Содержание

1. Классификация поверхностей
   - Поверхности: обзор без доказательств
   - Развёртки (склеивание из многоугольников)
   - Операции над развёртками
   - Ориентируемый случай (начало)

Поверхности

Определение

Поверхность — двумерное многообразие. То есть, хаусдорфово пространство со счётной базой, у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^2_+$ (второе — только у поверхностей с краем).
Замкнутая поверхность — компактная связная поверхность без края. (Не путать с понятием замкнутого множества в топологическим пространстве!)

Комментарии

1. Несвязные многообразия разбиваются на компоненты, которые можно изучать отдельно.
2. У поверхности с краем можно заклеить компоненты края дисками, получится поверхность без края. Исходная поверхность получается из нее вырезанием дырок.

Теорема о классификации

Теорема (классификация поверхностей)

1. Любая замкнутая поверхность гомеоморфна или сфере, или сфере с несколькими ручками, или сфере с несколькими плёнками.
2. Указанные поверхности (в т. ч. сферы с разным числом ручек или плёнок) не гомеоморфны между собой.

Замечания

1. Сейчас доказываем только первую часть (с оговорками).
2. Определение сфер с ручками и плёнками будет уточнено.

Ориентируемые и неорентируемые поверхности

Определение

Поверхность **ориентируема**, если в ней нет подмножества, гомеоморфного ленте Мёбиуса.

Информация

1. Сфера и сферы с ручками — ориентируемы.
(В этом легко убедиться из наглядно-очевидных соображений, но трудно строго доказать.)
2. Сферы с плёнками не ориентируемы
(очевидно из определения).

Род поверхности

Определение

Род поверхности — наибольшее число дизъюнктных окружностей, которые можно выбрать на ней так, чтобы после их удаления она оставалась связной.
(Для поверхности с краем род определяется так же, с уточнением: окружности не должны пересекать край.)

Информация

Род сферы равен 0 (по теореме Жордана).
Род сферы с ручками — число ручек.
Род сферы с плёнками — число плёнок.
При вырезании дырок род не меняется.

Род + ориентируемость

Если принять без доказательства всё вышесказанное, получаем следствие.

Следствие

Топологический тип замкнутой поверхности однозначно определяется её ориентируемостью и родом.
Для компактной поверхности с краем — ориентируемостью, родом и числом компонент края.

Примеры

Сфера — ориентируемая, рода 0.
Тор — ориентируемая, рода 1.
Проективная плоскость — неориентируемая, рода 1.
Бутылка Клейна — неориентируемая, рода 2.

Разрезание бутылки Клейна

Упражнение

Бутылку Клейна можно разрезать одной окружностью так, чтобы получился любой из следующих результатов:

- Цилиндр
- Две ленты Мёбиуса
- Одна лента Мёбиуса

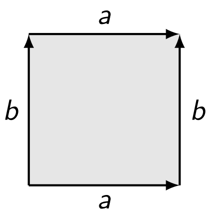
Содержание

1. Классификация поверхностей
   - Поверхности: обзор без доказательств
   - Развёртки (склеивание из многоугольников)
   - Операции над развёртками
   - Ориентируемый случай (начало)

Развёртки

Определение

Развёртка поверхности — один или несколько многоугольников, стороны которых разбиты на пары и ориентированы.



Пример: простейшая развёртка тора.
Стороны в парах обозначены одинаковыми буквами, ориентации — стрелками.
Запись развертки: $aba^{-1}b^{-1}$ (обход против часовой стрелки с левого нижнего угла).
Или $ba^{-1}b^{-1}a$ (с правого нижнего) и т. д.

Замечание

С точки зрения топологии, многоугольник — то же, что круг, край которого разбит на несколько дуг.
Допускаются 2-угольники.

Склеивание поверхности из развёртки

Из каждой развёртки склеиванием получается поверхность:

- Для каждой выделенной пары сторон есть естественная биекция между ними, сохраняющая направление.
- Объявляем каждую точку на стороне эквивалентной ее образу при этой биекции. (Вершина участвует в двух таких парах — по одной для каждой прилегающей стороны.)
- Полученное множество пар точек — еще не отношение эквивалентности (нет транзитивности). Дополняем его до наименьшего отношения эквивалентности.
- Итоговая поверхность — факторпространство развертки по полученному отношению. В прошлом семестре доказывали, что это действительно поверхность.

Триангулируемые поверхности

Определение

Поверхность **триангулируема**, если она получается из какой-нибудь развёртки.

Теорема (без доказательства)

Все замкнутые поверхности триангулируемы.

Предупреждение

Теорему о классификации будем доказывать только для триангулируемых поверхностей.

Можно обойтись одним многоугольником

Лемма

Если триангулируемая поверхность связна, то у нее есть развёртка из одного многоугольника (а не нескольких).

Доказательство.

Пусть развертка состоит из более одного многоугольника. Если есть склеиваемая пара сторон из разных многоугольников, склеим их сразу. Из двух многоугольников получится один, количество многоугольников уменьшится. Делаем такие операции, пока это возможно. Если осталось больше одного многоугольника, поверхность не связна. □

Стандартные развёртки

Определение

Стандартная ориентируемая поверхность рода p — поверхность, склеенная из $4p$-угольника по схеме

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$$

Стандартная неориентируемая поверхность рода q — поверхность, склеенная из $2q$-угольника по схеме

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_q a_q$$

Обозначения: M_p, N_q.

Легко видеть, что это сфера с p ручками и сфера с q плёнками.

Точная формулировка того, что будем доказывать

Теорема

Любая замкнутая триангулируемая поверхность гомеоморфна одной из стандартных:

- S^2
- M_p *для некоторого* $p \in \mathbb{N}$
- N_q *для некоторого* $q \in \mathbb{N}$

Негомеоморфность их между собой сейчас не доказываем.

Содержание

1. Классификация поверхностей
   - Поверхности: обзор без доказательств
   - Развёртки (склеивание из многоугольников)
   - Операции над развёртками
   - Ориентируемый случай (начало)

Тривиальные операции

Следующие операции над обозначениями не меняют развёртку по существу:

- Переобозначения букв. Например, заменить обе буквы a на b, если b не было.
- Согласованное изменение направлений сторон. Например, заменить a на a^{-1} и наоборот.
- Циклическая перестановка в слове (замена начала отсчёта при обходе многоугольника):

  $$w_1 w_2 \longrightarrow w_2 w_1$$

  где w_1, w_2 — подслова.
- Переворачивание: $abc \dots de \longrightarrow e^{-1} d^{-1} \dots c^{-1} b^{-1} a^{-1}$.

Сокращение

- Вычеркивание подслова aa^{-1} не меняет топологический тип поверхности.
  (При склеивании двух таких соседних сторон n-угольник становится $(n-2)$-угольником, а склеенные стороны превращаются в отрезок внутри него.)
- Особый случай: 2-угольник aa^{-1} — развёртка сферы.

Разрезание

Можно разрезать многоугольник диагональю на два, отметив в них, что стороны, полученные из разреза, должны быть склеены обратно.

- Разрезание диагональю из начальной вершины:

$$xy \longrightarrow xa + a^{-1}y$$

  (x, y — подслова, a — новая буква, $+$ — добавление еще одного многоугольника).
- Разрезание другой диагональю:

$$xyz \longrightarrow xaz + a^{-1}y$$

  (x, y, z — подслова, a – новая буква).

Примечание: второй случай сводится к первому циклическими перестановками.

Склеивание

Обратная операция к разрезанию — склеивание двух многоугольников в один.

- Простейший случай:

$$xa + a^{-1}y \longrightarrow xy$$

- Общий случай:

$$xay + za^{-1}w \longrightarrow xwzy$$

(x, y, z, w — подслова, a — буква).

План доказательства

Перечисленные операции не меняют топологический тип получаемой поверхности.

План доказательства теоремы — с помощью этих операций привести любую данную развертку к одной из стандартных.

Содержание

1. Классификация поверхностей
   - Поверхности: обзор без доказательств
   - Развёртки (склеивание из многоугольников)
   - Операции над развёртками
   - Ориентируемый случай (начало)

Ориентируемые развёртки

Определение

Будем называть развёртку **ориентируемой**, если каждая буква входит в паре с обратной (например, a и a^{-1}).
То есть, все склеивания сторон — без «перекручивания».

Теорема

Замкнутая поверхность с ориентирумой развёрткой гомеоморфна S^2 *или* M_p $(p \in \mathbb{N})$.

Дополнение

Более того, развертка переводится в стандартную перечисленными операциями.

Выделение ручки

Пусть есть две пары склеиваемых сторон, разделяющие друг друга, но не идущие подряд. Т.е. развертка имеет вид $axbya^{-1}zb^{-1}w$, где a, b — буквы, x, y, z, w — подслова, хотя бы два из которых непусты. Тогда делаем так:

1. Разрежем по диагонали между началами стрелок a, после чего склеим стороны b:

$$axbya^{-1}zb^{-1}w \longrightarrow axbya^{-1}c + c^{-1}zb^{-1}w \longrightarrow axwc^{-1}zya^{-1}c$$

2. Получили развёртку вида $auc^{-1}va^{-1}c$ $(u = xw,\ v = zy)$. Аналогично, разрежем между концами c и склеим a:

$$auc^{-1}va^{-1}c \longrightarrow aud + d^{-1}c^{-1}va^{-1}c \longrightarrow cd^{-1}c^{-1}vud$$

3. Циклически переставляя, видим ручку: $dcd^{-1}c^{-1}vu$