Следующая теорема показывает, что для произвольных размерностей n и N это не так. Контрпримеры существуют уже для $N = 4$ и $n = 2$.

Теорема 2.6.1. *Существует непрерывная симметричная 2-плотность φ в $\mathbf{R}^4$, полуэллиптичная над $\mathbf{Z}$, но не над $\mathbf{R}$.*

Доказательство. Пусть w_1, w_2, w_3 — 2-векторы из следствия 2.5.5, и пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — соответствующие ориентированные плоскости. Зафиксируем $\delta > 0$ и определим 2-плотность $\theta : \Lambda_s^2 \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}_+$ формулой

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} \delta \cdot |\sigma|, & \text{если } \sigma \text{ сонаправлен с одним из 2-векторов } \pm w_i, \\ |\sigma|, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $\varphi = E_{\mathbf{Z}} \theta$. По построению, φ симметрична и полуэллиптична над $\mathbf{Z}$. По следствию 1.3.8, она непрерывна. Покажем, что при достаточно малом δ она не является выпукло продолжимой, из этого по теореме 2.2.3 следует, что она не полуэллиптична над $\mathbf{R}$.

Отметим, что $|w_1| = |w_2| = |w_3| = 1$ и $w_1 + w_2 + w_3 = e_1 \wedge e_2$. Предположим, что φ выпукло продолжима. Тогда

$$\varphi(e_1 \wedge e_2) \le \varphi(w_1) + \varphi(w_2) + \varphi(w_3) \le 3\delta.$$

Пусть Δ — такой 2-симплекс, что $\mathbf{I}(\Delta) = e_1 \wedge e_2$. По предложению 1.4.5, $\varphi(e_1 \wedge e_2) = F^{\mathbf{Z}}(\partial \Delta)$. Следовательно, существует такая целочисленная цепь $s \in S_2(\mathbf{R}^4; \mathbf{Z})$, что $\partial s = \partial \Delta$ и

$$A_\theta(s) < (1 + \varepsilon)\varphi(e_1 \wedge e_2) \le 3\delta(1 + \varepsilon),$$

где $\varepsilon = c/3$, c — константа из следствия 2.5.5. По предложению 1.2.7, цепь s параметризуется кусочно линейным отображением f, край которого параметризует цепь $\partial\Delta$. Поскольку любое двумерное многообразие является многообразием, f является поверхностью, поэтому к ней применимо следствие 2.5.5.

Разобьем поверхность на три части S_0, S_+ и S_-, где S_+ состоит из граней, сонаправленных с одним из 2-векторов w_i, S_- — из граней, сонаправленных с одним из 2-векторов $-w_i$, S_0 — оставшаяся часть. Поверхность S_+ разобьем на части S_+^1, S_+^2 и S_+^3, соответствующие направлениям w_1, w_2 и w_3. Аналогично разобьем S_- на части S_-^1, S_-^2 и S_-^3 По определению θ имеем

$$A_\theta(s) = |S_0| + \delta(|S_+| + |S_-|),$$

где модуль обозначает евклидову площадь. Отсюда

$$|S_0| + \delta(|S_+| + |S_-|) < 3\delta(1+\varepsilon)$$

или, эквивалентно,

$$3(1+\varepsilon) - \delta^{-1}|S_0| > |S_+| + |S_-|. \tag{2.6.1}$$

Из следствия 2.5.5 имеем

$$|S_0| + |S_-| = G_f(G^+_{2,4} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) \geq c, \tag{2.6.2}$$

так как вклад части S_+ во взвешенный гауссов образ G_f сосредоточен в точках α_1, α_2 и α_3. Результирующий вектор $\mathbf{I}(f) = e_1 \wedge e_2$ поверхности раскладывается в сумму

$$e_1 \wedge e_2 = \mathbf{I}(f) = \mathbf{I}(S_0) + \mathbf{I}(S_+) + \mathbf{I}(S_-) = \mathbf{I}(S_0) + \sum_{i=1}^{3}(|S^i_+| - |S^i_-|)w_i,$$

откуда

$$\mathbf{I}(S_0) = e_1 \wedge e_2 - \sum_{i=1}^{3}(|S^i_+| - |S^i_-|)w_i = \sum_{i=1}^{3}(1 - |S^i_+| + |S^i_-|)w_i$$

(здесь используется равенство $w_1 + w_2 + w_3 = e_1 \wedge e_2$). Поскольку 2-векторы w_1, w_2 и w_3 линейно независимы, существует такая константа $\lambda > 0$, что

$$|a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3| \geq \lambda(|a_1| + |a_2| + |a_3|)$$

для любых $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$. Подставляя $a_i = 1 - |S^i_+| + |S^i_-|$, с учетом предыдущего тождества получаем

$$|S_0| \geq |\mathbf{I}(S_0)| \geq \lambda \sum_{i=1}^{3} \Big|1 - |S^i_+| + |S^i_-|\Big| \geq \lambda\big(3 - |S_+| + |S_-|\big).$$

Умножая на λ^{-1} и складывая с (2.6.1), получаем

$$3\varepsilon - (\delta^{-1} - \lambda^{-1})|S_0| > 2|S_-|.$$

Можно считать, что δ столь мало, что $\delta^{-1} - \lambda^{-1} > 2$, тогда

$$3\varepsilon > (\delta^{-1} - \lambda^{-1})|S_0| + 2|S_-| \geq 2(|S_0| + |S_-|) \geq 2c$$

по (2.6.2). Это противоречит выбору $\varepsilon = c/3$. Теорема доказана. □

Глава 3

Финслеровы объемы

3.1 Нормы и эллипсоид Джона

Для конечномерного нормированного пространства $(V, \|\cdot\|)$ мы обозначаем через V^* двойственное пространство (линейных функций на V), а через $\|\cdot\|^*$ — двойственную норму на V^*, определяемую равенством $\|L^*\| = \sup\{L(x) : \|x\| \leq 1\}$.

Норма $\|\cdot\|$ однозначно определяется своим единичным шаром

$$B = \{x \in V : \|x\| \leq 1\},$$

который является симметричным относительно 0 выпуклым телом. Единичный шар B^* двойственной нормы $\|\cdot\|^*$ — поляра тела B, см. [12, §6]. Если на V задана вспомогательная евклидова структура (например, $V = \mathbf{R}^n$), то она определяет отождествление V^* с V, и в этом случае можно считать, что $B^* \subset V$.

Для любого выпуклого тела B в конечномерном векторном пространстве среди всех эллипсоидов, содержащихся в B, существует единственный эллипсоид максимального объема [70]. Он называется *эллипсоидом Джона* тела B. Эллипсоидом Джона нормы $\|\cdot\|$ будем называть эллипсоид Джона ее единичного шара. Такой эллипсоид симметричен относительно 0, следовательно, он является единичным шаром некоторой положительно определенной квадратичной формы Q. Тот факт, что эллипсоид содержится в единичном шаре нормы, означает, что $Q \geq \|\cdot\|^2$.

В следующем предложении строится представление эллипсоида Джона через опорные элементы, играющее ключевую роль в главе 8. Оно аналогично известному представлению Болла [26], но применимо только к центрально симметричным телам и за счет этого несколько проще. По видимому, это представление впервые появилось в работе [35].

Предложение 3.1.1. *Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство. Тогда существует квадратичная форма Q на V, удовлетворяющая неравенству $Q \geq$*

$\|\cdot\|^2$ *и допускающая представление в виде конечной суммы*

$$Q = \sum \lambda_i L_i^2, \tag{3.1.1}$$

где $L_i : V \to \mathbf{R}$ *— линейные функции,* $\|L_i\|^* \le 1$, $\lambda_i > 0$, $\sum \lambda_i = n$.

Такая форма Q *единственна и ее единичный шар совпадает с эллипсоидом Джона нормы* $\|\cdot\|$. *При этом все функции* L_i *из* (3.1.1) *удовлетворяют равенствам* $\|L_i\|_Q = \|L_i\|^* = 1$, *где* $\|L\|_Q = \sup\{L(v) : Q(v) \le 1\}$.

Доказательство. Пусть A — множество всех квадратичных форм вида nL^2, где $L : V \to \mathbf{R}$ — линейная функция, $\|L\|^* \le 1$. Это компактное множество в конечномерном пространстве квадратичных форм на V. Следовательно, его выпуклая оболочка $\overline{A}$ тоже компактна. Заметим, что $\overline{A}$ состоит в точности из квадратичных форм, представимых в виде (3.1.1).

Зафиксируем в пространстве V произвольный базис. Для квадратичной формы Q на V положим $H(Q) = \det[Q]$, где $[Q]$ обозначает матрицу формы Q в выбранном базисе. Поскольку функция H непрерывна, она достигает максимума на $\overline{A}$ в некоторой точке Q. Докажем, что эта Q и есть искомая квадратичная форма.

Среди форм вида (3.1.1) имеются положительно определенные, а для них значения функции H положительны. Следовательно,

$$H(Q) = \sup H(\overline{A}) > 0.$$

Поэтому форма Q невырожденная и, следовательно, положительно определенная.

Для линейной функции $L : V \to \mathbf{R}$ и числа $\varepsilon \in \mathbf{R}$ обозначим через Q_ε^L квадратичную форму $(1-\varepsilon)Q + \varepsilon n L^2$.

Лемма 3.1.2. *Для любой линейной функции* $L : V \to \mathbf{R}$ *имеет место равенство*

$$\frac{d}{d\varepsilon} H(Q_\varepsilon^L)\big|_{\varepsilon=0} = nH(Q)(\|L\|_Q^2 - 1).$$

Доказательство. Форма Q задает некоторую евклидову структуру на V. Построим ортонормированный в этой структуре базис, в котором L пропорционален первой координатной функции (с коэффициентом, равным $\|L\|_Q$). В этом базисе форма Q_ε^L выражается диагональной матрицей

$$\operatorname{diag}\left(1 - \varepsilon + \varepsilon n \|L\|_Q^2, 1-\varepsilon, \dots, 1-\varepsilon\right) .$$

Функция H отличается от определителя матрицы формы в новом базисе умножением на некоторую константу (квадрат определителя матрицы перехода). Подставляя рассматриваемую форму Q, получаем, что эта константа равна $H(Q)$. Таким образом,

$$H(Q_\varepsilon^L) = (1-\varepsilon)^{n-1}\left(1 + \varepsilon(n\|L\|_Q^2 - 1)\right) H(Q) .$$

Дифференцируя, получаем,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}H(Q_\varepsilon^L)\big|_{\varepsilon=0} &= -(n-1)H(Q) + (n\|L\|_Q^2 - 1)H(Q)\\ &= nH(Q)(\|L\|_Q^2 - 1),\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Заметим, что $Q_\varepsilon^L \in \overline{A}$ для любых $L \in B^*$ и $\varepsilon \in [0,1)$. Поскольку Q — точка максимума функции H на $\overline{A}$, отсюда следует, что для любого $L \in B^*$ вычисленная в лемме производная неположительна, откуда $\|L\|_Q \le 1$. Таким образом, всякая линейная функция из B^* не превосходит единицы на единичном шаре B_Q формы Q. Отсюда следует, что $B_Q \subset B$, или, эквивалентно, $Q \ge \|\cdot\|^2$ всюду на V. Существование доказано.

Теперь докажем второе утверждение предложения 3.1.1. Пусть Q — квадратичная форма, удовлетворяющая неравенству $Q \ge \|\cdot\|^2$ и представимая в виде (3.1.1), и пусть Q' — такая квадратичная форма, что $Q' \ge \|\cdot\|$. Выберем в V систему координат, в которой Q' — стандартная евклидова структура. В этой системе координат

$$\operatorname{trace}[L^2] = \|L\|_{Q'}^2 \le (\|L\|^*)^2$$

для любой линейной функции $L : V \to \mathbf{R}$, где квадратные скобки обозначают матрицу квадратичной формы, trace — след. (Последнее неравенство следует из условия $Q' \ge \|\cdot\|^2$.) Подставляя в качестве L функции L_i из (3.1.1), получаем

$$\operatorname{trace}[Q] = \sum \lambda_i \operatorname{trace}[L_i^2] \le \sum \lambda_i = n. \tag{3.1.2}$$

Отсюда

$$\det[Q] \le \left(\tfrac{1}{n}\operatorname{trace}[Q]\right)^n \le 1.$$

Первое неравенство в этой цепочке — неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для собственных чисел матрицы $[Q]$, равенство в нем достигается только тогда, когда эта матрица пропорциональна единичной. Таким образом, $\det[Q] \le 1$, причем равенство достигается только при $Q = Q'$. Так как определитель $\det[Q]$ равен квадрату отношения объемов единичных шаров форм Q' и Q, это доказывает второе утверждение предложения 3.1.1 (единственность и максимальность).

Теперь докажем последнее утверждение. Для этого повторим предыдущее рассуждение с $Q' = Q$. В этом случае $\operatorname{trace}[Q] = n$, то есть в неравенстве (3.1.2) достигается равенство. Значит, в неравенстве

$$\|L_i\|_Q \le \|L_i\|^* \le 1$$

достигается равенство при всех i, что и требовалось доказать. □

Замечание 3.1.3. С помощью теоремы Каратеодори о конической выпуклой оболочке нетрудно показать, что существует представление (3.1.1), количество слагаемых в котором не превосходит размерности пространства квадратичных форм, то есть $\frac{n(n+1)}{2}$.

Нам понадобится следующая известная теорема Ф. Джона (F. John). Мы приводим ее с коротким доказательством, основанным на предложении 3.1.1.

Теорема 3.1.4 (John [70])**.** *Пусть B — единичный шар некоторой нормы в n-мерном векторном пространстве, E — его эллипсоид Джона. Тогда $B \subset \sqrt{n} \cdot E$, где умножение обозначает гомотетию с центром в нуле.*

Доказательство. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — данное нормированное пространство, Q — квадратичная форма, соответствующая эллипсоиду Джона. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что $Q \leq n\|\cdot\|^2$. Представим Q в виде (3.1.1). Для каждого i и любого $v \in V$ имеем $|L_i(v)| \leq \|v\|$, так как $\|L_i\|^* = 1$. Отсюда

$$Q(v) \leq \sum \lambda_i \|v\| = n\|v\|,$$

что и требовалось доказать. □

3.2 Финслеровы метрики

В этом параграфе перечисляются стандартные определения и элементарные факты о финслеровых многообразиях. Подробности можно найти, например, в книгах [27], [84] или [13].

Определение 3.2.1. Пусть M — гладкое многообразие. *Симметричная финслерова структура* (далее просто *финслерова структура*) на M — это непрерывная функция $\varphi : TM \to \mathbf{R}_+$ такая, что для любой точки $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_xM}$ является нормой на векторном пространстве T_xM.

Мы будем обозначать это сужение через φ_x или $\|\cdot\|_x$, если из контекста ясно, какая функция φ имеется в виду. Значение $\varphi(v)$, где $v \in TM$, называется *длиной* касательного вектора v (относительно φ).

Финслеровы структуры также называют *финслеровыми метриками.*

Многообразие, снабженное финслеровой структурой, называется *финслеровым многообразием.*

Примеры. 1. Римановы метрики (класса C^0) — частный случай финслеровых. А именно, если M — риманово многообразие, то $\varphi(v)$ полагается равным римановой длине касательного вектора v. Финслерова метрика φ является римановой тогда и только тогда, когда ее сужение на каждый слой касательного пространства является евклидовой нормой (для этого необходимо и достаточно выполнения тождества параллелограмма).

2. Каждое конечномерное нормированное пространство $(V, \|\cdot\|)$ можно рассматривать как финслерово многообразие, полагая $\|\cdot\|_x = \|\cdot\|$ для всех $x \in V$ (здесь подразумевается каноническое отождествление $T_xV \simeq V$). Финслерова метрику называется *плоской*, если она локально изометрична метрике нормированного пространства.

3. Гладкие поверхности в нормированных пространствах естественным образом являются финслеровыми многообразиями. А именно, всякое C^1-погружение $f : M \to V$ многообразия M в нормированное пространство $(V, \|\cdot\|)$ задает на M финслерову структуру φ, определяемую равенством $\varphi(v) = \|df(v)\|$. Аналогично римановой теореме Нэша, любая достаточно регулярная финслерова структура может быть реализована поверхностью, см. [5].

Определение 3.2.2. Пусть (M, φ) — связное финслерово многообразие. *Длина* $L_\varphi(\gamma)$ кусочно гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ определяется равенством

$$L_\varphi(\gamma) = \int_a^b \varphi(\dot\gamma(t))\, dt,$$

где $\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$ — вектор скорости кривой. *Расстояние* $d_\varphi(x, y)$ между точками $x, y \in M$ определяется равенством $d_\varphi(x, y) = \inf_\gamma L_\varphi(\gamma)$, где инфимум берется по всем кусочно гладким кривым γ, соединяющим x и y. Функция $d_\varphi : M \times M \to \mathbf{R}_+$ называется *финслеровой метрикой*, заданной структурой φ.

Отметим, что термин “финслерова метрика” используется для обозначения как финслеровой структуры, так и функции расстояния. Обычно из контекста ясно, какое из двух значений имеется в виду.

Из определений легко выводятся следующие свойства:

1. (M, d_φ) — метрическое пространство, его топология совпадает с топологией многообразия M.

2. Финслерова структура φ однозначно восстанавливается по метрике d_φ. А именно, длина $\varphi(v)$ касательного вектора $v \in T_xM$ может быть восстановлена по формуле

$$\varphi(v) = \lim_{t \to 0} \frac{d_\varphi(x, \gamma(t))}{|t|},$$

где $\gamma : \mathbf{R} \to M$ — произвольная гладкая кривая, удовлетворяющая равенствам $\gamma(0) = x$ и $\dot\gamma(0) = v$.

3. Пусть φ и φ' — две финслеровы структуры на M. Тогда если $\varphi \le \varphi'$ всюду на TM, то $d_\varphi \le d_{\varphi'}$ всюду на $M \times M$. И обратно, если $d_\varphi \le d_{\varphi'}$, то $\varphi \le \varphi'$.

Определение 3.2.3. Финслерова структура φ (и метрика d_φ) называется *гладкой*, если функция $\varphi : TM \to \mathbf{R}$ является гладкой (класса C^∞) вне нулевого сечения. Гладкая финслерова структура φ (и метрика d_φ) называется *строго выпуклой*, если для любой точки $x \in M$ второй дифференциал функции $\varphi^2|_{T_xM}$ положительно определен всюду на $T_xM \setminus \{0\}$.

Важным следствием гладкости и строгой выпуклости является наличие гладких геодезических и экспоненциального отображения. Гладкие строго выпуклые финслеровы метрики являются предметом изучения дифференциальной финслеровой геометрии. Необходимые сведения из этой области будут формулироваться по мере надобности.

3.3 Примеры финслеровых объемов

В отличие от риманова случая, для финслеровых многообразий используются различные (не эквивалентные) определения объема. Исторически первым был введен объем по Буземану (см. пример 3.3.1), и в литературе именно он обычно подразумевается в качестве "стандартного" финслерова объема. Однако во многих случаях оказываются удобными другие определения объема, например, для задач интегральной геометрии наиболее естественным оказывается объем по Холмсу–Томпсону (см. пример 3.3.2).

Мы не фиксируем определение объема, но требуем, чтобы он удовлетворял некоторым естественным требованиям. А именно, n-мерный финслеров объем сопоставляет каждому n-мерному финслерову многообразию (M, φ) борелевскую меру vol_φ на M так, что выполняются следующие свойства:

(3.3.1) Мера vol_φ монотонно зависит от φ, то есть $\mathrm{vol}_{\varphi'} \le \mathrm{vol}_\varphi$, если $\varphi' \le \varphi$.

(3.3.2) Мера сохраняется при изометриях, то есть если (M, φ) и (M', φ') — n-мерные финслеровы многообразия, $f : M \to M'$ — инъективное гладкое отображение, такое, что $\varphi = \varphi' \circ df$, то $\mathrm{vol}_{\varphi'}|_{f(M)} = f_* \mathrm{vol}_\varphi$, где звездочка обозначает перенос меры отображением f.

(3.3.3) Если $M = \mathbf{R}^n$ и φ — стандартная евклидова структура, то vol_φ — стандартный евклидов объем (n-мерная мера Лебега).

Формальное определение дается в терминах интегрирования плотностей, см. §3.4. В большинстве общих результатов подразумевается, что зафиксирован некоторый финслеров объем, удовлетворяющая вышеуказанным требованиям. Там, где рассматриваются конкретные финслеровы объемы, это будет уточняться.

Обозначим через ω_n евклидов объем единичного шара в $\mathbf{R}^n$.

Пример 3.3.1 (объем по Буземану)**.** n-мерная мера Хаусдорфа, очевидно, удовлетворяет вышеуказанным требованиям. Для финслеровых многообразий ее называют *объемом по Буземану.* Буземан [43] доказал, что это единственный финслеров объем, обладающий следующим свойством: объем единичного шара в n-мерном нормированном пространстве равен ω_n (то есть не зависит от нормы). Мы будем обозначать объем по Буземану для метрики φ через vol^b_φ. Несмотря на геометрическую естественность этого объема, он оказывается неудобным во многих вопросах и не обладает некоторыми свойствами, ожидаемыми от объема в дифференциальной и интегральной геометрии, см., например, [18], [85].

Пример 3.3.2 (объем по Холмсу–Томпсону)**.** Пусть (M,φ) — n-мерное финслерово многообразие. Рассмотрим кокасательное расслоение T^*M. В каждом его слое T^*_xM определена норма φ^*_x, двойственная к норме φ_x. Объединение этих норм дает непрерывную функцию $\varphi^* : T^*M \to \mathbf{R}$. Рассмотрим множество

$$B^*(M,\varphi) = \{w \in T^*M : \varphi^*(w) \le 1\}$$

(т. е. объединение единичных шаров норм φ^*_x по всем $x \in M$).

На кокасательном расслоении определен канонический $2n$-мерный (симплектический) объем, обозначим его через V_{symp}. Теперь определим финслеров объем vol^s_φ формулой

$$\mathrm{vol}^s_\varphi(M) = \frac{1}{\omega_n} V_{symp}(B^*(M,\varphi)).$$

Более точно, определим меру vol^s_φ как образ меры $\frac{1}{\omega_n}V_{symp}$ при отображении проекции $B^*(M,\varphi) \to M$.

Этот объем называется *объемом по Холмсу–Томпсону* или *симплектическим объемом.* Он удовлетворяет требованиям (3.3.1)–(3.3.3) в силу инвариантности построения и антимонотонной зависимости φ^* от φ.

Этот объем был введен Р. Холмсом и А. Томпсоном [68] в 1979 году, но связанные с ним вопросы изучались и раньше. Одна из причин, по которой он удобен в вопросах дифференциальной геометрии, состоит в том, что симплектическому объему на множестве $B^*(M,\varphi)$ соответствует инвариантная относительно геодезического потока мера Лиувилля на единичном касательном расслоении.

Из неравенства Бляшке–Сантало [88] следует, что $\mathrm{vol}^s_\varphi \le \mathrm{vol}^b_\varphi$ для любой финслеровой метрики φ, причем равенство достигается только для римановых метрик, см. [76], [58].

Пример 3.3.3 (объем по Лёвнеру)**.** Пусть (M,φ) — финслерово многообразие. Для каждого измеримого $U \subset M$ положим

$$\mathrm{vol}^e_\varphi(U) = \inf\{\mathrm{vol}_g(U) : g \text{ — риманова метрика на } M,\ g \ge \varphi^2\} \qquad (3.3.4)$$

где vol_g обозначает риманов объем относительно g. В неравенстве $g \geq \varphi^2$ риманова метрика g рассматривается как функция на TM, вычисляющая квадрат длины касательного вектора. Будем называть полученную меру vol^e_φ *вписанным римановым объемом*, или *объемом по Лёвнеру* финслеровой метрики φ. Очевидно, что этот объем удовлетворяет условиям (3.3.1)–(3.3.3). Более того, это максимальный объем, удовлетворяющая этим требованиям, см. предложение 3.5.1.

Существует единственная риманова метрика g, реализующая инфимум в (3.3.4). В каждом слое T_xM единичный шар этой метрики g — эллипсоид Джона единичного шара нормы φ_x. Мы будем называть это метрику g *вписанной римановой метрикой* финслеровой метрики φ.

Для целей финслеровой геометрии этот объем не удобен, но он оказывается полезным для оценок римановых объемов, требующих вспомогательных финслеровых построений. В частности, именно это определение объема обеспечивает совпадение заполняющих объемов в классах римановых и финслеровых метрик, доказываемое в §5.4.

Отметим, что зависимость объема по Лёвнеру от метрики не является строго монотонной. Например, объем не изменяется при замене метрики на вписанную риманову метрику.

Нетрудно убедиться, что три введенных выше объема различны. Например, рассмотрим множество $[-1,1]^2$ в пространстве $\mathbf{R}^2_\infty$. Его объем по Буземану равен π (так как это единичный шар нормы), объем по Холмсу–Томпсону равен $\frac{8}{\pi}$, а вписанный риманов объем равен 4.

3.4 Функционалы объема

Следуя подходу из [19], мы сначала введем понятие объема для нормированных пространств, а потом распространим его на финслеровы многообразия.

Поскольку параллельные переносы в нормированных пространствах являются изометриями, объем в каждом таком пространстве $(V, \|\cdot\|)$ должен быть инвариантной относительно параллельных переносов локально конечной борелевской мерой. Все такие меры на V пропорциональны друг другу. Они находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с нормами на (одномерном) пространстве $\Lambda^n V$, где $n = \dim V$, а именно, норма n-вектора $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$ равна мере параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Определение 3.4.1. Пусть n — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что задан *функционал n-мерного финслерова объема* (или просто n-мерного объема), если каждому n-мерному нормированному пространству $(V, \|\cdot\|)$ сопоставлена норма $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ на $\Lambda^n V$ так, что выполняются следующие свойства.

1. Монотонность: если $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|'$ — две нормы на одном векторном пространстве и $\|\cdot\| \le \|\cdot\|'$, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}$.

2. Инвариантность относительно изометрий: если $(V, \|\cdot\|)$ и $(V', \|\cdot\|')$ — n-мерные нормированные пространства, $f : V \to V'$ — линейная изометрия между ними, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\sigma) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}(f_*(\sigma))$ для всех $\sigma \in \Lambda^n V$, где звездочка обозначает естественное действие изоморфизма на n-формах.

3. Если $|\cdot|$ — евклидова норма, то $\mathrm{vol}_{|\cdot|}$ — соответствующий евклидов объем.

Требования 1 и 2 вместе эквивалентны следующему: если $(V, \|\cdot\|)$ и $(V', \|\cdot\|')$ — n-мерные нормированные пространства, $f : V \to V'$ — нерастягивающее линейное отображение, то $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\sigma) \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|'}(f_*(\sigma))$ для всех $\sigma \in \Lambda^n V$. Требования 2 и 3 однозначно определяют функционал объема на классе евклидовых метрик. Инвариантность относительно изометрий означает, что достаточно задать функционал на множестве всех норм на одном векторном пространстве V (например, для $V = \mathbf{R}^n$).

Пусть V — n-мерное векторное пространство. Обозначим через $\mathcal{N}(V)$ и $\mathcal{N}_0(V)$ соответственно множество всех норм и всех полунорм на V. Эти множества снабжаются топологией поточечной сходимости (или. что то же самое, равномерной сходимости на компактах).

Функционал n-мерного объема $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ является отображением из $\mathcal{N}(V)$ в $\mathcal{N}(\Lambda^n(V))$. (Пространство $\mathcal{N}(\Lambda^n(V))$ одномерно и может быть отождествлено с $\mathbf{R}_+$, но такое отождествление не инвариантно.) Мы считаем, что это отображение определено на множество всех полунорм $\mathcal{N}_0(V)$, полагая $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|} = 0$, если полунорма $\|\cdot\|$ вырождена (не является нормой).

Лемма 3.4.2. *Пусть $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ — функционал n-мерного объема, V — n-мерное векторное пространство. Тогда*

1. $\mathrm{vol}_{\lambda\|\cdot\|} = \lambda^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ для любой нормы $\|\cdot\|$ на V и любого $\lambda > 0$.

2. Отображение $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|} : \mathcal{N}_0(V) \to \mathcal{N}_0(\Lambda^n V)$ непрерывно.

Доказательство. 1. Следует из изометричности пространств $(V, \lambda\|\cdot\|)$ и $(V, \|\cdot\|)$ гомотетией с коэффициентом λ.

2. Сначала докажем непрерывность на $\mathcal{N}(V)$. Рассмотрим последовательность $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^\infty$ норм, сходящуюся к норме $\|\cdot\|$. Отношение $\frac{\|\cdot\|_i}{\|\cdot\|}$ равномерно стремится к 1, то есть

$$(1-\varepsilon_i)\|\cdot\| \le \|\cdot\|_i \le (1+\varepsilon_i)\|\cdot\|$$

для некоторой последовательности $\varepsilon_i \to 0$. Отсюда по первому утверждению

$$(1-\varepsilon_i)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|} \le \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \le (1+\varepsilon_i)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|},$$

следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \to \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$, и непрерывность на $\mathcal{N}(V)$ доказана.

Теперь пусть $\|\cdot\|$ — вырожденная полунорма, $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность полунорм, сходящаяся к $\|\cdot\|$. Пусть V_0 — нулевое подпространство нормы $\|\cdot\|$, то есть $V_0 = \{v \in V : \|v\| = 0\}$. V_1 — дополнительное подпространство к V_0. Можно считать, что $V_0 = \mathbf{R}^k$, $V_1 = \mathbf{R}^{n-k}$, где $1 \le k \le n$, $V = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^{n-k} = \mathbf{R}^n$. Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим норму $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ на $\mathbf{R}^n$, заданную равенством

$$\|(x,y)\|_{(\varepsilon)} = \varepsilon|x| + 2\|y\|, \quad x \in \mathbf{R}^k, y \in \mathbf{R}^{n-k},$$

где $|\cdot|$ — стандартная евклидова норма. Поскольку сужение полунормы $\|\cdot\|$ на V_1 является нормой, отношение $\frac{\|\cdot\|_i}{\|\cdot\|}$ равномерно стремится к 1 на $V_1 \setminus \{0\}$, поэтому $\|\cdot\|_i \le 2\|\cdot\|$ на V_1 при всех достаточно больших i. Можно считать, что это неравенство выполняется для всех i. Положим

$$\varepsilon_i = \max\{\|v\|_i : v \in V_0, |v| = 1\}.$$

Тогда $\varepsilon_i \to 0$, так как сужения полунорм $\|\cdot\|_i$ на V_0 стремятся к нулю. Из неравенств $\|\cdot\|_i \le 2\|\cdot\|$ на V_1 и $\|\cdot\|_i \le \varepsilon_i|\cdot|$ на V_0 следует, что $\|\cdot\|_i \le \|\cdot\|_{(\varepsilon_i)}$ всюду на V.

Заметим, что все нормы вида $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ изометричны; изометрия между $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$ реализуется отображением $(x,y) \mapsto (\varepsilon x, y)$, $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^{n-k}$. Следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_{(\varepsilon)}} = \varepsilon^k \mathrm{vol}_{(1)}$, где $\mathrm{vol}_{(1)} = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_{(1)}}$. Отсюда и из монотонной зависимости объема от нормы следует, что $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \le \varepsilon_i^k \mathrm{vol}_{(1)}$. Следовательно, $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|_i} \to 0 = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. □

Определение 3.4.3. Пусть $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ — функционал n-мерного объема, (M,φ) — n-мерное финслерово многообразие. Определим функцию $\nu_\varphi : \Lambda^n TM \to \mathbf{R}_+$ следующим образом: для $x \in M$ и $\sigma \in \Lambda^n T_x M$ положим

$$\nu_\varphi(\sigma) = \mathrm{vol}_{\varphi_x}(\sigma),$$

где $\varphi_x = \varphi|_{T_xM}$. Из леммы 3.4.2(2) следует, что ν_φ является непрерывной плотностью на M (в смысле определения 1.1.1). Определим меру vol_φ на M равенством

$$\mathrm{vol}_\varphi = \int \nu_\varphi.$$

Мера vol_φ называется *финслеровым объемом* метрики φ (определяемой данным функционалом).

Отметим, что для римановой метрики финслеров объем не зависит от выбора функционала объема и совпадает со стандартным римановым объемом.

Ясно, что меры vol_φ из определения 3.4.3 (для фиксированного функционала объема) удовлетворяют условиям (3.3.1)–(3.3.3). Следующее предложение показывает, что любая мера, удовлетворяющая этим условием, может быть получена с помощью этой конструкции.

Предложение 3.4.4. *Предположим, что каждому n-мерному финслерову многообразию (M, φ) сопоставлена борелевская мера μ_φ на M так, что выполняются условия* (3.3.1)–(3.3.3). *Тогда меры μ_φ являются финслеровыми объемами в смысле определения 3.4.3.*

Доказательство. Рассмотрим данные меры на n-мерных нормированных пространствах (рассматриваемых как финслеровы многообразия). Эти меры инвариантны относительно параллельных переносов, так как переносы являются изометриями. Кроме того, они положительны и локально конечны, так как каждая норма оценивается сверху и снизу некоторыми евклидовыми нормами, а для евклидовых норм меры совпадают с евклидовыми объемами по свойствам (3.3.3) и (3.3.2). Значит, для нормированных пространств $(V, \|\cdot\|)$ данные меры соответствуют нормам на $\Lambda^v V$, которые мы будем обозначать через $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. Из условий (3.3.1)–(3.3.3) немедленно следует, что соответствие $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ является функционалом n-мерного объема в смысле определения 3.4.1. Покажем, что меры μ_φ совпадают с финслеровыми объемами, определяемыми этим функционалом.

Переход к локальным координатам с помощью свойства (3.3.2) позволяет ограничиться случаем $M = \mathbf{R}^n$. Пусть φ — финслерова структура в $\mathbf{R}^n$. Отождествив все касательные пространства $T_x\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{R}^n$, можно рассматривать φ как семейство норм $\{\varphi_x\}_{x \in \mathbf{R}^n}$ на $\mathbf{R}^n$, где $\varphi_x = \varphi|_{T_x\mathbf{R}^n}$. Зафиксируем $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и обозначим $\|\cdot\| = \varphi_{x_0}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, в силу непрерывности φ, найдется такая окрестность U точки x_0, что

$$(1-\varepsilon)\|\cdot\| \le \varphi_x \le (1+\varepsilon)\|\cdot\|$$

для всех $x \in U$. Для любого $\lambda > 0$ пространство $(\mathbf{R}^n, \lambda\|\cdot\|)$ изометрично пространству $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ гомотетией с коэффициентом λ. Отсюда по второму требованию определения 3.4.3 следует, что для любого измеримого $A \subset \mathbf{R}^n$

$$\mathrm{vol}_{\lambda\|\cdot\|}(A) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(A),$$

так как мера $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ пропорциональна мере Лебега. Подставляя $\lambda = 1 \pm \varepsilon$ и пользуясь монотонной зависимостью объема от метрики, получаем, что

$$(1-\varepsilon)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(A) \le \mathrm{vol}_\varphi(A) \le (1+\varepsilon)^n \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(A)$$

для любого измеримого $A \subset U$. Отсюда следует, что на U плотность меры vol_φ относительно меры Лебега заключена между $(1-\varepsilon)^n\rho_0$ и $(1+\varepsilon)^n\rho_0$, где константа ρ_0 — плотность меры $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. Устремляя ε к нулю, получаем, что плотность меры vol_φ непрерывна и принимает значение ρ_0 в точке x_0, что и требовалось. $\square$

3.5 Дальнейшие свойства

Пусть φ — финслерова метрика в области $U \subset \mathbf{R}^n$. Отождествляя $T_xU \simeq \mathbf{R}^n$ для всех $x \in U$, можно рассматривать φ как семейство норм $\{\varphi_x\}_{x\in U}$, заданных на $\mathbf{R}^n$. Обозначим через B_x единичный шар нормы φ_x. Каждый финслеров объем имеет непрерывную плотность ρ относительно меры Лебега m_n, она связана с введенной выше бескоординатной плотностью соотношением

$$\rho(x) = \mathrm{vol}_{\varphi_x}(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n),$$

где $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — стандартный базис пространства $\mathbf{R}^n$. Для вычисления плотности $\rho(x)$ достаточно знать объем одного множества $A \subset T_xM$, если этот объем положителен и не равен 0. А именно,

$$\rho(x) = \frac{\mathrm{vol}_{\varphi_x}(A)}{|A|},$$

где модуль обозначает n-мерный евклидов объем. Найдем плотности финслеровых объемов, определенных в §3.3.

Объем по Буземану. В нормированном пространстве объем по Буземану характеризуется тем, что объем единичного шара нормы равен ω_n. Следовательно, для финслеровой метрики φ в $\mathbf{R}^n$ его плотность в точке x равна

$$\rho(x) = \frac{\omega_n}{|B_x|}.$$

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{R}^N$, где $N \geq n$, B — единичный шар этой нормы. Тогда n-плотность, определяемая n-мерным объемом по Буземану для этой нормы, задается равенством

$$\theta(\alpha) = \frac{\omega_n}{|B \cap \alpha|}$$

для каждой ориентированной n-плоскости $\alpha \in G^+_{n,N} \subset \Lambda^n_s \mathbf{R}^N$.

Объем по Холмсу–Томпсону. Рассмотрим норму $\|\cdot\|$ в $\mathbf{R}^n$. Пусть B — единичный шар этой нормы. Отождествим $T^*\mathbf{R}^n$ с $\mathbf{R}^{2n} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Тогда расслоение единичных кокасательных шаров совпадает с множеством $\mathbf{R}^n \times B^*$, где B^* — поляра тела B. Канонический объем на $T^*\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$ совпадает с мерой Лебега, поэтому объем по Холмсу–Томпсону любого измеримого множества $E \subset (\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ равен $|E| \cdot |B^*|/\omega_n$. Подставляя $E = [0,1]^n$, получаем, что плотность объема нормы $\|\cdot\|$ относительно меры Лебега равна $|B^*|/\omega_n$. Следовательно, для финслеровой метрики φ в $\mathbf{R}^n$ плотность объема по Холмсу–Томпсону в точке x равна

$$\rho(x) = \frac{|B^*_x|}{\omega_n}, \tag{3.5.1}$$

где B_x^* — поляра единичного шара B_x нормы $\varphi|_{T_x\mathbf{R}^n}$.

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{R}^N$, где $N \geq n$, B — единичный шар этой нормы. Тогда n-плотность, определяемая n-мерным объемом по Холмсу–Томпсону для этой нормы, задается равенством

$$\theta(\alpha) = \frac{|P_\alpha(B^*)|}{\omega_n}, \qquad \alpha \in G_{n,N}^+ \subset \Lambda_s^n \mathbf{R}^N,$$

где $P_\alpha : \mathbf{R}^N \to \alpha$ — ортогональная проекция на α. Это следует из (3.5.1) и двойственности сечений и проекций.

Функции такого вида (называемые "проекционными функциями") были одним из главных предметов изучения в серии работ Буземана, Эвальда и Шефарда, объединенных заголовком "выпуклость на грассмановых конусах" ([46], [47], [86], [59], [87], [60], [48], [49]), см. также [45].

Объем по Лёвнеру. В нормированном пространстве объем по Лёвнеру (вписанный риманов объем) характеризуется тем, что объем эллипсоида Джона единичного шара нормы равен ω_n. Следовательно, для финслеровой метрики φ в $\mathbf{R}^n$ плотность объема в точке x равна

$$\rho(x) = \frac{\omega_n}{|E_x|},$$

где E_x — эллипсоид Джона единичного шара нормы φ_x.

Предложение 3.5.1. *Любой n-мерный финслеров объем vol_φ удовлетворяет неравенствам*

$$n^{-n/2}\,\mathrm{vol}_\varphi^e \leq \mathrm{vol}_\varphi \leq \mathrm{vol}_\varphi^e,$$

где vol_φ^e — объем по Лёвнеру той же метрики.

Доказательство. Пусть g — вписанная риманова метрика данной финслеровой метрики φ. По определению имеем $\mathrm{vol}_\varphi^e = \mathrm{vol}_g$, где vol_g обозначает риманов объем. Риманов объем vol_g равен финслерову объему $\mathrm{vol}_{\sqrt{g}}$, так как на классе римановых метрик все финслеровы объемы совпадают. Из теоремы 3.1.4 следует, что

$$n^{-1/2}\sqrt{g} \leq \varphi \leq \sqrt{g},$$

откуда

$$\mathrm{vol}_{n^{-1/2}\sqrt{g}} \leq \mathrm{vol}_\varphi \leq \mathrm{vol}_{\sqrt{g}} = \mathrm{vol}_\varphi^e.$$

В силу однородности финслерова объема (лемма 3.4.2(1)), левая часть равна

$$\mathrm{vol}_{n^{-1/2}\sqrt{g}} = n^{-n/2}\,\mathrm{vol}_{\sqrt{g}} = n^{-n/2}\,\mathrm{vol}_\varphi^e,$$

поэтому последнее неравенство эквивалентно требуемому. □

Следствие 3.5.2. *Отношение любых двух функционалов n-мерного финслерова объема ограничено сверху константой $n^{n/2}$.*

Глава 4

Липшицевы метрики

4.1 Метрики и длины

В этом параграфе содержатся необходимые сведения из метрической геометрии. Подробное изложение большинства рассматриваемых вопросов можно найти в книге [6]. Все излагаемое здесь достаточно общеизвестно, но наиболее общие формулировки некоторых фактов трудно найти в литературе, поэтому они приводятся с доказательствами.

Мы понимаем термины "метрическое пространство" и "метрика" в расширенном смысле, а именно, мы допускаем нулевые расстояния между различными точками:

Определение 4.1.1. *Метрикой* на множестве X будем называть функцию вида $d : X \times X \to [0, +\infty)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $d(x, x) = 0$ для всех $x \in X$.
2. Симметричность: $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$.
3. Неравенство треугольника: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ для любых $x, y, z \in X$.

Метрическое пространство — это множество с заданной на нем метрикой.

Если из контекста ясно, о какой метрике d идет речь, мы будем писать $|xy|$ или $|x, y|$ вместо $d(x, y)$.

Стандартные определения и теоремы, относящиеся к метрическим пространствам, без труда обобщаются на случай метрик с нулевыми расстояниями. Метрики, удовлетворяющие условию $d(x, y) > 0$ при $x \neq y$ (то есть метрики в обычном смысле), будем называть *положительными*.

Мы часто будем рассматривать метрики или последовательности метрик, заданные на множестве X с некоторой заранее заданной топологией (например, на гладком многообразии). При этом всегда предполагается, что метрика согласована с этой топологией в следующем смысле:

Определение 4.1.2. Будем говорить, что метрика d на топологическом пространстве X *согласована с топологией*) если топология, определяемая метрикой d, (нестрого) слабее топологии пространства X.

Как легко видеть, согласованность метрики d с топологией пространства X эквивалентна тому, что функция $d : X \times X \to \mathbf{R}$ непрерывна (относительно топологии произведения).

Изометрические отображения

Определение 4.1.3. Пусть X, Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *нерастягивающим*, если оно не увеличивает расстояния, то есть $|f(x)f(y)| \le |xy|$ для любых $x, y \in X$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрическим*, если оно сохраняет расстояния, то есть $|f(x)f(y)| = |xy|$ для любых $x, y \in X$.

Если (Y, d) — метрическое пространство, X — произвольное множество, то любое отображение $f : X \to Y$ определяет метрику d' на X, относительно которой f является изометрическим, а именно, $d'(x, y) = d(f(x), f(y))$ для всех $x, y \in X$. Мы будем называть d' метрикой, *индуцированной из* d *отображением* f и обозначать ее через f^*d.

Отметим, что введенное понятие изометрического отображения отличается от терминов "изометрическое вложение" и "изометрическое погружение", принятых в дифференциальной геометрии, где, как правило, имеется в виду сохранение длин путей, а не расстояний.

Пример 4.1.4 (вложение Куратовского)**.** Любое метрическое пространство (X, d) можно изометрически отобразить в некоторое банахово пространство следующим образом. Рассмотрим пространство $C(X)$ ограниченных непрерывных функций на X со стандартной нормой $\|f\| = \sup_X |f|$ и зафиксируем точку $x_0 \in X$. Изометрическое отображение $F : X \to C(X)$ определяется формулой $F(x)(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$, а в случае ограниченного X можно обойтись более простой формулой $F(x)(y) = d(x, y)$.

Действительно, неравенство $\|F(x) - F(y)\| \le d(x, y)$ следует из неравенства треугольника:

$$|F(x)(z) - F(y)(z)| = |d(x, z) - d(y, z)| \le d(x, y)$$

для любого $z \in X$, а неравенство $\|F(x) - F(y)\| \ge d(x, y)$ следует из тривиального соотношения

$$|F(x)(x) - F(x)(y)| = d(x, y).$$

Это и другие аналогичные вложения играют важную роль в последующих главах, при этом по техническим причинам в качестве области значений удобно рассматривать не $C(X)$, а $L^\infty(X, \mu)$ для подходящей меры μ на X.

Следующее предложение представляет собой конечномерное приближение вышеописанной конструкции.

Предложение 4.1.5. *Пусть* (X, d) *— сепарабельное метрическое пространство. Тогда существует неубывающая последовательность* $\{d_n\}$ *метрик на* X*, сходящаяся к* d *равномерно на компактах и такая, что для каждого* n *пространство* (X, d_n) *допускает изометрическое отображение в* $\mathbf{R}^n_\infty$.

Доказательство. Пусть $P = \{p_n\}_{n=1}^\infty$ — счетное всюду плотное подмножество в X. Для каждого n рассмотрим функцию $f_n : X \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = d(x, p_n)$ и определим отображение $F_n : X \to \mathbf{R}^n_\infty$ формулой

$$F_n(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

Положим $d_n = F_n^* d_\infty$. Тогда F_n — изометрическое отображение пространства (X, d_n) в $\mathbf{R}^n_\infty$. Из построения следует, что $d_{n+1}(x, y) \geq d_n(x, y)$, то есть $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность.

Осталось доказать, что d_n сходятся к d равномерно на компактах. Из неравенства треугольника следует, что функция f_n — нерастягивающая. Следовательно,

$$d_n(x, y) = \sup_{i \leq n} |f_i(x) - f_i(y)| \leq d(x, y).$$

Пусть K — произвольное компактное множество в X, и пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку K компактно, а P всюду плотно, найдется такое целое $n_0 > 0$, что множество $\{p_1, p_2, \dots, p_{n_0}\}$ образует ε-сеть для K. Пусть $x, y \in K$, тогда найдется такой номер $i \leq n_0$, что $d(x, p_i) \leq \varepsilon$. По неравенству треугольника, $d(y, p_i) \geq d(x, y) - d(x, p_i) \geq d(x, y) - \varepsilon$. Значит,

$$f_i(y) - f_i(x) = d(y, p_i) - d(x, p_i) > d(x, y) - 2\varepsilon,$$

откуда $d_n(x, y) = \|F_n(x) - F_n(y)\| \geq d(x, y) - 2\varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Таким образом, $d - 2\varepsilon \leq d_n \leq d$ на K при всех $n \geq n_0$. В силу произвольности ε это означает, что d_n равномерно сходится к d на множестве $K \times K$. □

Замечание 4.1.6. Если пространство (X, d) ограничено, то построенные выше отображения $F_n : X \to \mathbf{R}^n_\infty$ в естественном смысле сходятся к изометрическому отображению $F : X \to \ell_\infty$. В общем случае для того, чтобы обеспечить сходимость, достаточно вычесть из каждой функции f_n константу, равную $d(x_0, p_n)$, где $x_0 \in X$ — некоторая фиксированная точка. Отождествив ℓ_∞ с $\ell_\infty(P)$ и заметив, что пространство $C(X)$ изометрически вкладывается в $\ell_\infty(P)$ оператором сужения, нетрудно убедиться, что предельное отображение F совпадает с отображением Куратовского.

Длины кривых

Определение 4.1.7. *Кривая* (или *путь*) в топологическом пространстве X — это непрерывное отображение вида $\gamma : [a,b] \to X$, где $a \le b$.

Отметим, что если метрика d на X согласована с топологией (в смысле определения 4.1.2), то любая кривая в X непрерывна и относительно метрики d.

Определение 4.1.8. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $\gamma : [a,b] \to X$ — кривая в (X,d). *Пунктиром* кривой γ называется конечная последовательность вида $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)$, где $\{t_i\}_{i=0}^n$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, то есть

$$a = t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n = b.$$

Длиной пунктира $\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$ называется сумма $\sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$. *Длина* $L_d(\gamma)$ кривой γ — это супремум длин всех ее пунктиров. Мы будем опускать индекс d в обозначении L_d, если из контекста ясно, какая метрика d имеется в виду. Кривая γ называется *спрямляемой*, если $L(\gamma) < \infty$.

Стандартные свойства длины (см., например, [6, §2.3]) тривиально обобщаются на случай метрик с нулевыми расстояниями. Нам понадобятся следующие элементарные факты.

Предложение 4.1.9. *Для любой кривой $\gamma : [a,b] \to X$ выполняются следующие свойства.*

1. Аддитивность: $L(\gamma) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma_{[c,b]})$ для любого $c \in [a,b]$.

2. Неравенство треугольника: $L(\gamma) \ge |\gamma(a)\gamma(b)|$.

3. При мелкости разбиения, стремящейся к нулю, длина соответствующего пунктира кривой γ стремится к $L(\gamma)$. Под мелкостью разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[a,b]$ мы понимаем число $\max_i |t_i - t_{i+1}|$. ☐

Предложение 4.1.10. *Пусть γ — кривая в метрическом пространстве (X,d), и пусть $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность метрик на X, поточечно сходящаяся к d (то есть $d_n(x,y) \to d(x,y)$ при $n \to \infty$ для любых $x, y \in X$). Тогда $L_{d_n}(\gamma) \to L_d(\gamma)$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Из неравенства $d_n \le d$ следует, что γ непрерывна относительно d_n и $L_{d_n}(\gamma) \le L_d(\gamma)$. Достаточно доказать, что $\underline{\lim}\, L_{d_n}(\gamma) \ge L_d(\gamma)$. Пусть $[a,b]$ — область определения кривой γ, $\{t_i\}_{i=0}^N$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Складывая неравенства $L_{d_n}(\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}) \ge d_n(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$, получаем неравенство

$$L_{d_n}(\gamma) \ge \sum_{i=0}^{N-1} d_n(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\underline{\lim}\, L_{d_n}(\gamma) \geq \sum_{i=0}^{N-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Переходя к супремуму по всем разбиениям $\{t_i\}$ в правой части, получаем $\underline{\lim}\, L_{d_n}(\gamma) \geq L_d(\gamma)$, что и требовалось. $\square$

Определение 4.1.11. Кривая $\gamma : [a, b] \to X$ в метрическом пространстве называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечного набора $\{(a_i, b_i)\}_i$ непересекающихся интервалов, содержащихся в $[a, b]$ и удовлетворяющих неравенству $\sum_i |a_i - b_i| \leq \delta$, верно, что $\sum_i |\gamma(a_i)\gamma(b_i)| < \varepsilon$.

Легко убедиться, что любая абсолютно непрерывная кривая спрямляема. Липшицевы кривые, очевидно, являются абсолютно непрерывными.

Определение 4.1.12. Пусть $\gamma : [a, b] \to X$ — кривая в метрическом пространстве, $t \in [a, b]$. Определим *верхнюю метрическую скорость* $\overline{s}_\gamma(t)$ кривой γ в точке t равенством

$$\overline{s}_\gamma(t) = \overline{\lim_{t' \to t}} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t - t'|}.$$

Аналогичный нижний предел называется *нижней метрической скоростью* и обозначается $\underline{s}_\gamma(t)$.

Если верхняя и нижняя скорости совпадают, то есть существует предел

$$\lim_{t' \to t} \frac{|\gamma(t)\gamma(t')|}{|t - t'|},$$

то он называется *метрической скоростью* кривой γ в точке t и обозначается через $s_\gamma(t)$.

Предложение 4.1.13. *Если кривая $\gamma : [a, b] \to X$ в метрическом пространстве X абсолютно непрерывна, то метрическая скорость $s_\gamma(t)$ определена и конечна для почти всех $t \in [a, b]$, и при этом*

$$L(\gamma) = \int_a^b s_\gamma(t)\, dt.$$

Доказательство. Определим (неубывающую) функцию $\lambda : [a, b] \to \mathbf{R}$ равенством $\lambda(t) = L(\gamma|_{[a,t]})$. Пусть ε, δ, $\{(a_i, b_i)\}$ — такие, как в определении 4.1.11. Разбивая произвольным образом интервалы (a_i, b_i) и подставляя полученные системы отрезков в то же определение, получаем неравенство $\sum_i L(\gamma|_{[a_i,b_i]}) \leq \varepsilon$. Поскольку $L(\gamma|_{[a_i,b_i]}) = \lambda(b_i) - \lambda(a_i)$, отсюда следует, что функция λ абсолютно непрерывна. Следовательно, она дифференцируема почти всюду на $[a, b]$, и

$$L(\gamma) = \lambda(b) - \lambda(a) = \int_a^b \lambda'(t)\, dt.$$

Поэтому достаточно доказать, что $\underline{s}_\gamma = \overline{s}_\gamma = \lambda'$ почти всюду на $[a,b]$. Из неравенства $L(\gamma|_{[t,t']}) \ge |\gamma(t)\gamma(t')|$ следует, что $\lambda' \ge \overline{s}_\gamma$ всюду, где определена λ'. Поэтому достаточно доказать, что $\underline{s}_\gamma \ge \lambda'$ почти всюду на $[a,b]$.

Предположим, что это не так. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и такое борелевское множество $T \subset [a,b]$ положительной меры, что $\underline{s}_\gamma(t) < \lambda'(t) - \varepsilon$ для всех $t \in T$. В силу регулярности меры Лебега, T содержит замкнутое подмножество положительной меры, поэтому можно считать, что само T замкнуто. Выберем такое $\delta > 0$, что для любого разбиения отрезка $[a,b]$ мелкости не больше δ длина соответствующего пунктира кривой γ отличается от $L(\gamma)$ менее, чем на $\frac{1}{3}\varepsilon \cdot m(T)$, где m — мера Лебега на $[a,b]$. Для каждого $t \in T$ выберем такое $t_1 = t_1(t) \in [a,b]$, что $|t_1 - t| < \delta$ и

$$\frac{|\gamma(t)\gamma(t_1)|}{|t-t_1|} < \frac{|\lambda(t) - \lambda(t_1)|}{|t-t_1|} - \varepsilon$$

(такое t_1 найдется в силу условия $\underline{s}_\gamma(t) \le \lambda'(t) - \varepsilon$). Затем увеличим отрезок $[t,t_1]$ (или $[t_1,t]$) до открытого интервала $(a(t),b(t))$, где $a(t)$ и $b(t)$ настолько близки к t и t_1, что предыдущие неравенства сохраняют силу для $a(t)$ и $b(t)$, то есть $|a(t) - b(t)| < \delta$ и

$$\frac{|\gamma(a(t)),\gamma(b(t))|}{|a(t)-b(t)|} < \frac{|\lambda(a(t)) - \lambda(b(t))|}{|a(t)-b(t)|} - \varepsilon. \tag{4.1.1}$$

Интервалы вида $(a(t),b(t))$ образуют открытое покрытие множества T; выберем из него минимальное конечное подпокрытие $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^N$. Перенумеруем интервалы (a_i,b_i) так, что $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_N$. Тогда из минимальности покрытия следует, что $(a_i,b_i)\cap(a_j,b_j) = \emptyset$ при $|i-j| > 1$, в частности, интервалы с четными номерами не пересекаются. Можно считать, что они покрывают не менее половины меры множества T (в противном случае возьмем вместо них нечетные номера). Из (4.1.1) имеем

$$\frac{|\gamma(a_{2i}),\gamma(b_{2i})|}{|a_{2i}-b_{2i}|} < \frac{|\lambda(a_{2i}) - \lambda(b_{2i})|}{|a_{2i}-b_{2i}|} - \varepsilon = \frac{L(\gamma|_{[a_{2i},b_{2i}]})}{|a_{2i}-b_{2i}|} - \varepsilon,$$

откуда

$$\sum_i \left(L(\gamma|_{[a_{2i},b_{2i}]}) - |\gamma(a_{2i}),\gamma(b_{2i})|\right) > \varepsilon \cdot \sum_i |a_{2i}-b_{2i}| \ge \frac{1}{2}\varepsilon \cdot m(T).$$

Включим систему отрезков $\{[a_{2i},b_{2i}]\}$ в разбиение $\{t_j\}$ отрезка $[a,b]$ мелкости меньше δ. Тогда

$$\begin{aligned} L(\gamma) - \sum_j |\gamma(t_j),\gamma(t_{j+1})| &= \sum_j \left(L(\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}) - |\gamma(t_j),\gamma(t_{j+1})|\right) \\ &\ge \sum_i \left(L(\gamma|_{[a_{2i},b_{2i}]}) - |\gamma(a_{2i}),\gamma(b_{2i})|\right) > \frac{1}{2}\varepsilon \cdot m(T), \end{aligned}$$

(Здесь первое неравенство получено выкидыванием из суммы тех слагаемых, для которых отрезок $[t_j,t_{j+1}]$ не совпадает ни с одним из отрезков $[a_{2i},b_{2i}]$.) Но по выбору δ левая часть не превосходит $\frac{1}{3}\varepsilon \cdot m(T)$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

4.2 Касательная финслерова структура

В этом параграфе мы строим аналог касательного конуса для произвольной липшицевой метрики на многообразии. Построение аналогично изложенному в [51], но отличается некоторыми деталями и применимо к более широкому классу метрик.

Далее M обозначает гладкое многообразие (возможно, с краем), d_{riem} — произвольно выбранная вспомогательная риманова метрика на M.

Определение 4.2.1. Будем называть метрику d на M *липшицевой*, если она локально липшицева относительно d_{riem}, то есть для любой точки $x \in M$ существуют такая окрестность $U \ni x$ и такое $C > 0$, что

$$d(y, z) \leq C \cdot d_{riem}(y, z)$$

для любых $y, z \in U$.

Ясно, что это определение не зависит от выбора вспомогательной римановой метрики d_{riem}.

Определение 4.2.2. *Слабой финслеровой структурой* на гладком многообразии M будем называть любую борелевскую функцию $\varphi : TM \to \mathbf{R}$, обладающую следующими свойствами:

1. Неотрицательность: $\varphi(v) \geq 0$ для всех $v \in TM$.
2. Симметричность и положительная однородность: $\varphi(\lambda v) = |\lambda|\varphi(v)$ для всех $v \in TM$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
3. Локальная ограниченность: $\sup(\varphi|_K) < \infty$ для любого компакта $K \subset TM$.

Определение 4.2.3. Пусть d — липшицева метрика на M. Для каждого $v \in TM$ определим число $\varphi_d(v)$ равенством

$$\varphi_d(v) = \overline{s}_\gamma(0),$$

где γ — произвольная дифференцируемая в нуле кривая вида $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, такая, что $\dot{\gamma}(0) = v$. Здесь $\overline{s}$ обозначает верхнюю метрическую скорость относительно d, см. определение 4.1.12.

Определенную таким образом функцию $\varphi_d : TM \to \mathbf{R}$ будем называть *касательной финслеровой структурой* метрики d.

Корректность определения обеспечивается следующей леммой.

Лемма 4.2.4. *Пусть d — липшицева метрика на M, γ_1 и γ_2 — две дифференцируемые в нуле кривые, такие, что $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Тогда $\overline{s}_{\gamma_1}(0) = \overline{s}_{\gamma_2}(0)$ и $\underline{s}_{\gamma_1}(0) = \underline{s}_{\gamma_2}(0)$, где $\overline{s}$ и $\underline{s}$ — верхняя и нижняя метрической скорость относительно d.*

Доказательство. Из определения метрической скорости и неравенства треугольника следует, что
$$|\overline{s}_{\gamma_1}(0) - \overline{s}_{\gamma_2}(0)| \le \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{d(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}{|t|}.$$
Поскольку метрика d липшишева и $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$, для некоторой константы C имеем
$$d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \le C \cdot d_{riem}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = o(|t|), \quad t \to 0.$$
Значит, правая часть предыдущего неравенства равна нулю. Доказательство для нижней скорости аналогично. □

Замечание 4.2.5. Функция φ_d из определения 4.2.3, в отличие от аналогичного определения из [51], симметрична всюду на TM, так как используемое понятие метрической скорости (определение 4.1.12) симметрично относительно замен параметра вида $t \mapsto -t$.

Определение 4.2.6. Будем называть кривую $\gamma : [a, b] \to M$ *липшицевой*, если она липшицева относительно d_{riem}, то есть существует такое $C > 0$, что
$$d_{riem}(\gamma(t), \gamma(t')) \le C \cdot |t - t'|$$
для любых $t, t' \in [a, b]$.

По теореме Радемахера, липшицева кривая дифференцируема почти всюду на своей области определения. Пусть φ — слабая финслерова структура на M. *Длина* $L_\varphi(\gamma)$ липшицевой кривой γ относительно φ определяется равенством
$$L_\varphi(\gamma) = \int_a^b \varphi(\dot\gamma(t))\, dt.$$

Замечание 4.2.7. Если d — липшицева метрика, γ — липшицева кривая, то γ липшицева (и, как следствие, абсолютно непрерывна) относительно метрики d.

Предложение 4.2.8. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Тогда*

1. φ является слабой финслеровой структурой в смысле определения 4.2.2.

2. Для всех $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_xM}$ липшицево.

3. Для любой липшицевой кривой γ имеет место равенство $L_d(\gamma) = L_\varphi(\gamma)$, где L_d — длина относительно метрики d (определение 4.1.8), L_φ — длина относительно φ (определение 4.2.6).

4. Пусть X — нормированное пространство, $f : (M, d) \to X$ — изометрическое отображение, дифференцируемое в точке $p \in M$. Тогда $\varphi|_{T_pM}$ совпадает с полунормой, индуцированной из $\|\cdot\|_X$ отображением d_pf, то есть
$$\varphi(v) = \|d_pf(v)\|_X$$
для всех $v \in T_pM$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 тривиально следуют из определений и липшицевости метрики. Утверждение 3 является переформулировкой предложения 4.1.13.

Докажем утверждение 4. Пусть $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ — дифференцируемая в нуле кривая, $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$. Тогда

$$\varphi(v) = \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{d(\gamma(t), p)}{t} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\|f(\gamma(t)) - f(p)\|_X}{t} = \|(f\circ\gamma)'(0)\|_X = \|d_p f(v)\|_X.$$

Здесь первое равенство следует из определения φ, второе — из изометричности отображения f, последнее — из дифференцируемости f в точке p. □

Определение 4.2.9. Будем говорить, что функции $\varphi_1, \varphi_2 : TM \to \mathbf{R}$ совпадают *почти всюду на кривых*, если для любой липшицевой кривой $\gamma : [a,b] \to M$ для почти всех $t \in [a,b]$ выполняется равенство $\varphi_1(\dot\gamma(t)) = \varphi_2(\dot\gamma(t))$.

Ясно, что из совпадения функций почти всюду на кривых следует из совпадение почти всюду на TM.

Предложение 4.2.10. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность метрик на M, поточечно сходящаяся к d. Тогда*

$$\varphi_d = \lim_{n\to\infty} \varphi_{d_n}$$

почти всюду на кривых.

Доказательство. Очевидно, что касательная финслерова структура монотонно зависит от метрики, поэтому $\{\varphi_{d_n}\}$ — неубывающая последовательность, ограниченная сверху функцией φ_d. Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — липшицева кривая. Из предложения 4.1.10 следует, что $L_{d_n}(\gamma) \to L_d(\gamma)$ при $n \to \infty$. Отсюда по предложению 4.2.8(3) следует, что

$$\int_a^b \varphi_d(\dot\gamma(t))\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_{d_n}(\dot\gamma(t))\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} \varphi_{d_n}(\dot\gamma(t))\,dt$$

(второе равенство выполняется по теореме Леви в силу монотонности последовательности $\{\varphi_{d_n}\}$). Поскольку $\lim_{n\to\infty} \varphi_{d_n} \le \varphi_d$, отсюда следует, что подынтегральные выражения равны при почти всех t. □

Следующее предложение оправдывает использование термина “финслерова структура” для функций φ_d.

Предложение 4.2.11. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Тогда для почти всех $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_xM}$ является полунормой.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае, когда метрика d допускает изометрическое отображение в конечномерное банахово пространство X. Пусть $f : (M, d) \to X$ — изометрическое отображение, тогда оно липшицево относительно вспомогательной римановой метрики на M, следовательно (по теореме Радемахера) f дифференцируемо почти всюду на M. Для каждой точки $p \in M$, в которой f дифференцируемо, по предложению 4.2.8(4) имеем $\varphi(v) = \|d_x f(v)\|_X$ для всех $v \in T_p M$. Значит, $\varphi|_{T_p M}$ — полунорма.

В общем случае по предложению 4.1.5 существует неубывающая последовательность $\{d_n\}$ метрик, допускающих изометрические вложения в конечномерные банаховы пространства, сходящаяся к d. Применяя доказанное выше к метрикам d_n, получаем, что соответствующие функции $\varphi_n = \varphi_{d_n}$ являются полунормами на почти всех слоях $T_x M$, $x \in M$. По предложению 4.2.10, $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ почти всюду на TM. Таким образом, для почти всех $x \in M$ сужение $\varphi|_{T_x M}$ почти всюду (на $T_x M$) совпадает с пределом последовательности полунорм. В силу непрерывности (предложение 4.2.8(2)) это означает, что $\varphi|_{T_x M}$ само является полунормой. □

Замечание 4.2.12. Вообще говоря, неверно, что $\varphi|_{T_x M}$ является полунормой для всех $x \in M$. Например, нетрудно построить липшицеву метрику d на $\mathbf{R}^2$, такую, что $d((0,0),(0,x)) = d((0,0),(x,0)) = |x|$ и $d((0,0),(x,x)) = 10|x|$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Тогда в $T_0\mathbf{R}^2$ для базисных касательных векторов e_1 и e_2 выполняются соотношения $\varphi_d(e_1) = \varphi_d(e_2) = 1$, $\varphi_d(e_1 + e_2) \geq 10$, значит, сужение φ_d на $T_0\mathbf{R}^2$ не удовлетворяет неравенству треугольника.

Следующее предложение показывает, что касательная финслерова структура, по существу, не меняется при переходе к внутренней метрике на M.

Предложение 4.2.13. *Пусть d — липшицева метрика на M. Определим метрику $\tilde{d}$ на M равенством*

$$\tilde{d}(x,y) = \inf\{L_d(\gamma) : \ \gamma \text{ — липшицева кривая, соединяющая } x \text{ и } y\}.$$

Тогда касательные финслеровы структуры метрик d и $\tilde{d}$ совпадают почти всюду на кривых.

Доказательство. Обозначим $\varphi = \varphi_d$, $\tilde{\varphi} = \varphi_{\tilde{d}}$. Очевидно, что $\tilde{d} \geq d$, откуда $\tilde{\varphi} \geq \varphi$. Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — липшицева кривая. Тогда $L_{\tilde{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$. Действительно, из неравенства $\tilde{d} \geq d$ следует, что $L_{\tilde{d}}(\gamma) \geq L_d(\gamma)$. Чтобы доказать обратное, достаточно проверить, что для любого разбиения $\{t_i\}$ отрезка $[a,b]$ верно неравенство

$$\sum \tilde{d}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq L(\gamma).$$

Заметим, что

$$\tilde{d}(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \leq L_d(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}),$$

так как $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ входит в множество кривых, по которым берется инфимум в определении $\tilde{d}$ в левой части. Складывая эти неравенства по всем i, получаем требуемое.

Таким образом, $L_{\tilde{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$, откуда по предложению 4.2.8(3) $L_{\tilde{\varphi}}(\gamma) = L_\varphi(\gamma)$. В силу неравенства $\tilde{\varphi} \geq \varphi$ отсюда следует, что $\tilde{\varphi}(\dot{\gamma}(t)) = \varphi(\gamma(t))$ для почти всех $t \in [a,b]$. $\square$

Замечание 4.2.14. Метрика $\tilde{d}$ из предложения 4.2.13 является внутренней как частный случай метрики, определяемой функционалом длины (см. [6, гл. 2]). Другой способ построения внутренней метрики состоит в следующем: для $x, y \in M$ положим $d'(x,y)$ равным инфимуму длин всех непрерывных (не только липшицевых) кривых, соединяющих x и y. Касательная финслерова структура метрики d' тоже совпадает с φ_d почти всюду на кривых; это следует из очевидных неравенств $d \leq d' \leq \tilde{d}$.

Если метрика d билипшицево эквивалентна римановой, то метрики $\tilde{d}$ и d' совпадают, так как любая спрямляемая кривая допускает липшицеву параметризацию.

4.3 Объем липшицевой метрики

Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ (см. определение 3.4.1).

Определение 4.3.1. Пусть d — липшицева метрика на n-мерном гладком многообразии M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Рассмотрим плотность $\nu = \nu_d$ на M, значение которой на n-векторе $\sigma \in \Lambda^n T_x M$ равно $\mathrm{vol}_{\varphi|_{T_xM}}(\sigma)$, если $\varphi|_{T_xM}$ — норма, и 0 в противном случае. Меру $\mathrm{vol}_d = \int \nu_d$ будем называть *объемом* липшицевой метрики d.

Предложение 4.3.2. *Мера* vol_d *из определения 4.3.1 корректно определена и обладает следующими свойствами.*

1. Однородность: $\mathrm{vol}_{\lambda d} = \lambda^n \mathrm{vol}_d$ *для любой липшицевой метрики* d *и любого* $\lambda > 0$.

2. Если (M,d) *и* (M',d') *— многообразия с липшицевыми метриками,* $f : (M,d) \to (M',d')$ *— нерастягивающее отображение, то* $\mathrm{vol}_{d'}(f(A)) \leq \mathrm{vol}_d(A)$ *для любого измеримого* $A \subset M$.

В частности, если $M' = M$ *и* $d' \leq d$, *то* $\mathrm{vol}_{d'} \leq \mathrm{vol}_d$.

3. Если $\{d_i\}$ *— неубывающая последовательность метрик на* M, *поточечно сходящаяся к липшицевой метрике* d, *то* $\mathrm{vol}_{d_i}(A) \to \mathrm{vol}(A)$ *для любого измеримого* $A \subset M$.

Доказательство. Для проверки корректности определения необходимо доказать, что плотность ν_d в определении 4.3.1 измерима. Это следует из измеримости функции $\varphi_d : TM \to \mathbf{R}$ и непрерывной зависимости объема от полунормы (лемма 3.4.2(2)).

Свойство однородности следует из соответствующего свойства банахова объема (лемма 3.4.2(1)).

Для доказательства второго утверждения достаточно проверить, что в любой точке $x \in M$, где отображение f дифференцируемо, его якобиан не превосходит 1, где под якобианом понимается отношение плотностей

$$\frac{(d_x f)_* \nu_d(x)}{\nu_{d'}(f(x))}.$$

Это следует из сохранения объема при линейных изометриях и монотонной зависимости объема от полунормы.

Третье утверждение следует из сходимости почти всюду касательных финслеровых структур (предложение 4.2.10) и непрерывной зависимости плотности объема от полунормы (лемма 3.4.2(2)). $\square$

Предложение 4.3.3. *Пусть d — липшицева метрика на n-мерном многообразии M, $\tilde{d}$ — внутренняя метрика, определяемая функционалом длины L_d на классе липшицевых кривых в M, d' — то же для класса всех непрерывных кривых. Тогда* $\mathrm{vol}_d = \mathrm{vol}_{\tilde{d}} = \mathrm{vol}_{d'}$.

Доказательство. По предложению 4.2.13 и замечанию 4.2.14, касательные финслеровы структуры метрик d, $\tilde{d}$ и d' совпадают почти всюду, откуда следует совпадение объемов. $\square$

Определение 4.3.4. Пусть M — гладкое многообразие, X — метрическое пространство, $f : M \to X$ — (локально) липшицево отображение. Будем называть *площадью* отображения (поверхности) f величину $\mathrm{area}(f) = \mathrm{vol}_{f^* d_X}(M)$, где $f^* d_X$ — индуцированная метрика на M, то есть $f^* d_X(x, y) = d_X(f(x), f(y))$ для $x, y \in M$.

Пусть X — конечномерное нормированное пространство. Функционал объема порождает n-плотность $\theta : \Lambda^n_s X \to \mathbf{R}$, определяемую равенством

$$\theta(\sigma) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_\sigma}, \qquad \sigma \in \Lambda^n_s X,$$

где $\|\cdot\|_\sigma$ — сужение нормы пространства X на n-мерное подпространство, ассоциированное с простым n-вектором σ. Будем называть θ *плотностью n-мерной площади* (порожденной данным функционалом объема).

Следующее предложение показывает, что определение 4.3.4 согласовано с определение θ-площади поверхности из §1.1. В §4.5 этот факт будет обобщен на поверхности в бесконечномерных пространствах (см. следствие 4.5.3).

Предложение 4.3.5. *Пусть X — конечномерное нормированное пространство, $f : M \to X$ — липшицева поверхность. Тогда*

$$\mathrm{area}(f) = A_\theta(f),$$

где θ — плотность n-мерной площади, см. выше.

Доказательство. Следует из определений и предложения 4.2.8(4). $\square$

4.4 Слабая дифференцируемость

Классическая теорема Радемахера (см. [15, теорема 3.1.6]) утверждает, что любое липшицево отображение $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ дифференцируемо почти всюду. Эта теорема верна и для функций со значениями в рефлексивных банаховых пространствах и, более общо, в банаховых пространствах, обладающих свойством Радона–Никодима, см. [29, гл. 5].

Однако, для пространств типа L^∞ (которые выступают в качестве области значений для вложений Куратовского) аналогичное утверждение неверно. Например, рассмотрим отображение $f : [0,1] \to L^\infty[0,1]$, заданное равенством $f(x)(y) = |x - y|$. Нетрудно проверить, что f липшицево с константой 1, но нигде не дифференцируемо.

Чтобы обойти эту трудность, мы введем понятие слабой дифференцируемости для отображений со значениями в банаховых пространствах, сопряженных к сепарабельным, и покажем, что липшицевы отображения почти всюду слабо дифференцируемы и их слабые дифференциалы естественно связаны с касательными финслеровыми структурами индуцированных метрик.

Далее M обозначает гладкое многообразие, снабженное вспомогательной римановой метрикой d_{riem}, X — банахово пространство, X^* — сопряженное пространство (непрерывных линейных функционалов $X \to \mathbf{R}$). В приложениях, как правило, мы будем полагать $X = L^1(\mu)$, $X^* = L^\infty(\mu)$, где μ — некоторая конечная мера.

Определение 4.4.1. Пусть $f : M \to X^*$ — произвольное отображение. Для каждого $u \in X$ рассмотрим функцию $f_u : M \to \mathbf{R}$, заданную равенством

$$f_u(x) = \langle f(x), u \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ обозначает стандартное спаривание X^* и X. Будем говорить, что f *слабо дифференцируема* в точке $p \in M$, если существует такое линейное отображение $L : T_pM \to X^*$, что для любого $u \in X$ функция f_u дифференцируема в точке p и ее дифференциал удовлетворяет равенству

$$d_p f_u(v) = \langle L(v), u \rangle \qquad \text{для всех } v \in T_pM.$$

Отображение L будем называть *слабым дифференциалом* f в точке p и обозначать через $d_p^w f$.

Предложение 4.4.2. *Пусть отображение $f : M \to X^*$ липшицево (относительно метрики d_{riem}), $p \in M$. Тогда слабая дифференцируемость f в точке p эквивалентна тому что для каждого $u \in X$ функция f_u из определения 4.4.1 дифференцируема в p.*

Доказательство. Пусть C — константа Липшица для f. Тогда для любых $x, y \in M$ выполняется неравенство $\|f(x) - f(y)\|_{X^*} \leq C \cdot d_{riem}(x, y)$. Тогда для любого $u \in X$

$$|f_u(x) - f_u(y)| = |\langle f(x) - f(y), u\rangle| \leq C \cdot \|u\|_X \cdot d_{riem}(x, y),$$

то есть функция f_u липшицева с константой Липшица $C\|u\|_X$.

Предположим, что f_u дифференцируема в p для всех $u \in X$. Зафиксируем вектор $v \in T_pM$. Из липшицевости функции f_u следует оценка на ее производную: $d_pf_u(v) \leq C\|u\|_X|v|$. Заметим, что функция $u \mapsto d_pf_u(v)$ линейна и, в силу вышеуказанной оценки, непрерывна. Следовательно, она представляет элемент $L(v)$ пространства X^*, такой, что

$$d_pf_u(v) = \langle L(v), u\rangle \quad \text{для всех } u \in X.$$

Таким образом, построено отображение $L : T_pM \to X^*$. Оно, очевидно, линейно, следовательно, является слабым дифференциалом f в точке p. $\square$

Теорема 4.4.3. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Тогда любое липшицево отображение $f : M \to X^*$ слабо дифференцируемо почти всюду на M.*

Доказательство. Поскольку доказываемое утверждение локально, можно считать, что M — область в $\mathbf{R}^n$ и d_{riem} — стандартная евклидова метрика. Пусть U — счетное всюду плотное подмножество в X. Для каждого $u \in U$ функция f_u из определения 4.4.1 липшицева, следовательно, дифференцируема почти всюду. Значит, для почти любой точки $p \in M$ верно, что для всех $u \in U$ функция f_u дифференцируема в p. Докажем, что для каждой такой точки p отображение f слабо дифференцируемо в p.

Пусть C — константа Липшица для f. Тогда для любого $u \in X$ функция f_u из определения 4.4.1 липшицева с константой $C\|u\|_X$. Зафиксируем $u \in X$ и последовательность $\{u_i\} \subset U$, сходящуюся к u. По предположению, каждая функция f_{u_i} дифференцируема в точке p, обозначим ее дифференциал $d_pf_{u_i}$ через L_i ($L_i : T_pM \to \mathbf{R}$). Для любых i и j функция $f_{u_i} - f_{u_j} = f_{u_i - u_j}$ липшицева с константой $C\|u_i - u_j\|_X$, откуда $\|L_i - L_j\| \leq C\|u_i - u_j\| \to 0$ при $i, j \to \infty$. Следовательно, последовательность $\{L_i\}$ сходится к некоторой линейной функции $L : T_pM \to M$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и зафиксируем такое i, что $\|u - u_i\|_X < \varepsilon$, тогда $\|L - L_i\| \leq C\varepsilon$. Поскольку $L_i = d_pf_{u_i}$, найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f_{u_i}(q) - f_{u_i}(p) - L_i(q - p)| < \varepsilon|q - p| \tag{4.4.1}$$

для всех $q \in M \subset \mathbf{R}^n$, таких, что $|q - p| < \delta$. Из липшицевости f имеем $\|f(q) - f(p)\|_{X^*} \leq C \cdot |q - p|$, откуда

$$\begin{aligned} &|(f_u(q) - f_u(p)) - (f_{u_i}(q) - f_{u_i}(q))| \\ &\qquad = |\langle f(q) - f(p), u - u_i\rangle| \leq C \cdot |q - p| \cdot \|u - u_i\|_X \leq C\varepsilon|q - p|. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

Из неравенства $\|L - L_i\| \le C\varepsilon$ имеем

$$|L(q-p) - L_i(q-p)| \le C|q-p|. \tag{4.4.3}$$

Складывая (4.4.1), (4.4.2) и (4.4.3), получаем

$$|f_u(q) - f_u(p) - L(q-p)| < (2C+1)\varepsilon|q-p|$$

при $|q-p| < \delta$. В силу произвольности ε это означает, что функция f_u дифференцируема в точке p и $d_p f_u = L$. Поскольку u — произвольный элемент пространства X, из предложения 4.4.2 следует, что f слабо дифференцируемо в точке p, что и требовалось. $\square$

4.5 Слабый дифференциал и метрика

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим липшицево отображение $f : M \to X^*$, где M — гладкое многообразие, X — сепарабельное банахово пространство. Это отображение индуцирует метрику $d = f^* d_{X^*}$ на M, относительно которой отображение является изометрическим (то есть $d(x,y) = \|f(x) - f(y)\|_{X^*}$).

Если f дифференцируемо в точке p в обычном смысле, то ее дифференциал индуцирует полунорму $\|\cdot\|_p$ на T_pM равенством $\|v\|_p = \|d_p f(v)\|_{X^*}$. По предложению 4.2.8, эта полунорма совпадает с касательной финслеровой структурой метрики d в точке p.

Для слабого дифференциала аналогичное равенство, вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим для $M = [-1,1]$ и $X = L^1[0,1]$ отображение $f : [-1,1] \to X^* = L^\infty[0,1]$, заданное равенствами

$$f(x)(t) = \begin{cases} x \cdot \max\{1 - t/|x|, 0\}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что отображение f сохраняет расстояния и слабо дифференцируемо в нуле, однако $d_0^w f = 0$.

Тем не менее, следующая теорема показывает, что совпадение касательной финслеровой структуры и полунормы, индуцированной слабым дифференциалом, имеет место почти всюду на M.

Теорема 4.5.1. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура, X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — изометрическое отображение пространства (M, d). Тогда для почти всех точек $p \in M$ слабый дифференциал $d_p^w f$ является изометрическим отображением из $(T_pM, \varphi|_{T_pM})$ в X^*, то есть*

$$\varphi_d(v) = \|d_p^w f(v)\|$$

для всех $v \in T_pM$.

Доказательство. Выберем счетное множество $U = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, плотное в единичной сфере пространства X. Для каждого $\xi \in X^*$ имеем

$$\|\xi\|_{X^*} = \sup\{|\langle \xi, u\rangle| : u \in X, \|u\|_X = 1\} = \sup_i |\langle \xi, u_i\rangle|,$$

где первое равенство следует из определения нормы $\|\cdot\|_{X^*}$, а второе — из плотности множества $\{u_i\}$ в единичной сфере пространства X.

Для каждого натурального n рассмотрим отображение $P_n : X^* \to \mathbf{R}^n_\infty$, заданное равенством

$$P_n(\xi) = (\langle \xi, u_1\rangle, \langle \xi, u_2\rangle, \dots, \langle \xi, u_n\rangle),$$

и определим полунорму $\|\cdot\|_n$ на X^* равенством $\|\xi\|_n = \|P_n(\xi)\|_\infty$. Для каждого фиксированного $\xi \in X^*$ имеем

$$\|\xi\|_n = \max_{1\le i\le n} |\langle \xi, u_i\rangle|,$$

следовательно, последовательность $\{\|\xi\|_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая и сходится к $\|\xi\|_{X^*}$.

Для каждого натурального n определим липшицеву метрику d_n на M равенством $d_n(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_n$. Тогда $\{d_n\}$ — неубывающая последовательность метрик, поточечно сходящаяся к d. Пусть φ_n — касательная финслерова структура метрики d_n, тогда по предложению 4.2.10 $\varphi_n|_{T_pM}$ сходится к $\varphi|_{T_pM}$ для почти всех $p \in M$.

Пусть точка $p \in M$ такова, что $\varphi_n|_{T_pM}$ сходится к $\varphi|_{T_pM}$ и при этом f слабо дифференцируемо в p. Тогда для всех n отображение $P_n \circ f : M \to \mathbf{R}^n_\infty$ дифференцируемо в p и $d_p(P_n \circ f) = P_n \circ d^w_p f$, так как координатные функции отображения $P_n \circ f$ — это функции f_{u_i} из определения слабой дифференцируемости, $1 \le i \le n$. Заметим, что отображение $P_n \circ f$ является изометрическим отображением пространства (M, d_n) в $\mathbf{R}^n_\infty$. Следовательно, по предложению 4.2.8(4) $\varphi_n|_{T_pM}$ совпадает с полунормой, индуцированной из нормы $\|\cdot\|_\infty$ отображением $d_p(P_n \circ f)$, или, что то же самое, с полунормой, индуцированной из полунормы $\|\cdot\|_n$ на X^* отображением $d^w_p f$. Значит, для любого $v \in T_pM$

$$\varphi(v) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(v) = \lim_{n\to\infty} \|d^w_p f(v)\|_n = \|d^w_p f(v)\|_{X^*},$$

что и требовалось. □

Следствие 4.5.2. *Пусть d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура, X — сепарабельное банахово пространство, $f : M \to X^*$ — нерастягивающее отображение пространства (M, d). Тогда для почти всех точек $p \in M$ слабый дифференциал $d^w_p f$ является нерастягивающим отображением из $(T_pM, \varphi|_{T_pM})$ в X^*, то есть*

$$\|d^w_p f(v)\| \le \varphi_d(v)$$

для всех $v \in T_pM$.

Доказательство. Рассмотрим на M метрику $d' = f^* d_{X^*}$. Применяя теорему 4.5.1 к метрике d', получаем, что левая часть доказываемого неравенства равна $\varphi_{d'}(v)$, где $\varphi_{d'}$ — касательная финслерова структура метрики φ. Поскольку f нерастягивающее, имеем $d' \le d$, откуда $\varphi_{d'} \le \varphi_d$. $\square$

Из теоремы немедленно следует, что "внутреннее" определение площади поверхности (определение 4.3.4 и "внешнее" определение через слабый дифференциал (аналогично §1.1) согласованы. А именно, верно следующее

Следствие 4.5.3. *Пусть зафиксирован функционал n-мерного финслерова объема $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$. Пусть X — банахово пространство, сопряженное сепарабельному. Определим n-плотность $\theta : \Lambda^n_s X \to \mathbf{R}$ в X равенством*

$$\theta(\sigma) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_\sigma}(\sigma),$$

для ненулевых $\sigma \in \Lambda^n_s X$, где $\|\cdot\|_\sigma$ — сужение нормы $\|\cdot\|_X$ на n-мерное подпространство, ассоциированное σ. Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, $f : M \to X$ — липшицево отображение. Тогда

$$\mathrm{area}(f) = \int_M \theta \circ (d^w f)_*,$$

где звездочка обозначает отображение $\Lambda^n TM \to \Lambda^n_s X$, индуцированное послойно линейным отображением $d^w f : TM \to X$, area *— площадь поверхности, определяемая данным функционалом объема (см. определение 4.3.4).*

4.6 Поверхности в L^∞

Пусть S — произвольное пространство с мерой. В этом параграфе мы рассмотрим липшицевы поверхности в пространстве $L^\infty(S)$. Такие поверхности удобно задавать семействами "координатных функций", как описано в следующем определении.

Определение 4.6.1. Пусть M — произвольное множество, $F : M \to L^\infty(S)$ — произвольное отображение. Будем называть семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ функций вида $F_s : M \to \mathbf{R}$ *семейством координатных функций* отображения F, если для любого $x \in M$ значение $F(x)$ и функция $s \mapsto F_s(x)$ совпадают как элементы пространства $L^\infty(S)$, то есть $F(x)(s) = F_s(x)$ для почти всех $s \in S$.

Отметим, что семейство $\{F_s\}$, определяющее данное отображение F, не единственно и может быть определено лишь для почти всех s.

Пусть M — метрическое пространство. Если $F : M \to L^\infty(S)$ задано семейством $\{F_s\}$ координатных функций и каждая функция F_s липшицева с константой C, то F тоже липшицево с константой C. Это немедленно следует из определения расстояния в $L^\infty(S)$. Обратное утверждение несколько сложнее, так как точки пространства $L^\infty(S)$ — функции, "определенные почти всюду", отдельные значения которых не имеют смысла.

Предложение 4.6.2. *Пусть M — сепарабельное метрическое пространство, и пусть $F : M \to L^\infty(S)$ — липшицево отображение. Тогда*

1. F может быть представлено семейством $\{F_s\}_{s\in S}$ координатных функций так, что каждая функция $F_s : M \to \mathbf{R}$ липшицева с той же константой, что и F.

2. Если $\{F_s\}$ и $\{F'_s\}$ — два семейства липшицевых координатных функций для F, то для почти всех $s \in S$ верно, что $F_s = F'_s$ всюду на M.

Доказательство. Пусть X — счетное всюду плотное множество в M.

1. Для каждой точки $x \in X$ выберем функцию $f_x : S \to \mathbf{R}$ представляющую элемент $F(x) \in L^\infty(S)$. Тогда для любых $x, y \in X$,

$$|f_x(s) - f_y(s)| \le C|xy| \quad \text{для почти всех } s \in S,$$

где C — константа Липшица для F и $|xy|$ — расстояние в M. Поскольку X счетно, можно переопределить $f_x(s)$ нулем в случае, если это неравенство не выполняется для хотя бы одного $y \in X$. Теперь $|f_x(s) - f_y(s)| \le C|xy|$ для всех $x, y \in X$ и $s \in S$, и мы получаем семейство липшицевых функций $F_s : X \to M$. Каждая функция F_s имеет единственное липшицево продолжение на все M, которое мы тоже обозначим через F_s. Проверим, что для каждой точки $z \in M$ функция $s \mapsto F_s(z)$ представляет $F(z)$ в $L^\infty(S)$. Действительно, пусть $f_z : S \to \mathbf{R}$ представляет $F(z)$, тогда по липшицевости отображения F для почти всех $s \in S$ неравенство $|f_z(s) - f_x(s)| \le C|zx|$ для всех $x \in X$ С другой стороны, по построению имеем

$$|F_s(z) - f_x(s)| = |F_s(z) - F_s(x)| \le C|zx|$$

для всех $x \in X$. Поскольку X всюду плотно, отсюда следует, что $F_s(z) = f_z(s)$, что и требовалось.

2. Для каждой точки $x \in X$ имеем $F_s(x) = F'_s(x)$ для почти всех $s \in S$. Отсюда в силу счетности множества X следует, что для почти всех $s \in S$, соотношение $F_s(x) = F'_s(x)$ выполняется для всех $x \in X$ и, следовательно, для всех $x \in M$ в силу непрерывности функций F_s и F'_s. $\square$

Далее, говоря о координатных функциях липшицева отображения со значениями в $L^\infty(S)$, мы всегда будем подразумевать, что эти функции липшицевы.

Замечание 4.6.3. Если $\{F_s\}$ — липшицевы координатные функции, то функция $(x, s) \mapsto F_s(x)$ измерима на $M \times S$ (относительно произведения борелевской σ-алгебры на M и области определения меры на S). Действительно, для любого $t \in \mathbf{R}$ множество

$$M_t = \{(x, s) \in M \times S : F_s(x) \geq t\}$$

можно представить в виде пересечения счетного набора измеримых множеств

$$M_t = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbf{Q}_+} \bigcup_{y \in X} B_\varepsilon(y) \times \{s \in S : F_s(y) \geq t - C\varepsilon\},$$

где $B_\varepsilon(y)$ — метрический шар радиуса ε с центром в точке y, X — всюду плотное множество в M, C — константа Липшица для F.

Замечание 4.6.4. Если M — конечномерное векторное пространство и F линейно, то координатные функции F_s тоже линейны (для почти всех $s \in S$). Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в M. Тогда для $x = \sum x_i e_i$, где $x_i \in \mathbf{R}$, в силу линейности имеем $F(x) = \sum x_i F(e_i)$. Значит, функции F_s, определяемые равенствами

$$F_s(x) = \sum x_i F(e_i)(s),$$

являются координатными для F.

Предположим, что мера на S конечна. Мы будем рассматривать пространство $L^\infty(S)$ как сопряженное к пространству $L^1(S)$. Поскольку $L^1(S)$ сепарабельно, к отображениям со значениями в $L^\infty(S)$ применимы полученные ранее в этой главе результаты о слабой дифференцируемости.

Предложение 4.6.5. *Пусть S — пространство с конечной мерой, M — гладкое многообразие, $F : M \to L^\infty(S)$ — липшицево отображение с координатными функциями $\{F_s\}_{s \in S}$. Тогда для почти всех $x \in M$ верно, что*

1. F_s дифференцируемы в точке x для почти всех s.

2. Дифференциалы $d_x F_s : T_x M \to \mathbf{R}$, $s \in S$, являются координатными функциями слабого дифференциала $d_x^w F : T_x M \to L^\infty(S)$.

Доказательство. 1. Каждая координатная функция F_s липшицева и, следовательно, дифференцируема почти всюду (по теореме Радемахера). Отсюда по теореме Фубини следует первое утверждение.

2. Пусть $u \in L^1(S)$. Рассмотрим функцию $f_u : M \to \mathbf{R}$, определенную равенством

$$f_u(x) = \langle F(x), u \rangle = \int_S F_s(x) u(s)\, ds,$$

где $\int ds$ — интегрирование по мере на S. По определению слабого дифференциала достаточно проверить, что для любого $v \in T_x M$ верно равенство

$$d_x f_u(v) = \int_S d_x F_s(v)\, u(s)\, ds,$$

или, в координатах,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_S \frac{F_s(x+\varepsilon v)-F_s(x)}{\varepsilon}\,u(s)\,ds=\int_S \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F_s(x+\varepsilon v)-F_s(x)}{\varepsilon}\,u(s)\,ds$$

Поскольку функции F_s липшицевы с одной и той же константой, выражение под знаком предела в правой части равномерно ограничено, поэтому равенство немедленно доказывается предельным переходом под знаком интеграла. $\square$

Глава 5

Заполняющие объемы

В этой главе рассматриваются заполняющие объемы по Громову и минимальные заполнения. Основными результатами являются теоремы о соответствии между минимальными заполнениями и минимизирующими площадь поверхностями в банаховых пространствах, доказываемые в §5.4.

5.1 Определения

Определение 5.1.1. Пусть S — замкнутое многообразие, $d : S \times S \to \mathbf{R}_+$ — произвольная метрика на S. Будем называть компактное многообразие M с метрикой d_M *заполнением* пространства (S, d), если $\partial M = S$ и

$$d_M(x, y) \geq d(x, y)$$

для любых $x, y \in S$. В этом случае будем также говорить, что (M, d_M) *заполняет* (S, d).

Определение 5.1.2. Пусть S — замкнутое гладкое многообразие с метрикой d. *Заполняющий объем* $\operatorname{FillVol}(S, d)$ пространства (S, d) определяется равенством

$$\operatorname{FillVol}(S, d) = \inf\{\operatorname{vol}(M) : (M, d_M) \text{ заполняет } (S, d)\},$$

где инфимум берется по всем компактным римановым многообразиям M, заполняющим (S, d). Здесь d_M — расстояние, определяемое римановой метрикой, vol — риманов объем.

Понятие заполняющего объема введено М. Громовым [63]. В сформулированном выше виде оно имеет смысл только для многообразий S, кобордантных нулю. В общем случае можно брать в качестве M всевозможные псевдомногообразия или полные некомпактные многообразия.

Определение 5.1.3. Компактное риманово многообразие M называется *минимальным заполнением*, если

$$\mathrm{vol}(M) = \mathrm{FillVol}(\partial M),$$

где ∂M снабжается сужением $d_M|_{\partial M \times \partial M}$ риманова расстояния d_M.

Как нетрудно видеть, M является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда оно реализует инфимум в определении 5.1.2 хотя бы для одной метрики d на ∂M.

Иногда бывает удобно ограничить топологический тип многообразий M в определении заполняющего объема, например, рассматривать только ориентируемые заполнения или заполнения, гомеоморфные диску. По причинам, объясняемым далее в этой главе, имеет смысл рассматривать заполнения не только римановыми, но и финслеровыми многообразиями, а также произвольными липшицевыми метриками.

Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема. Тогда по определению 4.3.1 каждому n-мерному многообразию M с липшицевой метрикой d сопоставляется мера vol_d на M.

Определение 5.1.4. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс компактных n-мерных многообразий с липшицевыми метриками. Пусть S — $(n-1)$-мерное многообразие, d_0 — липшицева метрика на S. Будем называть *заполняющим объемом* пространства (S, d_0) в классе $\mathfrak{M}$ (относительно данного функционала объема) величину

$$\mathrm{FillVol}_{\mathfrak{M}}(S, d_0) = \inf_{(M,d)\in\mathfrak{M}} \{\mathrm{vol}_d(M) : (M, d) \text{ заполняет } (S, d_0)\}.$$

Будем называть метризованное многообразие $(M, d) \in \mathfrak{M}$ *минимальным заполнением* в классе $\mathfrak{M}$, если $\mathrm{vol}_d(M)$ равно заполняющему объему пространства $(\partial M, d|_{\partial M\times\partial M})$ в классе $\mathfrak{M}$.

Определение 5.1.2 соответствует заполняющему объему в классе римановых многообразий.

5.2 Сглаживание липшицевых метрик

Предложение 5.2.1. *Пусть M — компактное гладкое многообразие, d — липшицева метрика на M, $\varphi = \varphi_d$ — ее касательная финслерова структура. Тогда существует такая последовательность $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ гладких строго выпуклых финслеровых структур на M, что*

1. $\varphi_i|_{T_xM} \to \varphi|_{T_xM}$ для почти всех $x \in M$.

2. $d_i(x, y) \geq d(x, y) - \varepsilon_i$ для всех $x, y \in M$, где $d_i = d_{\varphi_i}$, $\{\varepsilon_i\}$ — некоторая стремящаяся к нулю последовательность чисел.

3. $d_i \le C \cdot d_{riem}$ для всех i, где d_{riem} — вспомогательная риманова метрика на M, $C > 1$ — такая константа, что $d \le (C-1)d_{riem}$.

Доказательство. Из предложений 4.1.5 и 4.2.10 следует, что достаточно доказать утверждение для метрики d, допускающей изометрическое отображение в $\mathbf{R}^N_\infty$. Это отображение $f : M \to \mathbf{R}^N_\infty$ является липшицевым с константой $C-1$ относительно метрики d_{riem}. Сгладив f с помощью подходящей свертки, получим такую последовательность гладких отображений $f_i : M \to \mathbf{R}^N_\infty$, что $f_i \rightrightarrows f$, $df_i \to df$ почти всюду на TM и $\|df_i\| < C - \frac{1}{2}$, где норма $\|df_i\|$ вычисляется относительно метрики d_{riem}. Можно считать, что $N > 2\dim M$, тогда отображения f_i можно заменить на гладкие вложения с теми же свойствами. Норму $\|\cdot\|_\infty$ на $\mathbf{R}^N$ приблизим гладкими строго выпуклыми нормами $\|\cdot\|_{p_i}$, $p_i \to \infty$ (и все p_i достаточно велики), где

$$\|(x_1,\dots,x_N)\|_p = (x_1^p + \dots + x_N^p)^{1/p}.$$

Пусть φ_i — финслерова структура, индуцируемая на M отображением f_i из нормы $\|\cdot\|_{p_i}$. Тогда $\{\varphi_i\}$ — искомая последовательность. Действительно, свойство 1 следует из сходимости $df_i \to df$ почти всюду и сходимости $\|\cdot\|_p \to \|\cdot\|_\infty$ при $p \to \infty$, свойство 2 — из соотношений

$$d_i(x,y) \ge \|f_i(x) - f_i(y)\|_{p_i} \ge \|f_i(x) - f_i(y)\|_\infty \rightrightarrows \|f(x) - f(y)\|_\infty = d(x,y).$$

Свойство 3 следует из условия $\|df_i\| \le C - \frac{1}{2}$ и близости норм $\|\cdot\|_{p_i}$ и $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

Замечание 5.2.2. Если касательная финслерова структура $\varphi = \varphi_d$ в предложении 5.2.1 является гладкой и строго выпуклой в окрестности некоторого замкнутого множества $K \subset M$, то приближающие финслеровы структуры φ_i можно выбрать совпадающими с φ на K. Для этого достаточно скомбинировать φ и построенные в теореме φ_i с помощью соответствующего гладкого разбиения единицы.

Теорема 5.2.3. *Пусть M — n-мерное многообразие, $S = \partial M$, d_0 — метрика на S. Тогда*

1. Заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе всех липшицевых метрик на M равен его заполняющему объему в классе гладких строго выпуклых финслеровых метрик на M.

2. Если в качестве функционала объема выбран объем по Лёвнеру, то этот заполняющий объем также равен заполняющему объему в классе всех римановых метрик на M.

Доказательство. 1. Пусть d — липшицева метрика на M, такая, что $d|_{S\times S} \ge d_0$. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется гладкая строго выпуклая финслерова метрика $\tilde{d}$ на M, для которой $\tilde{d}|_{S\times S} \ge d|_{S\times S}$ и $\mathrm{vol}_{\tilde{d}}(M) \le \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$. Метрику

d можно считать внутренней, так как от перехода к индуцированной внутренней метрике расстояния не уменьшаются, а объем сохраняется (по предложению 4.2.13).

Приклеим к многообразию M "воротник" $M^+ = S \times [0,1]$, отождествив множества $S \subset M$ и $S \times \{0\} \subset S \times [0,1]$. На M^+ построим такую гладкую риманову метрику d^+, что

(1) $\operatorname{vol}_{d^+}(M^+) < \varepsilon$;

(2) $d^+((x,t)(x',t')) > d(x,x')$ для любых $x, x' \in S$, $t, t' \in [0,1]$, таких, что $(x,t) \neq (x',t')$.

В качестве d^+ можно выбрать метрику произведения $(S, d_0^+) \times [0,\theta]$, где d_0^+ — риманова метрика на S, $d_0^+ \geq 2d|_{S\times S}$, $0 < \theta < \varepsilon / \operatorname{vol}(S, d_0^+)$.

Увеличенное многообразие $M' = M \cup M^+$ снабжается метрикой d', полученной склеиванием метрик d на M и d^+ на M^+. Операция склеивания описана в [6, §3.1]; здесь мы пользуемся только тем, что результат является внутренней метрикой, локально изометричной склеиваемым метрикам на внутренностях склеиваемых многообразий. Заметим, что

$$d'((x,t),(x',t')) \geq d(x,y) \tag{5.2.1}$$

для любых $x, x' \in S$, $t, t' \in [0,1]$, так как это неравенство выполняется для обеих склеиваемых метрик.

Пусть $\delta > 0$ таково, что $d^+((x,1),(x',\frac{1}{2})) \geq d(x,x') + \delta$ для всех $x, x' \in S$. Построим для метрики d' последовательность $\{\varphi_i\}$ гладких финслеровых структур как в предложении 5.2.1, при этом выберем φ_i совпадающими с римановой структурой метрики d^+ на множестве $S \times [\frac{1}{2}, 1]$. (см. замечание 5.2.2). Пусть $d_i = d_{\varphi_i}$. По свойствам 1 и 3 предложения 5.2.1, плотности финслеровых объемов, порождаемых метриками d_i, равномерно ограничены и поточечно сходятся к плотности меры $\operatorname{vol}_{d'}$. Следовательно, $\operatorname{vol}_{d_i}(M') \to \operatorname{vol}_{d'}(M')$, поэтому при всех достаточно больших i имеем $\operatorname{vol}_{d_i}(M') < \operatorname{vol}_d(M) + \varepsilon$.

При всех достаточно больших i имеем $d_i \geq d' - \delta$ всюду на M' (см. свойство 2 из предложения 5.2.1). Отсюда следует, что $d_i((x,1),(y,1)) \geq d(x,y)$ для любых $x, y \in S$. Действительно, пусть γ — кратчайшая кривая метрики d_i, соединяющая $(x,1)$ и $(y,1)$. Если эта кривая целиком лежит в множестве $S \times [\frac{1}{2}, 1]$, то ее длина не меньше $d^+((x,1),(y,1)) \geq d(x,y)$. В противном случае пусть $(x', \frac{1}{2})$ и $(y', \frac{1}{2})$ — ближайшие к x и y соответственно точки пересечения кривой γ с множеством $S \times \{\frac{1}{2}\}$, тогда

$$\begin{aligned}
d_i((x,1),(y,1)) &= d^+((x,1),(x',\tfrac{1}{2})) + d_i((x',\tfrac{1}{2}),(y',\tfrac{1}{2})) + d^+((y,1),(y',\tfrac{1}{2})) \\
&\geq (d(x,x') + \delta) + (d'((x',\tfrac{1}{2}),(y',\tfrac{1}{2})) - \delta) + (d(y,y') + \delta) \\
&\geq (d(x,x') + \delta) + (d(x',y') - \delta) + (d(y,y') + \delta) > d(x,y).
\end{aligned}$$

Здесь второе неравенство следует из (5.2.1), последнее — из неравенства треугольника для d.

Пусть $f : M \to M'$ — диффеоморфизм, переводящий $S \subset M$ в $S \times \{1\} \subset M'$ естественным образом. Пусть $\tilde{d}_i = f^* d_i$ — метрика на M, соответствующая d_i при этом диффеоморфизме. Тогда при достаточно большом i метрика $\tilde{d} = \tilde{d}_i$ удовлетворяет условиям $\tilde{d}|_{S\times S} \ge d|_{S\times S}$ и $\mathrm{vol}_{\tilde{d}}(M) < \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$, что и требовалось.

2. Для каждой точки $x \in M$ рассмотрим норму на T_xM, являющуюся сужением финслеровой структуры построенной выше метрики $\tilde{d}$. Пусть E_x — эллипсоид Джона единичного шара этой нормы. Пусть d_r — риманова метрика на M, порождаемая семейством эллипсоидов $\{E_x\}_{x\in M}$. Тогда $d_r \ge \tilde{d}$, откуда $d_r|_{S\times S} \ge d|_{S\times S}$, и, в силу выбора вписанного риманова объема в качестве определения финслерова объема, $\mathrm{vol}_{d_r}(M) = \mathrm{vol}_{\tilde{d}}(M) < \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$. В силу единственности эллипсоида Джона, риманова структура метрики d_r непрерывна; ее можно сгладить с сохранением неравенств $d_r|_{S\times S} \ge d|_{S\times S}$ и $\mathrm{vol}_{d_r}(M) < \mathrm{vol}_d(M) + \varepsilon$. Таким образом, заполняющий объем реализуется гладкими римановыми метриками, что и требовалось. □

Следствие 5.2.4. *Если риманово многообразие M является минимальным заполнением, то любое его компактное подмногообразие $M_1 \subset M$ той же размерности тоже является минимальным заполнением.*

Доказательство. Предположим противное, тогда существует риманово многообразие M_1', заполняющее ∂M_1 и такое, что $\mathrm{vol}(M_1') < \mathrm{vol}(M_1)$. Рассмотрим многообразие $M' = M_1' \cup (M \setminus M_1)$ с метрикой d, полученной склеиванием M_1' и $M \setminus M_1$ вдоль ∂M_1. Из того, что M_1' заполняет ∂M_1, следует, что (M', d) заполняет ∂M. Метрика d липшицева и

$$\mathrm{vol}_d^e(M') = \mathrm{vol}(M_1') + \mathrm{vol}(M \setminus M_1) < \mathrm{vol}(M_1) + \mathrm{vol}(M \setminus M_1) = \mathrm{vol}(M_1).$$

Таким образом, заполняющий объем края ∂M в классе липшицевых метрик меньше, чем $\mathrm{vol}(M)$. По теореме 5.2.3, то же верно и в классе римановых заполнений, значит, M — не минимальное заполнение. □

5.3 Продолжение нерастягивающих отображений

Предложение 5.3.1. *Пусть μ — мера на произвольном множестве S, X — сепарабельное метрическое пространство, $Y \subset X$, $f : Y \to L^\infty(\mu)$ — нерастягивающее отображение. Тогда существует нерастягивающее отображение $F : X \to L^\infty(\mu)$, такое, что $F|_Y = f$.*

Доказательство. Выберем счетное плотное подмножество $Y' \subset Y$. Для $x \in X$ и $s \in S$ положим

$$F(x)(s) = \inf\{f(y)(s) + |xy| : y \in Y'\}.$$

Для каждого $x \in X$ эта формула определяет функцию $F(x) : S \to [-\infty, +\infty]$, причем эта функция μ-измерима как инфимум счетного набора μ-измеримых функций. Заметим, что

$$F(x)(s) = f(x)(s) \quad \text{для всех } x \in Y' \text{ и } \mu\text{-почти всех } s \in S. \tag{5.3.1}$$

Действительно, для любых $x, y \in Y'$ и μ-почти всех $s \in S$ имеем

$$|f(x)(s) - f(y)(s)| \le |xy|,$$

так как f — нерастягивающее, откуда $f(y)(s) + |xy| \ge f(x)(s)$. Переходя к инфимуму по y, получаем неравенство $F(x)(s) \ge f(x)(s)$. С другой стороны,

$$F(x)(s) = \inf\{f(y)(s) + |xy| : y \in Y'\} \le f(x)(s) + |xx| = f(x)(s)$$

для любого $x \in Y'$, откуда следует (5.3.1).

Теперь докажем, что

$$|F(x)(s) - F(x')(s)| \le |xx'| \tag{5.3.2}$$

для любых $x, x' \in X$ и $s \in S$ (в случае $F(x)(s) = F(x')(s) = \pm\infty$ мы считаем разность равной нулю). Действительно, для любого $y \in Y'$ имеем

$$\big|(f(y)(s) + |xy|) - (f(y)(s) + |x'y|)\big| = \big||xy| - |x'y|\big| \le |xx'|$$

по неравенству треугольника. Следовательно, расстояние по Хаусдорфу в $\mathbf{R}$ между множествами $T = \{f(y)(s) + |xy| : y \in Y'\}$ и $T' = \{f(y)(s) + |x'y| : y \in Y'\}$ не превосходит $|xy|$. Поскольку $F(x)(s) = \inf T$ и $F(x')(s) = \inf T'$, отсюда следует (5.3.2).

Подставляя в (5.3.2) в качестве x' произвольную точку из Y', получаем, что значение $F(x)(s)$ конечно для почти всех $s \in S$. Таким образом, F является отображением из X в $L^\infty(\mu)$, и (5.3.2) означает, что это отображение — нерастягивающее. Осталось заметить, что f и F совпадают на Y, так как они совпадают на Y' в силу (5.3.1) и непрерывны. $\square$

Следствие 5.3.2. *Пусть S — замкнутое гладкое многообразие с метрикой d_0, (M, d) — метризованное многообразие, заполняющее (S, d_0). Тогда любое изометрическое отображение $f : (S, d_0) \to L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, допускает нерастягивающее продолжение $F : (M, d) \to L^\infty(\mu)$.*

Доказательство. По определению заполнения, $d \ge d_0$ на S, поэтому f является нерастягивающим относительно сужения d на S. Теперь существование нерастягивающего продолжения следует из предложения 5.3.1. $\square$

Пример 5.3.3. Пусть M, S, d и d_0 — те же, что в следствии 5.3.2. Изометрическое отображение $f : S \to L^\infty(S)$ можно построить, например, с помощью конструкции Куратовского (см. пример 4.1.4). А именно, образ $f(x) \in L^\infty(S)$ точки $x \in S$ — функция на S, определяемая равенством $f(x)(y) = d_0(x, y)$.

Теперь предположим, что M — риманово многообразие, d — соответствующее риманово расстояние, $d_0 = d|_{S\times S}$. Тогда продолжающее отображение $F : M \to L^\infty(S)$ можно задать формулой $F(x)(s) = d(x, s)$, $x \in M$, $s \in S$.

Предположим, что M обладает *свойством минимальности геодезических*: любые две внутренние точки соединимы единственной геодезической, и эта геодезическая является кратчайшей кривой между своими концами. Тогда построенное выше отображение F является изометрическим. Действительно, для любых $x, y \in M$ и $s \in S$ имеем

$$|F(x)(s) - F(y)(s)| = |d(x, s) - d(y, s)| \le d(x, y)$$

по неравенству треугольника, откуда $\|F(x) - F(y)\|_\infty \le d_g(x, y)$. С другой стороны, пусть s_0 — точка, где геодезическая, проведенная через x и y, достигает края многообразия. Тогда по свойству минимальности геодезических $d(x, y) = |d(x, s_0) - d(y, s_0)|$, то есть $|F(x)(s_0) - F(y)(s_0)| = d(x, y)$, следовательно, $\|F(x) - F(y)\|_\infty = d(x, y)$. Построенное изометрическое отображение $F : M \to L^\infty(S)$ называется *представлением краевыми расстояниями* многообразия M.

Представление краевыми расстояниями является гладким отображением. Из результатов 10.3 следует, что определяемая им поверхность в $L^\infty(S)$ является минимальной в смысле вариационного исчисления. С учетом результатов следующего параграфа это делает правдоподобной гипотезу, что любое многообразие, обладающее свойством минимальности геодезических, является минимальным заполнением.

5.4 Минимальные заполнения как минимальные поверхности

Пусть зафиксирован некоторый функционал n-мерного финслерова объема. Тогда, согласно определениям из §4.3, определены объемы липшицевых метрик на n-мерных многообразиях и площади n-мерных поверхностей в банаховых пространствах.

Теорема 5.4.1. *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное n-мерное многообразие, $S = \partial M$. Пусть d_0 — метрика на S, $f : (S, d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объем пространства (S, d_0) в классе липшицевых (или, что то же самое, гладких строго выпуклых финслеровых) метрик на M равен*

$$\inf\{\mathrm{area}(F) : F : M \to X \text{ — \textit{липшицево}, } F|_S = f\}.$$

Доказательство. Пусть $F : M \to X$ — липшицево отображение, $F|_S = f$. Рассмотрим на M липшицеву метрику $d = F^* d_X$, индуцированную отображением F (то есть заданную равенством $d(x,y) = \|F(x) - F(y)\|_X$). По определению площади, $\operatorname{area}(F) = \operatorname{vol}_d(M)$. В силу изометричности отображения $f = F|_S$ относительно d_0, имеем $d|_{S\times S} = d_0$, значит, (M,d) заполняет (S,d_0). Следовательно, заполняющий объем пространства (S,d_0) не превосходит $\operatorname{area}(F)$. В силу произвольности F, заполняющий объем не превосходит инфимума таких площадей.

Обратно, если d — такая липшицева метрика на M, что (M,d) заполняет (S,d_0), то по следствию 5.3.2 существует нерастягивающее отображение $F : (M,d) \to X$. Поскольку F нерастягивающее, индуцируемая им метрика на M не превосходит d, следовательно, $\operatorname{area}(F) \le \operatorname{vol}_d(M)$. Переходя к инфимуму по d, получаем требуемое. □

Применяя теорему ко всем топологическим типам многообразий с данным краем, получаем, что заполняющий объем пространства (S,d_0) в классе всех финслеровых многообразий равен инфимуму площади всех липшицевых поверхностей, край которых совпадает с $f|_S$. Из этого вытекает

Следствие 5.4.2. *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, (M,d) — компактное многообразие с липшицевой метрикой. Тогда для любого изометрического отображения $F : (M,d) \to X$ верно следующее: (M,d) является минимальным заполнением в классе всех многообразий с липшицевыми метриками тогда и только тогда, когда F минимизирует площадь среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

Подставляя в качестве определения объема вписанный риманов объем, из теоремы 5.4.1 и второго утверждения теоремы 5.2.3 получаем

Следствие 5.4.3. *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное многообразие, $S = \partial M$. Пусть d_0 — метрика на S, $f : (S,d_0) \to X$ — изометрическое отображение. Тогда заполняющий объем пространства (S,d_0) в классе римановых метрик на M равен*

$$\inf\{\operatorname{area}^e(F) : F : M \to X \text{ — липшицево, } F|_S = f\},$$

где area^e — площадь по Лёвнеру (то есть площадь, определяемая функционалом вписанного риманова объема).

Аналогично следствию 5.4.2 из следствия 5.4.3 выводится

Следствие 5.4.4. *Пусть $X = L^\infty(\mu)$, где μ — мера на произвольном множестве, M — компактное риманово многообразие. Тогда для любого изометрического отображения $F : M \to X$ верно следующее: M является минимальным заполнением* *тогда и только тогда, когда F минимизирует площадь по Лёвнеру среди всех липшицевых поверхностей в X с тем же краем.*

Подставляя в качестве изометрического отображения представление краевыми расстояниями (см. пример 5.3.3), получаем

Следствие 5.4.5. *Компактное риманово многообразие M с выпуклым краем и минимальными геодезическими является минимальным заполнением тогда и только тогда, когда его представление краевыми расстояниями в $L^\infty(\partial M)$ минимизирует площадь по Лёвнеру среди всех липшицевых поверхностей в $L^\infty(\partial M)$ с тем же краем.*

Глава 6

Следствия полуэллиптичности

Всюду в этой главе предполагается, что зафиксированы натуральное n и некоторый функционал n-мерного финслерова объема. Объем многообразия M с липшицевой метрикой d обозначается через $\mathrm{vol}_d(M)$ или $\mathrm{vol}(M,d)$, площадь поверхности f в метрическом пространстве — через $\mathrm{area}(f)$.

Результаты этой главы опубликованы в [39].

6.1 Минимальность плоских заполнений

Пусть зафиксирован функционал n-мерного финслерова объема $\|\cdot\| \mapsto \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}$ (см. §3.4). Пусть X — конечномерное нормированное пространство размерности. Функционал объема порождает n-плотность θ на X, интегрирование которой дает площади поверхностей в X, см. предложение 4.3.5. Из леммы 3.4.2(2) следует, что θ непрерывна, поэтому к ней применимы результаты из §1.5. В частности, θ топологически полуэллиптична тогда и только тогда, когда когда любой n-мерный аффинный диск имеет минимальную θ-площадь среди всех параметризованных диском липшицевых поверхностей с тем же краем (предложение 1.5.1).

Определение 6.1.1. Функционал n-мерного финслерова объема называется *топологически полуэллиптическим*, если в любом конечномерном нормированном пространстве X (любой размерности $\geq n$) порождаемая этим функционалом плотность n-мерной площади топологически полуэллиптична.

Аналогично, функционал n-мерного финслерова объема называется *полуэллиптическим над* $\mathbf{K}$, где $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ — кольцо, если в любом конечномерном нормированном пространстве порождаемая им плотность n-мерной площади полуэллиптична над $\mathbf{K}$.

Теорема 6.1.2. *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то верно следующее.*

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство, $D \subset V$ — n-мерный аффинный диск. Тогда D с метрикой $d_{\|\cdot\|}$ является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D.

Замечание 6.1.3. Если некоторый диск в $(V, \|\cdot\|)$ является минимальным заполнением, то таковыми являются и все ограниченные области в $(V, \|\cdot\|)$. Это следует из следствия 5.2.4.

Обозначим через B^* единичный шар двойственной нормы $\|\cdot\|^*$, $S^* = \partial B^*$. Другими словами, S^* — это множество таких линейных функций $u : V \to \mathbf{R}$, что $\sup\{u(x) : \|x\| = 1\} = 1$. Множество S^* билипшицево гомеоморфно сфере S^{n-1} (так как является границей выпуклого тела). Обозначим через $L^\infty(S^*)$ пространство $L^\infty(\mu)$, где μ — мера на S^*, соответствующая стандартной мере на S^{n-1} при каком-нибудь билипшицевом гомеоморфизме. Очевидно, что пространство $L^\infty(S^*)$ не зависит от выбора этого гомеоморфизма.

Лемма 6.1.4. *Определим линейное отображение $L : (V, \|\cdot\|) \to L^\infty(S^*)$ равенством*

$$L(x)(u) = u(x), \qquad x \in V, u \in S^*.$$

Тогда

1. Отображение L — изометрическое.

2. Существует такая последовательность $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ нерастягивающих линейных отображений $P_k : L^\infty(S^*) \to \mathbf{R}^k_\infty$, что индуцированные отображениями $P_k \circ L$ полунормы на V сходятся к норме $\|\cdot\|$.

Доказательство. 1. Для любых $x \in V$ и $u \in S^*$ имеем

$$|L(x)(u)| = |u(x)| \le \|x\|,$$

так как $\|u\|^* = 1$. Отсюда $\|L(x)\|_{L^\infty(S^*)} \le \|x\|$. Подставляя такое u, что $|u(x)| = \|x\|$, получаем требуемое равенство $\|L(x)\|_{L^\infty(S^*)} = \|x\|$. (Одного значения достаточно, так как $L(x)$ принадлежит подпространству $C^0(S^*) \subset L^\infty(S^*)$ непрерывных функций.)

2. Пусть $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ — счетное всюду плотное множество в S^*. Для каждого i определим линейную функцию $p_i : L(V) \to \mathbf{R}$ равенством $p_i(L(x)) = u_i(x)$. Эта функция корректно определена и нерастягивающая, так как u_i — нерастягивающая и L — изометрия. По теореме Хана–Банаха продолжим p_i до нерастягивающей линейной функции $\tilde{p}_i : L^\infty(S^*) \to \mathbf{R}$. Для натурального k определим отображение $P_k : L^\infty(S^*) \to \mathbf{R}^m_\infty$ равенством $P_k = (p_1, \ldots, p_k)$. Отображение P_k нерастягивающее, так как его координатные функции нерастягивающие. Обозначим через $\|\cdot\|_k$ полунорму на V, индуцированную из нормы пространства $\mathbf{R}^k_\infty$ отображением $P_k \circ L$. По построению,

$$\|x\|_k = \max\{|u_i(x)|\}_{i=1}^k,$$

откуда

$$\lim_{k\to\infty} \|x\|_k = \sup_i |u_i(x)| = \sup_{u\in S^*} |u(x)| = \|x\|,$$

(предпоследнее равенство следует из того, что множество $\{u_i\}$ плотно в S^*). Значит, нормы $\|\cdot\|_k$ сходятся к $\|\cdot\|$ при $k\to\infty$. $\square$

Доказательство теоремы 6.1.2. Сначала предположим, что рассматриваемый объем топологически полуэллиптичен. Пусть D — n-мерный аффинный диск в n-мерном нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$, и пусть $L : V \to L^\infty(S^*)$ — изометрическое вложение из леммы 6.1.4. По теореме 5.4.1, $(D, d_{\|\cdot\|})$ является минимальным заполнением в классе финслеровых метрик на D тогда и только тогда, когда $L|_D$ минимизирует площадь среди всех липшицевых поверхностей $f : D \to L^\infty(S^*)$, таких, что $f|_{\partial D} = L|_{\partial D}$. Докажем последнее. Пусть $f : D \to L^\infty(S^*)$ — такая липшицева поверхность. Положим $L_k = P_k \circ L|_D$ и $f_k = P_k \circ f$, где $P_k : L^\infty(S^*) \to \mathbf{R}^k_\infty$ — нерастягивающие отображения из леммы 6.1.4(2). Поскольку P_k нерастягивающее, оно не увеличивает площади, поэтому $\operatorname{area}(f_k) \le \operatorname{area}(f)$. Заметим, что L_k параметризует аффинный диск в $\mathbf{R}^k_\infty$, а f_k — липшицева поверхность в $\mathbf{R}^k_\infty$ с тем же краем. Отсюда в силу топологической полуэллиптичности объема следует неравенство $\operatorname{area}(L_k) \le \operatorname{area}(f_k) \le \operatorname{area}(f)$. При $k\to\infty$ правая часть стремится к $\operatorname{area}(L|_D) = \operatorname{area}_{\|\cdot\|}(D)$, так как нормы, индуцируемые отображениями L_k, стремятся к $\|\cdot\|$ (см. лемму 6.1.4(2)). Следовательно, $\operatorname{area}(L|_D) \le \operatorname{area}(f)$, что и требовалось доказать. $\square$

6.2 Полунепрерывность объема

Теорема 6.2.1. *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то он полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик, а именно верно следующее.*

Пусть M — многообразие размерности n, и пусть последовательность $\{d_i\}$ финслеровых метрик на M равномерно сходится (как последовательность функций на $M\times M$) к финслеровой метрике d. Тогда

$$\operatorname{vol}(M,d) \le \varliminf_{i\to\infty} \operatorname{vol}(M,d_i).$$

Замечание 6.2.2. Объем не непрерывен в топологии равномерной сходимости даже для римановых метрик (ситуация аналогична полунепрерывности длины относительно равномерной сходимости кривых). Например, пусть M — компактная область на плоскости, d — евклидова метрика. Для достаточно большого i выделим из этой плоской области i^3 кругов радиуса $1/i^{10}$, отделенных друг от друга расстояниями не меньше $1/i^3$. Метрику внутри каждого круга заменим на метрику сферы радиуса $1/i$, из которой вырезан такой же круг (загладив линию склейки). Пусть d_i — расстояние в полученной римановой метрике. Нетрудно проверить, что $d_i \rightrightarrows d$, но $\mathrm{vol}(M, d_i) \geq i \to \infty$.

Замечание 6.2.3. Если ограничиться только римановыми метриками, то полунепрерывность объема относительно несложно выводится из неравенства Безиковича. Однако некоторые приложения (например, теорема 6.3.9 и ее приложения в следующих главах) требуют рассмотрения финслеровых метрик даже в случае чисто римановой постановки вопроса.

Замечание 6.2.4. Приближая метрики финслеровыми (аналогично предложению 5.2.1), можно обобщить теорему 6.2.1 на произвольные липшицевы метрики. Возникает вопрос: верна ли полунепрерывность объема для произвольных внутренних метрик на многообразиях (для какого-нибудь естественного определения объема). Примеры, построенные в [41], показывают, что это неверно для метрик на двумерном диске и двумерной меры Хаусдорфа (при этом метрики d_i являются римановыми, и только предельная метрика d — "дикая").

Замечание 6.2.5. Равномерная сходимость метрик соответствует равномерной сходимости поверхностей в банаховых пространствах. С помощью конечномерных аппроксимаций можно ограничится рассмотрением поверхностей в конечномерных нормированных пространствах. Хорошо известно (см., например, [15, теорема 5.1.5], что из полуэллиптичности площади (над $\mathbf{Z}$) следует ее полунепрерывность на пространстве спрямляемых потоков с топологией, определяемой "плоской нормой" (flat norm). Однако равномерная сходимость не влечет сходимость относительно плоской нормы, поэтому вывести теорему 6.2.1 напрямую из геометрической теории меры не удается.

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.2.6. *Предположим, что рассматриваемый функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен. Пусть $(V, \|\cdot\|)$ — n-мерное нормированное пространство, $D \subset V$ — n-мерный аффинный диск. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что верно следующее. Если d — такая финслерова метрика на D, что*

$$d(x, y) \geq \|x - y\| - \delta \tag{6.2.1}$$

для любых $x, y \in \partial D$, то

$$\mathrm{vol}(D, d) \geq \mathrm{vol}(D, d_{\|\cdot\|}) - \varepsilon.$$

Доказательство. По лемме 6.1.4 существуют натуральное k и такое нерастягивающее линейное отображение $I : (V, \|\cdot\|) \to \mathbf{R}^k_\infty$, что

$$\mathrm{area}(I|_D) \geq \mathrm{vol}(D, d_{\|\cdot\|}) - \varepsilon/2 \tag{6.2.2}$$

(а именно, можно взять $I = P_k \circ L$, где P_k и L — отображения из леммы 6.1.4 и k достаточно велико).

Пусть $\delta > 0$, d — метрика на D, удовлетворяющая условию (6.2.1). Определим метрику d' на $D \times \{0,1\}$ равенствами

$$\begin{aligned} d'((x,0),(y,0)) &= d_{\|\cdot\|}(x,y), \\ d'((x,0),(y,1)) &= \inf_{z\in\partial D}\{d_{\|\cdot\|}(x,z) + d(z,y) + \delta/2\} \\ d'((x,1),(y,1)) &= \min\big\{d(x,y), \\ &\qquad \inf_{z,z'\in\partial D}\{d(x,z) + d_{\|\cdot\|}(z,z') + d(z',y) + \delta\}\big\}. \end{aligned}$$

Неравенство треугольника для d' следует из (6.2.1). Нам понадобятся только следующие очевидные свойства этой метрики:

$$\begin{aligned} d'((x,0),(y,0)) &= d_{\|\cdot\|}(x,y), \\ d'((x,1),(y,1)) &\le d(x,y), \\ d'((z,0),(z,1)) &\le \delta/2. \end{aligned}$$

для $x, y \in D$, $z \in \partial D$. Отождествим $D \times \{0\}$ с D и обозначим $D' = D \times \{1\}$, таким образом, d' — метрика на несвязном объединении $D \cup D'$, совпадающая с $d_{\|\cdot\|}$ на D. Поскольку d' на D' оценивается сверху исходной метрикой d, достаточно доказать, что

$$\mathrm{vol}(D', d') \ge \mathrm{vol}(D, d_{\|\cdot\|}) - \varepsilon,$$

если δ достаточно мало. С помощью предложения 5.3.1 продолжим $I|_D$ до нерастягивающего отображения $f : (D \cup D', d') \to \mathbf{R}^k_\infty$. С учетом (6.2.2) теперь достаточно доказать, что

$$\mathrm{area}(f|_{D'}) \ge \mathrm{area}(I|_D) - \varepsilon/2, \tag{6.2.3}$$

если δ достаточно мало. Для этого мы изменим поверхность $f|_{D'}$ вблизи ее края так, чтобы площадь изменилась не более, чем на $\varepsilon/2$, и край полученной поверхности совпал с краем диска $I(D)$, тогда (6.2.3) последует из топологической полуэллиптичности объема. Обозначим через $P : D' \to D$ естественную биекцию между D' и D и определим $I' = I \circ P : D' \to I(D)$. По построению метрики d' имеем

$$\|f(x) - I'(x)\|_{\mathbf{R}^k_\infty} \le d'(x, P(x)) < \delta \tag{6.2.4}$$

для всех $x \in \partial D'$. Предположим, что (6.2.3) неверно. Сгладим поверхность f так, чтобы неравенство (6.2.4) и неравенство, противоположное (6.2.3), сохранились.

Построим на $\mathbf{R}^k$ такую евклидову норму $\|\cdot\|_e$ (не зависящую от f), что диск $I(D)$ — единичный шар этой нормы, суженной на аффинную оболочку этого диска. Пусть $C = \max \|\cdot\|_\infty / \|\cdot\|_e$, тогда отношения n-мерных площадей в R^k_∞ к соответствующим евклидовым площадям, не превосходит C^n. Для $x \in \mathbf{R}^k$ обозначим через $\rho(x)$

расстояние в метрике $\|\cdot\|_e$ от x до $(n-1)$-мерной сферы $I(\partial D)$. Положим $\tilde{\rho} = \rho \circ f|_{D'}$. Заметим, что функция $\tilde{\rho} : D' \to \mathbf{R}$ гладкая на множестве $\{x : 0 < \tilde{\rho}(x) < 1\}$, следовательно, по теореме Сарда почти все $t \in (0,1)$ являются ее регулярными значениями. Из (6.2.4) следует, что $\tilde{\rho}(x) < C\delta$ для любого $x \in \partial D'$. Пусть $t \in [C\delta, \frac{1}{2}]$ — регулярное значение функции $\tilde{\rho}$, тогда множество $S_t = \tilde{\rho}^{-1}(t)$ — замкнутое гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие, лежащее внутри D' и ограничивающее область $U_t = \{x \in D' : \tilde{\rho}(x) > t\}$.

Для точки $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющей неравенству $\rho(x) \leq \frac{1}{2}$, определим $g(x)$ как ближайшую к x в метрике $\|\cdot\|_e$ точку сферы $I(\partial D)$. Ясно, что $g(x)$ корректно определена, и функция g является липшицевой с константой 2 (относительно метрики $\|\cdot\|_e$) на своей области определения. Заметим, что функция $g \circ f$ определена на подмножестве диска D', содержащем $D' \setminus U_t$, и, в частности, на S_t. Определим поверхность $h : S_t \times [0,1]$ равенством

$$h(x,y) = (1-y) \cdot f(x) + y \cdot g(f(x)), \qquad x \in S_t,\ y \in [0,1]$$

(то есть h — прямолинейная гомотопия между $f|_{S_t}$ и $g \circ f|_{S_t}$). Из 2-липшицевости функции g и соотношения

$$\|f(x) - g(f(x))\|_e = \rho(f(x)) = t$$

для $x \in S_t$, следует оценка

$$\mathrm{area}_n^e(h) \leq 2^{n-1} t \cdot \mathrm{area}_{n-1}^e(f|_{S_t}),$$

где area_n^e и area_{n-1}^e — евклидовы площади соответствующих размерностей относительно $\|\cdot\|_e$. Отсюда

$$\mathrm{area}(h) \leq 2^{n-1} C^n t \cdot \mathrm{area}_{n-1}^e(f|_{S_t}), \tag{6.2.5}$$

Подклеим h к отображению $f|_{U_t}$, отождествив $S_t \times [0,1]$ с замыканием полуокрестности гиперповерхности S_t (полуокрестность строиться наружу от области U_t). Получим отображение $f_1 : U' \to \mathbf{R}^k$, где U' — замкнутая область с гладким краем, содержащая U_t и содержащаяся внутри D'. При этом $f_1(\partial U')$ по построению лежит в сфере $I(\partial D)$.

Продолжим f_1 до липшицева отображения $f_2 : D' \to \mathbf{R}^k$ так, что $f_2|_{\partial D'} = I'|_{\partial D'}$ и $f_2(D' \setminus U') \subset I(\partial D)$. Это можно сделать в силу того, что отображения $f_1|_{\partial U'}$ и $I'|_{\partial D'}$, рассматриваемые как отображения в сферу $I(\partial D)$, имеют одинаковую топологическую степень (равную 1). Действительно, $\deg(f_1|_{\partial U'}) = \deg(f|_{S_t})$, так как объединение этих отображений продолжается до непрерывного отображения (f_1), определенного на $U' \setminus U_t$. По той же причине $\deg(f|_{S_t}) = \deg(f|_{\partial D'})$. Наконец, $\deg(f|_{\partial D'}) = \deg(I'|_{\partial D'})$, так как эти отображения гомотопны при $\delta < 1$ в силу (6.2.4).

Так как $f_2(D' \setminus U') \subset I(\partial D)$, имеем $\operatorname{area}(f_2|_{D'\setminus U'}) = 0$, откуда

$$\operatorname{area}(f_2) = \operatorname{area}(f_1) = \operatorname{area}(f|_{U_t}) + \operatorname{area}(h) \le \operatorname{area}(f) + \operatorname{area}(h).$$

С другой стороны, край поверхности f_2 совпадает с краем диска $I'(D') = I(D)$, откуда $\operatorname{area}(f_2) \ge \operatorname{area}(I|_D)$. в силу топологической эллиптичности рассматриваемого объема. Следовательно,

$$\operatorname{area}(f) + \operatorname{area}(h) \ge \operatorname{area}(I|_D).$$

Значит,

$$\operatorname{area}(h) \ge \operatorname{area}(I|_D) - \operatorname{area}(f) \ge \varepsilon/2,$$

где второе неравенство следует из предположения, что (6.2.3) неверно. Отсюда и из (6.2.5) следует, что

$$2^{n-1} t \cdot \operatorname{area}^e_{n-1}(f|_{S_t}) \ge \varepsilon/2,$$

то есть

$$\operatorname{area}^e_{n-1}(f|_{S_t}) \ge \frac{\varepsilon}{2^n t}.$$

Напомним, что это верно для любого $t \in [C\delta, \frac{1}{2}]$, кроме множества меры 0. Интегрируя это неравенство, получаем

$$\int_{C\delta}^{1/2} \operatorname{area}^e_{n-1}(f|_{S_t})\, dt \ge \frac{\varepsilon}{2^n} \int_{C\delta}^{1/2} \frac{dt}{t} = -\frac{\varepsilon}{2^n} \ln(2C\delta).$$

С другой стороны, поскольку $S_t = f^{-1}(\rho^{-1}(t))$ и функция ρ липшицева с константой 1 относительно $|\cdot\|_e$, из неравенства коплощади (см. [15, 4.2.1]) получаем

$$\int_{C\delta}^{1/2} \operatorname{area}^e_{n-1}(f|_{S_t})\, dt \le \operatorname{area}^e_n(f) \le C^n \operatorname{area}(f) < C^n \operatorname{area}(I|_D),$$

где второе неравенство следует из сравнения евклидовых площадей и площадей в $\mathbf{R}^k_\infty$, третье — из отрицания неравенства (6.2.3). Таким образом,

$$C^n \operatorname{area}(I|_D) > -\frac{\varepsilon}{2^n} \ln(2C\delta).$$

При $\delta \to 0$ правая часть этого неравенства стремится к $+\infty$, поэтому при достаточно малых δ она больше левой. Полученное противоречие доказывает требуемое неравенство (6.2.3). Лемма 6.2.6 доказана. □

Доказательство теоремы 6.2.1. Рассмотрением координатных областей теорема сводится к случаю, когда M — область в $\mathbf{R}^n$. Пусть φ — финслерова структура, попрождающая метрику d. Пользуясь отождествлением $T_xM = T_x\mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^n$, будем рассматривать φ как семейство норм $\|\cdot\|_x$, $x \in M$, заданных на $\mathbf{R}^n$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$

и $x_0 \in M$. Обозначим $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{x_0}$. Пусть $B = B_r(x_0)$ — евклидов шар с центром в x_0 столь малого радиуса $r > 0$, что

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|\cdot\| \le \|\cdot\|_x \le (1+\varepsilon)\|\cdot\|$$

для всех точек $x \in B_{3r}(x_0)$. Тогда

$$(1+\varepsilon)^{-1}\|x-y\| \le d(x,y) \le (1+\varepsilon)\|x-y\|$$

для любых $x, y \in B$. По условию, существует такая стремящаяся к нулю последовательность $\{\delta_i\}$, что

$$d_i(x,y) \ge d(x,y) - \delta_i \ge (1+\varepsilon)^{-1}\|x-y\| - \delta_i,$$

для любых $x, y \in \partial B$. По лемме 6.2.6, примененной к шару B и норме $(1+\varepsilon)^{-1}\|x-y\|$, отсюда следует, что

$$\varliminf_{i\to\infty} \operatorname{vol}(B, d_i) \ge \operatorname{vol}(B, d_{(1+\varepsilon)^{-1}\|x-y\|}) = (1+\varepsilon)^{-n} \operatorname{vol}(B, d_{\|\cdot\|}) \ge (1+\varepsilon)^{-2n} \operatorname{vol}(B, d). \tag{6.2.6}$$

Таким образом, для любой точки $x \in M \subset \mathbf{R}^n$ существует сколь угодно малый евклидов шар B с центром в x, для которого выполняется (6.2.6). По теореме Витали о покрытиях, все M, кроме множества меры 0, можно покрыть дизъюнктным счетным набором $\{B_j\}$ таких шаров. Складывая неравенства (6.2.6) для этих шаров, получаем

$$\varliminf_{i\to\infty} \operatorname{vol}(M, d_i) \ge \sum_j \varliminf_{i\to\infty} \operatorname{vol}(B_j, d_i) \ge (1+\varepsilon)^{-2n} \sum_j \operatorname{vol}(B_j, d) = (1+\varepsilon)^{-2n} \operatorname{vol}(M, d).$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что

$$\varliminf_{i\to\infty} \operatorname{vol}(M, d_i) \ge \operatorname{vol}(M, d),$$

что и требовалось доказать. □

6.3 Асимптотические объемы периодических метрик

В этом параграфе мы ограничиваемся рассмотрением периодических метрик на $\mathbf{R}^n$. Периодические метрики на других многообразиях будут рассматриваться в главе 9.

Определение 6.3.1. Будем называть *периодической* положительную внутреннюю метрику на $\mathbf{R}^n$, инвариантную относительно стандартного действия группы $\mathbf{Z}^n$ параллельными переносами.

Другими словами, периодическая метрика — это поднятие внутренней метрики с тора T^n в его универсальное накрывающее.

Определение 6.3.2. Пусть d — периодическая метрика в $\mathbf{R}^n$. Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и определим функцию $\|\cdot\| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ равенством

$$\|v\| = \lim_{t \to +\infty} \frac{d(x_0, x_0 + tv)}{t}.$$

Нетрудно проверить (см., например, [6, §8.5]), что эта функция корректно определена, не зависит от выбора x_0 и является нормой на $\mathbf{R}^n$. Она называется *стабильной нормой* метрики d.

Из определения следует, что метрика d асимптотически эквивалентна своей стабильной норме $\|\cdot\|$, а именно

$$d(x,y) = \|x-y\| + o(\|x-y\|), \qquad \|x-y\| \to \infty. \tag{6.3.1}$$

Замечание 6.3.3. Понятие стабильной нормы введено Федерером [62]. Обычно ее определяют на группе $H_1(M;\mathbf{R})$ вещественных гомологий компактного многообразия M, снабженного внутренней метрикой, см. §9.4. Определение 6.3.2 соответствует случаю $M = T^n$.

Замечание 6.3.4. Стабильная норма определяется расстояниями между точками одной решетки $x_0 + \mathbf{Z}^n$. Действительно, любая норма определяется своими значениями на целочисленных векторах, а для $v \in \mathbf{Z}^n$ имеем $\|v\| = \lim_{k \in \mathbf{N}, k \to \infty} \frac{d(x_0, x_0+kv)}{k}$.

Замечание 6.3.5. Оценку $o(\|x-y\|)$ в (6.3.1) можно улучшить. Как было показано Д. Бураго [34], для любой периодической внутренней метрики d на $\mathbf{R}^n$ существует такая константа $C > 0$, что

$$\big| d(x,y) - \|x-y\| \big| \le C$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Замечание 6.3.6. Даже если метрика d является римановой, стабильная норма не обязательно евклидова. Стабильные нормы периодических метрик на плоскости, как правило, негладкие во всех рациональных направлениях, см. [23]. Имеется гипотеза (доказанная В. Бангертом [23] в размерности 2), что из C^1 гладкости стабильной нормы следует, что метрика не имеет сопряженных точек и, как следствие, плоская (последняя импликация доказана в [35]). Для финслеровых метрик без сопряженных точек стабильная норма C^1 гладкая, это можно легко вывести из результатов работы [71]. При $n \ge 3$ единичный шар стабильной нормы может быть любым выпуклым симметричным многогранником с вершинами, видимыми из нуля в рациональных направлениях (см. [21]), первые примеры многогранных стабильных норм были приведены в работе Бангерта [22], основанной на идеях Хедлунда [67]. В [37] показано, что особенности, аналогичные вершинам многогранников, не могут иметь места в иррациональных направлениях.

Определение 6.3.7. Пусть d — периодическая финслерова метрика в $\mathbf{R}^n$. *Асимптотическим объемом* метрики d будем называть число

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}_d(B_r(x_0))}{r^n},$$

где $B_r(x_0)$ — метрический шар в $(\mathbf{R}^n, d)$ радиуса r с центром в фиксированной точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Нетрудно убедиться, что $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d)$ определен и не зависит от x_0. Более того, имеет место следующее выражение асимптотического объема через объем фундаментальной области и стабильную норму.

Предложение 6.3.8. *Для любой периодической финслеровой метрики в* $\mathbf{R}^n$

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) = \mathrm{vol}_d(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \cdot |B_{st}|, \tag{6.3.2}$$

где B_{st} *— единичный шар стабильной нормы,* $|B_{st}|$ *— его мера Лебега, а сомножитель* $\mathrm{vol}_d(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$ *— объем факторпространства (тора) относительно факторметрики, поднятием которой является* d.

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{vol}_d(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$ равен объему (относительно d) фундаментальной области действия группы, например, единичного куба $[0,1]^n$. Заметим, что

$$N^-(r) \le \frac{\mathrm{vol}_d(B_r(x_0))}{\mathrm{vol}_d(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)} \le N^+(r),$$

где $N^-(r)$ — количество фундаментальных областей, содержащихся в шаре $B_r(x_0)$, а $N^+(r)$ — количество фундаментальных областей, пересекающихся с ним. Из (6.3.1) следует, что

$$N^-(r) \sim N^+(r) \sim r^n \cdot |B_{st}|, \qquad r \to \infty,$$

откуда следует (6.3.2). □

М. Громов [63] доказал, что для каждого n существует такая константа $c(n) > 0$, что $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d_g) \ge c(n)$ для любой периодической римановой метрики g, а также получил явные (но очень грубые) оценки снизу на $c(n)$. И. Бабенко улучшил эти оценки [2] и доказал, что при $n = 2$ минимальное значение асимптотического объема достигается для плоских метрик [3]. В главе 9 доказывается аналогичный факт для всех размерностей и его дальнейшие обобщения.

Заметим, что для плоских финслеровых метрик асимптотический объем принимает различные значения. А именно, для нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbf{R}^n$

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d_{\|\cdot\|}) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(B_{\|\cdot\|}),$$

где $B_{\|\cdot\|}$ — единичный шар нормы. Эта величина не зависит от нормы только для объема по Буземану.

Целью этого параграфа является следующая

Теорема 6.3.9. *Если функционал n-мерного объема топологически полуэллиптичен, то верно следующее.*

Для любой периодической финслеровой метрики d на $\mathbf{R}^n$ верно неравенство

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d_{\|\cdot\|_{st}}) = \mathrm{vol}(B_{st}, d_{\|\cdot\|_{st}}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d, B_{st} — единичный шар этой нормы.

Доказательство. Обозначим $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{st}$ и $B = B_{st}$. Положим $x_0 = 0$ в определениях стабильной норма и асимптотического объема. Для каждого $r > 1$ определим метрику d_r на B равенством

$$d_r(x,y) = \frac{1}{r} \cdot d(rx, ry).$$

Метрика d_r тоже финслерова (она получается из d масштабированием и заменой координат). Из (6.3.1) следует, что при $r \to \infty$ метрики d_r сходятся к $d_{\|\cdot\|}$ равномерно на $B \times B$. Применяя теорему 6.2.1, получаем

$$\varliminf_{r\to\infty} \mathrm{vol}(B, d_r) \geq \mathrm{vol}(B, d_{\|\cdot\|}). \tag{6.3.3}$$

Заметим, что $\mathrm{vol}(B, d_r) = \frac{1}{r^n}\mathrm{vol}(rB, d)$, так как пространство (B, d_r) изометрично $(rB, \frac{1}{r}d)$ изометрией $x \mapsto rx$. Из (6.3.1) следует, что метрические шары $B_r(0)$ метрики d удовлетворяет соотношениям

$$B_{r-o(r)}(0) \subset rB \subset B_{r+o(r)}(0), \qquad r \to \infty,$$

откуда

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{vol}(B, d_r) = \lim_{r\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(rB, d)}{r^n} = \lim \frac{\mathrm{vol}(B_r(0), d)}{r^n} = \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d).$$

Отсюда и из (6.3.3) следует требуемое неравенство $\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \mathrm{vol}(B, d_{\|\cdot\|})$. $\square$

6.4 Эквивалентность свойств

Свойства, полученные в предыдущих параграфах как следствия полуэллиптичности, на самом деле равносильны ей. А именно, имеет место следующая

Теорема 6.4.1. *Следующие свойства функционала n-мерного финслерова объема эквивалентны.*

1. Он топологически полуэллиптичен.

2. Любой n-мерный диск D в n-мерном нормированном пространстве является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D.

3. Объем полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик.

4. Для любой периодической финслеровой метрики d в $\mathbf{R}^n$ верно, что

$$\operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) \geq \operatorname{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st}),$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d.

Доказательство. Вывод свойств 2, 3 и 4 из полуэллиптичности содержится в теоремах 6.1.2, 6.2.1 и 6.3.9 соответственно. Докажем обратные импликации.

Предположим, что объем не является топологически полуэллиптическим. Тогда существуют конечномерное нормированное пространство X, аффинный диск $E : D^n \to X$ и липшицева поверхность $f : D^n \to X$, такие, что $f|_{\partial D^n} = E|_{\partial D^n}$ и $\operatorname{area}(f) < \operatorname{area}(E)$. Рассмотрим на $\mathbf{R}^n$ и D^n норму $\|\cdot\|$ и метрику d, индуцированные из нормы и метрики пространства X отображениями E и f соответственно. Из условия $f|_{\partial D^n} = E|_{\partial D^n}$ следует, что $d = d_{\|\cdot\|}$ на ∂D, следовательно, (D^n, d) заполняет $(\partial D^n, d_{\|\cdot\|})$. Но

$$\operatorname{vol}(D^n, d) = \operatorname{area}(f) < \operatorname{area}(E|_{D^n}) = \operatorname{vol}(D^n, \|\cdot\|),$$

то есть $(D^n, \|\cdot\|)$ не является минимальным заполнением в классе липшицевых метрик, а значит (по теореме 5.2.3), и в классе финслеровых метрик. Таким образом, свойство 2 не выполняется.

Продолжая построение, рассмотрим евклидов шар $D \subset \mathbf{R}^n$, содержащийся строго внутри куба $[0,1]^n$. На D введем метрику d' (получающуюся масштабированием из построенной выше метрики d), так, что (D, d') заполняет $(\partial D, \|\cdot\|)$ и $\operatorname{vol}(D, d') < \operatorname{vol}(D, \|\cdot\|)$. Для каждого $v \in \mathbf{Z}^n$ рассмотрим шар $D + v$, получающийся из D параллельным переносом на v и снабдим этот шар копией метрики d'. Склеим эти метрики с плоской метрикой $d_{\|\cdot\|}$ на дополнении объединения этих шаров и обозначим через d внутреннюю метрику, индуцированную этим склеиванием. Пусть $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d.

Заметим, что $\|\cdot\|_{st} \geq \|\cdot\|$. Действительно, так как d' заполняет $(D, d_{\|\cdot\|})$, имеем $d'(x, y) \geq \|x - y\|$ для любых $x, y \in \partial D$, следовательно, вклеивание (D, d') вместо $(D, d_{\|\cdot\|})$ может лишь увеличить расстояние между точками дополнения. Отсюда

$d(0,v) \geq \|v\|$ для любого $v \in \mathbf{Z}^n$, так как 0 и v лежат вне вклеиваемых шаров. Отсюда по замечанию 6.3.4 следует, что $\|\cdot\|_{st} \geq \|\cdot\|$. Отсюда $B_{st} \subset B$, где B_{st} и B — единичные шары норм $\|\cdot\|_{st}$ и $\|\cdot\|$ соответственно. Поскольку вклеивание (D, d') вместо $(D, \|\cdot\|)$ уменьшает объем, имеем $\mathrm{vol}_d(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) < \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n)$. Теперь из (6.3.2) следует, что

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) = \mathrm{vol}_d(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \cdot |B_{st}| < \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \cdot |B| = \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|).$$

Сгладив метрику d (чтобы обеспечить периодичность, надо сгладить соответствующую метрику на торе и взять ее поднятие), получим финслерову метрику, для которой это неравенство остается верным, то есть свойство 4 из формулировки теоремы не выполнено.

Чтобы построить пример, опровергающий свойство 3, возьмем построенный выше пример для свойства 4 и применим к нему конструкцию из доказательства теоремы 6.2.1. А именно, для чисел $r \to \infty$ определим метрику d_r на B_{st} равенством $d_r(x,y) = \frac{1}{r} d(rx, ry)$. Тогда $d_r \rightrightarrows d_{\|\cdot\|_{st}}$ на $B_{st} \times B_{st}$, но

$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{vol}(B_{st}, d_r) = \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, d) < \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st}) = \mathrm{vol}(B_{st}, d_{\|\cdot\|_{st}}),$$

то есть свойство полунепрерывности не выполняется. $\square$

Глава 7

Двумерный объем по Холмсу–Томпсону

В этой главе мы рассматриваем только двумерные многообразия и поверхности. В качестве функционала объема всюду рассматривается объем по Холмсу–Томпсону.

7.1 Формулировки

Нам понадобятся некоторые начальные сведения из дифференциальной финслеровой геометрии, которые обобщают стандартные свойства геодезических из римановой геометрии. Доказательства можно найти, например, в [27].

Пусть (M, φ) — финслерово многообразие с гладкой строго выпуклой финслеровой структурой φ. *Геодезическими* в (M, φ) называются гладкие кривые γ, являющиеся критическими точками функционала энергии

$$E(\gamma) = \int \varphi(\dot{\gamma}(t))^2 \, dt.$$

Геодезические задаются уравнением второго порядка (уравнением Эйлера–Лагранжа для лагранжиана φ^2), поэтому геодезическая $\gamma : [0, a] \to M$ однозначно задается начальной точкой $\gamma(0)$, и начальным вектором скорости $\dot{\gamma}(0)$ и интервалом определения $[0, a]$ (и непрерывно зависит от этих данных). Для любой точки $x \in M \setminus \partial M$ и любого вектора $v \in T_x M$ существует геодезическая $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ с $\gamma(0) = x$ и $\dot{\gamma}(0) = v$. В компактном (более общо, полном) многообразии M любая геодезическая либо продолжается до бесконечности, либо заканчивается на краю. Геодезическая, проходимая в обратном направлении, тоже является геодезической (поскольку мы рассматриваем только симметричные финслеровы структуры). Более общо, любые линейные замены параметра переводят геодезические в геодезические. Скорость $\varphi(\dot{\gamma}(t))$ любой геодезической γ постоянна. Далее, если явно не оговорено обратное, все геодезические предполагаются натурально параметризованными.

Геодезические являются локально кратчайшими кривыми метрики d_φ, обратно, любой кратчайший путь в $M \setminus \partial M$ является геодезической (в частности, все кратчайшие гладкие). Кратчайшие геодезические называются также *минимальными.*

Так же, как в римановом случае, определяется экспоненциальное отображение и сопряженные точки. Минимальная геодезическая не имеет сопряженных точек, кроме, возможно, концов. Обратно, если в полном финслеровом многообразии геодезические не имеют сопряженных точек, то экспоненциальное отображение с центром в любой точке является накрытием (теорема Хопфа–Ринова), откуда в случае односвязного многообразия следует, что все геодезические минимальны.

Определение 7.1.1. Будем говорить, что гладкая строго выпуклая финслерова структура на многообразии M обладает *свойством минимальности геодезических*, если любая геодезическая, лежащая внутри M, является минимальной.

Заметим, что из свойства минимальности геодезических следует, что любая геодезическая, один или оба конца которой лежат на краю, но других общих точек с краем нет, тоже минимальна. Действительно, каждая такая геодезическая $\gamma : [a, b] \to M$ может быть получена как предел геодезических вида $\gamma|_{[a+\varepsilon, b-\varepsilon]}$, целиком лежащих внутри многообразия.

Основным результатом этой главы является следующая

Теорема 7.1.2. *Пусть φ_0 — гладкая строго выпуклая финслерова структура на диске D^2, обладающая свойством единственности геодезических. Тогда (M, φ_0) является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на диске (относительно двумерного объема по Холмсу–Томпсону).*

Доказательство теоремы содержится в §§7.2–7.4. Выведем некоторые следствия.

Полуэллиптичность

Следствие 7.1.3. *Двумерный объем по Холмсу–Томпсону топологически полуэллиптичен.*

Доказательство. По теореме 6.4.1 достаточно доказать, что n-мерный аффинный диск D в любом n-мерном нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ является минимальным заполнением в классе всех финслеровых метрик на D. Если норма $\|\cdot\|$ гладкая и строго выпуклая, то этот факт является частным случаем теоремы 7.1.2 (условие минимальности геодезических выполнено, так как геодезические в этом случае — прямые отрезки). В общем случае приблизим норму $\|\cdot\|$ снизу гладкими строго выпуклыми нормами. Минимальность $(D, \|\cdot\|)$ следует из минимальности D с приближающими нормами. $\square$

Неравенство Пу

Следующее следствие показывает, что неравенство Пу [83] для $\mathbf{RP}^2$ верно не только для римановых, но и для финслеровых метрик. Финслерово обобщение неравенства Пу имеет приложения в геометрии выпуклых тел и пространств Минковского, см., например, [19] и [17]. Отметим, что даже в римановом случае доказательство теоремы 7.1.2 дает принципиально новое доказательство неравенства Пу, не опирающееся на теорему об униформизации.

Следствие 7.1.4. *Пусть φ — финслерова метрика на $\mathbf{RP}^2$, и пусть L — длина кратчайшей нестягиваемой петли в $(\mathbf{RP}^2, \varphi)$. Тогда*

$$\operatorname{vol}(\mathbf{RP}^2, \varphi) \geq \frac{2L^2}{\pi},$$

где vol *— двумерный объем по Холмсу–Томпсону.*

Доказательство. Вывод неравенства Пу из заполняющего объема окружности совершенно стандартен. А именно, разрезав $\mathbf{RP}^2$ вдоль кратчайшей нестягиваемой петли, получим диск D^2 с финслеровой метрикой, которую мы тоже обозначим через φ. Край диска в этой метрике имеет длину $2L$. Из минимальности петли следует, что для любых $x, y \in \partial D$ расстояние $d_\varphi(x, y)$ равно длине более короткой из двух дуг края между x и y. Заметим, что для станадартной (римановой) метрики евклидовой полусферы радиуса L/π расстояния между точками края такие же, и при этом полусфера обладает свойством минимальности геодезических. Применяя теорему 7.1.2 к метрике полусферы в качестве φ_0, получаем, что $\operatorname{vol}(D^2.\varphi)$ не меньше площади полусферы, которая равна $2L^2/\pi$. □

Случай равенства

Теорема 7.1.2 содержательна и в римановом случае (и других доказательств, кроме применения финслеровой теоремы, для риманова случая не известно). В римановом случае удается доказать единственность минимального заполнения, то есть жесткость в случае равенства в соответствующем неравенстве. Метод доказательства теоремы 7.1.2 (в отличие от методов главы 10) не позволяет вывести граничную жесткость непосредственно анализом случая равенства. Граничная жесткость была доказана позднее Пестовым и Ульманом [81] принципиально другими методами. Из их результата и теоремы 7.1.2 вытекает

Следствие 7.1.5. *Пусть g — простая по Мичелу риманова метрика на $D = D^2$ (то есть метрика со строго выпуклым краем и без сопряженных точек). Тогда g — единственное (с точностью до изометрии) минимальное заполнение своей границы в классе римановых метрик на D^2.*

Доказательство. По теореме 7.1.2, g является минимальным заполнением. Пусть (D, g') — другое риманово минимальное заполнение пространства (D^2, d_g), докажем что (D, g) и (D, g_1) изометричны.

Сначала докажем, что $d_g = d_{g'}$ на $\partial D \times \partial D$. Предположим противное, и пусть $x, y \in \partial D$ таковы, что $d_{g'}(x, y) > d_g(x, y)$. Пусть γ — кратчайшая метрики g' между x и y, выберем на ней точку $z = \gamma(t_0) \in D \setminus \partial D$. Рассмотрим g' как финслерову метрику, и уменьшим эту финслерову структуру в малой окрестности векторов $v = \dot\gamma(t_0)$ и $-v$. В классе финслеровых метрик (в отличие от римановых) это можно сделать, не меняя длины векторов направлений, далеких от этих двух. Пусть φ — полученная финслерова метрика. Расстояния в d_φ отличаются от $d_{g'}$ только для тех пар точек, кратчайшая между которыми проходит близко к z в направлении, близком к вектору v. Для краевых расстояний это означает, что пара точек близка к (x, y). Следовательно, если изменение метрики и затрагиваемая им область касательного расслоения достаточно малы, то $d_\varphi \geq d_g$ всюду на $\partial D \times \partial D$. С другой стороны, $\mathrm{vol}(D, \varphi) < \mathrm{vol}(D, g') = \mathrm{vol}(D, g)$, что противоречит теореме 7.1.2.

Таким образом, $d_g = d_{g'}$ на $\partial D \times \partial D$. Отсюда и из результата Пестова и Ульмана [81] о граничной жесткости простых метрик в размерности 2 следует, что g и g' изометричны. □

Замечание 7.1.6. В финслеровом случае из равенства объемов изометричность не следует. Для любой метрики φ_0, удовлетворяющей условиям теоремы, существует бесконечномерное семейство попарно неизометричных финслеровых метрик с такими же граничными расстояниями и объемами. Например, любое C^2-малое шевеление функции $d_{\varphi_0}|_{D \times \partial D}$ с фиксированными значениями вблизи $\partial D \times \partial D$ представляет собой функцию расстояния некоторой (возможно, несимметричной) финслеровой метрики, имеющей ту же площадь по Холмсу–Томпсону, что и φ_0. Нетрудно подобрать шевеление так, чтобы полученная метрика была симметричной.

Периодические метрики

Теорема 7.1.2 вместе с общими результатами из главы 6 дает следующее

Следствие 7.1.7. *Пусть φ — периодическая гладкая строго выпуклая финслерова метрика на плоскости. Тогда*

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^2, d_\varphi) \geq \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_{st}), \tag{7.1.1}$$

где $\|\cdot\|_{st}$ — стабильная норма метрики d_φ, AsVol *— асимптотический объем, соответствующий двумерному объему по Холмсу–Томпсону (см. §6.3).*

Равенство в (7.1.1) *достигается тогда и только тогда, когда метрика φ не имеет сопряженных точек.*

Доказательство. Неравенство (7.1.1) следует из теоремы 6.3.9 и следствия 7.1.3. Равенство для метрики без сопряженных точек доказали C. Croke и B. Kleiner в [54] (строго говоря, в [54] рассматривались только римановы метрики, но доказательство почти без изменений переносится на финслеров случай).

Докажем, что из равенства в (7.1.1) следует отсутствие сопряженных точек. Предположим противное, тогда существуют геодезические отрезки, не являющиеся минимальными. По теореме Пуанкаре о возвращении найдется геодезическая γ, у которой есть два непересекающихся интервала параметров, на которых она не минимальна. Пусть t_0 — параметр между этими интервалами. Тогда любая достаточно длинная геодезическая, имеющая в некоторой точке значение и скорость, близкие к $\gamma(t_0)$ и $\dot\gamma(t_0)$ соответственно, тоже не минимальна. Поскольку стабильная норма определяется сколь угодно длинными кратчайшими, малое изменение финслеровой метрики в окрестности вектора $\dot\gamma(t_0) \in T\mathbf{R}^2$ не меняет стабильную норму. Уменьшив метрику в окрестности этого вектора (аналогично доказательству следствия 7.1.5), получим метрику, для которой (7.1.1) нарушается, что противоречит доказанному выше. □

Замечание 7.1.8. Случай равенства в следствии 7.1.7 указывает на правдоподобность финслерова аналога гипотезы Хопфа о метриках без сопряженных точек на торах. Гипотеза состоит в том, что геодезический поток такой метрики гладко сопряжен потоку плоской метрики (соответствующей стабильной норме). Такое гладкое сопряжение с необходимостью должно быть симплектическим изоморфизмом, и, следовательно, сохранять симплектический объем в кокасательном расслоении, а значит, и объем тора по Холмсу–Томпсону. Сохранение стабильной нормы и объема тора влечет сохранение асимптотического объема. Таким образом, случай равенства в следствии 7.1.7 хорошо согласуется с вышеупомянутой гипотезой.

7.2 Свойства геодезических

Этот параграф и два следующих посвящены доказательству теоремы 7.1.2. В доказательстве объемы оцениваются с помощью вспомогательных вложений в пространства вида $\mathbf{R}^n_\infty$ и интегрирования некоторой дифференциальной формы. Эти оценки доказываются в следующем параграфе. Для них требуется, чтобы отображения удовлетворяли определенным ограничениям на производные (эти ограничения выражены в терминах циклического порядка, см. определение 7.3.1). В §7.4 строятся отображения, удовлетворяющие этим ограничениям и и применением к ним калибровочных неравенств доказывается утверждение теоремы. В этом параграфе содержатся простые леммы о поведении геодезических.

Пусть φ — гладкая строго выпуклая финслерова метрика на D^2. Введем сокращенные обозначения: $D = D^2$, $|xy| = d_\varphi(x,y)$. Для касательного вектора $v \in T_xD$

обозначим $\|v\|_x = \varphi(v)$. Через $\|\cdot\|_x^*$ обозначим норму на T_x^*D, двойственную к $\|\cdot\|_x$. Точка x в этих обозначениях может опускаться, если она ясна из констекста. Через B_x и B_x^* обозначим единичные шары норм $\|\cdot\|_x$ и $\|\cdot\|_x^*$, через U_x и U_x^* — их единичные сферы (они гомеоморфны окружности).

Зафиксируем ориентацию диска D, она индуцирует ориентацию (циклический порядок) на окружностях ∂D, U_x и U_x^*.

Для ковектора $u \in U_x^*$ обозначим через $\mathcal{L}(u)$ единственный вектор $v \in U_x$, для которого $u(v) = 1$ (единственность следует из гладкости и строгой выпуклости нормы $\|U_x\|$). Ясно, что $\mathcal{L} : U_x^* \to U_x$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Продолжим $\mathcal{L}$ до положительно однородного гомеоморфизма $\mathcal{L} : T_x^*D \to T_xD$. Как нетрудно видеть, $\mathcal{L}$ — это обратное преобразование Лежандра лагранжиана $\frac{1}{2}\varphi^2$ (но мы не будем этим пользоваться).

Пусть $f : D \to \mathbf{R}$ — липшицева функция. Мы обозначаем ее дифференциал в точке x через $df(x)$, $df(x) \in T_x^*D$, и рассматриваем df как дифференциальную форму с измеримыми коэффициентами на D. Если $df(x)$ определено, обозначим $\operatorname{grad} f(x) = \mathcal{L}(df(x))$ и будем называть $\operatorname{grad} f(x)$ *градиентом* функции f в точке x. Из определения имеем $\|\operatorname{grad} f(x)\|_x = \|df(x)\|_x^*$. Как и в римановом случае, направление градиента есть направление самого быстрого роста функции. В отличие от риманова случая, соответствие $f \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ не линейно.

Пусть $x \in D \setminus \partial D$, $y \in D$. Будем обозначать через $\overrightarrow{xy}$ начальный вектор скорости (в точке x) любой натурально параметризованной кратчайшей, соединяющей x с y. Если такой вектор единственен, будем говорить, что $\overrightarrow{xy}$ *определен однозначно.* По определению, $\overrightarrow{xy} \in U_x \subset T_xD$.

Лемма 7.2.1. *Пусть $f : (D, \varphi) \to \mathbf{R}$ — нерастягивающая функция, дифференцируемая в точке $x \in D \setminus \partial D$. Пусть точка $y \in D$ такова, что $y \neq x$ и*

$$f(y) = f(x) + |xy|.$$

Тогда $\|df(x)\|^* = 1$, вектор $\overrightarrow{xy}$ определен однозначно и $\operatorname{grad} f(x) = \overrightarrow{xy}$.

Доказательство. Пусть $\gamma : [0, a] \to D$ — натурально параметризованная кратчайшая метрики φ, соединяющая x с y. Заметим, что γ гладкая вблизи начала, так как x — внутренняя точка диска. Поскольку функция нерастягивающая, $\|df(x)\|^* \leq 1$ и $f(\gamma(t)) \leq f(x) + t$. С другой стороны, так как $f(y) = f(x) + a$, имеем

$$f(y) - f(\gamma(t)) \leq |y\gamma(t)| = a - t,$$

откуда $f(\gamma(t)) \geq f(x) + t$. Следовательно, $\gamma(t) = f(x) + t$ для всех t, откуда $\|df(x)\|^* = 1$ и $\operatorname{grad} f(x) = \dot{\gamma}(0)$. Поскольку это верно для любой кратчайшей γ, начальные векторы всех таких кратчайших совпадают. $\square$

Лемма 7.2.2. *Пусть $x \in D \setminus \partial D$ и $p_1, p_2, p_3 \in \partial D$ таковы, что векторы $\overrightarrow{xp_1}$, $\overrightarrow{xp_2}$ и $\overrightarrow{xp_3}$ определены однозначно и различны. Тогда эти векторы расположены на U_x в том же циклическом порядке, что и точки p_1, p_2, p_3 на ∂D.*

Доказательство. Пусть γ_i — кратчайшая, соединяющая x с p_i. Из условий следует, что γ_1, γ_2 и γ_3 не имеют общих точек. Действительно, предположим, что например, γ_1 и γ_2 имеют общую точку y. Пусть s_1 и s_2 — участки γ_1 и γ_2 между x и y. Кривые s_1 и s_2 являются кратчайшими как отрезки кратчайших, в частности, их длины равны. Заменив в кривой γ_1 участок s_1 на s_2, получим другую кратчайшую от x к p_1, начальный вектор которой равен $\overrightarrow{xp_2} \neq \overrightarrow{xp_1}$. Это противоречит единственности вектора $\overrightarrow{xp_1}$.

Вырезав из D маленькую круглую окрестность точки x, получим топологический цилиндр, основания которого соединены тремя непересекающимися кривыми. Из теоремы Жордана следует, что циклические порядки концов этих кривых на основаниях цилиндра одинаковы. Осталось заметить, что пересечения кривых γ_i с границей маленькой окрестности точки x расположены в то же циклическом порядке, что и начальные векторы этих кривых. $\square$

Лемма 7.2.3. *Предположим, что φ обладает свойством минимальности геодезических. Тогда для любых $x \in D \setminus \partial D$ и $y \in D$ вектор $\overrightarrow{xy}$ определен однозначно.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае, когда существует кратчайшая $\gamma : [0, a] \to D$, где $\gamma(0) = x$ и $\gamma(a) = y$, внутренность которой не имеет общих точек с краем. Предположим, что существует кратчайшая γ_1 с другим начальным вектором. Построим геодезическую $\gamma_2 : [-\varepsilon, 0] \to D \setminus \partial D$, продолжающую γ. Тогда $\gamma_2 \cup \gamma$ — кратчайшая по свойству минимальности геодезических. Следовательно, $\gamma_2 \cup \gamma_1$ тоже кратчайшая, так как длины кратчайших γ и γ_1 равны. Это невозможно, так как $\gamma_2 \cup \gamma_1$ не гладкая в точке x.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть γ_1 и γ_2 — кратчайшие между x и y с различными начальными векторами. Пусть z — ближайшая к x общая точка кривых γ_1 и γ_2, отличная от x. Тогда участки кривых γ_1 и γ_2 от x до z ограничивают область Ω, внутри которой нет точек края. Выпустим из x геодезическую γ, начальный вектор которой направлен внутрь Ω. Пусть γ впервые пересекает границу области Ω в точке y', лежащей (для определенности) на γ_1. Применяя к участкам кривых γ и γ_1 уже доказанный частный случай, получаем противоречие. $\square$

7.3 Циклические отображения

Мы продолжаем использовать обозначения из предыдущего параграфа.

Определение 7.3.1. Будем называть отображение $f : D \to \mathbf{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, *циклическим* (относительно метрики φ), если его координатные функции f_i удовлетворяют следующим условиям:

1. Все функции f_i — нерастягивающие относительно φ.

2. Для любой точки $x \in D \setminus \partial D$, в которой f_i дифференцируема, $\|df_i(x)\|^* = 1$.

3. Для любых i, j, k, где $1 \le i < j < k \le n$, и $x \in D \setminus \partial D$ таких, что ковекторы $df_i(x)$, $df_j(x)$ и $df_k(x)$ определены и попарно различны, эти ковекторы правильно циклически упорядочены на окружности U_x^*.

Пример 7.3.2. Пусть $p_1, \dots, p_n$ — циклически упорядоченный набор точек на ∂D. Для $i = 1, \dots, n$ определим функцию $f_i : D \to \mathbf{R}$ равенством $f_i(x) = |xp_i|$. Тогда функция $f = (f_1, \dots, f_n)$ — циклическая.

Действительно, все f_i нерастягивающие по неравенству треугольника. Если f_i дифференцируема в точке $x \in D \setminus \partial D$, то применяя лемму 7.2.1 к функции $-f_i$ и точкам x и p_i, получаем, что $\|df_i(x)\| = \|-df_i(x)\| = 1$ (второе требование определения 7.3.1), вектор $\overrightarrow{xp_i}$ определен однозначно и $\operatorname{grad} f_i(x) = -\overrightarrow{xp_i}$. Чтобы проверить третье условие из определения 7.3.1, заметим, что циклический порядок ковекторов $df_i(x)$, $df_j(x)$ и $df_k(x)$ такой же, как соответствующих градиентов или, что то же самое, векторов $\overrightarrow{xp_i}$, $\overrightarrow{xp_j}$ и $\overrightarrow{xp_k}$. Последний совпадает с циклическим порядком точек p_i, p_j, p_k на ∂D по лемме 7.2.2. $\square$

Для липшицева отображения $f = (f_1, \dots, f_n) : D \to \mathbf{R}^n$ положим

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_D \sum_{i=1}^{n} df_i \wedge df_{i+1}, \tag{7.3.1}$$

где индекс $i + 1$ вычисляется по модулю n.

Замечание 7.3.3. Значение $I(f)$ однозначно определяется сужением $f|_{\partial D}$, так как под интегралом стоит дифференциальная 2-форма (с измеримыми коэффициентами), индуцированная липшицевым отображением f из линейной 2-формы $\sum dx_i \wedge dx_{i+1}$ в $\mathbf{R}^n$.

Предложение 7.3.4. *Если $f : D \to \mathbf{R}^n$ — циклическое отображение, то*

$$I(f) \le \operatorname{vol}(M, \varphi).$$

Доказательство. Зафиксируем систему координат в D. Для измеримого множества $E \subset T_x^* D$ будем обозначать через $A(E)$ его координатную меру Лебега (с учетом отождествления $T^* D \simeq \mathbf{R}^2$). Из формул для плотности объема по Холмсу–Томпсону, полученных в главе 3, (см. (3.5.1) в §3.5), следует, что

$$\operatorname{vol}(M, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_B A(B_x^*)\, dx, \tag{7.3.2}$$

где $\int dx$ означает интегрирование относительно координатной меры Лебега на D. Представим интеграл (7.3.1) в виде

$$I(f) = \frac{1}{2\pi} \int_D S(x)\, dx, \tag{7.3.3}$$

где $S(x)$ — отношение формы $\sum df_i \wedge df_{i+1}$ к форме площади dx. Достаточно доказать, что

$$\frac{1}{2} S(x) \le A(B_x^*) \tag{7.3.4}$$

для почти всех $x \in D$. Пусть $x \in D \setminus \partial D$ — такая точка, в которой все функции f_i дифференцируемы (по теореме Радемахера, такие точки образуют множество полной меры). Тогда, по определению циклического отображения, $\|df_i(x)\|_x^* = 1$ для всех i. Мы рассматриваем ковекторы $df_i(x)$ как точки на выпуклой кривой $U_x^* = \partial B_x^*$.

Лемма 7.3.5. *Во введенных обозначениях,*

$$\frac{1}{2} S(x) = A(\operatorname{conv}\{df_1(x), \dots, df_n(x)\}),$$

где conv *— выпуклая оболочка.*

Доказательство. Обозначим $w_i = df_i(x)$. Пусть Δ_i — ориентированный треугольник на (координатной) плоскости с вершинами 0, w_i и w_{i+1} (где индекс $i+1$ берется по модулю n), S_i — ориентированная координатная площадь этого треугольника. Тогда

$$\frac{1}{2} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{w_i \wedge w_{i+1}}{e_1 \wedge e_2} = \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

где e_1, e_2 — стандартный базис координатной плоскости. Таким образом, доказываемое равенство принимает вид

$$\sum S_i = A(\operatorname{conv}\{w_1, \dots, w_n\}). \tag{7.3.5}$$

По определению циклического отображения, $w_i \in \partial B_x^*$ и для любых $i < j < k$ таких, что w_i, w_j и w_k различны, w_i, w_j и w_k правильно циклически упорядочены на границе ∂B_x^* выпуклой фигуры B_x^*. Мы будем пользоваться только этими условиями.

Если все w_i равны между собой, то правая и левая часть в (7.3.5) равны 0. Будем считать, что среди $\{w_i\}$ есть различные. Можно считать, что $w_i \ne w_{i+1}$ при всех i. Действительно, если $w_i = v_{i+1}$, то $S_i = 0$, тогда w_i можно убрать из набора, при этом условие на тройки не нарушится, а правая и левая часть доказываемого тождества не изменится.

Если ковекторы w_i попарно различны, то по условию на тройки эти ковекторы циклически упорядочены на ∂B_x^*. В этом случае замкнутая ломаная $w_1 w_2 \dots w_n$ является выпуклым многоугольником (вписанным в ∂B_x^*), и сумма ориентированных площадей S_i равна площади этого многоугольника.

Осталось рассмотреть случай, когда некоторые из ковекторов w_i совпадают. Для определенности пусть $w_1 = w_k$, где $2 < k < n$. Рассмотрим $i \in \{2, \ldots, k-1\}$ и $j \in \{k+1, \ldots, n\}$, такие, что $v_i \neq v_1$ и $v_j \neq v_1$. Если $w_i \neq w_j$, то циклические порядки троек (w_1, w_i, w_j) и (w_i, w_k, w_j) противоположны (так как $w_i = w_j$), что противоречит условию на тройки. Следовательно, $w_i = w_j$ Таким образом, все ковекторы w_i, не равные w_1, равны между собой, то есть среди ковекторов $\{w_i\}_{i=1}^n$ лишь два различных. Тогда все треугольники Δ_i совпадают с точностью до ориентации, причем положительно и отрицательно ориентированные чередуются. Следовательно, $\sum S_i = 0$. Кроме того, $\operatorname{conv}\{w_1, \ldots, w_n\}$ — отрезок, поэтому правая часть (7.3.5) тоже равна 0. □

Поскольку множество B_x^* выпукло и $df_i(x) \in B_x^*$ для всех i, имеем

$$\operatorname{conv}\{df_1(x), \ldots, df_n(x)\} \subset B_x^*,$$

откуда с учетом леммы 7.3.5 следует (7.3.4). Предложение 7.3.4 доказано. □

Предложение 7.3.6. *Пусть φ обладает свойством минимальности геодезических. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой циклически упорядоченный набор точек $p_1, \ldots, p_n \in \partial D$, что отображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbf{R}^n$, где $f_i(x) = |xp_i|$ удовлетворяет неравенству*

$$I(f) > \operatorname{vol}(D, \varphi) - \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $Q = \{q_i\}_{i=1}^\infty$ — счетное всюду плотное множество в ∂D. Для каждого n построим отображение $f = f^{(n)}$, взяв в качестве точек $p_1, \ldots, p_n$ точки $q_1, \ldots, q_n$, перенумерованные в соответствии с циклическим порядком. Отображение $f^{(n)}$ циклическое (см. пример 7.3.2), поэтому к нему применимы рассуждения из доказательства предложения 7.3.4. Подставляя в (7.3.3) выражение из леммы 7.3.5, получаем

$$I(f^{(n)}) = \frac{1}{\pi} \int_D A(\operatorname{conv}\{df_1(x_1), \ldots, df_n(x)\})\, dx,$$

где $f_i(x) = |xq_i|$. (Здесь используется исходная нумерация точек $\{q_i\}$, при этом равенство остается верным, так как выпуклая оболочка не зависит от порядка точек.) При $n \to \infty$ выражение под интегралом не убывает и стремится к $A(\operatorname{conv}(\{df_i(x)\}_{i=1}^\infty))$, поэтому по теореме Леви

$$\lim_{n\to\infty} I(f^{(n)}) = \int_D A\big(\operatorname{conv}(\{df_i(x)\}_{i=1}^\infty)\big)\, dx. \tag{7.3.6}$$

Докажем, что множество $\{df_i(x)\}_{i=1}^\infty$ плотно в $U_x^* = \partial B_x^*$, если все функции f_i дифференцируемы в x. По лемме 7.2.1, $\operatorname{grad} f_i(x) = -\overrightarrow{xq_i}$, поэтому достаточно доказать, что множество векторов $\overrightarrow{xq_i}$ плотно в U_x.

По лемме 7.2.3, для любой точки $y \in \partial D$ вектор $\overrightarrow{xy}$ определен однозначно и, как следствие, непрерывно зависит от y. Определим $\xi : \partial D \to U_x$ равенством $\xi(y) = \overrightarrow{xy}$. Отображение ξ сюръективно. Действительно, для $v \in U_x$ рассмотрим геодезическую γ с начальным вектором v, продолженную до первого пересечения с краем, которое мы обозначим через y. Эта геодезическая минимальна (по свойству минимальности геодезических), откуда $\xi(y) = \overrightarrow{xy} = v$. Поскольку ξ непрерывно и сюръективно, множество $\{\overrightarrow{xq_i}\}_{i=1}^{\infty} = \xi(Q)$ плотно в U_x.

Следовательно, $\{df_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ плотно в U_x^*. Значит, его выпуклая оболочка содержит внутренность множества B_x^*, откуда

$$A\big(\operatorname{conv}(\{df_i(x)\}_{i=1}^{\infty})\big) = A(B_x^*).$$

Подставляя это равенство в (7.3.6), получаем

$$\lim_{n\to\infty} I(f^{(n)}) = \frac{1}{\pi}\int_D A(B_x^*)\,dx = \operatorname{vol}(D,\varphi),$$

где последнее равенство следует из определения объема по Холмсу–Томпсону, см. (7.3.2). Значит, при достаточно больших n отображение $f = f^{(n)}$ удовлетворяет требуемому неравенству $I(f) > \operatorname{vol}(D,\varphi) - \varepsilon$. □

Замечание 7.3.7. Как уже было отмечено (см. замечание 7.3.3), значение $I(f)$ может быть выражено через $F|_{\partial D}$ с помощью формулы Стокса. Подставляя f из предложения 7.3.6, получим приближенное выражение для объема метрики, удовлетворяющей свойству минимальности геодезических, через ее граничные расстояния. Нетрудно убедиться, что это выражение представляет собой интегральную сумму для соответствующей интегральной формулы Сантало (см. [14, гл.19]).

7.4 Доказательство теоремы 7.1.2

Пусть φ_0 — гладкая строго выпуклая метрика на $D = D^2$, обладающая свойством минимальности геодезических, φ — финслерова метрика на D, заполняющая $(\partial D, d_{\varphi_0})$. Наша цель — доказать, что $\operatorname{vol}(D^2,\varphi) \ge \operatorname{vol}(D^2,\varphi_0)$. По теореме 5.2.3 можно считать, что φ тоже гладкая и строго выпуклая. Обозначим $|xy| = d_\varphi(x,y)$, $|xy|_0 = d_{\varphi_0}(x,y)$. Для метрики φ мы продолжаем использовать обозначения, введенные в предыдущих параграфах.

Для точки $p \in \partial D$ определим функцию $f_p : D \to \mathbf{R}$ равенством

$$f_p(x) = \sup_{q\in\partial D} (|pq|_0 - |xq|). \tag{7.4.1}$$

По компактности супремум в этой формуле достигается. Заметим, что функция f_p нерастягивающая как супремум нерастягивающих функций.

Лемма 7.4.1. *Если $x \in \partial D$, то $f_p(x) = |px|_0$.*

Доказательство. Поскольку $x \in \partial D$ и (D, d_φ) заполняет (D, d_{φ_0}), имеем $|xq| \geq |xq|_0$ для любой точки $q \in \partial D$. Отсюда $|pq|_0 - |xq| \leq |pq|_0 - |xq|_0 \leq |px|_0$ по неравенству треугольника. Следовательно, $f_p(x) \leq |px|_0$. С другой стороны, подставляя $q = x$, получаем $f_p(x) \geq |px|_0 - |xx| = |px|_0$. $\square$

Предложение 7.4.2. *Пусть $p_1, \dots, p_n$ — циклически упорядоченный набор точек на ∂D. Тогда отображение $f : D \to \mathbf{R}^n$, определенное равенством*

$$f = (f_{p_1}, \dots, f_{p_n}), \tag{7.4.2}$$

является циклическим для метрики φ.

Доказательство. Зафиксируем точку $x \in D \setminus \partial D$. Будем называть $q \in \partial D$ *точкой максимума для точки* $p \in \partial D$, если супремум в (7.4.1) достигается в точке q, то есть $f_p(x) = |pq|_0 - |xq|$. Пусть $p \in \partial D$, функция f_p дифференцируема в точке x и $q \in \partial D$ — точка максимума для p. Тогда по лемме 7.4.1,

$$f_p(q) = |pq|_0 = f_p(x) + |xq|,$$

откуда по лемме 7.2.1 следует, что $\|df_p(x)\|^* = 1$, вектор $\overrightarrow{xq}$ определен однозначно и $\operatorname{grad} f_p(x) = \overrightarrow{xq}$.

Ближайшая к x точка максимума для p единственна и соединяется с x минимальной геодезической, имеющей с ∂D только одну общую точку. Действительно, q — ближайшая точка максимума, γ — кратчайшая между x к q. Предположим, что существует точка $q' \in \gamma \cap \partial D$, отличная от q. Тогда $f_p(q') = f_p(x) + |xq'|$, так как $f_p(q) = f_p(x) + |xq|$, $|xq| = |xq'| + |q'q|$ и функция f_p нерастягивающая. Отсюда $f_p(x) = f_p(q') - |xq'| = |pq'|_0 - |xq'|$ по лемме 7.4.1, то есть q' — тоже точка максимума, что противоречит выбору q как ближайшей из таких точек. Таким образом, q является первой точкой края, на геодезической с начальным вектором $\overrightarrow{xq} = \operatorname{grad} f_p(x)$, что определяет ее однозначно.

Подставляя $p = p_i$ в полученное выше равенство $\|df_p(x)\|^* = 1$ получаем, что требование 2 из определения 7.3.1 выполнено для отображения f из 7.4.2. Остается проверить условие на циклические порядки (требование 3 из определения 7.3.1). При этом можно считать, что $n = 3$, так как условие формулируется в терминах троек координатных функций.

Пусть точки $\{p_i\}_{i=1}^3$ таковы, что функции f_{p_i} дифференцируемы в точке x и их дифференциалы $df_{p_i}(x)$ различны. Достаточно проверить, что градиенты $\operatorname{grad} f_{p_i}(x)$ расположены на U_x в том же циклическом порядке, что и точки p_i на ∂D. Для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ пусть q_i — ближайшая к x точка максимума для p_i.

Заметим, что точки q_i различны, поскольку различны векторы $\overrightarrow{xq_i} = \operatorname{grad} f_{p_i}(x)$. По лемме 7.2.2, точки q_i расположены на ∂D в том же циклическом порядке, что и векторы $\overrightarrow{xq_i} = \operatorname{grad} f_{p_i}(x)$ на UT_xD. Таким образом, достаточно доказать, что циклические порядки троек (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3) на ∂D совпадают. В качестве первого шага докажем следующую лемму.

Лемма 7.4.3. *$q_i \neq p_i$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$. Далее, если $i, j \in \{1, 2, 3\}$ и $i \neq j$, то пара точек $\{p_i, q_j\}$ не разделяет пару точек $\{p_j, q_i\}$ на ∂D, при условии, что эти четыре точки (p_i, p_j, q_i, q_j) попарно различны.*

(Мы говорим, что пара точек $\{a, b\}$ на окружности ∂D разделяет пару $\{c, d\}$, если c и d лежат в разных компонентах дополнения $\partial D \setminus \{a, b\}$.)

Доказательство. Предположим противное. Для определенности можно предположить, что $p_1 = q_1$ или $\{p_1, q_2\}$ разделяет $\{p_2, q_1\}$ на ∂D. в обоих случаях, любая кривая в D, соединяющая p_1 и q_2, пересекает (возможно, в одном из концов) любую кривую, соединяющую p_2 и q_1. Пусть z — общая точка двух кратчайших метрики φ, соединяющих p_1 с q_2 и p_2 с q_1. Тогда

$$|p_1q_2|_0 + |p_2q_1|_0 = |p_1z|_0 + |zq_2|_0 + |p_2z|_0 + |zq_1|_0 \geq |p_1q_1|_0 + |p_2q_2|_0$$

по неравенству треугольника. Следовательно,

$$|p_1q_2|_0 - |xq_2| + |p_2q_1|_0 - |xq_1| \geq |p_1q_1|_0 - |xq_1| + |p_2q_2|_0 - |xq_2| = f_{p_1}(x) + f_{p_2}(x).$$

С другой стороны, $|p_1q_2|_0 - |xq_2| \leq f_{p_1}(x)$ и $|p_2q_1|_0 - |xq_1| \leq f_{p_2}(x)$ по определению функций f_{p_i}. Следовательно, все эти неравенства обращаются в равенства, другими словами, обе точки q_1 и q_2 являются точками максимума и для p_1, и для p_2. Это противоречит выбору точек q_i и единственности ближайшей точки максимума. □

Доказанная лемма 7.4.3 сама по себе влечет требуемое совпадение циклических порядков. Докажем эту импликацию. (Это всего лишь комбинаторный факт о шести точках на окружности, который, в принципе, можно проверить полным перебором всевозможных циклических расположений).

Можно считать, что все шесть точек $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ попарно различны. Этого можно достичь малым шевелением (легко видеть, что малое шевеление не нарушает свойства, сформулированного в лемме 7.4.3). Рассмотрим два случая.

Случай 1. Для любой пары (i, j), где $i, j \in \{1, 2, 3\}$ и $i \neq j$, точки p_i и q_i разделяют $\{p_j, q_j\}$ на ∂D. В этом случае существует гомеоморфизм $h : \partial D \to S^1$, отображающий каждую пару (p_i, q_i) в пару диаметрально противоположных точек окружности. Поскольку центральная симметрия окружности сохраняет ориентацию, тройки $\{h(p_i)\}_{i=1}^3$ и $\{h(q_i)\}_{i=1}^3$ упорядочены одинаково. Следовательно, и тройки (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3) упорядочены одинаково.

Случай 2. Пусть, для определенности, $\{p_1, q_1\}$ не разделяет $\{p_2, q_2\}$. По лемме 7.4.3, $\{p_1, q_2\}$ не может разделять $\{p_2, q_1\}$. Следовательно, $\{p_1, p_2\}$ разделяет $\{q_1, q_2\}$. Точки p_1, q_1, p_2 и q_2 разбивают ∂D на четыре дуги: $[p_1, q_1]$, $[q_1, p_2]$, $[p_2, q_2]$ и $[q_2, p_1]$, обозначенные в соответствии с их концами. Мы рассмотрим два подслучая: (2a) $p_3 \in [p_1, q_1]$ и (2б) $p_3 \in [q_1, p_2]$. (Другие возможные расположения точки p_3 сводятся к этим двум заменой индексов 1 и 2.) Покажем, что в обоих подслучаях $q_3 \in [q_1, p_2] \cup [p_2, q_2]$.

(2a) $p_3 \in [p_1, q_1]$. В этом случае p_3 разбивает $[p_1, q_1]$ на две дуги: $[p_1, p_3]$ и $[p_3, q_1]$. Применяя лемму 7.4.3 к $i = 3$ и $j = 1$, получаем, что $q_3 \notin [p_3, q_1]$. Применяя лемму 7.4.3 к $i = 3$ и $j = 2$, получаем, что $q_3 \notin [q_2, p_1] \cup [p_1, p_3]$. Этим однозначно определяется расположение точки q_3 относительно q_1 и q_2, а именно: $q_3 \in [q_1, p_2] \cup [p_2, q_2]$.

(2б) $p_3 \in [q_1, p_2]$. В этом случае p_3 разбивает $[q_1, p_2]$ на две дуги: $[q_1, p_3]$ и $[p_3, p_2]$. Применяя лемму 7.4.3 к $i = 3$ и $j = 2$, получаем, что

$$q_2 \in [p_3, p_2] \cup [p_2, q_2] \subset [q_1, p_2] \cup [p_2, q_2].$$

Поскольку $q_3 \in [q_1, p_2] \cup [p_2, q_2]$, то в обоих подслучаях

$$(q_1, q_3, q_2) \sim (q_1, p_2, q_2) \sim (p_1, q_1, p_2) \sim (p_1, p_3, p_2),$$

где $\sim$ обозначает совпадение циклических порядков. Тем самым предложение 7.4.2 доказано. $\square$

Доказательство теоремы 7.1.2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Применяя предложение 7.3.6 к метрике φ_0, построим такой циклически упорядоченный набор точек $p_1, \dots, p_n \in \partial D$, что отображение $f^0 = (f_1^0, \dots, f_n^0) : D \to \mathbf{R}^n$, заданное равенствами

$$f_i^0(x) = |xp_i|_0,$$

удовлетворяет неравенству

$$I(f^0) > \mathrm{vol}(D, \varphi_0) - \varepsilon.$$

Определим отображение $f : D \to \mathbf{R}^n$ равенством $f = (f_{p_1}, \dots, f_{p_n})$. По лемме 7.4.1 $f(x) = f_0(x)$ при $x \in \partial D$, откуда $I(f) = I(f^0)$ (см. замечание 7.3.3). По предложению 7.4.2, отображение f циклическое, откуда по предложению 7.3.4 следует, что

$$I(f) \le \mathrm{vol}(D, \varphi).$$

Таким образом,

$$\mathrm{vol}(D, \varphi) \ge I(f) = I(f^0) > \mathrm{vol}(D, \varphi_0) - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что $\mathrm{vol}(D, \varphi) \ge \mathrm{vol}(D, \varphi_0)$, что и требовалось доказать. $\square$

7.5 Пример пространства с невыпуклой площадью

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

Теорема 7.5.1. *Существует норма $\|\cdot\|$ в $\mathbf{R}^4$, для которой 2-плотность двумерной площади по Холмсу–Томпсону не является выпукло продолжимой и, как следствие, полуэллиптичной над* $\mathbf{R}$

Норма $\|\cdot\|$ строится в примере 7.5.2. Этот пример полностью аналогичен примерам, построенным в работе Буземана, Эвальда и Шефарда [46], где в качестве интеграндов площади рассматривались проекционные функции произвольных (не обязательно симметричных) выпуклых тел. Пример 7.5.2 отличается от примеров из [46] наличием симметрии (которая необходима для интерпретации проекционной функции как площади по Холмсу–Томпсону) и более простым описанием.

Пример 7.5.2. Пусть B^* — выпуклая оболочка 2π-периодической кривой γ в $\mathbf{R}^4$, заданной равенством

$$\gamma(t) = (\sin t, \cos t, \sin 3t, \cos 3t), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Поскольку $\gamma(t) = -\gamma(t+\pi)$ для всех t, множество B^* центрально симметрично относительно 0. Поскольку координатные функции линейно независимы, B^* является выпуклым телом. Следовательно, B^* является единичным шаром некоторой нормы $\|\cdot\|^*$ на $\mathbf{R}^4$. Пусть $\|\cdot\|$ — норма на $\mathbf{R}^4$, двойственная к $\|\cdot\|^*$.

Пусть θ — 2-плотность в $\mathbf{R}^4$, соответствующая двумерной площади по Холмсу–Томпсону в нормированном пространстве $(\mathbf{R}^4, \|\cdot\|)$. Мы покажем, что θ не является выпукло продолжимой. Зафиксируем введенные обозначения до конца параграфа.

Найдем значение θ на некоторых простых 2-векторах. Пусть где $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^4$. Рассмотрим линейное отображение $I_{v_1,v_2} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, заданное равенством $I_{v_1,v_2}(x,y) = xv_1 + yv_2$. Пусть $I^*_{v_1,v_2} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ — отображение, сопряженное к I_{v_1,v_2}, тогда

$$\theta(v_1 \wedge v_2) = |I^*_{v_1,v_2}(B^*)|,$$

где модуль обозначает евклидову площадь в $\mathbf{R}^2$. Координатное выражение для $I^*_{v_1,v_2}$ имеет вид

$$I^*_{v_1,v_2}(v) = (\langle v, v_1\rangle, \langle v, v_2\rangle) \in \mathbf{R}^2, \qquad v \in \mathbf{R}^4,$$

где угловые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbf{R}^4$. Следовательно,

$$\theta(v_1 \wedge v_2) = |I^*_{v_1,v_2}(B^*)| = \left|\operatorname{conv}\left(\{\gamma_{v_1,v_2}(t)\}_{t\in\mathbf{R}}\right)\right|,$$

где γ_{v_1,v_2} — кривая на плоскости, заданная равенством

$$\gamma_{v_1,v_2}(t) = \big(\langle\gamma(t), v_1\rangle, \langle\gamma(t), v_2\rangle\big) \in \mathbf{R}^2.$$

Подставляя в качестве v_1 и v_2 векторы из стандартного базиса (e_1, e_2, e_3, e_4), получаем

$$\theta(e_1 \wedge e_2) = \bigl|\mathrm{conv}\{(\cos t, \sin t)\}\bigr| = \pi,$$
$$\theta(e_3 \wedge e_4) = \bigl|\mathrm{conv}\{(\cos 3t, \sin 3t)\}\bigr| = \pi,$$

так как в обоих случаях выпуклая облочка — единичный круг. Обозначим через $A(v_1, v_2)$ ориентированную площадь (с учетом кратности), охватываемую кривой γ_{v_1,v_2} на плоскости, то есть

$$A(v_1, v_2) = \int_{0,2\pi} \gamma_{v_1,v_2} \wedge \dot\gamma_{v_1,v_2}\, dt = \int_0^{2\pi} \bigl(\langle\gamma(t), v_1\rangle\langle\dot\gamma(t), v_2\rangle - \langle\gamma(t), v_2\rangle\langle\dot\gamma(t), v_1\rangle\bigr)\, dt$$

(здесь внешнее произведение двух векторов на плоскости интерпретируется как вещественное число). Заметим, что A является билинейной кососимметричной функцией от v_1 и v_2, поэтому ее можно рассматривать как линейную функцию на $\Lambda^2\mathbf{R}^4$, в частности $A(v_1 \wedge v_2) = A(v_1, v_2)$. Поскольку γ_{e_1,e_2} — однократно пройденная единичная окружность, а γ_{e_3,e_4} — троекратно пройденная единичная окружность, имеем

$$A(e_1 \wedge e_2) = \pi,$$
$$A(e_3 \wedge e_4) = 3\pi.$$

При $v_1 = e_1$ и $v_2 = e_2$ кривая γ_{v_1,v_2} является простой, строго выпуклой (то есть имеет строго положительную кривизну) и положительно ориентированной. Эти свойства сохраняются при малых шевелениях в C^2, поэтому для векторов v_1 и v_2, достаточно близких к e_1 и e_2 соответственно, кривая γ_{v_1,v_2} тоже обладает этими свойствами. Для таких кривых охватываемая ограниченная площадь равна площади выпуклой оболочки, следовательно,

$$\theta(v_1 \wedge v_2) = A(v_1 \wedge v_2) \tag{7.5.1}$$

при $v_1 \approx e_1$ и $v_2 \approx e_2$.

Выберем такое $\varepsilon > 0$, что $\theta(v_1, v_2) = A(v_1, v_2)$ при $|v_1 - e_1| \le \varepsilon$ и $|v_2 - e_2| \le \varepsilon$. Обозначим

$$\sigma_0 = 2 \cdot e_1 \wedge e_2,$$
$$\sigma_1 = (e_1 + \varepsilon e_3) \wedge (e_1 - \varepsilon e_4),$$
$$\sigma_2 = (e_1 - \varepsilon e_3) \wedge (e_1 + \varepsilon e_4),$$
$$\sigma_3 = 2\varepsilon^2 \cdot e_3 \wedge e_4.$$

Заметим, что $\sigma_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, откуда в силу линейности функции $A : \Lambda^2\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$

$$A(\sigma_0) = A(\sigma_1) + A(\sigma_2) + A(\sigma_3).$$

По выбору ε имеем $\theta(\sigma_i) = A(\sigma_i)$ при $i = 0, 1, 2$. Из вычисленных ранее значений $\theta(e_3 \wedge e_4) = \pi$ и $A(e_3 \wedge e_4) = 3\pi$ получаем $\theta(\sigma_3) = 2\varepsilon^2\pi$ и $A(\sigma_3) = 6\varepsilon^2\pi = \theta(\sigma_3) + 4\varepsilon^2\pi$. Отсюда

$$\theta(\sigma_0) = A(\sigma_0) = A(\sigma_1) + A(\sigma_2) + A(\sigma_3) = \theta(\sigma_1) + \theta(\sigma_2) + \theta(\sigma_3) + 4\varepsilon^2\pi.$$

Следовательно,

$$\theta(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \theta(\sigma_0) > \theta(\sigma_1) + \theta(\sigma_2) + \theta(\sigma_3).$$

Значит, θ не является выпукло продолжимой. По теореме 2.2.3 отсюда следует, что она не полуэллиптична над $\mathbf{R}$. Теорема 7.5.1 доказана.

Пример цепи малой площади

Теорема 2.2.3 гарантирует существование вещественной цепи, граница которой равна границе некоторого треугольника в плоскости (e_1, e_2), но площадь которой меньше площади этого треугольника. Однако доказательство теоремы 2.2.3 неконструктивно и не позволяет выяснить, как устроена эта цепь. Ниже такая цепь предъявляется в явном виде. Интересно, что эта цепь получается умножением на коэффициент вида $1/n$, $n \in \mathbf{N}$, из целочисленной цепи, параметризованной двумерным диском. (Отличие от цепей, рассматриваемых в определении топологической полуэллиптичности, состоит в том, что граница диска n-кратно наматывается на границу треугольника).

А именно, мы построим такую кусочно линейную поверхность β, параметризованную выпуклым многоугольником на плоскости, что граница этой поверхности является отображением степени n в границу треугольника Δ в плоскости (e_1, e_2), но $A_\theta(\beta) < n \cdot A_\theta(\Delta)$, где n — достаточно большое натуральное число. Определим функцию $\delta : \Lambda^2_s(\mathbf{R}^4) \to \mathbf{R}$ равенством $\delta(\sigma) = \theta(\sigma) - A(\sigma)$, где σ и A — те же, что раньше. Тогда требуемое неравенство $A_\theta(\beta) < n \cdot A_\theta(\Delta)$ эквивалентно тому, что

$$\int_\beta \delta = A_\theta(\beta) - \int_\beta A < 0,$$

так как интеграл линейной 2-формы A по β зависит только от границы $\partial\beta$ и в данном случае равно $n \int_\Delta A = nA_\theta(\Delta)$.

Зафиксируем такое $\alpha > 0$, что $\theta(\sigma) = A(\sigma)$ для любого простого 2-вектора σ в $\mathbf{R}^4$, ассоциированная плоскость которого образует угол меньше 3α с плоскостью (e_1, e_2), см. (7.5.1).

Сначала опишем триангуляцию поверхности. Пусть n достаточно велико. Пусть $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_{3n} b_{3n}$ — правильный $(6n)$-угольник на плоскости с центром в начале координат O, и пусть $c_1 \dots c_{3n}$ — достаточно большой $(3n)$-угольник, полученный из $a_1 \dots a_{3n}$ гомотетией с центром в O. Разобьем многоугольник $Q = c_1 \dots c_{3n}$ на многоугольник $a_1 \dots a_{3n}$ и треугольники $a_i b_i a_{i+1}$, $a_i c_i b_i$, $b_i c_{i+1} a_{i+1}$ и $b_i c_i c_{i+1}$ (все индексы рассматриваются по модулю $3n$). Мы построим искомую поверхность в виде отображения $\beta : Q \to \mathbf{R}^4$, которое является аффинным на каждом элементе этого разбиения.

Образы вершин a_i определим равенством $\beta(a_i) = p_i$, где $p_1 \dots p_{3n}$ — положительно ориентированный правильный $(3n)$-угольник в плоскости $(e_3, e_4) \subset \mathbf{R}^4$, вписанный в единичную окружность с центром в начале координат. Пусть $\varepsilon(n) = |p_i p_{i+1}|$, то есть $\varepsilon(n)$ — длина сторона этого многоугольника (в евклидовой метрике).

Пусть $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^4$ — единичные векторы в плоскости $(e_3, e_4) \subset \mathbf{R}^4$, образующие углы $2\pi/3$ друг с другом. Положим

$$\beta(b_i) = q_i := \frac{p_i + p_{i+1}}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{\alpha} \cdot v_{i \bmod 3}$$

для $i = 1, \ldots, 3n$. Это определяет образы треугольников $a_i b_i a_{i+1}$ при отображении β, эти образы являются узкими равнобедренными треугольниками, боковые стороны которых почти параллельны (образуют углы, меньшие α) с векторами v_1, v_2, v_3. Наконец, выберем достаточно большое $R \gg n$ и положим

$$\beta(c_i) = r_i := R \cdot \frac{v_{(i-1) \bmod 3} + v_{i \bmod 3}}{2}.$$

Теперь заданы образы всех вершин и тем самым определено отображение $\beta : Q \to \mathbf{R}^4$. Заметим, что сужение отображения β на ∂Q является n-кратным обходом границы треугольника $\Delta = \triangle r_1 r_2 r_3$, лежащего в плоскости (e_1, e_2).

Докажем, что $\int_\beta \delta < 0$ при условии, что n и R достаточно велики. Заметим, что при достаточно большом R (например, при $R > 10/\varepsilon(n)$), образы треугольников, содержащих точки c_i почти параллельны плоскости (e_1, e_2) в том смысле, что их ориентированные двумерные направления (3α)-близки к (e_1, e_2). Следовательно $\delta = 0$ на этих треугольниках, таким образом, интеграл $\int_\beta \delta$ складывается интеграла по многоугольнику $p_1 \ldots p_{3n}$ и интегралов по треугольникам $p_i q_i p_{i+1}$. Первый из них отрицателен и отделен от 0 (при $n \to \infty$), так как $\delta < 0$ на плоскости (e_3, e_4) и площадь многоугольника стремится к положительной константе (а именно, к π). С другой стороны, суммарная площадь треугольников $p_i q_i p_{i+1}$ стремится к 0 при $n \to \infty$, а с ней стремится к 0 и сумма соответствующих слагаемых в $\int_\beta \delta$. Следовательно, при достаточно большом n отрицательный вклад многоугольника $p_1 \ldots p_{3n}$ превосходит возможный положительный вклад треугольников $p_i q_i p_{i+1}$ и, значит, $\int_\beta \delta < 0$.

Таким образом, $A_\theta(\beta) < n \cdot A_\theta(\Delta)$. Следовательно, цепь $s = \frac{1}{n}\beta$ удовлетворяет соотношениям $\partial s = \partial\Delta$ и $A_\theta(s) < A_\theta(\delta)$, что дает явный пример цепи, опровергающей полуэллиптичность 2-плотности θ над $\mathbf{R}$.

Глава 8

Объем по Лёвнеру

В этой главе в качестве финслерова объема всюду рассматривается объем по Лёвнеру (вписанный риманов объем).

8.1 Свойство сжатия

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 8.1.1. *Пусть X — нормированное пространство, $Y \subset X$ — n-мерное линейное подпространство. Тогда существует такое непрерывное линейное отображение $P\colon X \to Y$, что*

1. P является проектором на Y, то есть $P|_Y = id_Y$.

2. Для любой n-мерной липшицевой поверхности $f : M \to X$ верно, что

$$\operatorname{area}(P \circ f) \leq \operatorname{area}(f), \tag{8.1.1}$$

где area *— площадь, порождаемая функционалом n-мерного объема по Лёвнеру.*

3. Равенство в (8.1.1) *достигается тогда и только тогда, когда для почти всех точек $x \in M$, в которых касательная финслерова структура φ_x метрики f^*d_X невырождена, дифференциал $d_x(P \circ f) : T_xM \to Y$ отображения $P \circ f$ переводит эллипсоид Джона нормы φ_x в эллипсоид Джона сужения нормы $\|\cdot\|_X$ на Y (или, эквивалентно, $d_x(P \circ f)$ является изометрией между соответствующими евклидовыми структурами на T_xM и Y).*

Доказательство. Сначала предположим, что пространство X — сопряженное к сепарабельному. В этом случае по следствию 4.5.3 достаточно построить проектор, не увеличивающий n-мерную площадь на n-мерных линейных подпространствах пространства X и сохраняющих ее только для тех подпространств, для которых он индуцирует изометрию вписанных евклидовых структур.

Пусть Q_Y — квадратичная форма на Y, соответствующая эллипсоиду Джона сужения нормы $\|\cdot\|_X$ на Y (в частности, $Q_Y \ge \|\cdot\|_X^2$ на Y). Применяя предложение 3.1.1 к подпространству Y, снабженному сужением нормы $\|\cdot\|_X$, получаем набор нерастягивающих линейных функций $L_i : Y \to \mathbf{R}$ и коэффициентов $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \dots, N$, таких, что $\sum \lambda_i = n$ и $Q_Y = \sum \lambda_i L_i^2$. По теореме Хана–Банаха функции L_i продолжаются до нерастягивающих линейных функций $\tilde{L}_i : X \to \mathbf{R}$. Рассмотрим квадратичную форму Q на X, заданную равенством $Q(x) = \sum \lambda_i \tilde{L}_i^2$. По построению имеем $Q|_Y = Q_Y$. Обозначим через area_Q n-мерную площадь относительно евклидовой полунормы $\sqrt{Q}$ в X.

Докажем, что $\mathrm{area}_Q \le \mathrm{area}$ на любом n-мерном линейном подпространстве $W \subset X$. Напомним, что под площадью мы понимаем вписанный риманов объем индуцированной метрики. Пусть $|\cdot|_W$ — евклидова норма на W, единичный шар которой является эллипсоидом Джона сужения нормы $\|\cdot\|_X$ на W. Тогда на W по определению имеем $|\cdot|_W \ge \|\cdot\|_X$ и $\mathrm{vol}_{|\cdot|_W} = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|_X}$. Из неравенства $|\cdot|_W \ge \|\cdot\|_X$ следует, что сужения $\tilde{L}_i|_W$ являются нерастягивающими относительно нормы $|\cdot|_W$, следовательно

$$\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}(L_i^2|_W) \le 1,$$

откуда

$$\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}(Q|_W) \le \sum \lambda_i = n.$$

По неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для собственных чисел формы $Q|_W$ относительно евклидовой нормы $|\cdot|_W$ отсюда следует, что

$$\det_{|\cdot|_W}(Q|_W) \le \left(\tfrac{1}{n}\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}(Q|_W)\right)^n \le 1. \tag{8.1.2}$$

(Здесь $\mathrm{trace}_{|\cdot|_W}$ и $\det_{|\cdot|_W}$ обозначают соответственно след и определитель квадратичной формы в евклидовом пространстве $(W, |\cdot|_W)$.) Следовательно, форма объема на W, определяемая квадратичной формой $Q|_W$, не превосходит формы объема, определяемой нормой $|\cdot|_W$. Таким образом, $\mathrm{area}_Q \le \mathrm{area}$ на W.

Из неравенства $Q(x) \ge \|x\|_X^2$ для всех $x \in Y$ следует, что на подпространстве Y выполняется неравенство $\mathrm{area}_Q \ge \mathrm{area}$, откуда $\mathrm{area}_Q = \mathrm{area}$ на Y.

Пусть $P : X \to Y$ — ортогональная проекция X на Y относительно квадратичной формы Q. Непрерывность (относительно $\|\cdot\|$) отображения P следует из неравенства

$$Q(x) \le \sum \lambda_i \|x\|^2 = n\|x\|^2$$

для любого $v \in X$. Поскольку ортогональная проекция не увеличивает длины векторов, она не увеличивает и площадь, вычисляемую относительно Q, значит,

$$\mathrm{area}(P(A)) = \mathrm{area}_Q(P(A)) \le \mathrm{area}_Q(A) \le \mathrm{area}(A) \tag{8.1.3}$$

для любого измеримого A, лежащего в n-мерном линейном подпространстве $W \subset X$. Следовательно, проектор P не увеличивает n-мерные площади.

Если P сохраняет площади на подпространстве W, то в полученных выше неравенствах должны достигаться равенства. Равенство в (8.1.2) достигается только тогда, когда $Q|_W = |\cdot|_W^2$. Равенство в первом неравенстве из (8.1.3) достигается только тогда, когда $P|_W : W \to Y$ является изометрией между $Q|_W$ и $Q|_Y = Q_Y$. Следовательно, P_W сохраняет площади на W тогда и только тогда, когда $P|_W$ реализует изометрию между вписанными евклидовыми структурами нормы $\|\cdot\|$ на подпространствах W и Y.

Таким образом, теорема доказана в случае, когда пространство X — двойственное к сепарабельному. Рассмотрим общий случай. Пусть $S = \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное подмножество единичной сферы подпространства Y. Для каждого i по теореме Хана–Банаха существует нерастягивающее линейное отображение $f_i : X \to \mathbf{R}$, такое, что $f_i(s_i) = 1$. Определим линейное отображение $f : X \to \ell_\infty$ формулой

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots).$$

Это отображение — нерастягивающее, поскольку таковыми являются все f_i. При этом сужение $f|_Y$ — изометрическое. Действительно, для любого $x \in Y$ с $\|x\|_X = 1$ имеем

$$\|f(x)\|_{\ell_\infty} = \sup_i f_i(x) \geq \sup_i (f_i(s_i) - \|x - s_i\|_X) = \sup_i (1 - \|x - s_i\|_X) = 1,$$

так как f нерастягивающее и S плотно в единичной сфере подпространства Y. Пространство ℓ_∞ сопряжено сепарабельному пространству ℓ_1, поэтому по уже доказанному существует проектор $P_0 : \ell_\infty \to f(Y)$, не увеличивающий n-мерные площади. Тогда отображение $P = (f|_Y)^{-1} \circ P_0 \circ f$ — искомое. $\square$

Следствие 8.1.2. *Функционал n-мерного объема по Лёвнеру полуэллиптичен над* $\mathbf{R}$ *для любого n.*

Доказательство. Достаточно проверить, что в любом конечномерном нормированном пространстве $(V, \|\cdot\|)$ n-плотность $\theta : \Lambda_s^n V \to \mathbf{R}$, определяемая n-мерным объемом по Лёвнеру, является выпукло продолжимой. Последнее эквивалентно тому, что для любого набора простых n-векторов $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Lambda_s^n V$, сумма которых тоже является простым n-вектором, верно неравенство

$$\theta(\sigma_1 + \dots + \sigma_m) \leq \theta(\sigma_1) + \dots + \theta(\sigma_m).$$

Пусть Y — n-мерное подпространство, ассоциированное с n-вектором $\sigma = \sum \sigma_i$, и пусть $P : V \to Y$ — проектор из теоремы 8.1.1. Этот проектор индуцирует линейное отображение $P_* : \Lambda^n V \to \Lambda^n Y \subset \Lambda_s^n V$. Из свойств проектора имеем

$$\theta(\sigma) = \theta(P_*(\sigma)) = \theta\big(\sum P_*(\sigma_i)\big) \leq \sum \theta(P_*(\sigma_i)) \leq \sum \theta(\sigma_i),$$

что и требовалось доказать. Здесь первое неравенство следует из того, что все n-векторы $P_*(\sigma_i)$ лежат в одномерном подпространстве $\Lambda^n Y \subset \Lambda^n_s V$, второе — из того, что P не увеличивает θ-площади. $\square$

8.2 Пределы по Громову–Хаусдорфу

Из теоремы 6.2.1 и следствия 8.1.2 следует, что объем по Лёвнеру полунепрерывен снизу относительно равномерной сходимости метрик. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о полунепрерывности объема относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу.

Расстояние по Громову–Хаусдорфу $d_{GH}(X, Y)$ между метрическими пространствами X и Y определяется следующим образом (см. [66] или [6, §7.3]): для $\varepsilon > 0$ неравенство $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$ эквивалентно тому, что существует метрическое пространство Z и множества $X', Y' \subset Z$ такие, что X' изометрично X, Y' изометрично Y и хаусдорфово расстояние в Z между X' и Y' меньше ε. (Последнее означает, что $X' \subset U_\varepsilon(Y')$ и $Y' \subset U_\varepsilon(X')$, где U_ε — ε-окрестность множества.)

Расстояние d_{GH} является метрикой на "пространстве" классов изометричности метрических компактов. По определению, последовательность $\{X_k\}_{k=1}^\infty$ метрических пространств сходится по Громову–Хаусдорфу к метрическому пространству X (обозначение: $X_k \xrightarrow[GH]{} X$), если $d_{GH}(X_k, X) \to 0$. Мы будем пользоваться не этим определением, а его эквивалентной переформулировкой, приводимой ниже.

Определение 8.2.1. Пусть X и Y – метрические пространства, $f : X \to Y$ – отображение (не обязательно непрерывное!) и $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что f является *ε-изометрией*, если выполнены два условия:

(1) $f(X)$ образует ε-сеть в Y;

(2) $|d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| < \varepsilon$ для любых $x, x' \in X$.

Нижняя грань тех ε, для которых f является ε-изометрией, будем называть *погрешностью* отображения φ и обозначать через $\mathrm{err}(\varphi)$.

Отметим, что для любых двух отображений $f_1, f_2 : X \to Y$ имеет место неравенство
$$|\operatorname{err}(f_1) - \operatorname{err}(f_2)| < 2d_{\sup}(f_1, f_2),$$
где
$$d_{\sup}(f_1, f_2) := \sup_{x \in X}\{d_Y(f_1(x), f_2(x))\}.$$
Легко убедиться (см. [6]), что

(1) если $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, то существует (2ε)-изометрия $\varphi : X \to Y$;

(2) если существует ε-изометрия $\varphi : X \to Y$, то $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$.

Отсюда следует, что последовательность $\{X_k\}$ метрических пространств сходится к метрическому пространству X тогда и только тогда, когда существует последовательность отображений $f_k : X_k \to X$ с $\operatorname{err}(f_k) \to 0$. Такие последовательности будут называться *последовательностями почти изометрий*.

Если топология пространства X достаточно хорошая (например, X является многообразием), то почти изометрии можно сделать непрерывными, см. предложение 8.3.1

Замечание 8.2.2. Равномерная сходимость метрик на одном пространстве — частный случай сходимости по Громову–Хаусдорфу. В этом случае в качестве почти изометрий можно взять тождественное отображение.

Далее мы ограничиваемся случаем, когда сходящиеся и предельное пространства являются многообразиями, имеющими одинаковую размерность $n \geq 2$.

Нетрудно убедиться, что даже риманов объем на классе замкнутых многообразий не полунепрерывен снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу. Действительно, нетрудно проверить, что любое компактное пространство с внутренней метрикой можно получить как предел по Громову–Хаусдорфу последовательности конечных графов. Вложив эти графы в $\mathbf{R}^n$ и заменив каждый граф на удвоение его малой окрестности (со сглаженным краем), получим последовательность $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнутых n-мерных римановых многообразий, сходящуюся по Громову–Хаусдорфу к наперед заданному компакту с внутренней метрикой и такую, что $\operatorname{vol}(M_k) \to 0$. Мы докажем полунепрерывность объема при некоторых топологических ограничениях. В следующем параграфе обсуждаются достаточные условия для выполнения этих ограничений.

Пусть M и M' — многообразия одинаковой размерности, $f : M' \to M$ — непрерывное отображение. Пусть $U \subset M'$ — открытое множество, $U \cap \partial M' = \emptyset$. Будем говорить, что f *имеет ненулевую степень над* U, если сужение f на $f^{-1}(U) \setminus \partial M'$, рассматриваемое как отображение в U, является собственным (то есть прообраз любого компакта компактен) и имеет ненулевую топологическую степень над $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$. Отображение $f : M' \to M$ *имеет ненулевую степень*, если оно имеет ненулевую степень над $M \setminus \partial M$. (Как нетрудно видеть, из этого следует, что $f(\partial M') \subset \partial M$.)

Теорема 8.2.3. *Пусть* (M, d), (M_k, d_k), $k = 1, 2, \dots,$ *—* n*-мерные многообразия с липшицевыми метриками. Предположим, что существует последовательность непрерывных почти изометрий* $f_k : (M_k, d_k) \to (M, d)$, *которые, начиная с некоторого* k, *имеют ненулевую степень. Тогда*

$$\operatorname{vol}(M, d) \leq \varliminf_{k \to \infty} \operatorname{vol}(M_k, d_k)$$

где vol *—* n*-мерный объем по Лёвнеру.*

Доказательство. Докажем чуть более общее утверждение: если существуют такие непрерывные отображения $f_k : M_k \to M$, имеющие ненулевую степень и такие, что

$$d(f_k(x), f_k(y)) \le d_k(x, y) + \delta_k \tag{8.2.1}$$

для некоторой последовательности $\delta_k \to 0$, то

$$\mathrm{vol}(M, d) \le \varliminf_{k\to\infty} \mathrm{vol}(f_k^{-1}(M), d_k).$$

Условие выдерживает уменьшение метрики d, поэтому по предложениям 4.1.5 и 4.3.2(3) достаточно доказать утверждение для случая, когда метрика d допускает изометрическое отображение $h : (M, d) \to \mathbf{R}^N_\infty$ для некоторого N. Для краткости обозначим норму пространства $\mathbf{R}^N_\infty$ через $\|\cdot\|$.

Для каждого k определим метрику d'_k на формальном объединении $M \cup M_k$ следующим образом:

$$d'_k(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & x, y \in M \\ \inf_{x'\in M_k}\{d_k(x,x') + \delta_k + d(f_k(x'),y)\}, & x \in M_k,\ y \in M \\ \min\left\{d_k(x,y), \inf_{z\in M}\{d'_k(x,z) + d'_k(y,z)\}\right\}, & x, y \in M_k \end{cases}$$

(в третьем случае используется значение d'_k, определенное во втором случае). Неравенство треугольника для d'_k следует из (8.2.1). Отметим, что $d'_k \le d_k$ на M_k и $d'_k(x, f_k(x)) = \delta_k$ для всех $x \in M_k$. Пользуясь предложению 5.3.1, продолжим отображение $h : (M, d) \to V$ до нерастягивающего отображения $h'_k : (M \cup M_k, d'_k) \to \mathbf{R}^N_\infty$. Обозначим $h'_k|_{M_k}$ через $h_k : M_k \to \mathbf{R}^N_\infty$. Из свойств метрики d_k получаем, что

$$\|h_k(x) - h(f_k(x))\| \le \delta_k \tag{8.2.2}$$

для всех $x \in M_k$, и h_k — нерастягивающее относительно d_k. Из последнего следует, что $\mathrm{area}(i_k) \le \mathrm{vol}(M_k, d_k)$, где area — n-мерная площадь по Лёвнеру. Поскольку отображение h изометрическое, имеем $\mathrm{area}(h) = \mathrm{vol}(M, d)$. Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\mathrm{area}(h) \le \varliminf_{k\to\infty} \mathrm{area}(h_k). \tag{8.2.3}$$

По теореме Радемахера h дифференцируемо почти всюду. Его дифференциал $d_x h$ является борелевской функцией от x, следовательно, он аппроксимативно непрерывен почти всюду. Отметим также, что точки, где дифференциал вырожден т. е. имеет ранг меньше n), вносят нулевой вклад в площадь $\mathrm{area}(h)$. Пусть $p \in M \setminus \partial M$ — такая точка, что h дифференцируемо в p, $d_p h$ невырожден дифференциал dh аппроксимативно непрерывен в точке p. Обозначим $L = d_p h : T_x M \to \mathbf{R}^N_\infty$. Зафиксируем систему координат в окрестности p так, что $p = 0$ в этих координатах. Обозначим через B_r

координатный евклидов шар радиуса r с центром в нуле. Тогда, в силу аппроксимативной непрерывности производных отображения h,

$$\frac{\operatorname{area}(h|_{B_r})}{\operatorname{area}(L(B_r))} \to 1, \qquad r \to 0.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $r > 0$ столь малым, что

$$\|h(x) - L(x)\| < \varepsilon r \tag{8.2.4}$$

для любого $x \in B_r$ (здесь используется то, что $L = d_0 h$) и

$$\operatorname{area}(h|_{B_r}) < (1+\varepsilon) \operatorname{area}(L(B_r)). \tag{8.2.5}$$

Выберем k столь большим, что $\delta_k < \varepsilon r$. Тогда для любого $x \in f_k^{-1}(B_r)$ имеем

$$\|h_k(x) - L(f_k(x))\| \leq \|h_k(x) - h(f_k(x))\| + \|h(f_k(x)) - L(f_k(x))\| < 2\varepsilon r \tag{8.2.6}$$

в силу (8.2.2) и (8.2.4). Рассмотрим n-мерное линейное подпространство

$$Y = L(T_x M) \subset \mathbf{R}^N_\infty.$$

По теореме 8.1.1 существует проектор $P : \mathbf{R}^N_\infty \to Y$, не увеличивающий n-мерные площади. Существует такая константа $C > 0$, зависящая только от P, что

$$\|z - P(z)\| \leq C \operatorname{dist}(z, Y)$$

для всех $z \in \mathbf{R}^N_\infty$, где расстояние в правой части измеряется в норме $\|\cdot\|$. Подставляя $z = h_k(x)$ и учитывая (8.2.6) получаем

$$\|P(h_k(x)) - h_k(x)\| \leq 2C\varepsilon r$$

для всех $x \in f_k^{-1}(B_r)$. Отсюда из (8.2.6) следует, что

$$\|P(h_k(x)) - L(f_k(x))\| \leq 2(C+1)\varepsilon r \tag{8.2.7}$$

для всех $x \in f_k^{-1}(B_r)$. Поскольку f_k имеет ненулевую степень, отображение $f_k|_{f_k^{-1}(B_r)}$ как отображение со значениями в B_r является собственным отображением ненулевой степени. Значит, таковым является и $L \circ f_k|_{f_k^{-1}(B_r)}$, рассматриваемое как отображение в аффинный диск $L(B_r)$. Отсюда и из (8.2.7) следует, что $P \circ h_k|_{f_k^{-1}(B_r)}$ имеет ненулевую степень над меньшим аффинным диском $L(B_{r'})$, где

$$r' = r - 2C_1(C+1)\varepsilon r = (1 - C_2\varepsilon) r,$$

где $1/C_1$ — минимальное значение нормы $\|\cdot\|$ на краю аффинного диска $L(B_1)$, $C_2 = 2C_1(C+1)$. (Мы считаем, что ε достаточно мало, так что $1 - C_2\varepsilon > 0$.) Значит, образ $P \circ h_k(f_k^{-1}(B_r))$ содержит указанный меньший диск, откуда

$$\operatorname{area}(h_k|_{f_k^{-1}(B_r)}) \geq \operatorname{area}(P \circ h_k|_{f_k^{-1}(B_r)} \geq \operatorname{area}(L|_{B_{r'}}) = (1 - C_2\varepsilon)^n \operatorname{area}(L|_{B_r}),$$

где первое неравенство следует из того, что P не увеличивает площади. Отсюда и из (8.2.5) следует, что

$$\operatorname{area}(h_k|_{f_k^{-1}(B_r)}) \ge (1 - C_2\varepsilon)^n (1+\varepsilon)^{-1} \operatorname{area}(h|_{B_r}).$$

Поскольку числовой множитель в правой части стремится к 1 при $\varepsilon \to 0$, это неравенство доказывает, что для любого $\sigma > 0$ найдется такое $r > 0$, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \operatorname{area}(h_k|_{f_k^{-1}(B_r)}) \ge (1-\sigma) \operatorname{area}(h|_{B_r}).$$

Отсюда стандартным рассуждением с покрытиями (как в доказательстве теоремы 6.2.1) выводится, что

$$\varliminf_{k\to\infty} \operatorname{area}(h_k) \ge (1-\sigma) \operatorname{area}(h).$$

В силу произвольности σ отсюда следует (8.2.3), что и требовалось доказать. $\square$

8.3 Достаточные условия полунепрерывности

Далее в этой главе рассматриваются только компактные пространства с положительными внутренними метриками.

Предложение 8.3.1. *Пусть $X_k \xrightarrow[GH]{} X$, где X — метрический компакт (с положительной метрикой), гомеоморфный окрестностному ретракту евклидова пространства. Тогда существует последовательность почти изометрий $\varphi_k : X_k \to X$, в которой все отображения φ_k непрерывны.*

Доказательство. Пусть $i : X \to \mathbf{R}^n$ — вложение, $U \subset \mathbf{R}^n$ — окрестность множества $i(X)$, $p : U \to i(X)$ — ретракция. Выберем какую-нибудь последовательность почти изометрий $f_k : X_k \to X$ и положим $\varepsilon_k = \operatorname{err}(f_k)$. Для каждого k построим конечную ε_k-сеть $S_k \subset X_k$ и определим отображение $i_k : X_k \to \mathbf{R}^n$ формулой

$$i_k(x) = \frac{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y)) \cdot i(f_k(y))}{\sum_{y\in S_k} w_k(d(x,y))},$$

где $w_k : [0,\infty) \to \mathbf{R}$ — любая непрерывная функция, положительная на $[0, 2\varepsilon_k)$ и равная нулю на $[2\varepsilon_k, \infty)$. Ясно, что отображение i_k всюду определено и непрерывно. Пусть x – любая точка пространства X_k. Для всех $y \in S_k$ таких, что $w_k(d(x,y)) > 0$, выполняется неравенство $d(f_k(x), f_k(y)) < 3\varepsilon_k$, поэтому

$$|i_k(x) - i(f_k(x))| \le \sup\{|i(y') - i(f_k(x))| : y' \in U_{3\varepsilon_k}(f_k(x)) \subset X\}.$$

В силу равномерной непрерывности отображения i отсюда следует, что

$$\sup_{x\in X_k} \{|i_k(x) - i(f_k(x))|\} \to 0, \qquad k\to\infty$$

Поэтому для всех достаточно больших k определено (непрерывное) отображение

$$\varphi_k = i^{-1} \circ p \circ i_k : X_k \to X,$$

и расстояние между φ_k и $f_k = i^{-1} \circ p \circ (i \circ f_k)$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Значит, $\mathrm{err}(\varphi_k) \to 0$. Для остальных значений k (их конечное число) в качестве φ_k можно выбрать произвольные непрерывные отображения из X_k в X. $\square$

Замечание 8.3.2. Вообще говоря, не существует аналогичной последовательности непрерывных отображений $\varphi'_k : X \to X_k$ с $\mathrm{err}(\varphi'_k) \to 0$. Например, пусть X – стандартная двумерная сфера, а X_k гомеоморфно тору и получается из X "приклеиванием" ручки диаметра меньше $1/k$. Тогда $X_k \to X$, но любое непрерывное отображение $\varphi : X \to X_k$ имеет погрешность не меньше π, так как отображает какие-то две противоположные точки сферы в одну.

Замечание 8.3.3. Существование "обратных" непрерывных почти изометрий можно обеспечить наложением некоторых метрических ограничений. Пусть X и X_k имеют ограниченные размерности и *равномерно локально стягиваемы*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что в любом из этих пространств любой шар радиуса δ стягиваем в шаре радиуса ε. Тогда, как показано в [82], начиная с некоторого k пространства X_k гомотопически эквивалентны X. На самом деле гомотопические эквивалентности можно реализовать парами отображений $\varphi_k : X \to X_k$ и $\varphi'_k : X_k \to X$, погрешности которых стремятся к нулю.

Отсюда и из теоремы 8.2.3 следует, что объем полунепрерывен снизу относительно метрики Громова–Хаусдорфа на любом классе замкнутых римановых многообразий фиксированной размерности, удовлетворяющем условию равномерной локальной стягиваемости.

Пусть $n \geq 2$, и пусть M, M_k $(k = 1, 2, \dots)$ – компактные n-мерные многообразия с положительными внутренними метриками. Любые две точки такого многообразия можно соединить кривой, длина которой равна расстоянию между концами. Предположим, что $M_k \to M$, и пусть зафиксирована последовательность почти изометрий $\varphi_k : M_k \to M$. Мы будем игнорировать зависимость от φ_k в обозначениях и формулировках этого и следующего параграфов.

Будем говорить, что точка $\widetilde{p} \in M_k$ является *ε-поднятием* точки $p \in M$ (где $\varepsilon > 0$), если $d(\varphi_k(\widetilde{p}), p) < \varepsilon$. Отображение $\widetilde{f} : X \to M_k$ будем называть *ε-поднятием* отображения $f : X \to M$, если точка $\widetilde{f}(x)$ является ε-поднятием точки $f(x)$ для каждого $x \in X$. (Здесь X — произвольное множество). Под *ε-поднятием* множества $X \subset M$ будем понимать ε-поднятие включения $i_X : X \to M$. Ясно, что при $\mathrm{err}(\varphi_k) < \varepsilon$ каждая точка пространства M допускает ε-поднятие в M_k. Отметим также, что из любого ε-поднятия в M_k можно малым шевелением получить ε-поднятие со значениями в $M_k \setminus \partial M_k$.

Следующая лемма позволяет строить поднятия одномерных подмножеств M. То, что M является многообразием, в этой лемме несущественно.

Лемма 8.3.4. 1. *Пусть* $\gamma : [a,b] \to M$ *— кривая,* $\varepsilon > \operatorname{err}(\varphi_k)$*,* $\widetilde{p}$ *и* $\widetilde{q}$ *—* ε*-поднятия в* M_k *точек* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$*. Тогда существует спрямляемая кривая* $\widetilde{\gamma} : [a,b] \to M_k$*, соединяющая* $\widetilde{p}$ *и* $\widetilde{q}$ *и являющаяся* 7ε*-поднятием* γ*.*

2. *Пусть* $\Gamma \subset M$ *— вложенный граф. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$*, такое, что при* $\operatorname{err}(\varphi_k) < \delta$ *любое* δ*-поднятие множества* $V(\Gamma)$ *в* M_k *можно продолжить до* ε*-поднятия графа* Γ *в* M_k*, которое является топологическим вложением.*

Доказательство. 1. Разобьем интервал $[a,b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ так, чтобы диаметры всех участков $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ были меньше ε. Положим $\widetilde{\gamma}(t_0) = \widetilde{p}$, $\widetilde{\gamma}(t_n) = \widetilde{q}$, а для каждого $i = 1, \dots, n-1$ выберем в качестве $\widetilde{\gamma}(t_i)$ любое ε-поднятие точки $\gamma(t_i)$. На каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ определим $\widetilde{\gamma}$ как кратчайшую между $\widetilde{\gamma}(t_i)$ и $\widetilde{\gamma}(t_{i+1})$. Длина этой кратчайшей равна $d(\widetilde{\gamma}(t_i), \widetilde{\gamma}(t_{i+1})) < 4\varepsilon$. Значит, для любого $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем $d(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\gamma}(t_i)) < 4\varepsilon$, откуда

$$\begin{aligned} d(\varphi_k(\widetilde{\gamma}(t)), \gamma(t)) &\le d(\varphi_k(\widetilde{\gamma}(t)), \varphi_k(\widetilde{\gamma}(t_i))) + d(\varphi_k(\widetilde{\gamma}(t_i)), \gamma(t)) \\ &< d(\widetilde{\gamma}(t), \widetilde{\gamma}(t_i)) + 2\varepsilon + d(\gamma(t_i), \gamma(t)) < 4\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 7\varepsilon\,. \end{aligned}$$

2. Можно считать, что среди ребер графа Γ нет петель и что любые две вершины Γ соединены не более чем одним ребром. Обозначим через ε_0 наименьшее из расстояний между непересекающимися подграфами графа Γ. Для каждого $\delta > 0$ обозначим через $\theta(\delta)$ максимально возможный диаметр простой кривой, содержащейся в графе Γ, имеющей расстояние между концами не больше δ и проходящей не более чем через одну вершину графа Γ. Ясно, что $\theta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Пусть $\delta > 0$ достаточно мало, $\operatorname{err}(\varphi_k) < \delta$, и пусть $\psi : V(\Gamma) \to M_k$ – некоторое δ-поднятие. Построим сначала несамопересекающееся поднятие одного ребра графа Γ. Параметризуем это ребро посредством кривой $\gamma : [0,1] \to M$. По первой части леммы, γ допускает 7δ-поднятие $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to M_k$ с $\widetilde{\gamma}(0) = \psi(\gamma(0))$ и $\widetilde{\gamma}(1) = \psi(\gamma(1))$. Рассмотрим всевозможные кривые $s : [0,1] \to M_k$ такие, что для любого $t \in [0,1]$ выполняется по крайней мере одно из двух условий: или $s(t) = \widetilde{\gamma}(t)$, или есть интервал $[a,b] \ni t$, на котором s постоянна и $s(t) = \widetilde{\gamma}(a) = \widetilde{\gamma}(b)$. Класс таких кривых замкнут в C^0, поэтому в нем имеется кривая минимальной длины. Эта кривая, очевидно, соединяет $\widetilde{\gamma}(0)$ с $\widetilde{\gamma}(1)$, не имеет самопересечений и является ε_1-поднятием кривой γ, где $\varepsilon_1 = 7\delta + \theta(14\delta)$. Наличие у построенного поднятия постоянных участков можно устранить сколь угодно малым варьированием параметризации.

Применив эту конструкцию ко всем ребрам, получим ε_1-поднятие графа Γ, инъективное на каждом его ребре. Пусть $p \in V(\Gamma)$, $\widetilde{p} = \psi(p)$, $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ — все ребра графа Γ, выходящие из p, $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_m$ — построенные ε_1-поднятия этих ребер. Тогда все попарные пересечения кривых $\widetilde{\gamma}_i$ содержатся в окрестности $U = U_{\varepsilon_2}(\widetilde{p})$ с $\varepsilon_2 = \theta(2\varepsilon_1) + 2\delta$.

Можно считать, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon_0/10$. Тогда поднятия других ребер и вершин графа не пересекают U. Для каждого $i = 1, \dots, m$ найдем точку $\widetilde{p}_i$, через которую кривая $\widetilde{\gamma}_i$ последний раз покидает U. Заменим начальные интервалы кривых $\widetilde{\gamma}_i$ от $\widetilde{p}$ до $\widetilde{p}_i$ простыми кривыми, лежащими в $U \cup \{\widetilde{p}_i\}$ и не имеющими общих внутренних точек. Это можно сделать, так как M_k – многообразие размерности $n \geq 2$, а множество U открыто и связно (как шар внутренней метрики). Изменение затрагивает участки, расстояния между концами которых равны ε_2, поэтому полученные кривые являются ε_3-поднятиями кривых γ_i с $\varepsilon_3 = \theta(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1) + \varepsilon_2 + 2\delta$. Проделав такое же построение для всех вершин графа, получим его ε_3-поднятие, являющееся вложением. Для завершения доказательства заметим, что $\varepsilon_3 \to 0$ при $\delta \to 0$. □

Следствие 8.3.5. *Если отображения φ_k непрерывны, то, начиная с некоторого k, они индуцируют сюръективные гомоморфизмы фундаментальных групп.*

Доказательство. Поскольку M компактно и локально односвязно, существует такое $\varepsilon > 0$, что любые две ε-близкие кривые в M с общими концами гомотопны. Пусть k столь велико, что $\operatorname{err}(\varphi_k) < \varepsilon/7$. Пусть $\widetilde{p} \in M_k$, $p = \varphi_k(\widetilde{p})$. По лемме 8.3.4, любая петля в M с началом и концом в p допускает ε-поднятие в M_k с началом и концом в $\widetilde{p}$. Образ этого поднятия гомотопен исходной петле. □

Следствие 8.3.5 позволяет сделать вывод о полунепрерывности объема в тех случаях, когда эпиморфизмы фундаментальных групп могут индуцироваться только отображениями ненулевой степени. Следующая теорема — пример утверждения, получаемого таким способом.

Теорема 8.3.6. *Пусть M и M_k ($k = 1, 2, \dots$) — гомотопически эквивалентные замкнутые n-мерные римановы многообразия, и пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$ и M допускает отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда*

$$\operatorname{vol}(M) \leq \liminf_{k\to\infty} \operatorname{vol}(M_k).$$

То же верно для любых положительных липшицевых внутренних метрик, если в качестве определения объема выбран объем по Лёвнеру.

Доказательство. В силу теоремы 8.2.3, предложения 8.3.1 и следствия 8.3.5, достаточно доказать следующее утверждение: если многообразие M удовлетворяет условиям теоремы, многообразие M' ему гомотопически эквивалентно, и $\varphi : M' \to M$ — непрерывное отображение, индуцирующее эпиморфизм фундаментальных групп, то φ имеет ненулевую степень.

1. Пусть $f : M' \to T^n$ — отображение ненулевой степени (условие существования такого отображения гомотопически инвариантно). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_1(M';\mathbf{Z}) & \xleftarrow{h'} & \pi_1(M') & \xrightarrow{f_\#} & \pi_1(T^n) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_\#} & & \\ H_1(M;\mathbf{Z}) & \xleftarrow{h} & \pi_1(M) & & \end{array}$$

(здесь h и h' – гомоморфизмы Гуревича). Поскольку h и $\varphi_\#$ – эпиморфизмы, то φ_* — тоже эпиморфизм. Но $H_1(M';\mathbf{Z})$ и $H_1(M;\mathbf{Z})$ – изоморфные конечно порожденные абелевы группы, поэтому любой эпиморфизм одной из них в другую является изоморфизмом. Следовательно,

$$\ker\varphi_\# \subset \ker(\varphi_* \circ h') = \ker h' = [\pi_1(M'), \pi_1(M')].$$

С другой стороны, $\ker f_\# \supset [\pi_1(M'), \pi_1(M')]$ в силу коммутативности группы $\pi_1(T^n)$. Значит, существует гомоморфизм $g : \pi_1(M) \to \pi_1(T^n)$ такой, что $g \circ \varphi_\# = f_\#$. Так как T^n – асферическое пространство, то g индуцируется некоторым непрерывным отображением $\bar{f} : M \to T^n$, причем $\bar{f} \circ \varphi \sim f$. Поскольку f индуцирует нетривиальный гомоморфизм в n-мерных гомологиях, то это верно и для φ.

2. Пусть $f_1 : M' \to \mathbf{RP}^n$ — отображение нечетной степени. Положим $f = i \circ f_1$, где $i\ \mathbf{RP}^n \hookrightarrow \mathbf{RP}^\infty$ — стандартное вложение. Тогда индуцированный гомоморфизм $f_* : H_n(M';\mathbf{Z}_2) \to H_n(\mathbf{RP}^\infty;\mathbf{Z}_2) \simeq \mathbf{Z}_2$ нетривиален. Остаток доказательства получается из первой части заменой T^n на $\mathbf{RP}^\infty$. □

Следствие 8.3.7. *Пусть M — замкнутое n-мерное многообразие, допускающее отображение ненулевой степени на тор $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ или отображение нечетной степени на проективное пространство $\mathbf{RP}^n$. Тогда n-мерный риманов объем полунепрерывен снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на классе всех римановых метрик на M.*

Замечание 8.3.8. Вообще говоря, неверно, что объем полунепрерывен снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на множестве всех римановых метрик на фиксированном многообразии M. В работе [7] приведен контрпример для случая $M = S^3$.

Замечание 8.3.9. Сходимость по Громову–Хаусдорфу часто исследуют в случае, когда рассматриваемые пространства имеют некоторые ограничения на кривизну. В случае кривизны, ограниченной снизу, хорошо известно (см., например, [4]), что ограничение на кривизну сохраняется при предельном переходе и объем предела равен пределу объемов. В случае кривизны, ограниченной сверху, ситуация сложнее, см. [8] и [10].

8.4 Двумерный случай

В этом параграфе все многообразия предполагаются двумерными и, возможно, имеющими край. Пусть $g(M)$ обозначает род поверхности M, $|\partial M|$ – число компонент края, $\chi(M)$ – эйлерову характеристику. Через $U_\varepsilon(X)$ будем обозначать ε-окрестность множества X в метрическом пространстве.

Определение 8.4.1. Пусть M и M' – двумерные многообразия. Будем называть непрерывное отображение $\varphi : M' \to M$ *почти гомеоморфизмом*, если существует конечное множество точек $P \subset M \setminus \partial M$ такое, что

1. φ гомеоморфно отображает $\varphi^{-1}(M \setminus P)$ на $M \setminus P$;
2. прообраз $\varphi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in P$ представляет собой либо компоненту края многообразия M', либо двумерное подмногообразие, ограниченное (в M') простой замкнутой кривой.

Отметим, что любой почти гомеоморфизм между замкнутыми многообразиями имеет степень ± 1.

Теорема 8.4.2. *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные двумерные многообразия с внутренними метриками, такие, что $\sup_k g(M_k) < \infty$, и пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$. Тогда существует последовательность почти изометрий $\varphi_k : M_k \to M$, которые, начиная с некоторого k, являются почти гомеоморфизмами.*

Доказательство теоремы занимает оставшуюся часть параграфа. На самом деле будет показано, что для любой последовательности почти изометрий существует близкая к ней последовательность почти гомеоморфизмов.

Прежде чем доказывать теорему, выведем некоторые следствия.

Следствие 8.4.3. *Пусть M и M_k $(k = 1, 2, \dots)$ — компактные двумерные многообразия с положительными внутренними липшицевыми метриками. Пусть $M_k \xrightarrow[GH]{} M$ и $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$. Тогда*

$$\operatorname{vol}(M) \le \liminf_{k\to\infty} \operatorname{vol}(M_k),$$

где vol *— двумерный объем по Лёвнеру.*

Доказательство. Предположим противное. Можно считать, что существует предел $\lim_{k\to\infty} \operatorname{vol}(M_k) < \operatorname{vol}(M)$. Условие $\sup_k |\chi(M_k)| < \infty$ эквивалентно равномерной ограниченности чисел $g(M_k)$ и $|\partial M_k|$. Пусть $\varphi_k : M_k \to M$ $(k = 1, 2, \dots)$ – почти изометрии из теоремы 8.4.2. Для каждого k положим

$$Q_k = \{p \in M \setminus \partial M : \varphi_k^{-1}(p) \text{ содержит компоненту края } M_k\}.$$

Каждое множество Q_k содержит не более N точек, где $N = \sup_k |\partial M_k|$. Переходом к подпоследовательности добьемся того, чтобы множество $Q = \bigcup_k Q_k$ имело не более N предельных точек, в частности, его замыкание $\overline{Q}$ было счетно. Каждый почти гомеоморфизм φ_k имеет ненулевую степень над $M \setminus (\partial M \cup \overline{Q})$, поэтому по теореме 8.2.3

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{vol}(M_k) \geq \mathrm{vol}(M \setminus (\partial M \cup \overline{Q})) = \mathrm{vol}(M).$$

Противоречие. □

Следствие 8.4.4. *Для любого натурального N риманова площадь полунепрерывна снизу относительно сходимости по Громову–Хаусдорфу на классе всех компактных двумерных римановых многообразий, эйлеровы характеристики которых по модулю не превосходят N.*

Замечание 8.4.5. Пусть заданы топологические типы многообразий M и M_k. Как определить, возможна ли сходимость $M_k \to M$? По теореме 8.4.2 при $\sup g(M_k) < \infty$ необходимо существование, начиная с некоторого k, почти гомеоморфизмов из M_k в M. Это условие, очевидно, является и достаточным. Оно эквивалентно следующему: $|\partial M_k| \geq |\partial M|$, и либо $g(M_k) \geq g(M)$ при одинаковой ориентируемости M и M_k, либо M ориентируемо, M_k неориентируемо, и $g(M_k) \geq 2g(M)+1$. В частности, ориентируемые многообразия не могут сходиться к неориентируемому, а замкнутые многообразия не могут сходиться к многообразию с непустым краем.

Замечание 8.4.6. При $g(M_k) \to \infty$ на многообразиях M_k можно ввести римановы метрики произвольно малой площади так, чтобы они сходились к произвольному компакту с внутренней метрикой, в частности, к пространству любой размерности и любого объема. Для этого достаточно представить этот компакт в виде предела последовательности графов, а графы вложить в $\mathbf{R}^3$ и приблизить границами их трубчатых окрестностей.

Напротив, при $\sup g(M_k) < \infty$ топологическая размерность предела последовательности $\{M_k\}$ не может быть больше двух. Действительно, предельное пространство не может содержать полных графов с очень большим числом вершин, иначе по лемме 8.3.4 эти графы вкладывались бы и в M_k.

Перейдем к доказательству теоремы 8.4.2. Положим $g = \sup_k g(M_k)+1$. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших k существуют ε-изометрии $\varphi'_k : M_k \to M$, являющиеся почти гомеоморфизмами. Зафиксируем любую последовательность непрерывных почти изометрий $\varphi_k : M_k \to M$.

Далее все рассматриваемые кривые в M и M_k предполагаются несамопересекающимися. Мы отождествляем такие кривые их образами в M и M_k. Будем называть *правильно вложенной* замкнутую кривую, имеющую связное (возможно, пустое) пересечение с краем многообразия. *Разбивающими* кривыми будем называть правильно вложенные кривые, имеющие несвязные дополнения.

Лемма 8.4.7. *Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ – попарно непересекающиеся разбивающие кривые в M. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если $\operatorname{err}(\varphi_k) < \delta$, и правильно вложенные в M_k кривые $\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_m$ являются δ-поднятиями кривых $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, то верно следующее.*

1. если кривые $\{\widetilde{\gamma}_i\}$ в совокупности разбивают M_k, то хотя бы одна из них является разбивающей.

2. если $m \ge g$, то хотя бы одна из кривых $\widetilde{\gamma}_i$ является разбивающей.

3. если γ_i разбивает M на области V и W, а $\widetilde{\gamma}_i$ разбивает M_k на области $\widetilde{V}$ и $\widetilde{W}$, то либо $\varphi_k(\widetilde{V}) \subset U_\varepsilon(V)$ и $\varphi_k(\widetilde{W}) \subset U_\varepsilon(W)$, либо $\varphi_k(\widetilde{V}) \subset U_\varepsilon(W)$ и $\varphi_k(\widetilde{W}) \subset U_\varepsilon(V)$.

Доказательство. Можно считать, что все попарные расстояния между кривыми γ_i больше 3ε. Тогда при $\delta < \varepsilon$ кривые $\widetilde{\gamma}_i$ попарно не пересекаются. Для каждой кривой γ_i построим в ее ε-окрестности две кривые γ_i' и γ_i'', лежащие по разные стороны от γ_i и отделяющие γ_i от $M \setminus U_\varepsilon(\gamma_i)$ (если $\gamma \cap \partial M \ne \emptyset$, то одна из кривых γ_i' и γ_i'' незамкнута и соединяет две точки края). Проверим, что утверждения (1)–(3) выполняются при $\delta < \min_i \operatorname{dist}(\gamma_i, \gamma_i' \cup \gamma_i''))/5$.

Заметим, что (2) следует из (1), поскольку $g(M_k) < g$. Доказывая (1), можно считать, что $\{\widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_m\}$ – минимальный разбивающий M_k набор кривых. Тогда эти кривые разбивают M_k на две области $\widetilde{V}$ и $\widetilde{W}$, и $\partial\widetilde{V} = \partial\widetilde{W} = \widetilde{\gamma}_1 \cup \dots \cup \widetilde{\gamma}_m$. Пусть $V' = U_\delta(\varphi_k(\widetilde{V}))$, $W' = U_\delta(\varphi_k(\widetilde{W}))$. Имеем $V' \cup W' = M$ и $\gamma_i \subset V' \cap W'$ для $i = 1, \dots, m$.

Кривые γ_1' и γ_1'' разбивают M на три области X, Y и Z, такие, что $\partial X = \gamma_1'$, $\partial Y = \gamma_1''$, $U_{5\delta}(\gamma_1) \subset Z \subset U_\varepsilon(\gamma_1)$. Докажем, что либо $V' \subset X \cup Z$ и $W' \subset Y \cup Z$, либо $V' \subset Y \cup Z$ и $W' \subset X \cup Z$.

Пусть, например, $V' \cap X \ne \emptyset$ и $W' \cap X \ne \emptyset$. Тогда в силу связности областей V' и W' имеем $V' \cap \gamma_1' \ne \emptyset$ и $W' \cap \gamma_1' \ne \emptyset$, откуда $V' \cap W' \cap \gamma_1' \ne \emptyset$. Значит, существуют точки $p \in \widetilde{V}$ и $q \in \widetilde{W}$ такие, что $d(\varphi_k(p), x) < \delta$ и $d(\varphi_k(q), x) < \delta$ для некоторой точки x на кривой γ_1', откуда $d(p, q) < 3\delta$. С другой стороны, поскольку метрика на M_k – внутренняя и $\varphi_k(\partial\widetilde{V}) \subset U_\delta(\bigcup \gamma_i)$, имеем

$$d(p, q) \ge \operatorname{dist}(p, \partial\widetilde{V}) + \operatorname{dist}(q, \partial\widetilde{W}) > 2 \operatorname{dist}(\gamma_1', \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_m) - 6\delta \ge 4\delta.$$

Противоречие. Таким образом, можно считать, что $V' \subset X \cup Z$ и $W' \subset Y \cup Z$. Подставляя $m = 1$, получаем утверждение (3). Если $m > 1$, то аналогичная пара включений должна иметь место и для разбиения многообразия M кривыми γ_2' и γ_2'', что невозможно. Этим доказано утверждение (1). □

Лемма 8.4.8. *Пусть $\varepsilon > 0$, γ – разбивающая кривая в M. Тогда для любого достаточно большого k существует разбивающее ε-поднятие кривой γ в $M_k \setminus \partial M_k$.*

Доказательство. Построим g попарно непересекающихся разбивающих кривых в M, $(\varepsilon/2)$-близких к γ. По лемме 8.3.4(2), при больших k эти кривые допускают правильно вложенные $(\varepsilon/2)$-поднятия в $M_k \setminus \partial M_k$, а по лемме 8.4.7(2), одно из этих поднятий является разбивающим. $\square$

Лемма 8.4.9. *Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для любого достаточно большого k существует ε-поднятие множества ∂M в M_k, гомеоморфно отображающее ∂M на объединение нескольких компонент края в M_k.*

Доказательство. Пусть γ – одна из компонент края ∂M. Зафиксируем какую-нибудь ретракцию $\pi : V_0 \to \gamma$, где V_0 – окрестность кривой γ в M. Пусть $U \subset V_0$ – произвольная окрестность кривой γ. Докажем, что для любого достаточно большого k найдется компонента края $\widetilde{\gamma} \subset \partial M_k$ такая, что $\varphi_k(\widetilde{\gamma}) \subset U$ и отображение $\pi \circ \varphi_k|_{\widetilde{\gamma}} : \widetilde{\gamma} \to \gamma$ имеет ненулевую степень. Построим разбивающую кривую $\gamma_0 \subset U$ такую, что отображение $\pi|_{\gamma_0} : \gamma_0 \to \gamma$ имеет степень ± 1. Пусть $\widetilde{\gamma}_0 \subset M_k \setminus \partial M_k$ – разбивающее σ-поднятие кривой γ_0 (см. лемму 8.4.8) для столь малого σ, что петля $\varphi_k \circ \widetilde{\gamma}_0$ гомотопна γ_0, и лемма 8.4.7(3) обеспечивает включение $\varphi_k(\widetilde{U}) \subset U$, где $\widetilde{U}$ – замыкание одной из компонент множества $M_k \setminus \widetilde{\gamma}_0$. Рассмотрим отображение $\pi \circ \varphi_k : \widetilde{U} \to \gamma \simeq S^1$. Степень его сужения на $\widetilde{\gamma}_0$ равна ± 1, а значит, эта степень не равна нулю и для одной из компонент множества $\partial M_k \cap \widetilde{U} = \partial \widetilde{U} \setminus \widetilde{\gamma}_0$. Эта компонента и есть искомая $\widetilde{\gamma}$.

Зафиксируем ориентацию на γ и выберем циклически упорядоченный набор точек $x_1, \dots, x_N \in \gamma$ так, что $N > 100g$ и точки $\{x_i\}$ разбивают γ на участки с диаметрами меньше $\varepsilon/10g$. Пусть $\delta > 0$ таково, что все ненулевые попарные расстояния между этими участками больше 10δ. Построим δ-близкую к γ разбивающую кривую $\gamma_1 \subset M \setminus \partial M$. Выберем такое $\sigma > 0$, что $U_\sigma(\gamma) \subset V_0$ и $d(\pi(x), x) < \mathrm{dist}(\gamma, \gamma_1)/10$ для всех $x \in U_\sigma(\gamma)$. Пусть k достаточно велико, пусть $\widetilde{\gamma}_1 \subset M_k \setminus \partial M_k$ – разбивающее σ-поднятие кривой γ_1 (см. лемму 8.4.8), и пусть $\widetilde{\gamma}$ – компонента ∂M_k, для которой $\varphi_k(\widetilde{\gamma}) \subset U_\sigma(\gamma)$ и композиция $\varphi := \pi \circ \varphi_k|_{\widetilde{\gamma}} : \widetilde{\gamma} \to \gamma$ имеет ненулевую степень (см. выше). Пусть $\widetilde{V}$ – компонента множества $M_k \setminus \widetilde{\gamma}_1$, содержащая $\widetilde{\gamma}$.

Выберем ориентацию на $\widetilde{\gamma}$ так, чтобы степень отображения φ была положительной. Тогда можно найти циклически упорядоченный набор точек $y_1, \dots, y_N \in \widetilde{\gamma}$, такой, что $\varphi(y_i) = x_i$ для всех i. Для двух точек p и q на кривой γ или $\widetilde{\gamma}$ будем обозначать через $[p, q]$ участок кривой, проходимый от p к q в соответствии с ориентацией. Докажем, что каждая точка интервала $[y_i, y_{i+1}]$ является ε-поднятием любой точки интервала $[x_i, x_{i+1}]$ (здесь индексы берутся по модулю N). Для этого достаточно проверить, что $\varphi([y_i, y_{i+1}])$ содержит менее $10g$ из точек $\{x_j\}$.

Предположим противное: пусть, например, кривая $\varphi([y_{N-1}, y_N])$ содержит точки $x_1, \dots, x_m$, где $m = 4g$. Для каждого $i = 1, \dots, m$ выберем точку $y_i' \in [y_{N-1}, y_N]$ так, что $\varphi(y'_i) = x_i$. Можно считать, что $\mathrm{err}(\varphi_k) < \sigma$. Тогда

$$d(y_i, y'_i) < \sigma < \mathrm{dist}(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\gamma}_1) \le \mathrm{dist}(\{y_i\} \cup \{y'_i\}, \widetilde{\gamma}_1) < \delta + 2\sigma < 2\delta.$$

Поэтому можно построить кривые $r_i, s_i, s'_i \subset U_{2\delta}(\{y_i\}\cup\{y'_i\})$ и точки $z_i, z'_i \in \widetilde{\gamma}_1$ ($z_i \ne z'_i$) так, что r_i соединяет y_i и y'_i, s_i соединяет y_i и z_i, s'_i соединяет y'_i и z'_i, и при этом r_i, s_i и s'_i не имеют общих внутренних точек друг с другом, с $\widetilde{\gamma}_1$ и с ∂M_k. В силу близости этих кривых к точкам y_i и y'_i они не пересекаются с аналогичными кривыми, построенными для других значений i.

Пусть Γ – граф, образованный кривыми $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\gamma}_1$, r_i, s_i и s'_i ($1 \le i \le m$). Этот граф вложен в $\widetilde{V}$, причем его циклы $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\gamma}_1$ содержатся в $\partial\widetilde{V}$. Докажем, что наличие такого графа противоречит неравенству $g(\widetilde{V}) < g$. Можно считать, что $\partial\widetilde{V}$ состоит лишь из двух компонент: $\widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\gamma}_1$. Граф Γ состоит из $4m$ вершин (это точки $y_i, y'_i \in \widetilde{\gamma}$ и $z_i, z'_i \in \widetilde{\gamma}_1$, $1 \le i \le m$) и $7m$ ребер, из которых $4m$ содержатся в $\partial\widetilde{V}$. При этом имеется не более двух циклов длины 2 или 3 (каждый такой цикл должен содержать y_1 или y_m). Отсюда следует, что число областей, на которые Γ разбивает $\widetilde{V}$, не превосходит $(2\cdot 7m - 4m + 4)/4 = \frac{5}{2}m + 1$. Значит,

$$\chi(\widetilde{V}) \le 4m - 7m + \tfrac{5}{2}m + 1 = 1 - m/2 = 1 - 2g.$$

С другой стороны, $\chi(\widetilde{V}) \ge 2 - 2g$ при $g(\widetilde{V}) < g$ и $|\partial\widetilde{V}| = 2$.

Таким образом, подходящая параметризация кривой $\widetilde{\gamma}$ является ε-поднятием γ. Для доказательства леммы осталось построить такие поднятия для всех компонент края ∂M. $\square$

Доказательство теоремы 8.4.2. Зафиксировав $\varepsilon_0 > 0$, построим достаточно мелкую триангуляцию многообразия M (требования к мелкости триангуляции будут ясны из дальнейшего). Край каждого треугольника должен быть правильно вложенной кривой (см. 3.5). Обозначим одномерный остов триангуляции через Γ. Будем называть *многоугольником* область в M, гомеоморфную диску и ограниченную правильно вложенной кривой, составленной из ребер Γ. Найдем такое положительное $\varepsilon < \varepsilon_0$, что $U_{10\varepsilon}(M\setminus T) \ne M$ для любого треугольника T. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, с которым утверждения леммы 8.4.7 выполняются для любых кривых γ_i, составленных из ребер Γ. Для достаточно большого k леммы 8.4.9 и 8.3.4 позволяют построить δ-поднятие $\psi_k : \Gamma \to M_k$, такое, что $\psi_k(\partial M) \subset \partial M_k$, $\psi_k(\Gamma \setminus \partial M) \subset M_k \setminus \partial M_k$, и ψ_k – вложение.

Будем называть треугольник T *удачным*, если $\psi_k(\partial T)$ разбивает M_k. В этом случае по лемме 8.4.7(3) одна из компонент $M_k \setminus \psi_k(\partial T)$ отображается при φ_k в $U_\varepsilon(T)$. Будем называть эту компоненту *поднятием* треугольника T и обозначать через $\widetilde{T}$. Найдем максимальный набор попарно непересекающихся неудачных треугольников. По лемме 8.4.7(2), этих треугольников не больше $g-1$. Если триангуляция достаточно мелкая, то эти треугольники, где бы они ни находились, можно вместе с окрестностями заключить в объединение непересекающихся многоугольников $P_1, \ldots, P_m$ $(m < g)$, диаметры которых не превосходят ε_0. Заметим, что все треугольники в $M \setminus \bigcup P_i$ – удачные, и их диаметры тоже не превосходят ε_0. Исключим из числа удачных все треугольники, содержащиеся в $\bigcup P_i$. Если $\psi_k(\partial P_i)$ является разбивающей кривой, будем называть многоугольник P_i *удачным* и определим его поднятие $\widetilde{P}_i$ так же, как для треугольников.

Пусть M' – замыкание объединения всех удачных треугольников и многоугольников, M'_k – замыкание объединения их поднятий. По выбору числа ε, поднятия различных удачных треугольников и многоугольников не могут содержаться одно в другом. Поэтому эти поднятия попарно не пересекаются, и $\partial M'_k \setminus \partial M_k = \psi_k(\partial M' \setminus \partial M)$. Отсюда следует, что $M' = M$ и $M'_k = M_k$. Действительно, в противном случае имеем $\partial M'_k \setminus \partial M_k \neq \varphi$, поэтому ψ_k-образы границ неудачных многоугольников в совокупности разбивают M_k, а это противоречит лемме 8.4.7(1).

Построим теперь почти гомеоморфизм $\varphi'_k : M_k \to M$, близкий к φ. Положим $\varphi'_k|_{\psi_k(\Gamma)} = \psi_k^{-1}$. На поднятии каждого треугольника $T \subset M \setminus \bigcup P_i$ определим φ'_k как почти гомеоморфизм между $\widetilde{T}$ и T, непрерывно продолжающий $\psi_k^{-1}|_{\partial\widetilde{T}}$ (например, стянем в точку все, кроме узкой полосы вдоль $\partial\widetilde{T}$). То же самое проделаем для многоугольников P_i. Полученное отображение φ'_k является почти гомеоморфизмом и отличается от φ_k не более чем на $\varepsilon_0+\varepsilon$. Поскольку ε_0 произвольно, теорема доказана. $\square$

Глава 9

Периодические римановы метрики

9.1 Критерий изометричности

Для исследования случаев равенства в неравенствах между объемами нам понадобится следующее техническое предложение 9.1.2.

Определение 9.1.1. *Кусочно римановым многообразием* будем называть триангулированное гладкое многообразие, в котором на каждом симплексе триангуляции задана риманова структура класса C^0 (согласования этих структур на общих гранях симплексов не предполагается).

Кусочно риманово многообразие является пространством с внутренней метрикой, получаемой склеиванием метрик симплексов.

Предложение 9.1.2. *Пусть M — компактное риманово многообразие, M' — компактное кусочно риманово многообразие той же размерности и* $\mathrm{vol}(M') = \mathrm{vol}(M)$. *Пусть $f : M' \to M$ — сюръективное липшицево отображение, $f(\partial M') \subset \partial M$, и для почти всех $x \in M'$ дифференциал $d_x f : T_x M' \to T_x M$ является изометрией.*

Тогда f — изометрия.

Доказательство. Из условия на дифференциалы следует, что f нерастягивающее и не увеличивает объемы. Отсюда и из предположений $\mathrm{vol}(M') = \mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(f(M'))$ следует, что f сохраняет объемы, а именно, $\mathrm{vol}(f(U)) = \mathrm{vol}(U)$ для любого измеримого множества $U \subset M'$.

Пусть $n = \dim M = \dim M'$. Напомним, что M' триангулировано на n-мерные симплексы с римановыми метриками класса C^0. Обозначим через Σ объединение $\partial M'$ и $(n-2)$-мерного остова триангуляции.

Для $x \in M'$ обозначим через C_x касательный конус пространства M' в точке x. По определению, C_x — пространство с внутренней метрикой, отождествленное в векторным пространством $T_x M'$ для внутренней точки x или полупространством в случае

$x \in \partial M'$ и разбитое на полиэдральные конусы, соответствующие симплексам, примыкающим к x. Каждый конус снабжен плоской метрикой, определяемым римановым тензором соответствующего симплекса в точке x, а метрика всего конуса C_x получается склеиванием этих евклидовых метрик.

Легко видеть, что объем метрического шара $B_\varepsilon(x)$ с центром в $x \in M'$ малого радиуса $\varepsilon > 0$ приблизительно равен объему аналогичного шара в C_x. А именно,

$$\operatorname{vol}(B_\varepsilon(x)) = \operatorname{vol}(B)\varepsilon^n + o(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \to 0,$$

где B — единичный метрический шар в C_x с центром в вершине. (Отметим, что B может быть больше, чем объединение шаров в полиэдральных конусах, образующих C_x, так как неизометрическое склеивание может уменьшать расстояния.) Если $x \in M' \setminus \Sigma$, то касательный конус — либо евклидово пространство, либо результат склеивания двух полупространств вдоль линейной биекции между их границами. Отсюда

$$\operatorname{vol}(B_\varepsilon(x)) \geq \omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \to 0. \tag{9.1.1}$$

Мы докажем предложение в несколько шагов.

1. Отображение $f_1 := f|_{M'\setminus\Sigma}$ инъективно и его образ содержится в $M \setminus \partial M$.

От противного, предположим, что $f(x) = f(y)$ для некоторых $x, y \in M' \setminus \Sigma$, $x \neq y$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ шары $B_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon(y)$ не пересекаются. Отсюда и из (9.1.1) получаем

$$\operatorname{vol}(B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)) \geq 2\omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \to 0.$$

Так как f нерастягивающее, образы шаров $B_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon(y)$ содержатся в шаре радиуса ε с центром в $f(x) = f(y)$. С другой стороны,

$$\operatorname{vol}(B_\varepsilon(f(x))) = \omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n) < \operatorname{vol}(B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)),$$

что противоречит сохранению объема отображением f. Таким образом, отображение f_1 инъективно.

Второе утверждение доказывается аналогично: если $x \in M' \setminus \Sigma$ и $f(x) \in \partial M$, то

$$\operatorname{vol}(B_\varepsilon(f(x))) = \frac{1}{2}\omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n) < \operatorname{vol}(B_\varepsilon(x)),$$

противоречие.

2. Метрики соседних симплексов триангуляции пространства M' согласованы на общих $(n-1)$-мерных гранях.

Пусть $x \in \tilde{M} \setminus \Sigma$. Касательный конус C_x получен склеиванием двух евклидовых полупространств H_1 и H_2. Покажем, что метрики на H_1 and H_2 согласованы на их общей гиперплоскости. Предположим противное. Тогда некоторые точки ближе к началу отсчета конуса C_x, чем они были бы в несвязном объединении полупространств

H_1 и H_2. Значит, единичный шар в C_x строго больше, чем объединение двух евклидовых полушаров в H_1 и H_2, поэтому его объем строго больше, чем ω_n. Таким образом,

$$\mathrm{vol}(B_\varepsilon(x)) = C\omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n)$$

для некоторого $C > 1$. Это приводит к противоречию так же, как в шаге 1.

3. Отображение $f_1 = f|_{M'\setminus\Sigma}$ является локально билипшицевым гомеоморфизмом на открытое множество в $M \setminus \partial M$.

Так как $M' \setminus \Sigma$ и $M \setminus \partial M$ являются n-мерными многообразиями без края, по теореме Брауэра о сохранении области [32, 33] из инъективности отображения f_1 следует, что оно открытое, следовательно, обратное отображение f_1^{-1} непрерывно.

Так как метрики согласованы на $(n-1)$-мерных гранях триангуляции, можно рассматривать $M' \setminus \Sigma$ как многообразие с римановой метрикой класса C^0. Отметим, что из непрерывности метрического тензора следует, что асимптотическое равенство

$$\mathrm{vol}(B_\varepsilon(x)) = \omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n), \quad \varepsilon \to 0,$$

равномерно по x на любом компактном множестве в $M' \setminus \Sigma$, и аналогичное свойство верно в $M \setminus \partial M$. Зафиксируем $x \in M' \setminus \Sigma$. Пусть точка y достаточно близка к x, и предположим, что $\varepsilon := |f(x)f(y)| < \frac{1}{2}|xy|$. Тогда шары $B_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon(y)$ не пересекаются, следовательно,

$$\mathrm{vol}(f(B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))) = \mathrm{vol}(B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)) = 2\omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n).$$

С другой стороны,

$$f(B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \cup B_\varepsilon(f(y)),$$

так как отображение f нерастягивающее. Но шары $B_\varepsilon(f(x))$ и $B_\varepsilon(f(y))$ содержат в пересечении шар радиуса $\varepsilon/2$, следовательно,

$$\mathrm{vol}(B_\varepsilon(f(x)) \cup B_\varepsilon(f(y))) \le \big(2 - 1/2^n\big)\omega_n\varepsilon^n + o(\varepsilon^n) < \mathrm{vol}(f(B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))),$$

если ε достаточно мало. Это противоречие показывает, что $|f(x)f(y)| \ge \frac{1}{2}|xy|$, если y достаточно близко к x. Следовательно, f_1^{-1} локально липшицево.

4. f — изометрия.

Сначала заметим, что f_1 — изометрия между индуцированными внутренними метриками множеств $M' \setminus \Sigma$ и $f(M' \setminus \Sigma)$. Действительно, поскольку отображение f_1^{-1} локально липшицево, оно дифференцируемо почти всюду. Если f_1^{-1} дифференцируемо в точке $y = f_1(x)$, то $d_y(f_1^{-1}) = (d_x f_1)^{-1}$. Значит, $d_y(f_1^{-1})$ — изометрия для почти всех $y \in f(M' \setminus \Sigma)$. Следовательно, f_1^{-1} нерастягивающее относительно индуцированных внутренних метрик. Так как f_1 и f_1^{-1} оба нерастягивающие, f_1 — изометрия (относительно индуцированных внутренних метрик).

Остается доказать, что индуцированные внутренние метрики множеств $M' \setminus \Sigma$ и $f(M' \setminus \Sigma)$ совпадают с сужениями метрик объемлющих пространств M' и M. Это следует из того, что множества $\Sigma \subset M'$ and $f(\Sigma) \subset M$ "маленькие", а именно каждое из них состоит из подмножества края и множества хаусдорфовой размерности не большей, чем $n-2$. Любую кусочно гладкую кривую можно пошевелить так, чтобы она обходила такое множество и при этом длина почти сохранялась, поэтому удаление таких множеств не меняет внутренние расстояния. $\square$

9.2 Эквивариантные проекции периодических метрик

В этом и следующем параграфе рассматриваются периодические римановы метрики. Обобщая периодические метрики в $\mathbf{R}^n$, рассматривавшиеся в §6.3, дадим следующее определение.

Определение 9.2.1. Пусть M — многообразие, на котором задано вполне разрывное ко-компактное действие конечнопорожденной абелевой группы Γ. Риманова метрика g на M называется Γ-*периодической*, если она инвариантна относительно этого действия.

По аналогии с периодическими метриками в $\mathbf{R}^n$, изометрии пространства M, определяемые действием Γ, будут называться *параллельными переносами.* Образ точки $x \in M$ под действием элемента $k \in \Gamma$ будет обозначаться через $x + k$, орбита точки $x \in M$, т. е. множество $\{x + k : k \in \Gamma\}$ — через $x + \Gamma$.

Условие вполне разрывности действия эквивалентно тому, что отображение факторизации $M \to \overline{M} = M/\Gamma$ является накрытием. При этом Γ — группа накрывающих преобразований (deck transformations) этого накрытия. При этом фактормногообразие M/Γ компактно в силу ко-компактности действия. Каждой Γ-периодической метрике g на $\overline{M}$ сопоставляется риманова метрика на M/Γ, относительно которой отображение факторизации является локальной изометрией.

Обратно, если $(\overline{M}, g)$ — компактное риманово многообразие, $\pi : M \to \overline{M}$ — абелево накрытие, то поднятие метрики g является Γ-периодической метрикой на M, где Γ — группа накрывающих преобразований. В частности, если π — универсальное абелево накрытие, то

$$\Gamma = \pi_1(\overline{M})/[\pi_1(\overline{M}), \pi_1(\overline{M})] = H^1(\overline{M}; \mathbf{Z}).$$

В общем случае

$$\Gamma = \pi_1(\overline{M})/G = H^1(\overline{M}; \mathbf{Z})/G',$$

где G — группа накрытия, $G' = G/[\pi_1(\overline{M}), \pi_1(\overline{M})] \subset H^1(\overline{M}; \mathbf{Z})$.

Можно считать, что Γ свободна от кручения (то есть изоморфна $\mathbf{Z}^n$ для некоторого n). Для этого достаточно заменить Γ на любую свободную от кручения подгруппу максимального ранга. Если Γ свободна от кручения, то она отождествляется с решеткой $\Gamma \otimes \mathbf{Z}$ в векторном пространстве $V = \Gamma \otimes \mathbf{R}$.

Определение 9.2.2. *Стабильная норма* Γ-периодической римановой метрики g на M — это норма $\|\cdot\|$ на $V = \Gamma \otimes \mathbf{R}$, удовлетворяющая соотношению

$$d_g(x, x+v) = \|v\| + o(\|v\|), \qquad x \in M,\ v \in \Gamma,\ \|v\| \to \infty \tag{9.2.1}$$

Легко проверить, что такая норма существует и единственна, см. [6, §8.5]. Для любого $x \in M$ и $v \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$d_g(x, x+v) \geq \|v\|. \tag{9.2.2}$$

Действительно, из периодичности и неравенства треугольника следует, что

$$d_g(x, x+kv) \leq k d_g(x, x+v)$$

для любого $k \in \mathbf{N}$, откуда

$$\|v\| = \lim_{k\to\infty} \frac{d_g(x, x+kv)}{k} \leq d_g(x, x+v).$$

Определение 9.2.3. Пусть $n \in \mathbf{N}$, M, M' — римановы многообразия размерностей $m, m' \geq n$, $f : M \to M'$ — отображение, дифференцируемое в точке $x \in M$. Будем обозначать через $J_n f(x)$ *n-мерный якобиан f в точке x*, то есть

$$J_n f(x) = \sup_{\sigma \in \Lambda^n_s T_x M \setminus \{0\}} \frac{|d_x f(\sigma)|}{|\sigma|},$$

где супремум берется по всем ненулевым простым n-векторам в касательном пространстве $T_x M$, модуль обозначает евклидову норму (n-мерную площадь) n-вектора относительно римановой структуры.

Определение 9.2.4. Пусть X, Y — евклидовы пространства, $\dim X \geq n = \dim Y$. Линейное отображение $L : X \to Y$ называется *евклидовой субмерсией*, если оно нерастягивающее и является изометрией на некотором n-мерном линейном подпространстве $Z \subset X$.

Предложение 9.2.5. *Пусть M — многообразие размерности $\geq n$, $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^n$, g — Γ-периодическая риманова метрика на M. Пусть $|\cdot|_E$ — евклидова норма на пространстве $V = \Gamma \otimes \mathbf{R}$, единичным шаром которой является эллипсоид Джона стабильной нормы метрики g.*

Тогда существует такое липшицево отображение

$$F : (M, g) \to (V, |\cdot|_E),$$

что

$$F(x + v) = F(x) + v$$

для любых $x \in M$, $v \in \Gamma$, и для почти всех $x \in M$ выполняется неравенство

$$J_n F(x) \leq 1,$$

равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда дифференциал $d_x f$ — евклидова субмерсия пространства $(T_x M, g_x)$ на $(V, |\cdot|_E)$.

Доказательство. Обозначим через $\|\cdot\|$ стабильную норму метрики g, через S^* — единичную сферу нормы $\|\cdot\|^*$.

Лемма 9.2.6. *Существуют линейное отображение $I : V \to L^\infty(S^*)$ и отображение $f : M \to L^\infty(S^*)$, такие, что*

1. *I — изометрическое относительно $\|\cdot\|$.*
2. *f — нерастягивающее относительно g.*
3. *$f(x + v) = f(x) + I(v)$ для любых $x \in M$, $v \in \Gamma$.*

Доказательство. Определим $I : V \to C^0(S^*) \subset L^\infty(S^*)$ равенством

$$I(u)(x) = u(x), \qquad u \in S^*,\ x \in V.$$

По лемме 6.1.4, I является изометрическим вложением пространства $(V, \|\cdot\|)$ в пространство $L^\infty(S^*)$.

Зафиксируем $x_0 \in M$. Для каждого $u \in S^*$ определим функцию $f_u^0 : x + \Gamma \to \mathbf{R}$ равенством

$$f_u^0(x_0 + v) = u(v), \qquad v \in \Gamma.$$

Заметим, что f_u^0 является нерастягивающей относительно сужения метрики d_g на $x_0 + \Gamma$. Действительно,

$$|f_u^0(x_0 + v) - f_u^0(x_0 + w)| = |u(v - w)| \leq \|v - w\| \leq d_g(x_0 + v, x_0 + w),$$

где первое неравенство следует из того, что $u \in S^*$, второе — из (9.2.2). В частности, поскольку $f_u^0(x_0) = 0$, имеем

$$|f_u^0(y)| \leq d_g(x_0, y) \tag{9.2.3}$$

для всех $y \in x_0 + \Gamma$. Определим функцию $f_u : M \to \mathbf{R}$ равенством

$$f_u(x) = \inf_{y \in x_0 + \Gamma} \{f_u^0(y) + d_g(x, y)\}.$$

Инфимум в этой формуле конечен. Действительно,

$$f_u^0(y) + d_g(x,y) \geq -d_g(x_0,y) + d_g(x,y) \geq -d_g(x_0,x) \tag{9.2.4}$$

для всех $y \in x_0 + \Gamma$, где первое неравенство следует из (9.2.3), второе — из неравенства треугольника. Следовательно, функция f_u определена корректно. Она нерастягивающая, так как по определению равна инфимуму нерастягивающих функций. В частности,

$$|f_u(x)| \leq d_g(x_0,x),$$

так как $f_u(x_0) = 0$ (неравенство $f_u(x_0) \geq 0$ следует из (9.2.4), неравенство $f_u(x_0) \leq 0$ доказывается полстановкой $y = x_0$ в определение функции f_u).

Функция f_u удовлетворяет равенству

$$f_u(x+v) = f_u(x) + u(v) \tag{9.2.5}$$

для всех $x \in M$, $v \in \Gamma$. Действительно,

$$\begin{aligned} f_u(x+v) &= \inf_{y \in x_0+\Gamma} \{f_u^0(y) + d_g(x+v,y)\} \\ &= \inf_{y \in x_0+\Gamma} \{f_u^0(y+v) + d_g(x+v,y+v)\} \\ &= \inf_{y \in x_0+\Gamma} \{f_u^0(y) + d_g(x,y)\} + u(v) = f_u(x) + u(v), \end{aligned}$$

так как $d_g(x+v,y+v) = d_g(x,y)$ в силу периодичности метрики и

$$f_u^0(y+v) = f_u^0(y) + u(v)$$

по определению f_u^0.

При фиксированном $x \in M$ значение $f_u(x)$ является борелевской функцией от u, так как это инфимум счетного семейства непрерывных функций. Определим отображение $f : M \to L^\infty(S^*)$ равенством

$$f(x)(u) = f_u(x).$$

Она корректно определена, так $f_u(x)$ — борелевская функция от u, ограниченная по модулю числом $d_g(x_0,x)$. Отображение f — нерастягивающее относительно d_g, так как таковыми являются все функции f_u, $u \in S^*$. Из (9.2.5) следует требуемое тождество

$$f(x+v) = f(x) + I(v)$$

для любых $x \in M$, $v \in \Gamma$. Лемма доказана. □

Перейдем к доказательству предложения 9.2.5. Пусть I и f — отображения, построенные в лемме. Обозначим $Y = I(V) \subset L^\infty(S^*)$. По теореме 8.1.1 существует непрерывный проектор $P : L^\infty(S^*) \to Y$, не увеличивающий n-мерные площади по Лёвнеру. Положим $F = I^{-1} \circ P \circ f$, где I^{-1} рассматривается как изометрическое отображение из Y в $(V, \|\cdot\|)$.

Поскольку пространство $L^\infty(S^*)$ сопряжено сепарабельному, отображение f слабо дифференцируемо почти всюду (теорема 4.4.3). Так как f нерастягивающее, по следствию 4.5.2 слабый дифференциал $d_x^w f$ является нерастягивающим отображением из T_xM в $L^\infty(S^*)$ для почти всех $x \in M$ (мы рассматриваем T_xM как евклидово пространство с евклидовой структурой, определяемой метрикой g). Поскольку Y конечномерно, имеем $d_x(P\circ f) = P \circ d_x^w f$. Следовательно, отображение $d_x(P\circ f)$, а с ним и $d_x f = I^{-1} \circ d_x(P \circ f)$, не увеличивает n-мерные площади по Лёвнеру. По определению, n-мерный объем по Лёвнеру в $(V, \|\cdot\|)$ равен евклидову объему в пространстве $(V, |\cdot|_E)$. Таким образом, $J_n f(x) \le 1$.

В случае равенства найдется простой n-вектор $\sigma \in \Lambda_s^n T_xM$, для которого

$$|d_x f(\sigma)|_E = |\sigma|_{T_xM} = \mathrm{vol}_n^e(P(d_x^w f(\sigma))),$$

где vol_n^e — n-мерный объем по Лёвнеру в $L^\infty(S^*)$. Пусть $Z \subset T_xM$ — n-мерное подпространство, ассоциированное с σ. Применяя случай равенства из теоремы 8.1.1 к отображению $d_x^w f|_Z : Z \to L^\infty(S^*)$, получаем, что $d_x F|_Z = I^{-1} \circ P \circ d_x^w f|_Z$ является изометрией между Z и $(V, |\cdot|_E)$. Предложение 9.2.5 доказано. □

9.3 Оценка асимптотического объема в $\mathbf{R}^n$

В этом параграфе рассматриваются асимптотические объемы $\mathbf{Z}^n$-периодических римановых метрик в $\mathbf{R}^n$, см. §6.3. Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 9.3.1. *Пусть g — периодическая риманова метрика в $\mathbf{R}^n$, B_{st} — единичный шар ее стабильной нормы, E_{st} — его эллипсоид Джона. Тогда*

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \ge \frac{|B_{st}|}{|E_{st}|} \cdot \omega_n, \tag{9.3.1}$$

где знак модуля обозначает n-мерный евклидов объем, причем равенство достигается тогда и только тогда когда метрика g плоская.

Поскольку $E_{st} \subset B_{st}$, получаем немедленное

Следствие 9.3.2. *Для любой периодической римановой метрики g в $\mathbf{R}^n$ верно неравенство*

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \ge \omega_n,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда метрика g плоская.

Доказательство теоремы 9.3.1. Неравенство (9.3.1) следует из теорем 6.3.9 и 8.1.1. Действительно, по следствию 8.1.2 объем по Лёвнеру полуэллиптичен. Отсюда по теореме 6.3.9

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) \geq \mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(B_{st}),$$

где $\|\cdot\|$ — стабильная норма метрики. По определению объема по Лёвнеру имеем $\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(E_{st}) = \omega_n$, следовательно

$$\mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(B_{st}) = \frac{|B_{st}|}{|E_{st}|} \cdot \omega_n,$$

откуда следует (9.3.1).

Для исследования случая равенства воспользуемся результатами предыдущих параграфов. Пусть $|\cdot|_E$ — норма на $\mathbf{R}^n$, единичным шаром которой является эллипсоид E_{st}. По предложению 9.2.5 существует эквивариантное относительно $\mathbf{Z}^n$ отображение

$$F : (\mathbf{R}^n, g) \to (\mathbf{R}^n, |\cdot|_E),$$

такое, что для почти всех $x \in M$ имеет место неравенство $J_n F(x) \leq 1$, равенство в котором достигается только если $d_x F$ — изометрия между $T_x(\mathbf{R}^n, g)$ и $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_E)$. Профакторизовав по действию группы $\mathbf{Z}^n$, получаем отображение $\overline{F}$ между метризованными n-мерными торами,

$$\overline{F} : (\mathbf{R}^n, g)/\mathbf{Z}^n \to (\mathbf{R}^n, |\cdot|_E)/\mathbf{Z}^n,$$

якобианы которого обладают теми же свойствами. Из эквивариантности отображения F следует, что $\overline{F}$ гомотопно тождественному отображению тора $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$, следовательно, оно имеет топологическую степень 1. В частности, оно сюръективно. Отсюда и из того, что $J_n\overline{F} \leq 1$ почти всюду, следует, что

$$\mathrm{vol}_g(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \geq \mathrm{vol}_{|\cdot|_E}(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n).$$

При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $J_n\overline{F}(x) = 1$ для почти всех x, откуда следует, что $d_x\overline{F}$ — изометрия для почти всех x.

С другой стороны, из предложения 6.3.8 имеем

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, g) = \mathrm{vol}_g(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \cdot |B_{st}|$$

и

$$\mathrm{AsVol}(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|) = \mathrm{vol}_{\|\cdot\|}(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \cdot |B_{st}| = \mathrm{vol}_{|\cdot|_E}(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) \cdot |B_{st}|$$

(последнее равенство следует из определения объема по Лёвнеру). Поэтому равенство в (9.3.1) эквивалентно тому, что

$$\mathrm{vol}_g(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n) = \mathrm{vol}_{|\cdot|_E}(\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n).$$

По доказанному выше отсюда следует, что для почти всех $x \in \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ дифференциал $d_x\overline{F}$ является изометрией. Применяя предложение 9.1.2, заключаем, что в случае равенства в (9.3.1) отображение $\overline{F}$ — изометрия между римановым тором $(\mathbf{R}^n, g)/\mathbf{Z}^n$ и плоским тором $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_E)/\mathbf{Z}^n$. Это означает, что метрика g — плоская. $\square$

Замечание 9.3.3. Из доказательства видно, что утверждение теоремы верно для периодических метрик не только на $\mathbf{R}^n$, но и на любых многообразиях, для которых существует Γ-эквивариантное отображение в $\mathbf{R}^n$ ненулевой топологической степени. Дальнейшее развитие этого соображения содержится в следующем параграфе.

Замечание 9.3.4. Теорема 9.3.1 связывает между собой асимптотическое поведение длин и объемов в периодической метрике. Естественно было бы ожидать, что похожие неравенства выполняются и между объемами и площадями. В работе [38] были исследованы асимптотические изопериметрические константы периодических метрик — асимптотически минимальные отношения объемов больших областей к $(n-1)$-мерным площадям их границ, взятым в степени $n/(n-1)$. При $n = 2$ ситуация полностью аналогична асимптотическим объемам: минимальное значение асимптотической изопериметрической константы достигается для плоских метрик. При $n > 2$, однако, существуют метрики со сколь угодно малыми асимптотическими изопериметрическими константами.

9.4 Обобщения неравенства Лёвнера

Для компактного риманова многообразия M через $\operatorname{sys}\pi_1(M)$ будем обозначать длину кратчайшей нестягиваемой петли в M (эта величина называется одномерной гомотопической систолой риманова многообразия M). Классическое изосистолическое неравенство Лёвнера (см. [83], [73, гл. 1]) состоит в следующем: для любой римановой метрики g на двумерном торе T^2 верно, что

$$\operatorname{sys}\pi_1(T^2, g)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{vol}_2(T^2, g).$$

Равенство в этом неравенстве достигается для плоского тора, склеенного из ромба с углом $\pi/3$ при вершине, поэтому константа $\frac{2}{\sqrt{3}}$ является оптимальной.

М. Громов [66, стр. 259–260], пользуясь теоремой 9.3.1, вывел аналогичное оптимальное неравенство для торов старших размерностей и некоторых других многообразий M, у которых первое число Бетти $b_1(M)$ равно размерности $\dim M$, см. теорему 9.4.6 ниже. В этом параграфе доказывается дальнейшее обобщение этого неравенства на случай $b_1(M) \leq \dim M$.

Чтобы сформулировать результат Громова и его обобщения, нам понадобятся некоторые определения и обозначения из систолической геометрии. Подробное изложение этих вопросов можно найти в книге [73].

Пусть M — замкнутое риманово многообразие размерности n. Обозначим через k его первое число Бетти:

$$k = b_1(M) = \operatorname{rank} H_1(M; \mathbf{Z}) = \dim H_1(M; \mathbf{R}),$$

где H_1 — первая группа гомологий. Через $\widetilde{M}$ будем обозначать накрывающее пространство *универсального свободного абелева накрытия* многообразия M. Это накрытие определяется следующим образом: пусть G — максимальная подгруппа фундаментальной группы $\pi_1(M)$, для которой факторгруппа $\Gamma = \pi_1(M)/G$ — абелева группа без кручения. Рассматриваемое накрытие определяется условием, что его группа накрытия равна G. Поскольку факторгруппа абелева, накрытие является регулярным и не зависит от выбора отмеченной точки, участвующей в определении фундаментальной группы.

Группа Γ является группой накрывающих преобразований накрытия $\widetilde{M} \to M$. Она канонически отождествляется с факторгруппой группы $H_1(M; \mathbf{Z})$ по ее кручению, или, что то же самое, с целочисленной решеткой $H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}}$ в векторном пространстве $H_1(M; \mathbf{R})$. В частности, $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^k$.

Накрывающее пространство $\widetilde{M}$ снабжается римановой метрикой — поднятием римановой метрики многообразия M. Метрика на $\widetilde{M}$ является Γ-периодичной. Обозначим через $\|\cdot\|_{st}$ ее стабильную норму. Она определена на пространстве

$$V = \Gamma \otimes \mathbf{R} = H_1(M; \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^k.$$

Норма $\|\cdot\|_{st}$ на $H_1(M; \mathbf{R})$ допускает следующую интерпретацию в терминах исходного многообразия M (которая часто принимается за определение стабильной нормы, см. [62], [73]):

$$\|h\|_{st} = \inf_{\gamma}\{|\gamma| : [\gamma] = h\}, \qquad h \in H_1(M; \mathbf{R}), \tag{9.4.1}$$

где инфимум берется по всем одномерным липшицевым циклам в M, представляющим данный элемент h группы гомологий $H_1(M; \mathbf{R})$. Через $|\gamma|$ обозначается длина (масса) цикла, определяемая следующим образом: если $\gamma = \sum a_i \gamma_i$, где $a_i \in \mathbf{R}$, γ_i — липшицевы кривые в M, то

$$|\gamma| = \sum |a_i| L(\gamma_i),$$

где L обозначает длину относительно римановой метрики.

Определение 9.4.1. Обозначим через $\operatorname{stsys}_1(M)$ минимальное значение стабильной нормы на целочисленной решетке, то есть

$$\operatorname{stsys}_1(M) = \inf\{\|h\|_{st} : h \in H_1(M; \mathbf{R})_{\mathbf{Z}} \setminus \{0\}\}.$$

Величина $\operatorname{stsys}_1(M)$ называется (одномерной) *стабильной систолой* риманова многообразия M.

Из (9.4.1) ясно, что $\mathrm{stsys}_1(M) \le \mathrm{sys}\,\pi_1(M)$. В случае, когда M гомеоморфно двумерному тору, нетрудно проверить, что $\mathrm{stsys}_1(M) = \mathrm{sys}\,\pi_1(M)$.

Обозначим

$$\mathcal{T} = V/\Gamma = H_1(M;\mathbf{R})/H_1(M;\mathbf{R})_{\mathbf{Z}} \simeq \mathbf{R}^k/\mathbf{Z}^k.$$

Пространство $\mathcal{T}$ является k-мерным тором, его фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{T})$ канонически отождествляется с Γ. Таким образом, имеется естественный гомоморфизм

$$P : \pi_1(M) \to \pi_1(\mathcal{T}) = \Gamma = H_1(M;\mathbf{R})_{\mathbf{Z}}.$$

Поскольку тор асферичен, существует единственное с точностью до гомотопии гладкое отображение

$$\mathcal{A}_M : M \to \mathcal{T},$$

индуцирующий вышеуказанный гомоморфизм P между фундаментальными группами. Мы будем называть $\mathcal{A}_M$ *отображением Абеля–Якоби* многообразия M. (Обычно отображением Абеля–Якоби называют единственное гармоническое отображение из этого гомотопического класса, см. [75], [65], но для наших целей выбор представителя в гомотопическом классе не существенен.) Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}_M$ поднятие отображения $\mathcal{A}_M$ в накрывающие пространства абелевых накрытий:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_M : \widetilde{M} \to H_1(M;\mathbf{R}).$$

Это поднятие эквивариантно относительно Γ:

$$\widetilde{\mathcal{A}}_M(x+v) = \widetilde{\mathcal{A}}_M(x) + v$$

для всех $x \in \widetilde{M}$, $v \in \Gamma = H_1(M;\mathbf{R})_{\mathbf{Z}}$.

Определение 9.4.2. Обозначим через $[\widetilde{F}_M] \in H_{n-k}(\widetilde{M})$ гомологический класс прообраза $\widetilde{\mathcal{A}}_M^{-1}(y)$ регулярного значения y отображения $\widetilde{\mathcal{A}}_M$, где гомологии берутся над $\mathbf{Z}$ в случае ориентируемого $\widetilde{M}$ и над $\mathbf{Z}_2$ в противном случае. Определим *систолическую степень*

$$\mathrm{sysdeg}(\mathcal{A}_M)$$

отображения $\mathcal{A}_M$ как инфимум $(n-k)$-мерных объемов всех циклов, представляющих класс $[\widetilde{F}_M]$.

Замечание 9.4.3. Если $n = k$, то $\mathrm{sysdeg}(\mathcal{A}_M)$ является топологическим инвариантом многообразия M и равна абсолютной величине $|\deg(\mathcal{A}_M)|$ топологической степени отображения $\mathcal{A}_M$. Если $n > k$ и $[\widetilde{F}_M] \neq 0$, то $\deg(\mathcal{A}_M)$ зависит от римановой метрики на M.

Использование термина "степень" для характеристики, зависящей от римановой метрики и принимающей произвольные вещественные значения, выглядит необычно.

Однако это является традиционным в систолической литературе благодаря такому его использованию в основополагающей работе Громова [63]. В работе [63] величина называлась “геометрической степенью” и обозначалась deg; обозначение sysdeg взято из более поздней книги [66].

Замечание 9.4.4. Нетрудно проверить, что $\operatorname{sysdeg}(\mathcal{A}_M) > 0$, если $[\widetilde{F}_M] \neq 0$. Действительно, из теоремы о деформации потоков (см. [61], [15, 4.2.9] или [93]) следует, что любой $(n-k)$-мерный цикл в M, объем которого меньше некоторого $\varepsilon = \varepsilon(M) > 0$, можно деформировать на $(n-k-1)$-мерный остов некоторой триангуляции. Поднимая деформацию в накрывающее пространство, получаем, что любой цикл в $\widetilde{M}$, объем которого меньше ε, представляет нулевой элемент группы гомологий.

Определение 9.4.5. Для решетки $L \subset \mathbf{R}^n$ обозначим через $\lambda_1(L)$ наименьшую длину ненулевого вектора из Z:

$$\lambda_1(L) = \min\{|v| : v \in L \setminus \{0\}\}.$$

Константа Эрмита γ_n определяется равенством

$$\sqrt{\gamma_n} = \sup_L \left\{ \frac{\lambda_1(L)}{\operatorname{vol}(\mathbf{R}^n/L)^{1/n}} \right\},$$

где инфимум берется по всем решеткам $L \subset \mathbf{R}^n$. Решетка, для которой этот инфимум достигается, называется *критической.*

Для всех n константа γ_n положительна и критические решетки существуют, см. [50]. В частности, $\gamma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. При $n \to \infty$ число γ_n растет линейно, хорошие оценки сверху и снизу можно найти в работе [74].

Теперь сформулируем упомянутый в начале результат Громова.

Теорема 9.4.6 (M. Gromov [66, теорема 4.30 и 4.31(b)])**.** *Пусть M — замкнутое риманово многообразие и $\dim(M) = b_1(M) = n$. Тогда*

$$\deg(\mathcal{A}_M) \operatorname{stsys}_1(M)^n \leq \gamma_n^{n/2} \operatorname{vol}_n(M).$$

В частности, для любой метрики g на n-мерном торе T^n верно, что

$$\operatorname{stsys}_1(T^n, g)^n \leq \gamma_n^{n/2} \operatorname{vol}_n(T^n, g).$$

Эта теорема обобщает неравенство Лёвнера, так как для метрик на двумерном торе выполняется равенство $\operatorname{stsys}_1 = \operatorname{sys} \pi_1$. Константа $\gamma_n^{n/2}$ оптимальна, равенство достигается для плоских торов, получаемых факторизацией пространства $\mathbf{R}^n$ по критическим решеткам.

Следующая теорема обобщает теорему 9.4.6, а также устанавливает оптимальное значение константы в другом неравенстве Громова, см. [66, 4.33(c)].

Теорема 9.4.7. *Пусть M — замкнутое риманово многообразие. Предположим, что $n \geq k \geq 1$, где $n = \dim M$, $k = b_1(M)$. Тогда*

$$\operatorname{sysdeg}(\mathcal{A}_M) \operatorname{stsys}_1(M, g)^k \leq \gamma_k^{k/2} \operatorname{vol}_n(M, g). \tag{9.4.2}$$

Замечание 9.4.8. Константа $\gamma_k^{k/2}$ в (9.4.2) оптимальна. Например, равенство в (9.4.2) достигается в случае, когда M является метрическим произведением односвязного многообразия размерности $n-k$ и плоского k-мерного тора, соответствующего критической решетке в $\mathbf{R}^k$.

Случай равенства в (9.4.2) полностью исследован в работе [25]. В частности, там доказано, что многообразия, для которых достигается равенство, допускают гармоническую риманову субмерсию на критический k-мерный тор, и слои этой субмерсии являются минимальными поверхностями.

Доказательство теоремы 9.4.7. Мы используем обозначения, введенные ранее в этом параграфе. Пусть $|\cdot|_E$ — евклидова норма на $V = H_1(M; \mathbf{R})$, единичным шаром которой является эллипсоид Джона стабильной нормы $\|\cdot\|_{st}$. По предложению 9.2.5, существует такое липшицево отображение

$$\widetilde{f} : \widetilde{M} \to (V, |\cdot|_E),$$

что $J_k f(x) \leq 1$ для почти всех $x \in \widetilde{M}$ и

$$\widetilde{f}(x+v) = \widetilde{f}(x) + v$$

для любых $x \in \widetilde{M}$, $v \in \Gamma$. Последнее условие означает, что $\widetilde{f}$ является поднятием некоторого отображения

$$f : M \to \mathcal{T} = V/\Gamma,$$

которое гомотопно отображению Абеля–Якоби $\mathcal{A}_M$. Будем рассматривать $\mathcal{T}$ как плоский k-мерный тор с метрикой, полученной факторизацией из нормы $|\cdot|_E$. Тогда $J_k f(x) \leq 1$ для почти всех $x \in M$. По формуле коплощади для липшицевых отображений (см. [15, 3.2.11]),

$$\int_{\mathcal{T}} \operatorname{vol}_{n-k}(f^{-1}(y))\, d\operatorname{vol}_k(y) = \int_M J_n f(x)\, d\operatorname{vol}_n(x) \leq \operatorname{vol}_n(M),$$

где vol_k обозначает k-мерный объем (риманов объем на M и $\mathcal{T}$ и меру Хаусдорфа на слое $f^{-1}(y)$). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и сгладим f так, чтобы сглаженное отображение f_ε удовлетворяло неравенству

$$\int_M J_n f_\varepsilon(x)\, d\operatorname{vol}_n(x) \leq \operatorname{vol}_n(M) + \varepsilon,$$

тогда

$$\int_{\mathcal{T}} \operatorname{vol}_{n-k}(f_\varepsilon^{-1}(y))\, d\operatorname{vol}_k(y) \leq \operatorname{vol}_n(M) + \varepsilon, \tag{9.4.3}$$

Поскольку f (а значит и f_ε) гомотопно отображению Абеля–Якоби, прообраз $f_\varepsilon^{-1}(y)$ регулярного значения $y \in \mathcal{T}$ представляет гомологический класс $[\widetilde{F}_M] \in H_{n-k}(\widetilde{M})$ из определения 9.4.2. Следовательно,

$$\mathrm{vol}_{n-k}(f_\varepsilon^{-1}(y)) \geq \mathrm{sysdeg}(\mathcal{A}_M)$$

для почти всех $y \in \mathcal{T}$. Отсюда и из (9.4.3) следует, что

$$\mathrm{sysdeg}(\mathcal{A}_M)\,\mathrm{vol}_k(\mathcal{T}) \leq \mathrm{vol}_n(M) + \varepsilon,$$

откуда

$$\mathrm{sysdeg}(\mathcal{A}_M)\,\mathrm{vol}_k(\mathcal{T}) \leq \mathrm{vol}_n(M) \tag{9.4.4}$$

в силу произвольности ε. Из определения константы Эрмита следует, что

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_k(\mathcal{T}) &= \mathrm{vol}(V/\Gamma, |\cdot|_E) \\ &\geq \gamma_k^{k/2} \cdot \min\{|v|_E : v \in \Gamma \setminus \{0\}\} \\ &\geq \gamma_k^{k/2} \cdot \min\{\|v\|_{st} : v \in \Gamma \setminus \{0\}\} = \mathrm{stsys}_1(M). \end{aligned}$$

Отсюда и из (9.4.4) следует (9.4.2). Теорема доказана. □

Следствие 9.4.9. *Пусть M — замкнутое многообразие, $k = b_1(M)$, $\dim M = k+1$. Предположим, что $[\widetilde{F}_M] \neq 0$, где $[\widetilde{F}_M]$ — гомологический класс типичного слоя отображения Абеля–Якоби, см. определение 9.4.2. Тогда для любой метрики g на M выполняется следующее неравенство*

$$\mathrm{stsys}_1(M,g)^k\,\mathrm{sys}\,\pi_1(M,g) \leq \gamma_k^{k/2}\,\mathrm{vol}_{k+1}(M,g).$$

Доказательство. Поскольку любой цикл, представляющий $[\widetilde{F}_M]$, не стягиваем в $\widetilde{M}$, его проекция в M тоже не стягиваема, следовательно, длина такого цикла не меньше, чем $\mathrm{sys}\,\pi_1(M,g)$. Таким образом, $\mathrm{stsys}_1(M,g) \geq \mathrm{sys}\,\pi_1(M,g)$. Теперь доказываемое неравенство следует из теоремы 9.4.7. □

Замечание 9.4.10. В качестве примера случая равенства в следствии 9.4.9 достаточно взять риманово расслоение на окружности постоянной длины над плоским k-мерным тором, соответствующим критической решетке (слои должны быть достаточно короткими геодезическими, реализующими значение $\mathrm{sys}\,\pi_1(M,g)$). Такое строение имеет, например, факторпространство группы Гейзенберга с левоинвариантной метрикой по ее целочисленной решетке.

Этот пример объясняет, почему в определении систолической степени взят слой отображения накрывающих пространств, а не самого отображения $\mathcal{A}_M : M \to \mathcal{T}$. Дело в том, что в этом примере типичный слой представляет нулевой гомологический класс в M, но ненулевой в $\widetilde{M}$. Поэтому с другим исходным определением следствие 9.4.9 получилось бы бессодержательным.

Глава 10

Почти плоские метрики

10.1 Формулировки и предварительные сведения

Пусть (M, g) — компактное n-мерное риманово многообразие с краем ∂M. Его *функцией граничного расстояния* будем называть сужение риманова расстояния d_g на $\partial M \times \partial M$. Свойство граничной жесткости состоит в том, что метрика однозначно определяется своей функцией граничного расстояния.

Определение 10.1.1. Многообразие (M, g) называется *гранично жестким*, если любое компактное риманово многообразие $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ с тем же краем и такой же функцией граничного расстояния изометрично (M, g) изометрией, тождественной на краю.

Легко построить примеры метрик, не являющиеся гранично жесткими. Например, рассмотрим метрику на диске, которая столь велика в окрестности некоторой точки p, что расстояние от p до края больше, чем диаметр края. Тогда никакая минимальная геодезическая между точками края ни проходит через p, следовательно, малое возмущение метрики вблизи p не меняет функцию граничного расстояния.

Таким образом, чтобы задача о граничной жесткости была осмысленной, необходимо наложить ограничения на метрику g. Как правило, вопросы о граничной жесткости рассматриваются для метрик без сопряженных точек.

Один из основных результатов этой главы (теорема 10.1.3) состоит в том, что если (M, g) близко в C^2 топологии к области в евклидовом пространстве, то (M, g) является гранично жестким. Граничная жесткость доказывается исследованием случая равенства в задаче о минимальном заполнении. А именно, будет доказана следующая

Теорема 10.1.2. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, g_E — стандартная евклидова метрика в этой области. Тогда существует такая окрестность U метрики g_E в C^2 топологии, что для любой метрики $g \in U$ пространство (M, g) является единственным минимальным заполнением своего края в классе всех* *ориентируемых многообразий с кусочно римановыми метриками (см. определение 9.1.1 кусочно римановой метрики).*

Другими словами, если $g \in U$ и $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ — ориентированное многообразие с кусочно римановой метрикой, заполняющее $(\partial M, d_g)$, то $\mathrm{vol}(\widetilde{M}, \widetilde{g}) \geq \mathrm{vol}(M, g)$, причем в случае равенства $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ изометрично (M, g) изометрией, тождественной на краю.

Из доказательства теоремы можно вывести явное описание окрестности U. А именно, если g — риманова метрика в $\mathbf{R}^n$, $g = g_E$ вне шара $B_R(0)$ и $|K_\sigma| < \frac{c(n)}{R^2}$, то для любой области $\Omega \subset B_R(0)$ пространство (Ω, g) является единственным ориентируемым минимальным заполнением. Здесь $c(n)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от размерности (константу можно выразить явно, значение $c(n) = n^{-100n}$ заведомо подходит).

Как следствие теоремы 10.1.2, верна следующая

Теорема 10.1.3. *Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — компактная область с гладкой границей, g_E — стандартная евклидова метрика в этой области. Тогда существует такая окрестность U метрики g_E в C^2 топологии, что для любой метрики $g \in U$ пространство (M, g) является гранично жестким.*

Доказательство. Если g достаточно близка к g_E, то она обладает свойством *строгой минимальности геодезических*: любая геодезическая в (M, g_E) минимальна и не имеет сопряженных точек. Пусть $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ — такое риманово многообразие, что $\partial \widetilde{M} = \partial M$ и $d_g|_{\partial M \times \partial M} = d_{\widetilde{g}}|_{\partial \widetilde{M} \times \partial \widetilde{M}}$. Рассмотрим единичные касательные расслоения UTM и $UT\widetilde{M}$ этих метрик. Из условия строгой минимальности геодезических для g и совпадения граничных расстояний следует (см. [53, Lemma 5.1]), что существует сохраняющий объем диффеоморфизм $\varphi : UTM \to UT\widetilde{M}$. Следовательно, $\mathrm{vol}(M, g) = \mathrm{vol}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$. Из наличия такого диффеоморфизма также следует, что $\widetilde{M}$ ориентируемо. Действительно, из того, что M — область в R^n, следует, что индуцированный вложением

$$i : \partial UTM \simeq \partial M \times S^{n-1} \to UTM \simeq M \times S^{n-1}$$

гомоморфизм

$$i_* : H_1(\partial UTM; \mathbf{Z}) \to H_1(UTM; \mathbf{Z})$$

сюръективен (каждый цикл в UTM гомологичен циклу, лежащему на краю). Если $\widetilde{M}$ не ориентируемо, то аналогичный гомоморфизм

$$\widetilde{i}_* : H_1(\partial UT\widetilde{M}; \mathbf{Z}) \to H_1(UT\widetilde{M}; \mathbf{Z})$$

не сюръективен, так как в его образе не лежит поднятие в $UT\widetilde{M}$ произвольной меняющей ориентацию петли в $\widetilde{M}$. Таким образом, из неориентируемости многообразия $\widetilde{M}$ следует, что единичные касательные расслоения не гомеоморфны.

Поскольку $\widetilde{M}$ ориентируемо и $\mathrm{vol}(\widetilde{M}, \widetilde{g}) = \mathrm{vol}(M, g)$, мы находимся в ситуации случая равенства из теоремы 10.1.2, откуда следует, что $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ изометрично (M, g) изометрией, тождественной на краю. Таким образом, теорема 10.1.3 следует из теоремы 10.1.2. $\square$

Замечание 10.1.4. Известно много примеров *локально* гранично жестких метрик. Многообразие (M, g) называется *локально гранично жестким*, если любая метрика $\widetilde{g}$ на M, достаточно близкая к g (в C^∞) и индуцирующая ту же функцию граничного расстояния, изометрична g (изометрией, тождественной на краю). Например, локально гранично жесткими являются простые метрики неположительной кривизны [56] и простые аналитические метрики [89]. Подчеркнем, что в определении 10.1.1 и теоремах 10.1.2 и 10.1.3 никаких ограничений на $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ не накладывается.

План доказательства. Мы доказываем минимальность заполнения и граничную жесткость с помощью подхода, изложенного в §5.4. А именно, мы строим изометрическое отображение

$$\Phi : (M, g) \to \mathcal{L} = L^\infty(S^{n-1}),$$

близкое к линейному изометрическому вложению $\Phi_E : \mathbf{R}^n \to \mathcal{L}$ (см. §10.2). Пусть $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ — риманово многообразие, заполняющее $(\partial M, d_g)$. Тогда по предложению 5.3.1 существует нерастягивающее отображение $\widetilde{\Phi} : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to \mathcal{L}$ с $\widetilde{\Phi}|_{\partial \widetilde{M}} = \Phi_{\partial M}$. Достаточно доказать, что $\mathrm{area}(\widetilde{\Phi}) \le \mathrm{area}(\Phi)$, где area — n-мерная площадь по Лёвнеру в пространстве $\mathcal{L}$. Для этого мы сначала докажем, что Φ является минимальной поверхностью в вариационном смысле (§10.3), а затем выведем глобальную минимальность, пользуясь тем, что она близка к линейному подпространству (аналогичный конечномерный факт можно найти, например, в [79, Theorem 3]). Исследование случая равенства в теореме 10.1.2, по существу, сводится к доказательству того, что поверхности $\Phi(M)$ и $\widetilde{\Phi}(\widetilde{M})$ пространстве $\mathcal{L}$ геометрически совпадают, тогда искомая изометрия между $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ и (M, g) может быть построена в виде $\Phi^{-1} \circ \widetilde{\Phi}$.

Чтобы вариационная минимальность поверхности имела смысл, необходима дифференцируемость плотности n-мерной площади (как функции на грассмане). Площадь по Лёвнеру не обладает этим свойством. Чтобы обойти эту трудность, мы доказываем минимальность относительно функционала площади, определяемого вспомогательной римановой метрикой в $\mathcal{L}$ (то есть семейством L^2 структур, параметризованным точками пространства $\mathcal{L}$). Эта вспомогательная площадь оценивает площадь по Лёвнеру сверху и совпадает с ней на исходной поверхности $\Phi(M)$.

Добавление воротника

Сначала сведем задачу к специальному случаю, когда M — единичный евклидов шар, а g совпадает со стандартной евклидовой метрикой вне шара радиуса $\frac{1}{10n}$.

Предложение 10.1.5. *Теорема 10.1.2 следует из ее частного случая, где*

1. M — единичный шар $D = B_1(0) \subset \mathbf{R}^n$ и g совпадает со стандартной евклидовой метрикой g_E на "воротнике" $N = B_1(0) \setminus B_{1/10n}(0)$;

2. $\widetilde{M}$ содержит N и $\widetilde{g} = g$ на N;

3. Расстояния d_g и $d_{\widetilde{g}}$ удовлетворяют неравенству $d_{\widetilde{g}}(x,y) \geq d_g(x,y)$ для всех $x, y \in N$.

Доказательство. Пусть (M,g) и $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ — такие, как в теореме 10.1.2. С помощью масштабирования можно считать, что M содержится в шаре $B_{1/20n}(0) \subset \mathbf{R}^n$. Продолжим g до гладкой метрики на всем пространстве $\mathbf{R}^n$ так, что g остается C^2-близкой к g_E и $g = g_E$ вне шара $B_{1/10n}(0)$. Продолженную метрику будем обозначать той же буквой g.

Пусть $M^+ = (D,g)$. Можно рассматривать M^+ как результат приклеивания другого "воротника" $N' = D \setminus M$ к M. Приклеивая тот же воротник (N', g) к $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, получаем многообразие $\widetilde{M}^+ = \widetilde{M} \cup N'$ с кусочно гладкой римановой метрикой (которую мы тоже обозначаем через $\widetilde{g}$). Отметим, что $N \subset N'$, поэтому $\widetilde{g} = g = g_E$ на N.

Проверим, что новые пространства (M^+,g) и $(\widetilde{M}^+,\widetilde{g})$ удовлетворяют условиям 1–3. Первые два очевидны. Чтобы проверить третье, рассмотрим $x, y \in N$ и заметим, что внутреннее расстояние $d_{(\widetilde{M}^+,\widetilde{g})}(x,y)$ зависит только от $g|_N$ и $d_{(\widetilde{M},\widetilde{g})}|_{\partial M \times \partial M}$, причем последняя зависимость монотонна. Так как $d_{(\widetilde{M},\widetilde{g})} \geq d_{(M,g)}$ на ∂M, отсюда следует, что $d_{(\widetilde{M}^+,\widetilde{g})}(x,y) \geq d_{(M^+,g)}(x,y)$.

Остается заметить, что из заключения теоремы 10.1.2 для (M^+,g) и $(\widetilde{M}^+,\widetilde{g})$ следует то же утверждение для исходных пространств (M,g) и $(M,\widetilde{g})$. $\square$

Соглашение. Далее всюду предполагается, что (M,g) и $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ в теореме 10.1.2 удовлетворяют дополнительным условиям из предложения 10.1.5.

10.2 Поверхности и риманова структура в $\mathcal{L} = L^\infty(S)$

Зафиксируем следующие обозначения: $S = \partial M = \partial\widetilde{M} = S^{n-1}$ (напомним, что $M = D$ по соглашению из предыдущего параграфа); $\mathcal{L} = L^\infty(S)$.

Цель этого параграфа — построить нерастягивающие отображения Φ_E, Φ и $\widetilde{\Phi}$ из $(\mathbf{R}^n, g_E)$, (M,g) и $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ соответственно в $\mathcal{L}$. Отображения со значениями в $\mathcal{L}$ будут представляться как семейства "координатных функций", см. §4.6.

Определение 10.2.1. Определим $\Phi_E : \mathbf{R}^n \to \mathcal{L}$ равенством

$$\Phi_E(x)(\alpha) = \langle x, \alpha \rangle, \quad x \in \mathbf{R}^n, \alpha \in S,$$

где $\langle , \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$.

Очевидно, что отображение Φ_E линейно. Для $\alpha \in S$ соответствующая координатная функция $\Phi_{E\alpha} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ есть скалярное умножение на α. Поскольку α — единичный вектор (напомним, что $S = \partial D$ — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$), $\Phi_{E\alpha}$ является нерастягивающей функцией. Следовательно, Φ_E — нерастягивающее отображение. Более того, отображение Φ_E — изометрическое. Действительно,

$$\|\Phi_E(x)\| = \sup_{\alpha\in S}\langle x, \alpha\rangle = |x|.$$

Определение 10.2.2. Пусть $\Phi : M \to \mathcal{L}$ — отображение с координатными функциями $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha\in S}$, определенными равенством

$$\Phi_\alpha(x) = 1 - \mathrm{dist}_g(x, H_\alpha),$$

где H_α — гиперплоскость, касательная к S в точке α, dist_g — расстояние в метрике g, продолженной как g_E за пределы M (напомним, что это продолжение гладкое).

Заметим, что это определение, примененное к евклидовой метрике g_E в качестве g, дает отображение $\Phi_E|_M$. Действительно, евклидово расстояние от H_α до $x \in M$ равно $1 - \langle x, \alpha\rangle$.

Поскольку метрика g близка к g_E в C^2, гиперплоскости H_α не имеют фокальных точек в M, следовательно, функции Φ_α гладкие. Риманов градиент функции Φ_α в точке $x \in M$ — начальный вектор скорости единственной минимальной геодезической, реализующей расстояние от x до H_α.

Определение 10.2.3. Определим отображение $G : M \times S \to UTM$ равенством

$$G(x, \alpha) = \mathrm{grad}\,\Phi_\alpha(x),$$

где grad — градиент относительно метрики g. Здесь UTM — единичное касательное расслоение M (относительно g).

Обозначим через G_E аналогичную функцию для g_E вместо g. Тогда

$$g_E(x, \alpha) = (x, \alpha) \in \mathbf{R}^n \times S \cong UT\mathbf{R}^n$$

(напомним, что S — единичная сфера в $\mathbf{R}^n$).

Предложение 10.2.4. *1. $\Phi : (M, g) \to \mathcal{L}$ — изометрическое отображение.*

2. $\Phi \in C^1(M, \mathcal{L})$.

3. Отображение $G : M \times S \to UTM$ — диффеоморфизм.

4. Φ близко к Φ_E и G близко к G_E в C^1 топологии.

Доказательство. 1. Φ нерастягивающее, поскольку таковыми являются все функции Φ_α. Остается показать, что $\|\Phi(x)-\Phi(y)\| \ge d_g(x,y)$ для всех $x,y\in M$. Так как $\Phi_\alpha(x)$ непрерывно по α, имеем

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\| = \sup_{\alpha\in S}|\Phi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(y)|$$

Пусть γ — геодезическая с началом в x, проходящая через y ($x=\gamma(0)$, $y=\gamma(t_1)$). Она близка к прямой, пока находится в M, и прямолинейна после выхода из M. В некоторый момент γ ортогонально пересекает одну из гиперплоскостей H_α, то есть $\gamma(t_2)\in H_\alpha$ и $\dot\gamma(t_2)\perp H_\alpha$ для некоторых $\alpha\in S$ и $t_2>t_1$. Так как H_α не имеет фокальных точек в M, имеем $\operatorname{dist}_g(x,H_\alpha)=t_2$ и $\operatorname{dist}_g(y,H_\alpha)=t_2-t_1$. Отсюда

$$|\Phi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(y)| = |\operatorname{dist}_g(x,H_\alpha)-\operatorname{dist}_g(y,H_\alpha)| = t_1 = d_g(x,y),$$

откуда следует требуемое неравенство.

2–4. Поскольку метрика g C^2-близка к g_E, ее геодезический поток C^1-близок к геодезическому потоку метрики g_E. Функции расстояния до гиперплоскостей и их градиенты определяются нормальными геодезическими потоками гиперплоскостей как неявные функции, следовательно, они близки в C^1 к аналогичным функциям для евклидовой метрики. □

Теперь построим поверхность $\widetilde\Phi:\widetilde M\to\mathcal L$ затягивающую ту же границу, что и Φ. Нам потребуется, чтобы $\widetilde\Phi$ была не слишком не слишком далека от Φ, для этого мы отсекаем слишком большие значения функций.

Предложение 10.2.5. *Пусть $N=M\setminus B_{1/10n}(0)$ — воротник из предложения 10.1.5. Существует такое нерастягивающее отображение $\widetilde\Phi:(\widetilde M,\widetilde g)\to\mathcal L$, что $\widetilde\Phi|_N=\Phi|_N$ и $\widetilde\Phi(\widetilde M\setminus N)$ содержится в шаре радиуса $\frac{2}{10n}$ с центром в нуле пространства $\mathcal L$.*

Доказательство. По предложению 5.3.1 построим такое нерастягивающее отображение $\widetilde\Phi^0:(\widetilde M,\widetilde g)\to\mathcal L$, что $\widetilde\Phi^0|_N=\Phi|_N$. Это можно сделать, так как $d_{\widetilde g}\ge d_g$ на $N\times N$, см. предложение 10.1.5. Для $x\in N$ положим $\widetilde\Phi(x)=\widetilde\Phi^0(x)$. Для $x\in\widetilde M\setminus N$ положим

$$\widetilde\Phi(x)(\alpha)=\operatorname{cutoff}\bigl(\widetilde\Phi^0(x)(\alpha),\frac{2}{10n}\bigr),\qquad \alpha\in S,$$

где

$$\operatorname{cutoff}(a,b)=\min\{b,\max\{-b,a\}\}.$$

Заметим, что значения отображения $\widetilde\Phi$ на общей границе множеств N и $\widetilde M\setminus N$ согласованы, так как $|\widetilde\Phi^0(x)|=|\Phi(x)|<\frac{2}{10n}$ при $x\in\partial(\widetilde M\setminus N)$ в силу близости Φ и Φ_E. Следовательно, отображение $\widetilde\Phi:(\widetilde M,\widetilde g)\to\mathcal L$ нерастягивающее, так как его сужения на N и $\widetilde M\setminus N$ нерастягивающие и метрика на области определения внутренняя. Остальные требуемые свойства очевидны из построения. □

Риманова структура на $\mathcal{L}$

Определение 10.2.6. Пусть μ — вероятностная мера на S. Определим скалярное произведение $\langle , \rangle_\mu$ на $\mathcal{L}$ равенством

$$\langle f, g \rangle_\mu = n \int_S f g \, d\mu.$$

Будем обозначать пространство $\mathcal{L}$ с эти скалярным произведением через $\mathcal{L}_\mu$, а тождественное отображение $id_{\mathcal{L}}$, рассматриваемое как отображение из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}_\mu$, через i_μ. Ясно, что i_μ липшицево с константой Липшица, равной n.

Лемма 10.2.7. *Пусть $A : \mathbf{R}^n \to \mathcal{L}$ — нерастягивающее линейное отображение. Тогда композиция $i_\mu \circ A : \mathbf{R}^n \to \mathcal{L}_\mu$ не увеличивает n-мерный объем, а если оно сохраняет n-мерный объем, то оно является изометрическим.*

Доказательство. Пусть $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ — координатные функции отображения A, g_μ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, индуцированное отображением A из $\langle , \rangle_\mu$. Тогда

$$g_\mu(v, v) = n \int_S A_\alpha(v)^2 d\mu(\alpha),$$

откуда

$$\operatorname{trace}(g_\mu) = n \int_S \operatorname{trace}(A_\alpha^2) d\mu(\alpha) \leq n,$$

так как $\operatorname{trace} A_\alpha^2 = \|A_\alpha\|^2 \leq 1$. Так как g_μ — неотрицательно определенная квадратичная форма, по неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом для ее собственных чисел имеем

$$\det(g_\mu) \leq (\frac{1}{n} \operatorname{trace}(g_\mu))^{n/2} \leq 1.$$

Это означает, что $i_\mu \circ A$ не увеличивает n-мерный объем. Равенство в этом неравенстве возможно только в случае, когда g_μ совпадает со стандартной евклидовой структурой пространства $\mathbf{R}^n$. Это означает, что отображение $i_\mu \circ A$ изометрическое. □

Напомним, что в ранее был определен диффеоморфизм $G : M \times S \to UTM$ и $G(x, \alpha) \in UT_xM$ для всех $x \in M$, $\alpha \in S$ (см. определение 10.2.3 и предложение 10.2.4). В частности, для каждого $x \in M$ отображение $G(x, \cdot) : S \to UT_xM$ является диффеоморфизмом.

Определение 10.2.8. Пусть $x \in M$. Будем обозначать отображение, обратное к $G(x, \cdot)$, через ω_x. Другими словами, отображение $\omega_x : UT_xM \to S$ определяется равенством

$$\omega_x(G(x, \alpha)) = \alpha$$

для всех $\alpha \in S$.

Пусть μ_x — образ при отображении ω_x стандартной вероятностной меры на единичной сфере UT_xM. Для краткости переобозначим $\mathcal{L}_{\mu_x}$ через $\mathcal{L}_x$ и, аналогично, i_{μ_x} через i_x.

Лемма 10.2.9. *Для любой точки $x \in M$ отображение $i_x \circ d_x\Phi : T_xM \to \mathcal{L}_x$ является изометрическим.*

Доказательство. Обозначим $U = UT_xM$. Для каждого $v \in U$ имеем

$$\begin{aligned}\|d_x\Phi(v)\|^2_{\mathcal{L}_x} &= n \int_S |d_x\Phi_\alpha(v)|^2 \, d\mu_x(\alpha) \\ &= n \int_S \langle v, \omega_x^{-1}(\alpha)\rangle^2 \, d\mu_x(\alpha) = n \int_U \langle v, u\rangle^2 \, du = 1,\end{aligned}$$

где du обозначает нормированный $(n-1)$-мерный объем на U. Здесь второе равенство следует из определений отображений G и ω_x: $\operatorname{grad}\Phi_\alpha(x) = G(x,\alpha) = \omega_x^{-1}(\alpha)$. Последний интеграл равен $\frac{1}{n}$, так как он не зависит от $v \in U$ (в силу симметрии меры), и для векторов v, пробегающих ортонормированный базис пространства T_xM, сумма соответствующих функций под интегралом равна константе 1. $\square$

Напомним, что поверхность $\Phi(M)$ близка к n-мерному линейному подпространству $\Phi_E(\mathbf{R}^n)$. Мы будем рассматривать эту поверхность как график отображения из этого подпространства в его “ортогональное дополнение”,обозначаемое через Q (см. ниже). Затем мы продолжим семейство скалярных произведений $\{\langle,\rangle_x\}_{x\in M}$ до римановой структуры на всем $\mathcal{L}$. Эта риманова структура равна $\langle,\rangle_x$ в точке $\Phi(x)$ и постоянна вдоль подпространств, параллельных Q. Из лемм 10.2.9 и 10.2.7 следует, что Φ является изометрическим вложением и $\widetilde{\Phi}$ не увеличивает площади относительно этой римановой структуры. Теорема 10.1.2 будет доказана с помощью сравнения площадей поверхностей $\Phi(M)$ и $\widetilde{\Phi}(\widetilde{M})$ в полученном бесконечномерном римановом пространстве.

Чтобы избежать ненужных технических деталей, мы не будем явно ссылаться на риманову структуру в $\mathcal{L}$. Вместо этого мы рассмотрим проекцию многообразия $\widetilde{M}$ на M, соответствующую проекции поверхности $\widetilde{\Phi}(\widetilde{M})$ на $\Phi(M)$ вдоль Q, и определим площади через скалярные произведения $\langle,\rangle_x$.

Определение 10.2.10. Пусть H — евклидово пространство (не обязательно конечномерное) и $\varepsilon > 0$. Будем говорить, что линейные подпространства W_1 и W_2 пространства H *ε-ортогональны*, если $\angle(w_1, w_2) \geq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ для любых ненулевых векторов $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

Предложение 10.2.11. *Существует линейное подпространство $Q \subset \mathcal{L}$ коразмерности n и липшицево отображение $\pi : \widetilde{M} \to M$ со следующими свойствами.*

1. Для каждой точки $x \in M$ подпространство Q ε-ортогонально образу дифференциала $d_x\Phi$ в $\mathcal{L}_x$, где $\varepsilon > 0$ мало (стремится к 0 при $g \to g_E$).

2. Для всех $x \in \widetilde{M}$ верно, что $\Phi(\pi(x)) - \widetilde{\Phi}(x) \in Q$.

3. Если $\widetilde{\Phi}$ слабо дифференцируемо в точке $x \in \widetilde{M}$, то π дифференцируемо в x и $d_x(\Phi \circ \pi - \widetilde{\Phi})(v) \in Q$ для всех $v \in T_x\widetilde{M}$.

Доказательство. Если $g = g_E$, то μ_x не зависит от x и совпадает со стандартным нормированным $(n-1)$мерным объемом ν на S. Поскольку отображение G близко к аналогичному отображению для g_E (см. предложение 10.2.4), меры μ_x абсолютно непрерывны относительно ν с плотностями, близкими к 1. Следовательно, каждое скалярное произведение $\langle,\rangle_x$, $x \in M$, близко к "плоской" L^2 структуре $\langle,\rangle_\nu$.

Пусть Q — ортогональное дополнение подпространства $W = \Phi_E(\mathbf{R}^n)$ относительно $\langle,\rangle_\nu$. Поскольку каждое скалярное произведение $\langle,\rangle_x$ близко к $\langle,\rangle_\nu$, первое из доказываемых утверждений верно. Пусть $P : \mathcal{L} \to W$ — ортогональная проекция относительно $\langle,\rangle_\nu$. Так как Φ C^1-близко к Φ_E, отображение $P \circ \Phi$ является диффеоморфизмом многообразия M на область $\Omega \subset W$, причем Ω близка к единичному шару в W.

Напомним, что (по предложению 10.2.5) $\widetilde{\Phi}$ совпадает с Φ на "воротнике" N, и множество $\widetilde{\Phi}(\widetilde{M} \setminus N)$ содержится в шаре радиуса $\frac{2}{10n}$ пространства $\mathcal{L}$, и, следовательно, в шаре радиуса $\frac{2}{10}$ пространства $\mathcal{L}_\nu$. Отсюда $P \circ \widetilde{\Phi}(\widetilde{M}) \subset \Omega$, и можно определить $\pi : \widetilde{M} \to M$ равенством

$$\pi = (P \circ \Phi)^{-1} \circ (P \circ \widetilde{\Phi}).$$

Второе утверждение предложения немедленно следует из построения. Если $\widetilde{\Phi}$ слабо дифференцируемо в точке x, то отображение $P \circ \widetilde{\Phi}$ дифференцируемо в x и $d_x(P \circ \widetilde{\Phi}) = P \circ d_x\widetilde{\Phi}$ (это следует из определения слабого дифференциала, так как P — линейное отображение в конечномерное пространство). Отсюда следует третье утверждение, так как $P \circ \Phi$ — диффеоморфизм и отображение Φ гладкое. $\square$

Обозначение 10.2.12. Зафиксируем обозначение π, введенное в предложении 10.2.11 до конца главы. Также введем обозначения $\Phi^\pi = \Phi \circ \pi$ и $\mathcal{V} = \widetilde{\Phi} - \Phi^\pi$.

Определение 10.2.13. Если $\widetilde{\Phi}$ слабо дифференцируемо в точке $x \in \widetilde{M}$, обозначим через $J_x\widetilde{\Phi}$ якобиан (то есть коэффициент растяжения объема) линейного отображения

$$i_{\pi(x)} \circ d_x^w\widetilde{\Phi} : T_x\widetilde{M} \to \mathcal{L}_{\pi(x)}.$$

Отметим, что $J_x\widetilde{\Phi}$ определен для почти всех $x \in \widetilde{M}$. Положим

$$Area(\widetilde{\Phi}) = \int_{\widetilde{M}} J_x\widetilde{\Phi}\, dx,$$

где интеграл берется относительно риманова объема на $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$.

Теперь из леммы 10.2.7 следует

Лемма 10.2.14. *$Area(\widetilde{\Phi}) \le \mathrm{vol}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, и в случае равенства для почти всех $x \in \widetilde{M}$ верно, что $J_x\widetilde{\Phi} = 1$ и отображение $i_{\pi(x)} \circ d_x\widetilde{\Phi}$ — изометрическое.* □

10.3 Первая вариация площади

Отображения Φ^π и $\widetilde{\Phi}$ можно соединить линейным семейством $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ отображений из $\widetilde{M}$ в $\mathcal{L}$, определяемых равенством $\Phi_t = \Phi^\pi + t\mathcal{V}$. Мы рассматриваем $\mathcal{V}$ как поле вариации поверхности Φ^π и вводим ведличину $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V})$, которую называем первой вариацией площади.

Определение 10.3.1. Пусть H — евклидово пространство (возможно, бесконечномерное), W — ориентированное n-мерное линейное подпространство в H. Обозначим через P_W ортогональную проекцию на W.

Для ориентированного n-мерного евклидова пространства X и линейного отображения $L : X \to H$ обозначим через $J_W(L)$ якобиан отображения $P_W \circ L$ со знаком, определяемым ориентацией. Мы также рассматриваем of $J_W(L)$ как элемент пространства $\Lambda^n X^*$ (то есть как внешнюю n-форму на X), пользуясь естественным отождествлением $\Lambda^n X^* = \mathbf{R}$. В этой интерпретации $J_W(L)$ не зависит от евклидовой структуры пространства X.

Для линейных отображений $L, V : X \to H$ положим

$$\delta J_W(L, V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J_W(L + tV).$$

Теперь определим

$$\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = \int_{\widetilde{M}} \delta J_{W_{\pi(x)}}(d_x\Phi^\pi, d_x^w\mathcal{V})\, dx, \tag{10.3.1}$$

где $W_{\pi(x)} = d_{\pi(x)}\Phi(T_{\pi(x)}M)$ — касательное пространство к $\Phi(M)$ в точке $\Phi^\pi(x)$, рассматриваемое как подпространство в $\mathcal{L}_{\pi(x)}$, то есть выражение $J_{W_{\pi(x)}}$ вычисляется относительно скалярного произведения $\langle,\rangle_{\pi(x)}$. Величина $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V})$ корректно определена, так как $d_x\Phi^\pi$ и $d_x^w\mathcal{V}$ определены почти всюду. Ориентация подпространства $W_{\pi(x)}$ определяется так, чтобы отображение $d_{\pi(x)}\Phi : T_{\pi(x)}M \to W_{\pi(x)}$ сохраняло ориентацию.

Формулу (10.3.1) можно понимать двумя эквивалентными способами. Во-первых, это интеграл числовой функции по римановому объему dx на $\widetilde{M}$. Во-вторых, подинтегральное выражение можно рассматривать как внешнюю n-форму на T_xM (не зависящую от римановой структуры), что определяет (измеримую) дифференциальную n-форму на $\widetilde{M}$, и δA есть интеграл этой n-формы по $\widetilde{M}$. В этом параграфе мы используем именно эту интерпретацию.

Можно проверить, что если π — диффеоморфизм, то $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V})$ равно производной при $t = 0$ площади поверхности $\Phi_t = \Phi^\pi + t\mathcal{V}$. Мы не будем использовать этот факт и поэтому оставим его без доказательства.

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству следующего ключевого предложения, которой позволяет рассматривать Φ как минимальную поверхность.

Предложение 10.3.2. $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = 0.$

Доказательство предложения 10.3.2 состоит из двух частей. Сначала мы вычислим подинтегральное выражение из (10.3.1) в точке $x \in \widetilde{M}$. Результат записывается через производные отображения π и координатных функций $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in S}$ отображения $\mathcal{V}$.

Потом мы представим полученное выражение как дифференциальную форму на подходящем многообразии и проинтегрируем ее с помощью формулы Стокса. Хотя это вычисление, вероятно, применимо к любым функциям той регулярности, которая у нас есть, мы не проверяем это для каждой формулы. Вместо этого мы проводим вычисления, предполагая, что отображения π и $\mathcal{V}$ гладкие. Общий случай следует из этого с помощью приближения. Действительно, мы не используем никаких свойств наших отображений, кроме того, что $\Phi^\pi = \Phi \circ \pi$ и того, чтоt $\pi : \widetilde{M} \to M$ — липшицево отображение. Вычисление доказывает тождество $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = 0$ для произвольных гладких отображений $\pi : \widetilde{M} \to M$ и $\mathcal{V} : \widetilde{M} \to \mathcal{L}$. Отсюда следует равенство для всех липшицевых отображений, так как подинтегральное выражение в (10.3.1) выражается через первые производные.

Кроме того, отметим, что $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V})$ не зависит от римановой метрики на $\widetilde{M}$, поэтому эту метрику можно считать гладкой.

Обозначения. Будем обозначать через λ ориентированную форму риманова объема на (M, g). То есть если $y \in M$ и $v_1, \dots, v_n \in T_yM$, то $\lambda(v_1, \dots, v_n)$ — ориентированный объем параллелепипеда в T_yM, порождаемого векторами $v_1, \dots, v_n$.

Если ξ — внешняя k-форма на векторном пространстве X и $v \in X$, то $u \neg \xi$ обозначает $(k-1)$-форму на X, определяемую равенством

$$(v \neg \xi)(v_1, \dots, v_{n-1}) = \xi(v, v_1, \dots, v_{n-1})$$

для всех $v_1, \dots, v_{n-1} \in X$. Если ξ — дифференциальная форма и v — векторное поле, это обозначение применяется поточечно.

Вычисление в точке

Зафиксируем $x \in \widetilde{M}$ и обозначим $y = \pi(x) \in M$. Для упрощения формул введем следующие временные обозначения: $U = UT_yM$, $W = W_y = d_y\Phi(T_yM)$. Мы рассматриваем W как подпространство в евклидовом пространстве $\mathcal{L}_y$ со скалярным произведением $\langle , \rangle_y$.

Напомним, что единичная сфера U со стандартным нормированным объемом du отождествляется с (S, μ_y) отображением $\omega_y : U \to S$ (см. определение 10.2.8). Поэтому можно сделать "замену координат" в пространстве $\mathcal{L}$, отождествляя его с $L^\infty(U)$; при этом отождествлении $\langle , \rangle_y$ превращается в стандартное скалярное произведение пространства $L^2(U, du)$.

Лемма 10.3.3. *Пусть $L : T_x\widetilde{M} \to \mathcal{L}$ — линейное отображение с координатными функциями $\{L_\alpha\}_{\alpha\in S}$. Тогда*

$$J_W(L) = \frac{n^n}{n!} \int_{U^n} \lambda(u_1, \dots, u_n)\ l_{u_1} \wedge l_{u_2} \wedge \dots \wedge l_{u_n}\, du_1 \dots du_n, \tag{10.3.2}$$

где $l_u = L_{\omega_y(u)}$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ — положительно ориентированный ортонормированный базис в T_yM. Тогда

$$J_W(L) = P_1 \wedge P_2 \dots \wedge P_n, \tag{10.3.3}$$

где P_i — линейная функция на $T_x\widetilde{M}$, определяемая равенством

$$P_i(v) = \langle L(v), d_y\Phi(e_i)\rangle_y.$$

Действительно, $d_y\Phi$ — изометрическое вложение пространства T_yM в $\mathcal{L}_y$ (см. предложение 10.2.9), и P_i — композиция отображения L и ортогональной проекции на образ вектора e_i. Отсюда по определению скалярного произведения в $\mathcal{L}_y$

$$P_i(v) = n \int_S L_\alpha(v) d_y\Phi_\alpha(e_i)\, d\mu_y(\alpha) = n \int_S L_\alpha(v)\langle G(y,\alpha), e_i\rangle\, d\mu_y(\alpha).$$

(напомним, что $G(y, \alpha) = \operatorname{grad}\Phi_\alpha(y)$). Используя определение меры μ_y (см. 10.2.8), перепишем формулу в виде

$$P_i(v) = n \int_U l_u(v)\langle u, e_i\rangle\, du.$$

Тогда (10.3.3) принимает вид

$$J_W(L) = n^n \int_{U^n} l_{u_1} \wedge l_{u_2} \wedge \dots \wedge l_{u_n} \langle u_1, e_1\rangle\langle u_2, e_2\rangle \dots \langle u_n, e_n\rangle\, du_1 \dots du_n.$$

Заметим, что при замене базиса $\{e_i\}$ на другой, получаемый перестановкой векторов $e_1, e_2, \dots, e_n$, равенство сохраняется для четных перестановок и меняет знак для нечетных. Складывая такие формулы по всем перестановкам векторов $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$, получаем

$$n! J_W(L) = n^n \int_{U^n} l_{u_1} \wedge l_{u_2} \wedge \dots \wedge l_{u_n} \det(\langle u_i, e_j \rangle)_{i,j=1}^n \, du_1 \dots du_n.$$

Чтобы завершить доказательство леммы, остается заметить, что определитель матрицы $(\langle u_i, e_j \rangle)$ равен ориентированному объему параллелепипеда, порожденного векторами $u_1, u_2, \dots, u_n$. $\square$

Лемма 10.3.4. *Пусть* $L = d_x \Phi^\pi$, $V : T_x \widetilde{M} \to \mathcal{L}$ *— линейное отображение с координатными функциями* $\{V_\alpha\}_{\alpha \in S}$. *Тогда*

$$\delta J_W(L, V) = c(n) \int_U v_u \wedge \pi^*(u \neg \lambda) \, du, \tag{10.3.4}$$

где $v_u = V_{\omega_y(u)}$, *а* π^* *обозначает перенос формы дифференциалом отображения* π.

Доказательство. Как и в лемме 10.3.3, определим $l_u = L_{\omega_y(u)}$, где $\{L_\alpha\}_{\alpha \in S}$ — координатные функции отображения L. Тогда для $\xi \in T_x \widetilde{M}$, $u \in U$ и $\alpha = \omega_y(u)$ имеем

$$l_u(\xi) = L_\alpha(\xi) = d_y \Phi_\alpha(d_x \pi(\xi)) = \langle G(y, \alpha), d_x \pi(\xi) \rangle = \langle u, d_x \pi(\xi) \rangle.$$

Определив ковектор $u^\circ \in T_y^* M$ равенством $u^\circ = \langle u, \cdot \rangle$, перепишем формулу в виде

$$l_u = \pi^*(u^\circ). \tag{10.3.5}$$

Чтобы вычислить $\delta J_W(L, V) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} J_W(L + tV)$, подставим $l_u + t v_u$ вместо l_u в (10.3.2) и продифференцируем по t. Получаем

$$\delta J_W(L, V) = \frac{n^n}{n!} \int_{U^n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \lambda(\mathbf{u}) \; v_{u_k} \wedge \left(\bigwedge_{i \neq k} l_{u_i} \right) d\mathbf{u}$$

где $\mathbf{u}$ обозначает $(u_1, \dots, u_n)$, а $d\mathbf{u}$ — $du_1 \dots du_n$. Используя симметрию формулы относительно перестановок переменных u_i, перепишем ее в виде

$$\delta J_W(L, V) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{U^n} \lambda(\mathbf{u}) \; v_{u_1} \wedge \left(\bigwedge_{i=2}^n l_{u_i} \right) d\mathbf{u} = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_U v_u \wedge A(u) \, du, \tag{10.3.6}$$

где $A(u)$ — $(n-1)$-форма на $T_x \widetilde{M}$, определяемая равенством

$$A(u) = \int_{U^{n-1}} \left(\lambda(u, u_1, \dots, u_{n-1}) \bigwedge_{i=1}^{n-1} \; l_{u_i} \right) du_1 \dots du_{n-1}.$$

Из (10.3.5) имеем $l_{u_i} = \pi^*(u_i^\circ)$, откуда

$$A(u) = \pi^*(B(u)),$$

где

$$B(u) = \int_{U^{n-1}} \left(\lambda(u, u_1, \ldots, u_{n-1}) \bigwedge_{i=1}^{n-1} u_i^\circ \right) du_1 \ldots du_{n-1}.$$

Заметим, что значение $B(u)$ зависит только от u и евклидовой структуры пространства T_yM, в частности, оно эквивариантно относительно действия ортогональной группы. Такая $(n-1)$-форма единственна с точностью до умножения на константу, и $u \neg \lambda$ является примером такой формы. Следовательно, $B(u) = c_1(n) u \neg \lambda$, откуда $A(u) = c_1(n) \pi^*(u \neg \lambda)$. Утверждение леммы получается подстановкой этого равенства в (10.3.6). □

Сделав замену переменной u на $\alpha = \omega_y(u)$ под интегралом в (10.3.4), получаем

$$\delta J_W(L, V) = c(n) \int_S V_\alpha \wedge \pi^*(G(y, \alpha) \neg \lambda) \, d\mu_y(\alpha).$$

(напомним, что $G(y, \alpha) = \omega_y^{-1}(\alpha)$). Это заканчивает вычисление, для которого вводились временные обозначения L, y и U. Подставляя их значения, получаем

$$\delta J_{W_{\pi(x)}}(d_x \Phi^\pi, V) = c(n) \int_S V_\alpha \wedge \pi^*(G(\pi(x), \alpha) \neg \lambda) \, d\mu_y(\alpha).$$

Подставляя $d_x^w \mathcal{V}$ вместо $\mathcal{V}$ (предполагая, что $\mathcal{V}$ слабо дифференцируемо в точке x), получаем

$$\delta J_{W_{\pi(x)}}(d_x \Phi^\pi, d_x \mathcal{V}) = c(n) \int_S d_x \mathcal{V}_\alpha \wedge \pi^*(G(\pi(x), \alpha) \neg \lambda) \, d\mu_y(\alpha), \tag{10.3.7}$$

где $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in S}$ — координатные функции отображения $\mathcal{V}$.

Интегрирование формы

Выражение (10.3.7) (как функция от x) является дифференциальной n-формой на $\widetilde{M}$, и $\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V})$ есть интеграл этой формы по $\widetilde{M}$. Мы перепишем его как интеграл некоторой дифференциальной $(2n-1)$-формы по $\widetilde{M} \times S$. Определим отображение $P : \widetilde{M} \times S \to M \times S$ равенством

$$P(x, \alpha) = (\pi(x), \alpha), \qquad x \in \widetilde{M}, \alpha \in S.$$

Нам потребуются $(n-1)$-формы σ и $\widetilde{\sigma}$ на $M \times S$ и $\widetilde{M} \times S$, представляющие интегрирование относительно семейства мер μ_y, $y \in M$. А именно, определим

$$\sigma(y, \alpha) = P_2^* \mu_y(\alpha), \qquad y \in M, \alpha \in S,$$

где $P_2 : M \times S \to S$ — вторая координатная проекция и μ_y рассматривается как $(n-1)$-форма на S. Аналогично определим

$$\widetilde{\sigma}(x, \alpha) = \widetilde{P}_2^* \mu_{\pi(x)}(\alpha), \qquad x \in \widetilde{M}, \alpha \in S,$$

где $\widetilde{P}_2$ — вторая координатная проекция $\widetilde{M} \times S \to S$. Отметим, что $\widetilde{\sigma} = P^*(\sigma)$.

Будем говорить, что дифференциальная форма ξ на $M \times S$ представляет семейство форм $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ на M, если для каждого $\alpha \in S$ выполняется равенство $\xi_\alpha = \xi|_{M \times \{\alpha\}}$, точнее, $\xi_\alpha = i_\alpha^*(\xi)$, где отображение $i_\alpha : M \to M \times S$ определено равенством $i_\alpha(x) = (x, \alpha)$. Легко убедиться, что выполняются следующие свойства:

1. Если формы ξ и η представляют семейства $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ и $\{\eta_\alpha\}_{\alpha \in S}$, то $\xi \wedge \eta$ представляет $\{\xi_\alpha \wedge \eta_\alpha\}_{\alpha \in S}$.

2. Если форма ξ на $M \times S$ представляет семейство $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in S}$ форм на M, то форма $P^*\xi$ на $\widetilde{M} \times S$ представляет семейство $\{\pi^*\xi\}$ форм на $\widetilde{M}$.

3. Если ξ — n-форма на $\widetilde{M} \times S$, представляющая семейство $\{\xi_\alpha\}_{\alpha \in S}$, то

$$\int_{\widetilde{M}} \left(\int_S \xi_\alpha(x)\, d\mu_{\pi(x)}(\alpha) \right) dx = \int_{\widetilde{M} \times S} \xi \wedge \widetilde{\sigma}.$$

Комбинируя это с (10.3.7), получаем

$$\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = \int_{\widetilde{M}} \delta J_{W_{\pi(x)}}(d_x \Phi^\pi, d_x \mathcal{V})\, dx = c(n) \int_{\widetilde{M} \times S} \xi \wedge P^*\eta \wedge \widetilde{\sigma}, \tag{10.3.8}$$

где ξ — любая 1-форма на $\widetilde{M} \times S$, представляющая семейство $\{d_x \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in S}$ 1-форм на $\widetilde{M}$, η — $(n-1)$-форма на $M \times S$, представляющая семейство $\{G_\alpha \neg \lambda\}_{\alpha \in S}$ $(n-1)$-форм на M. Здесь G_α — векторное поле на M, определяемое равенством $G_\alpha(x) = G(x, \alpha)$.

Теперь уточним выбор форм ξ и η в (10.3.8). Сначала определим $\xi = dF$, где функция $F : \widetilde{M} \times S \to \mathbf{R}$ определена равенством

$$F(x, \alpha) = \mathcal{V}_\alpha(x). \tag{10.3.9}$$

Ясно, что $\xi = dF$ представляет семейство $\{d_x \mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in S}$.

Чтобы определить η, введем векторное поле γ на $M \times S$ так, что для всех $(y, \alpha) \in M \times S$ проекция вектора $\gamma(y, \alpha)$ на M равнялась $G_\alpha(y)$, а проекция его на S равнялась нулю. Пусть λ_0 — n-форму на $M \times S$, вычисляющая ориентированный риманов объем проекции на M. Отметим, что λ_0 индуцируется из λ координатной проекцией $M \times S \to M$. Теперь определим

$$\eta = \gamma \neg \lambda_0.$$

Из определений следует, что η представляет семейство $\{G_\alpha \neg \lambda\}_{\alpha \in S}$.

Подставляя $\xi = dF$ в (10.3.8), получаем

$$\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = c(n) \int_{\widetilde{M} \times S} dF \wedge P^*\eta \wedge \widetilde{\sigma}.$$

Используя равенство $\widetilde{\sigma} = P^*\sigma$, перепишем это в с виде

$$\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = c(n) \int_{\widetilde{M} \times S} dF \wedge P^*(\eta \wedge \sigma). \tag{10.3.10}$$

Напомним, что $G : UTM \to M \times S$ — диффеоморфизм, и мера $d\mu_y dy$ на $M \times S$ (где du — риманов объем на M) соответствует мере Лиувилля на UTM при этом диффеоморфизме. Обозначим через μ дифференциальную $(2n-1)$-форму на $M \times S$, соответствующую этой мерее. Тогда

$$\mu = \lambda_0 \wedge \sigma$$

по определению форм λ_0 и σ. Заметим, что $\gamma \neg \sigma = 0$, так как γ касательно к слоям $M \times \{\alpha\}$, и эти слои аннулируют σ. Следовательно,

$$\eta \wedge \sigma = (\gamma \neg \lambda_0) \wedge \sigma = \gamma \neg (\lambda_0 \wedge \sigma) = \gamma \neg \mu.$$

Теперь (10.3.10) принимает вид

$$\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = c(n) \int_{\widetilde{M} \times S} dF \wedge P^*(\gamma \neg \mu). \tag{10.3.11}$$

Для каждого $\alpha \in S$ векторное поле γ на $M \times \{\alpha\}$ проецируется в векторное поле $G_\alpha = \operatorname{grad} \Phi_\alpha$ на M. Траектории поля G_α — геодезические, так как Φ_α — дистанционная функция. Следовательно, поток на $M \times S$, порождаемый полем γ, отображается диффеоморфизмом G в геодезический поток на UTM. Поскольку геодезический поток сохраняет меру Лиувилля, поток, порождаемый γ, сохраняет μ. Отсюда следует, что $\gamma \neg \mu$ — замкнутая форма. Значит, $P^*(\gamma \neg \mu)$ замкнута: $d(P^*(\gamma \neg \mu)) = 0$. Следовательно,

$$dF \wedge P^*(\gamma \neg \mu) = d(F \cdot P^*(\gamma \neg \mu))$$

Отсюда и из (10.3.11) следует, что

$$\delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}) = c(n) \int_{\widetilde{M} \times S} d(F \cdot P^*(\gamma \neg \mu)) = c(n) \int_{\partial \widetilde{M} \times S} F \cdot P^*(\gamma \neg \mu))$$

по формуле Стокса. Последний интеграл равен нулю, так как F обращается в ноль на границе многообразия $\widetilde{M} \times S$ (см. (10.3.9)). Это завершает доказательство предложения 10.3.2.

10.4 Оценка δJ и доказательство теоремы 10.1.2

Пусть H — евклидово пространство (возможно, бесконечномерное), X — ориентированное n-мерное евклидово пространство. Для линейного отображения $L : X \to H$ обозначим через $J(L)$ его (неотрицательный) якобиан.

Пусть W — ориентированное n-мерное подпространство пространства H. Мы используем обозначения $J_W(L)$ и $\delta J_W(L, V)$ из определения 10.3.1 для линейных отображений $L, V : X \to H$.

Предложение 10.4.1. *Существует такое $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$, что верно следующее. Если $L(X) \subset W$ и $V(X) \subset Q$, где $Q \subset H$ — линейное подпространство коразмерности n, ε-ортогональное подпространству W (см. определение 10.2.10), то*

$$J(L+V) \geq J_W(L) + \delta J_W(L,V), \tag{10.4.1}$$

и в случае равенства или $V = 0$, или оба отображения L и $L+V$ вырождены (то есть имеют ранги меньше n), причем в обоих случаях $J(L+V) = J_W(L)$.

Доказательство. Образы отображений L, V и $L+V$ содержатся в подпространстве $W + L(X)$ размерности не больше $2n$. Следовательно, достаточно доказать предложение в случае, когда $\dim H = 2n$. Тогда $\dim W = \dim Q = n$.

Определим семейство линейных отображений $L_t : X \to H$, $t \in [0,1]$ равенством $L_t = L + t \cdot V$. Тогда по определению

$$\delta J_W(L,V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} J_W(L_t).$$

Покажем, что

$$J(L_t) \geq J_W(L) + t \cdot \delta J_W(L,V) \tag{10.4.2}$$

для всехl $t \geq 0$; соотношение (10.4.1) получается подстановкой $t = 1$.

Отметим, что скалярное произведение $\langle , \rangle$ в H канонически определяет скалярное произведение в $\Lambda^n(H)$. Мы обозначаем это скалярное произведение тем же символом $\langle , \rangle$. Через $\|\cdot\|$ обозначим евклидову норму на $\Lambda^n(H)$, определяемую этим скалярным произведением. Для простого n-вектора $\alpha = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \in \Lambda^n(H)$, норма $\|\alpha\|$ равна n-мерному объему параллелепипеда, порожденного векторами $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Обозначим $\Lambda_k = \Lambda^k(W) \wedge \Lambda^{n-k}(Q)$. Из предположения о том, что Q и W почти ортогональны, следует, что Λ_i и Λ_j $(i \neq j)$ почти ортогональны. А именно, если $\xi \in \Lambda_i$ и $\eta \in \Lambda_j$ $(i \neq j)$, то

$$\langle \xi, \eta \rangle \leq \varepsilon_1 \|\xi\| \, \|\eta\| \tag{10.4.3}$$

для некоторого $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, n)$, $\varepsilon_1 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $\alpha(t) \in \Lambda^n(H)$ — образ единичного положительно ориентированного n-вектора из $\Lambda^n(X) \simeq \mathbf{R}$ при отображении L_t. То есть,

$$\alpha(t) = L_t(e_1) \wedge L_t(e_2) \wedge \cdots \wedge L_t(e_n),$$

где $e_1, e_2, \dots, e_n$ — положительно ориентированный базис пространства X. Тогда $J(L_t) = \|\alpha(t)\|$. Ясно, что $\alpha(t)$ — многочлен вида

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i, \tag{10.4.4}$$

где $\alpha_i \in \Lambda_i$.

Лемма 10.4.2. *Существует такая константа $c(n)$, что если ε достаточно мало, то*

$$\|\alpha_0\|\,\|\alpha_k\| \le c(n)\,\|\alpha_1\|\,\|\alpha_{k-1}\| \tag{10.4.5}$$

где α_i определены в (10.4.4).

Доказательство. Так как Q и W почти ортогональны, линейное преобразование, переводящее их в ортогональные подпространства, мало меняет нормы n-векторов. Поэтому можно считать, что Q и W ортогональны, и отождествить $H = W \oplus Q$ с $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$.

Если L_0 невырождено, то левая часть в (10.4.5) равна 0 и неравенство тривиально. В противном случае можно выбрать базис в X так, что матрица $\{L_{ij}, i = 1, 2 \dots 2n, j = 1, 2 \dots n\}$ отображения L_0 состоит из двух блоков: единичной матрицы $\{L_{ij}, i = 1, 2 \dots n, j = 1, 2 \dots n\}$ (соответствующей проекции на to W) и нулевой матрицы $\{L_{ij}, i = n+1, n+2 \dots 2n, j = 1, 2 \dots n\}$ (соответствующей проекции на Q). Тогда первый блок матрицы отображения L_t остается единичной матрицей при всех t (по определению семейства $\{L_t\}$), а второй блок имеет вид tB, где B — некоторая фиксированная матрица. При замене базиса в X обе части неравенства (10.4.5) умножаются на одну и ту же константу, поэтому такая замена допустима.

Отметим, что $\|\alpha_k\|^2$ есть сумма квадратов всех миноров размера $n \times n$ матрицы отображения L_1, в которых в точности k строк выбраны из нижней половины матрицы (то есть из B). Так как верхняя половина матрицы L_t единичная, каждый такой минор равен минору размера $k \times k$ матрицы B. Следовательно, $\|\alpha_k\|^2$ равно, с точностью до умножения на биномиальный коэффициент, сумме квадратов всех миноров размера $k \times k$ матрицы B.

В наших координатах $\alpha_0 = 1$. Возведем доказываемое неравенство в квадрат, представим нормы как суммы квадратов миноров и раскроем скобки в правой части. Поскольку каждый минор размера $k \times k$ есть сумма произведений миноров размера $(k-1) \times (k-1)$ и миноров размера 1×1, правая часть мажорирует левую. Лемма доказана. $\square$

Обозначим через σ единичный положительно ориентированный n-вектор в $\Lambda^n W \simeq \mathbf{R}$. Отметим, что $J_W(\beta) = \langle \sigma, \beta \rangle$ для любого $\beta \in \Lambda^n(H)$. Значит, $\delta J_W(L, V) = \langle \alpha_1, \sigma \rangle$ и $J_W(L_0) = \langle \alpha_0, \sigma \rangle$. Таким образом, (10.4.2) принимает вид

$$\|\alpha(t)\| \ge \langle \alpha_0, \sigma \rangle + t \langle \alpha_1, \sigma \rangle,$$

или, после возведения в квадрат (отметим, что левая часть неотрицательна),

$$\|\alpha(t)\|^2 \ge \langle \alpha_0, \sigma \rangle^2 + 2t \langle \alpha_0, \sigma \rangle \langle \alpha_1, \sigma \rangle + t^2 \langle \alpha_1, \sigma \rangle^2.$$

Так как α_0 пропорционален σ и $\|\sigma\| = 1$, имеем $|\langle\alpha_0, \sigma\rangle| = \|\alpha_0\|$ и $\langle\alpha_0, \sigma\rangle\langle\alpha_1, \sigma\rangle = \langle\alpha_0, \alpha_1\rangle$. Теперь требуемое неравенство принимает вид

$$\|\alpha(t)\|^2 \geq \|\alpha_0\|^2 + 2t\langle\alpha_0, \alpha_1\rangle + t^2\langle\alpha_1, \sigma\rangle^2.$$

Докажем более сильное неравенство:

$$\|\alpha(t)\|^2 \geq \|\alpha_0\|^2 + 2t\langle\alpha_0, \alpha_1\rangle + t^2\langle\alpha_1, \sigma\rangle^2 + \frac{1}{10}\|\alpha(t) - \alpha_0\|^2. \tag{10.4.6}$$

Дополнительное слагаемое $\frac{1}{10}\|\alpha(t) - \alpha_0\|^2$ в правой части пригодится для анализа случая равенства в (10.4.2).

Обозначим $\beta(t) = t^2\alpha_2 \cdots + t^n\alpha_n$. Тогда $\alpha(t) = \alpha_0 + t\alpha_1 + \beta(t)$ и

$$\|\alpha(t)\|^2 = \|\alpha_0\|^2 + 2t\langle\alpha_0, \alpha_1\rangle + t^2\|\alpha_1\|^2 + 2\langle\alpha_0, \beta(t)\rangle + 2t\langle\alpha_1, \beta(t)\rangle + \|\beta(t)\|^2.$$

Так как n-вектор $\alpha_1 \in \Lambda_1$ ε_1-ортогонален n-вектору $\sigma \in \Lambda_0$, имеем $\|\alpha_1\|^2 \geq 10\langle\alpha_1, \sigma\rangle^2$, поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{9}{10}t^2\|\alpha_1\|^2 + 2\langle\alpha_0, \beta(t)\rangle + 2t\langle\alpha_1, \beta(t)\rangle + \|\beta(t)\|^2 \geq \frac{1}{10}\|\alpha(t) - \alpha_0\|^2.$$

Так как n-вектор α_1 почти ортогонален каждому подпространству Λ_i, $i > 1$, и эти подпространства почти ортогональны между собой, он ε_2-ортогонален n-вектору $\beta(t) \in \Lambda_2 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n$, где $\varepsilon_2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ (например, можно взять $\varepsilon_2 = 2\sqrt{n}\varepsilon_1$). Поэтому при достаточно малом ε имеем

$$\frac{1}{10}t^2\|\alpha_1\|^2 + 2t\langle\alpha_1, \beta(t)\rangle + \frac{1}{10}\|\beta(t)\|^2 \geq 0.$$

Остается доказать, что

$$\frac{8}{10}t^2\|\alpha_1\|^2 + 2\langle\alpha_0, \beta(t)\rangle + \frac{9}{10}\|\beta(t)\|^2 \geq \frac{1}{10}\|\alpha(t) - \alpha_0\|^2.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{10}\|\alpha(t) - \alpha_0\|^2 = \frac{1}{10}\|t\alpha_1 + \beta(t)\|^2 \leq \frac{2}{10}\big(t^2\|\alpha_1\|^2 + \|\beta(t)\|^2\big),$$

значит, достаточно доказать, что

$$\frac{6}{10}t^2\|\alpha_1\|^2 + 2\langle\alpha_0, \beta(t)\rangle + \frac{7}{10}\|\beta(t)\|^2 \geq 0. \tag{10.4.7}$$

Из неравенства треугольника, (10.4.3) и (10.4.5) получаем

$$|\langle\alpha_0, \beta(t)\rangle| \leq \sum_{i=2}^{n} |\langle\alpha_0, t^i\alpha_i\rangle| \leq \varepsilon_1 \sum_{i=2}^{n} t^i\|\alpha_0\|\|\alpha_i\| \leq \varepsilon_1 c(n) \sum_{i=2}^{n} t^i\|\alpha_1\|\|\alpha_{i-1}\|.$$

Можно считать, что $\varepsilon_1 c(n) < \frac{1}{10}$. Тогда, выделяя первое слагаемое, получаем

$$|\langle \alpha_0, \beta(t)\rangle| \le \frac{1}{10} t^2 \|\alpha_1\|^2 + \varepsilon_1 c(n) \sum_{i=3}^{n} t^i \|\alpha_1\| \|\alpha_{i-1}\|.$$

С учетом этого неравенства, для доказательства (10.4.7) достаточно проверить, что

$$\frac{4}{10} t^2 \|\alpha_1\|^2 - 2\varepsilon_1 c(n) \sum_{i=3}^{n} t^i \|\alpha_1\| \|\alpha_{i-1}\| + \frac{7}{10} \|\beta(t)\|^2 \ge 0. \tag{10.4.8}$$

Напомним, что $\beta(t) = \sum_{i=2}^{n} t^i \alpha_i$, и слагаемые $t^i \alpha_i$ попарно ε_1-ортогональны, откуда

$$\|\beta(t)\|^2 \ge \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{n} t^{2i} \|\alpha_i\|^2$$

при условии, что ε_1 достаточно мало (здесь вместо $\frac{3}{4}$ могло бы стоять любое число, меньшее 1). Теперь (10.4.8) следует из неравенства

$$\frac{4}{10} t^2 \|\alpha_1\|^2 - 2\varepsilon_1 c(n) \sum_{i=2}^{n-1} t^{i+1} \|\alpha_1\| \|\alpha_i\| + \frac{4}{10} \sum_{i=2}^{n} t^{2i} \|\alpha_i\|^2 \ge 0. \tag{10.4.9}$$

Пусть ε столь мало, что $\varepsilon_1 c(n) < \frac{1}{10n}$. Тогда

$$\frac{1}{10n} t^2 \|\alpha_1\|^2 - 2\varepsilon_1 c(n) t^{i+1} \|\alpha_1\| \|\alpha_i\| + \frac{1}{10} t^{2i} \|\alpha_i\|^2 \ge 0,$$

для всех $i = 2, 3, \dots, n-1$, и требуемое неравенство (10.4.9) получается сложением этих неравенств.

Теперь рассмотрим случай равенства в (10.4.1) или, эквивалентно, в (10.4.2) при $t = 1$. Поскольку мы доказали более сильное неравенство (10.4.6), в случае равенства имеем $\|\alpha(1) - \alpha_0\| = 0$. Следовательно, образы отображений L и $L_1 = L + V$ либо совпадают, либо вырождены (то есть имеют размерность меньше n). Поскольку образ L почти ортогонален образу V, отсюда следует, что $V = 0$ или L имеет ранг меньше n, причем во втором случае ранг V тоже меньше n. Так как $\alpha(1) - \alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ и слагаемые α_i лежат в соответствующих компонентах Λ_i прямой суммы $\Lambda^n(H) = \bigoplus \Lambda_i$, отсюда следует, что $\alpha_i = 0$ для всех $i \ge 1$. Тогда $\delta J_W(L, V) = \langle \alpha_1, \sigma \rangle = 0$, откуда $J(L + V) = J_W(L)$. $\square$

Доказательство теоремы 10.1.2. Пусть $x \in \widetilde{M}$ — точка, в которой $\widetilde{\Phi}$ слабо дифференцируемо. Рассмотрим $X = T_x \widetilde{M}$, $H = \mathcal{L}_{\pi(x)}$, $L = d_x \Phi^\pi : X \to H$, $V = d_x \mathcal{V} : X \to H$ (см. обозначения 10.2.12) и $W = W_{\pi(x)}$ (см. определение 10.3.1). Отметим, чтоt $L(X) \subset W$. По предложению 10.2.11, $L(V) \subset Q$, где Q — подпространство, ε-ортогональное W для малого ε. Пусть ε столь мало, что применимо предложение 10.4.1, тогда из него следует, что

$$J_x(\widetilde{\Phi}) \ge J_{W_{\pi(x)}}(d_x \Phi^\pi) + \delta J_{W_{\pi(x)}}(d_x \Phi^\pi, d_x \mathcal{V}). \tag{10.4.10}$$

Интегрируя, получаем

$$Area(\widetilde{\Phi}) \geq \int_{\widetilde{M}} J_{W_{\pi(x)}}(d_x\widetilde{\Phi}^\pi)\, dx + \delta A(\Phi^\pi, \mathcal{V}).$$

(см. определения 10.2.13 и 10.3.1). По предложению 10.3.2, последнее слагаемое равно нулю, поэтому

$$Area(\widetilde{\Phi}) \geq \int_{\widetilde{M}} J_{W_{\pi(x)}}(d_x\Phi^\pi). \tag{10.4.11}$$

Напомним, что $\Phi^\pi = \Phi \circ \pi$ и, следовательно, $d_x\Phi^\pi = d_{\pi(x)}\Phi \circ d_x\pi$. По определению 10.3.1 и лемме 10.2.14, $d_{\pi(x)}\Phi$ — сохраняющая ориентацию изометрия из $T_{\pi(x)}M$ в $W_{\pi(x)}$. Следовательно, подинтегральное выражение $J_{W_{\pi(x)}}(d_x\Phi^\pi)$ в (10.4.11) равно якобиану (со знаком) отображения $\pi : \widetilde{M} \to M$ в точке x. Значит, правая часть в (10.4.11) равна объему многообразия (M, g), таким образом,

$$Area(\widetilde{\Phi}) \geq \mathrm{vol}(M, g).$$

По лемме 10.2.14 имеем $Area(\widetilde{\Phi}) \leq \mathrm{vol}(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, откуда следует доказываемое неравенства.

В случае равенства заметим, что все предыдущие неравенства должны обращаться в равенства почти всюду на $\widetilde{M}$. Из случая равенства в лемме 10.2.14 следует, что $J_x(\widetilde{\Phi}) = 1$ для почти всех $x \in \widetilde{M}$. Теперь по предложению 10.4.1 из равенства в (10.4.10) следует, что

$$J_{W_{\pi(x)}}(d_x\Phi^\pi) = J_x(\widetilde{\Phi}) = 1$$

для почти всех $x \in \widetilde{M}$. Отсюда по случаю равенства в предложении 10.4.1 заключаем, что $d_x\mathcal{V} = 0$ (то есть касательные пространства к образам Φ и $\widetilde{\Phi}$ в соответствующих точках параллельны). Снова применяя тот факт, что $J_{W_{\pi(x)}}(d_x\Phi^\pi)$ равно якобиану со знаком отображения π в точек x, получаем, что $d_x\pi$ является сохраняющей ориентацию изометрией из $T_x\widetilde{M}$ в $T_{\pi(x)}M$ для почти всех $x \in \widetilde{M}$. Теперь теорема следует из предложения 9.1.2. $\square$

Список литературы

[1] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

[2] И. К. Бабенко, *Асимптотический объем торов и геометрия выпуклых тел*, Мат. Заметки, **44** (1988), 177–190

[3] И. К. Бабенко, *Объемная жесткость двумерных многообразий*, Мат. Заметки **48** (1990), 10–14.

[4] Ю. Д. Бураго, М. Громов, Г. Перельман, *Пространства с ограниченными снизу кривизнами*, Успехи мат. наук **47** (1992), вып. 2, 3–51.

[5] Д. Ю. Бураго, С. В. Иванов, *Изометрические вложения финслеровых многообразий*, Алгебра и анализ **5** (1993), no. 1, 179–192.

[6] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2004.

[7] С. В. Иванов, *Сходимость по Громову-Хаусдорфу и объемы многообразий*, Алгебра и Анализ **9** (1997), no. 5, 65–83.

[8] С. В. Иванов, *О сходящихся метриках ограниченной сверху кривизны на 2-полиэдрах*, Алгебра и Анализ **10** (1998), no. 4, 130–141.

[9] С. В. Иванов, *О двумерных минимальных заполнениях*, Алгебра и Анализ **13** (2001), no. 1, 26–38.

[10] С. В. Иванов, *Стягиваемое геодезически полное пространство кривизны* ≤ 1 *со сколь угодно малым диаметром*, Алгебра и Анализ **13** (2001), no. 4, 110–118

[11] С. В. Иванов, *Объемы и площади липшицевых метрик*, Алгебра и Анализ **20** (2008), no. 3, 74–111.

[12] К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, М.: Наука, 1985.

[13] Х. Рунд, *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств*, М.: Наука, 1981.

[14] Л. Сантало, *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*, М.: Наука, 1983.

[15] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, М.: Наука, 1987.

[16] F. J. Almgren Jr., *Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems among surfaces of varying topological type and singularity structure*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 321–391.

[17] J. C. Álvarez-Paiva, *Dual mixed volumes and isosystolic inequalities*, preprint, 2004, `arXiv:math.SG/0408415`.

[18] J. C. Álvarez-Paiva, G. Berck, *What is wrong with the Hausdorff measure in Finsler spaces*, preprint, 2004, `arXiv:math.DG/0408413`.

[19] J. C. Álvarez-Paiva, A. C. Thompson, *Volumes in normed and Finsler spaces*, in "A Sampler of Riemann-Finsler geometry" (D. Bao, R. Bryant, S.-S. Chern, Z. Shen, eds.), Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 1–49.

[20] L. Ambrosio, B. Kircheim, *Currents in metric spaces*, Acta Math. **185** (2000), no. 1, 1–80.

[21] I. Babenko, F. Balacheff, *Sur la forme de la boule unité de la norme stable unidimensionnelle*, Manuscripta Math., **119** (2006), 347–358, 2006.

[22] V. Bangert, *Minimal geodesics*, Erg. Theory and Dyn. Syst. **10** (1990), 263–286.

[23] V. Bangert, *Geodesic rays, Busemann functions and monotone twist maps*, Calc. Var. **2** (1994), 49–63.

[24] V. Bangert, C. Croke, S. Ivanov, M. Katz, *Filling area conjecture and ovalless real hyperelliptic surfaces*, Geom. Func. Anal. **15** (2005), no. 3, 577–597.

[25] V. Bangert, C. Croke, S. Ivanov, M. Katz, *Boundary case of equality in Loewner-type inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 1, 1–17.

[26] K. Ball, *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*, Geom. Dedicata **41** (1992), 241–250.

[27] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen, *An introduction to Riemannian–Finsler geometry*, Springer-Verlag, 2000.

[28] R. V. Benson, *Euclidean geometry and convexity*, McGraw–Hill, New York, 1966.

[29] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1.*, A.M.S. Colloquium Publications **48**, Providence, RI, 2000.

[30] A. S. Besicovitch, *On two problems of Loewner*, J. London Math. Soc. **27** (1952), 141–144

[31] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal., **5** (1995), 731–799.

[32] L. E. J. Brouwer, *Invariantz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Ann. **71** (1912), 305–313.

[33] L. E. J. Brouwer, *Invariantz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Ann. **72** (1913), 55–56.

[34] D. Burago, *Periodic metrics*, Advances in Soviet Math. **9** (1992), 205–210.

[35] D. Burago, S. Ivanov, *Riemannian tori without conjugate points are flat*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), no.3, 259–269.

[36] D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic volume of tori*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 5, 800–808.

[37] D. Burago, S. Ivanov, B. Kleiner. *On the structure of the stable norm of periodic metrics*, Math. Research Letters, **4** (1997), no. 6, 791–808.

[38] D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic isoperimetric constant of tori*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 5, 783–787.

[39] D. Burago, S. Ivanov, *On asymptotic volume of Finsler tori, minimal surfaces in normed spaces, and symplectic filling volume.* Ann. of Math. (2) **156** (2002), no. 3, 891–914.

[40] D. Burago, S. Ivanov, *Gaussian images of surfaces and ellipticity of surface area functionals*, Geom. Funct. Anal. **14** (2004), no. 3, 469–490.

[41] D. Burago, S. Ivanov, D. Shoenthal, *Two counterexamples in low-dimensional length geometry*, Алгебра и анализ, 19 (2007), no. 1, 46–59.

[42] D. Burago, S. Ivanov, *Boundary rigidity and filling volume minimality of metrics close to a flat one*, to appear in Ann. Math. (2), `http://annals.math.princeton.edu/issues/2008/FinalFiles/BuragoIvanovFinal.pdf`

[43] H. Busemann, *Intrinsic area*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 234–267.

[44] H. Busemann, *A theorem on convex bodies of the Brunn-Minkowski type*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35** (1949), 27–31.

[45] H. Busemann, *Convexity on Grassmann manifolds*, Enseignement Math. **7** (1961), 139–152.

[46] H. Busemann, G. Ewald, G. C. Shephard. *Convex bodies and convexity on Grassmann cones. I–IV*, Math. Ann. **151** (1963), 1–41.

[47] H. Busemann, G. Ewald, G. C. Shephard, *Convex bodies and convexity on Grassmann cones. V. Totally convex functionals*, Arch. Math. **13** (1962), 512–526.

[48] H. Busemann, G. C. Shephard, *Convex bodies and convexity on Grassmann cones* (X)*: Projection functions of parallel convex bodies*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **70** (1965), 271–293.

[49] H. Busemann, *Convex bodies and convexity on Grassmann cones. XI. Sublinear functions*, Math. Scand. **24** (1969), 93–101.

[50] J. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Grundlehren der mathematischen **99**, Springer-Verlag, 1971.

[51] G. De Cecco, G. Palmieri, *LIP manifolds: from metric to Finslerian structure*, Math. Z. **218** (1995), 223–237.

[52] C. Croke, *Rigidity for surfaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), no. 1, 150–169.

[53] C. Croke, *Rigidity and the distance between boundary points*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 445–464.

[54] C. Croke, B. Kleiner, *On tori without conjugate points*, Invent. Math. **120** (1995), no. 2, 241–257.

[55] C. Croke, B. Kleiner, *A rigidity theorem for simply connected manifolds without conjugate points*, Ergodic Theory Dynam. Systems **18** (1998), no. 4, 807–812.

[56] C. Croke, N. Dairbekov and V. Sharafutdinov, *Local boundary rigidity of a compact Riemannian manifold with curvature bounded above*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 9, 3937-3956.

[57] C. Croke, *Rigidity theorems in Riemannian geometry*, in "Geometric Methods in Inverse Problems and PDE Control", C. Croke, I. Lasiecka, G. Uhlmann, and M. Vogelius eds., Springer, 2004.

[58] C. E. Durán, *A volume comparison theorem for Finsler manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 3079–3082.

[59] G. Ewald, *Über die Schattengrenzen konvexer Körper. (Konvexe Körper und Konvexität auf Grassmann-Kegeln. VII)*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **27** (1964), 167–170.

[60] G. Ewald, *Konvexe Körper und Konvexität auf Grassmann-Kegeln. IX: Stark konvexe Funktionen*, Math. Ann. **157** (1964), 219–230.

[61] H. Federer, W. H. Fleming, *Normal and integral currents*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 458–520.

[62] H. Federer, *Real flat chains, cochains and variational problems*, Indiana Univ. Math. J., **24** (1974/75), 351–407.

[63] M. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 1–147.

[64] M. Gromov, J. Lafontaine, P. Pansu, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Cedic, Paris, 1981

[65] M. Gromov, *Systoles and intersystolic inequalities*, Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992), 291–362, Sémin. Congr., vol. 1, Soc. Math. France, Paris, 1996.

[66] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Progr. in Mathematics **152**, Birkhäuser, Boston, 1999.

[67] G. A. Hedlund, *Geodesics on a two-dimensional Riemannian manifold with periodic coefficients*, Ann. of Math. (2) **33** (1932), 719–739.

[68] R. D. Holmes, A. C. Thompson, *N-dimensional area and content in Minkowski spaces*, Pacific J. Math. **85** (1979), 77–110.

[69] S. V. Ivanov, M. G. Katz, *Generalized degree and optimal Loewner-type inequalities*, Israel J. Math. **141** (2004), 221–234.

[70] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948, 187–204. Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 1948.

[71] J. Heber, *On the geodesic flow of tori without conjugate points*, Math. Z. **216** (1994), 209–216.

[72] G. Herglotz, *Über die Elastizitaet der Erde bei Beruecksichtigung ihrer variablen Dichte*, Zeitschr. für Math. Phys. **52** (1905), 275–299.

[73] M. G. Katz, *Systolic geometry and topology*, Mathematical Surveys and Monographs **137**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[74] J. Lagarias, H. Lenstra, C. Schnorr, *Bounds for Korkin–Zolotarev reduced bases and succesive minima of a lattice and its reciprocal lattice*, Combinatorica **10** (1990), 343–358.

[75] A. Lichnerowicz, *Applications harmoniques dans un tore*, C. R. Acad. Sci., Sér. A **269** (1969), 912–916.

[76] E. Lutwak, *Selected affine isoperimetric inequalities*, in Handbook of Convex Geometry, P. M. Gruber and J. M. Wills eds., North-Holland, 1993, 151–176.

[77] R. Michel, *Sur la rigidité imposeée par la longuer des géodésiques*, Invent. Math. **65** (1981), 71–83.

[78] H. Minkowski, *Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1897), 198–219.

[79] F. Morgan, *Examples of unoriented area-minimizing surfaces*, Trans. A.M.S. **283** (1984), 225-237.

[80] J.-P. Otal, *Sur les longueurs des géodésiques d'une métrique à courbure négative dans le disque*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), no. 2, 334–347.

[81] L. Pestov, G. Uhlmann, *Two-dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), 1093–1110.

[82] P. Petersen, *A finiteness theorem for metric spaces*, J. Diff. Geom. **31** (1990), 387–395.

[83] P. Pu, *Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds*, Pacific J. Math. **2** (1952), 55–71.

[84] Z. Shen, *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific Publishers, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001.

[85] R. Schneider, *On the Busemann area in Minkowski spaces*, Beitr. Algebra Geom. **42** (2001), 263-273.

[86] G. C. Shephard, *Convex bodies and convexity on Grassmann cones. VI. The projection functions of a simplex*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 307–319.

[87] G. C. Shephard, *Convex bodies and convexity on Grassmann cones. VIII. Projection functions of vector sums of convex sets*, J. London Math. Soc. **39** (1964), 417–423.

[88] L. A. Santaló, *An affine invariant for convex bodies of n-dimensional space*, Portugaliae Math. **8** (1949), 155–161.

[89] P. Stefanov and G. Uhlmann, *Boundary rigidity and stability for generic simple metrics*, preprint, 2004, `arXiv:math.DG/0408075`.

[90] A. C. Thompson, *Minkowski Geometry*, Encyclopedia of Math and Its Applications, Vol. 63, Cambridge Univ. Press., 1996

[91] E. Wiechert, K. Zoeppritz, *Über Erdbebenwellen*, Nachr. Koenigl. Geselschaft Wiss. Göttingen **4** (1907), 415–549.

[92] S. Wenger, *Isoperimetric inequalities of Euclidean type in metric spaces*, Geom. Funct. Anal. **15** (2005), no. 2, 534–554.

[93] B. White, *The deformation theorem for flat chains*, Acta Math. **183** (1999), 255–271.