

1 Теоремы об отделимости (продолжение)

- Строгая отделимость
- Опорные гиперплоскости
- Нестрогая отделимость

2 Выпуклые многогранники — анонс

- Определения и формулировки

3 Экстремальные точки

- Определение
- Конечномерная теорема Крейна-Мильмана

Определение

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые множества, H — гиперплоскость.

H **строго разделяет** A и B (**строго отделяет** A от B), если A и B лежат в разных **открытых** полуплоскостях относительно H .

H **нестрого разделяет** A и B (**нестрого отделяет** A от B), если A и B лежат в разных **замкнутых** полуплоскостях относительно H .

Теорема о строгой отделимости (повтор)

Теорема

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые замкнутые выпуклые, хотя бы одно из них компактно, $A \cap B = \emptyset$.

Тогда существует гиперплоскость, строго разделяющая A и B .



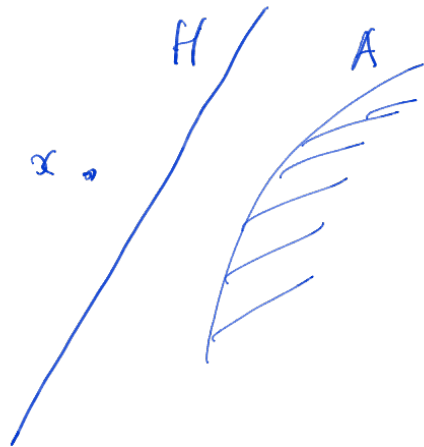
Отделимость от точки

Следствие

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое выпуклое. Тогда A строго отделимо гиперплоскостью от любой точки $x \notin A$.

Доказательство.

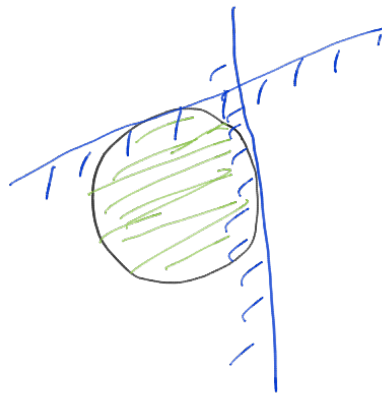
Применим теорему для $B = \{x\}$. □



Замкнутое выпуклое — пересечение полупространств

Следствие

Любое замкнутое выпуклое множество — пересечение замкнутых полупространств.



Замкнутое выпуклое — пересечение полупространств

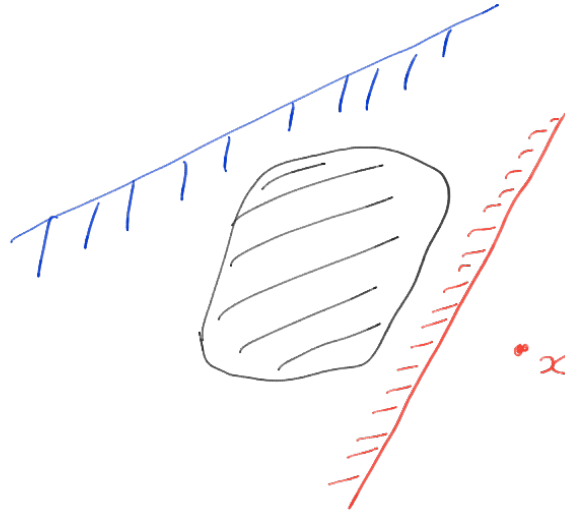
Следствие

Любое замкнутое выпуклое множество — пересечение замкнутых полупространств.

Доказательство.

Пусть A замкнуто и выпукло. Рассмотрим Π — пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих A .

Любая точка $x \notin A$ отделима от $A \implies$ существует замкнутое полупространство, содержащее A и не содержащее $x \implies \Pi = A$. □

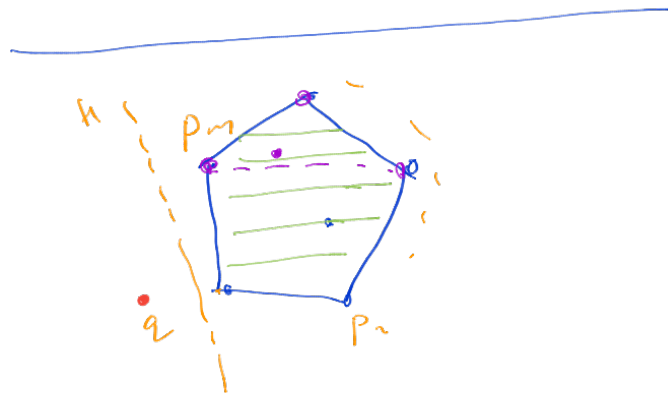
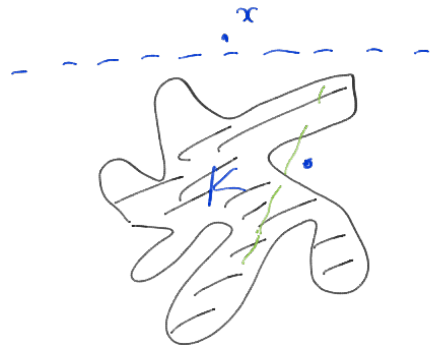


Упражнение

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно. Тогда

- ✓ $\bullet$ $\text{conv}(K)$ — пересечение всех замкнутых полупространств, содержащих K .
- ✓ $\bullet$ $\text{conv}(K)$ — множество тех и только тех точек, которые нельзя строго отделить от K гиперплоскостью.

$$\underline{a_1 x_1 + \dots + a_n x_n} = L(x) = C$$
$$L(p_i) > C$$
$$L(q) < C$$



1 Теоремы об отделимости (продолжение)

- Строгая отделимость
- **Опорные гиперплоскости**
- Нестрогая отделимость

2 Выпуклые многогранники — анонс

- Определения и формулировки

3 Экстремальные точки

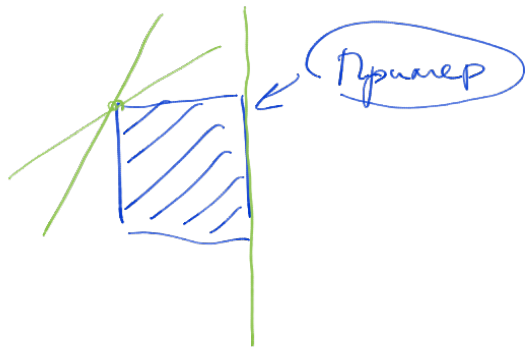
- Определение
- Конечномерная теорема Крейна-Мильмана

Определение

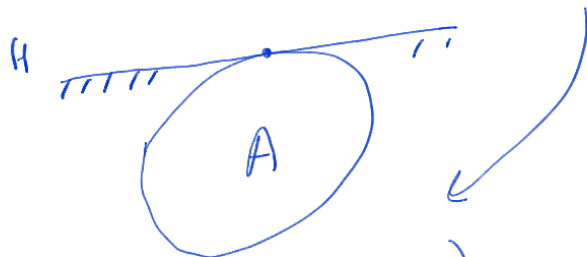
Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество, H — гиперплоскость.

H — **опорная гиперплоскость** для A , если

- 1) A лежит нестрого по одну сторону от H (т.е. в одном из замкнутых полупространств отн. H).
- 2) $H \cap \text{Cl}(A) \neq \emptyset$.



Опр H -опорная, если



- 1) $A \subset \bar{H}^+$ (или $\bar{H}^-$)
- 2) $H \cap \text{Cl}(A) \neq \emptyset$

Определение

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество, H — гиперплоскость.

H — **опорная гиперплоскость** для A , если

- ① A лежит нестрого по одну сторону от H (т.е. в одном из замкнутых полупространств отн. H).
- ② $H \cap \text{Cl}(A) \neq \emptyset$.

Замечание

Гиперплоскость опорная для $A \iff$ она опорная для $\text{Cl}(A)$.

Поэтому во всех вопросах про опорные гиперплоскости множество можно считать замкнутым.



$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A \subset \overline{H}^+ \\ \underline{H \cap \text{Cl}(A) \neq \emptyset} \end{cases}$$

$\Uparrow ?$

$$\begin{cases} \text{Cl}(A) \subset \overline{H}^+ \\ \underline{H \cap \text{Cl}(A) \neq \emptyset} \end{cases}$$

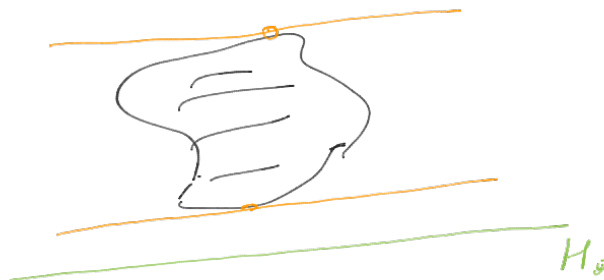
Упр. $\exists A$ — опр. Тогда
 H — опорная для $A \iff \exists \text{me conv}(A)$

Опорные гиперплоскости данного направления

Свойство

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ непусто и ограничено, то для любого $(n-1)$ -мерного направления существует одна или две опорные гиперплоскости этого направления.

2 оп. гл.



1 оп. гл.



Опорные гиперплоскости данного направления

Свойство

Если $A \subset \mathbb{R}^n$ непусто и ограничено, то для любого $(n-1)$ -мерного направления существует одна или две опорные гиперплоскости этого направления.

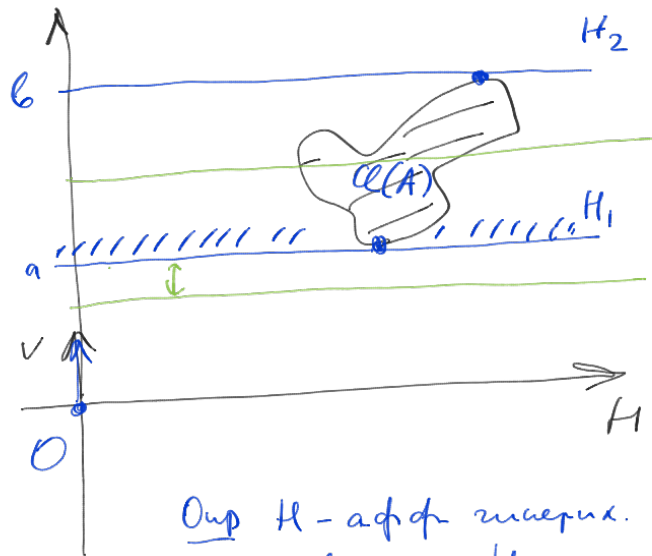
Доказательство.

Пусть v — нормаль данных гиперплоскостей. Определим $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, v \rangle$.

Пусть $a = \min f|_{Cl(A)}$, $b = \max f|_{Cl(A)}$.

Тогда $H_1 = f^{-1}(a)$ и $H_2 = f^{-1}(b)$ — опорные гиперплоскости данного направления, и других нет.

Если $a = b$, то это одна гиперплоскость. □



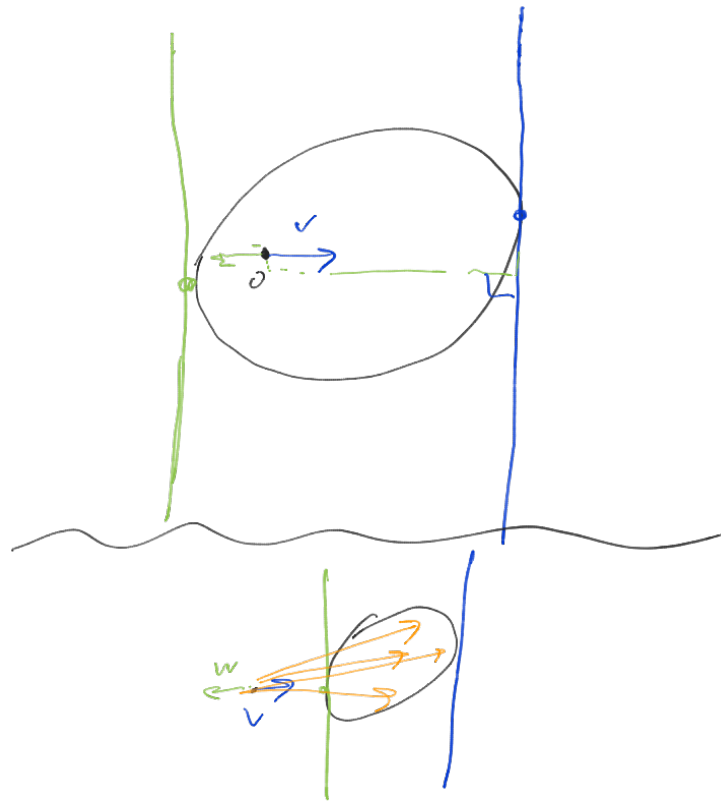
Опр H — афф. гиперпл.
Направление H —
это $\vec{H}$ (линейная
гиперпл.)

Определение

Опорная функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — функция $h_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, заданная равенством

$$h_A(v) = \sup\{\langle v, x \rangle : x \in A\}$$

$$h_A(0) = 0$$



Определение

Опорная функция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — функция $h_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, заданная равенством

$$h_A(v) = \sup\{\langle v, x \rangle : x \in A\}$$

Замечание

h_A положительно однородна.

Поэтому можно рассматривать её только на единичной сфере S^{n-1} .

$$h_A(\lambda v) = \lambda h_A(v)$$

$$\lambda \geq 0$$

↑
определение полож. однород.
функции.

Упражнение

Для любого $A \subset \mathbb{R}^n$

- • $h_{\text{cl}(A)} = h_A$
- • $h_{\text{conv}(A)} = h_A$.

Упражнение

Для любого $A \subset \mathbb{R}^n$

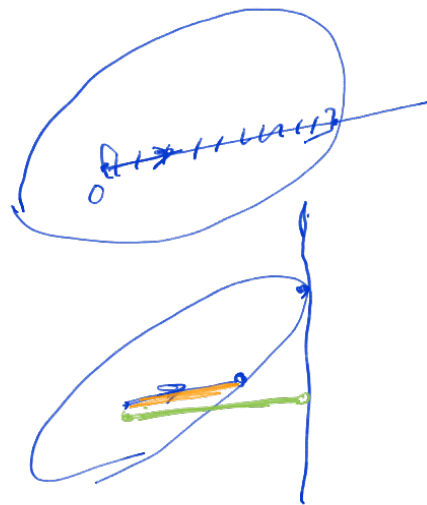
→ • $h_{\text{Cl}(A)} = h_A$

→ • $h_{\text{conv}(A)} = h_A$.

Упражнение

Замкнутое выпуклое множество однозначно определяется своей опорной функцией.

Т.е. если $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутые выпуклые множества и $h_A = h_B$, то $A = B$.



Упражнение

Для любого $A \subset \mathbb{R}^n$

- $h_{\text{Cl}(A)} = h_A$
- $h_{\text{conv}(A)} = h_A$.

Упражнение

Замкнутое выпуклое множество однозначно определяется своей опорной функцией.

Т.е. если $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутые выпуклые множества и $h_A = h_B$, то $A = B$.

Упражнение

Для любых непустых $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $h_{A+B} = h_A + h_B$.

если нр. часть определена.

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

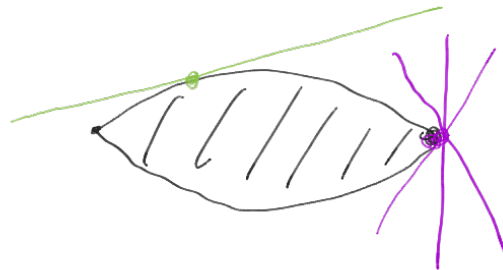
$$h_A(v) = \infty \Leftrightarrow A = \emptyset$$

$$\emptyset + B = \emptyset.$$

Опорная гиперплоскость через данную точку

Теорема

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, $p \in \text{Fr}(A)$. Тогда существует опорная гиперплоскость для A , содержащая p .



Можно считать, что A замкнуто и $p = 0$ (заменяем A на $\text{Cl}(A)$ и перенесём начало отсчёта в p).

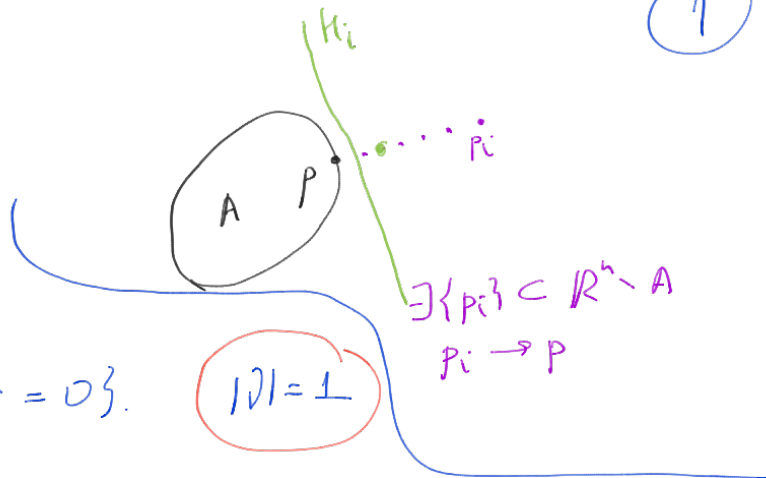
Так как $p \in \text{Fr}(A)$, существует последовательность $\{p_i\} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$, $p_i \rightarrow p$.

Для каждого i отделим A от p_i гиперплоскостью H_i .
Из H_i выберем сходящуюся подпоследовательность $H_{i_k} \rightarrow H$.

Гиперплоскость H подходит, она опорная к A и $p \in H$.

$$\text{Fr}(\text{Cl}(A)) = \text{Fr}(A)$$

1

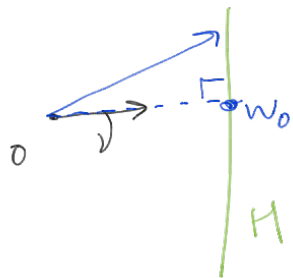


$$\exists \{p_i\} \subset \mathbb{R}^n \setminus A$$

$$p_i \rightarrow p$$

$$|v| = 1$$

$$H = \{x : \langle x, v \rangle + c = 0\}.$$



$$\forall w \in H$$

$$\langle w, v \rangle = -c$$

$$\underline{d(v, H)} = |w_0| = |\langle w_0, v \rangle| = \underline{|c|}$$

Что такое предел гиперплоскостей

Гиперплоскость H_i задаётся уравнением $f_i(x) = 0$, где $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — аффинная функция,

$$f_i(x) = \langle x, \nu_i \rangle + c_i$$

где ν_i — единичная нормаль к H_i , $c_i \in \mathbb{R}$.

Если $\nu_i \rightarrow \nu$ и $c_i \rightarrow c$, то будем говорить, что H_i **стремится** к H , заданной уравнением

$$f(x) := \langle x, \nu \rangle + c = 0.$$

$$\begin{aligned} H_i \text{ разделяет } A \text{ и } p_i \\ A \subset H_i^-, \quad p \in H_i^+ \\ f_i|_A < 0, \quad f_i(p) > 0 \end{aligned}$$

$$f_i(x) = \dot{a}_1 x_1 + \dots + \dot{a}_n x_n + c_i$$

$$(\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n) = \dot{\nu}_i$$

$$|\dot{\nu}_i| = 1$$

Опр $H_i \rightarrow H$, если можно
выбрать ур-е так, что
 $\dot{\nu}_i \rightarrow \dot{\nu}$

$$c_i \rightarrow c$$

$$\text{Ур-е } H = \{ \langle x, \dot{\nu} \rangle + c = 0 \}.$$

Почему есть предел подпоследовательности

Векторы ν_i лежат на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Она компактна.
Поэтому есть сходящаяся подпоследовательность $\{\nu_{i_k}\}$.
Можно считать, что с самого начала $\nu_i \rightarrow \nu$.

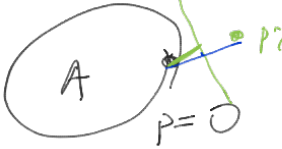
Числа $|c_i|$ — расстояния от 0 до H_i . Они стремятся к 0,
так как H_i отделяют $p = 0$ от $p_i \rightarrow 0$.

$\Rightarrow$ есть сходимость $H_i \rightarrow H$, где H задана уравнением
 $\langle x, \nu \rangle = 0$.

$$\textcircled{1} \left. \begin{array}{l} \nu_i \in S^{n-1} \\ S^{n-1} \text{ комп.} \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \text{ сходящаяся подпоследовательность.}$$

$$\{\nu_{i_k}\} \rightarrow \nu.$$

Можно считать, что $\nu_i \rightarrow \nu$.

$$\textcircled{2} \quad G_i \rightarrow ? \quad 0 \leq d(0, H_i) \leq |p_i|$$


$\downarrow$
0

$$|c_i| = d(0, H_i) \rightarrow 0$$

Почему H подходит

Считаем, что направления ν_i были выбраны так, что $f_i < 0$ на A и $f_i(p_i) > 0$, где $f_i = \langle \cdot, \nu_i \rangle + c_i$ — аффинная функция, задающая H_i .

Тогда, из предельного перехода в неравенстве,
 $f = \lim f_i \leq 0$ на A .

И $f(p) = 0$, так как $p = 0$ и $c_i \rightarrow 0$.

Итак, H — опорная гиперплоскость для A и $p \in H$. $\square$

$$f(p) = f(0) = 0$$

$\Downarrow$

$$p \in H$$

$$A \subset H^-$$

Дано:

$$H_i \rightarrow H = \{ \langle x, \nu \rangle = 0 \}$$

$$\nu = \lim \nu_i, \quad |\nu_i| = 1$$

нормаль H_i

Нужно: $\checkmark$ 1) H — опорная

$\checkmark$ 2) $H \ni p = 0$.

$$1) \quad A \subset H_i^-$$

$$H_i = \{ x : f_i(x) = 0 \}$$

$$H_i^- = \{ x : f_i(x) \leq 0 \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in A \quad f_i(x) \leq 0 \\ \downarrow \\ f(x) \leq 0 \end{array} \right.$$

1 Теоремы об отделимости (продолжение)

- Строгая отделимость
- Опорные гиперплоскости
- Нестрогая отделимость

2 Выпуклые многогранники — анонс

- Определения и формулировки

3 Экстремальные точки

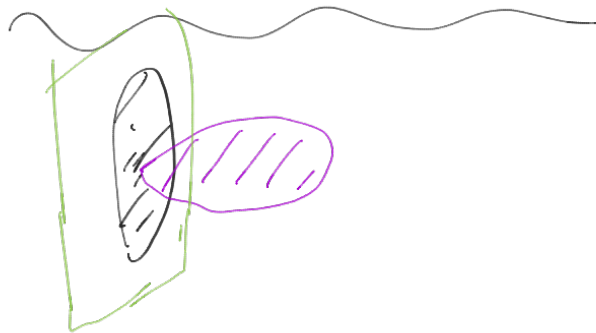
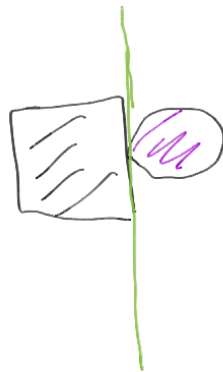
- Определение
- Конечномерная теорема Крейна-Мильмана

Теорема

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые, выпуклые и такие, что

$$\text{RelInt}(A) \cap \text{RelInt}(B) \neq \emptyset$$

Тогда существует гиперплоскость, которая нестрого разделяет A и B .



Доказательство — 1: Сведение к случаю $A \cap B = \emptyset$

Вместо A и B рассмотрим $A' = \text{RelInt } A$ и $B' = \text{RelInt } B$.
Если существует гиперплоскость H , нестрого разделяющая A' и B' , то она нестрого разделяет A и B .

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A' = \text{RelInt}(A) \\ B &\rightarrow B' = \text{RelInt}(B) \\ A' \cap B' &= \emptyset \end{aligned}$$

Доказательство — 1: Сведение к случаю $A \cap B = \emptyset$

Вместо A и B рассмотрим $A' = \text{RelInt } A$ и $B' = \text{RelInt } B$.
Если существует гиперплоскость H , нестрого разделяющая A' и B' , то она нестрого разделяет A и B .
Это следует из двух фактов:

- 1 Если H нестрого разделяет A' и B' , то она нестрого разделяет $\text{Cl}(A')$ и $\text{Cl}(B')$.
▷ Если $A' \subset \overline{H}^+$, то $\text{Cl}(A') \subset \overline{H}^+$, так как $\overline{H}^+$ — замкнутое множество. ✓

1) H разделяет A' и B'
 $\Rightarrow$ —||— $\text{Cl}(A') \cap \text{Cl}(B') = \emptyset$
 $A' \subset \overline{H}^+ \Rightarrow \text{Cl}(A') \subset \overline{H}^+$

Доказательство — 1: Сведение к случаю $A \cap B = \emptyset$

Вместо A и B рассмотрим $A' = \text{RelInt } A$ и $B' = \text{RelInt } B$. Если существует гиперплоскость H , нестрого разделяющая A' и B' , то она нестрого разделяет A и B . Это следует из двух фактов:

- 1 Если H нестрого разделяет A' и B' , то она нестрого разделяет $\text{Cl}(A')$ и $\text{Cl}(B')$.
 - ▷ Если $A' \subset \overline{H}^+$, то $\text{Cl}(A') \subset \overline{H}^+$, так как $\overline{H}^+$ — замкнутое множество.
- 2 $A \subset \text{Cl}(A')$ и $B \subset \text{Cl}(B')$.
 - ▷ $\text{Cl}(A') = \text{Cl RelInt}(A) = \text{Cl}(A) \supset A$.

$$2) A \subset \text{Cl}(A')$$

$$\begin{aligned} \text{Cl}(A') &= \text{Cl RelInt}(A) = \\ &= \text{Cl}(A) \supset A \end{aligned}$$

$$A \subset \text{Cl}(A) \subset \overline{H}^+$$

Доказательство — 1: Сведение к случаю

$$A \cap B = \emptyset$$

Вместо A и B рассмотрим $A' = \text{RelInt } A$ и $B' = \text{RelInt } B$.

Если существует гиперплоскость H , нестрого разделяющая A' и B' , то она нестрого разделяет A и B . Это следует из двух фактов:

- 1 Если H нестрого разделяет A' и B' , то она нестрого разделяет $\text{Cl}(A')$ и $\text{Cl}(B')$.

▷ Если $A' \subset \overline{H}^+$, то $\text{Cl}(A') \subset \overline{H}^+$, так как $\overline{H}^+$ — замкнутое множество.

- 2 $A \subset \text{Cl}(A')$ и $B \subset \text{Cl}(B')$.

▷ $\text{Cl}(A') = \text{Cl RelInt}(A) = \text{Cl}(A) \supset A$.

Итак, достаточно доказать теорему для A' и B' , причём $A' \cap B' = \emptyset$. Переименуем их обратно в A и B .

Лемма

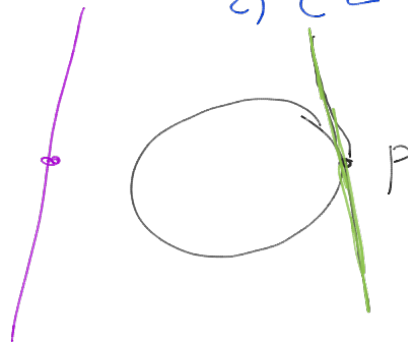
Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, $p \in \mathbb{R}^n \setminus C$.

Тогда существует гиперплоскость H такая, что $p \in H$ и C лежит нестрого по одну сторону от H .

Лем $C \in \mathbb{R}^n$ вып.

$p \in \mathbb{R}^n \setminus C$

$\Rightarrow \exists H : \begin{array}{l} 1) p \in H \\ 2) C \subset H^+ \end{array}$



Лемма

Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ выпукло, $p \in \mathbb{R}^n \setminus C$.

Тогда существует гиперплоскость H такая, что $p \in H$ и C лежит нестрого по одну сторону от H .

Доказательство.

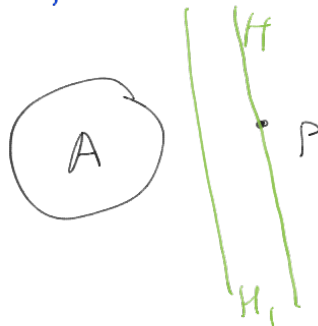
1. Если $p \in \text{Cl}(C)$, то подойдёт опорная плоскость для C , содержащая p .
2. Если $p \notin \text{Cl}(C)$, возьмём гиперплоскость H_1 , строго отделяющую p от $\text{Cl}(A)$, и построим $H \parallel H_1$, $H \ni p$. $\square$

H_1 — строго отд. p и $\text{Cl}(A)$
 $H \parallel H_1$, $H \ni p$

1) $p \in \text{Cl}(A)$



2) $p \notin \text{Cl}(A)$



Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть A, B — непустые выпуклые, $A \cap B = \emptyset$.

Рассмотрим $C = A - B$ (разность по Минковскому).

C выпукло и не содержит 0 .

По лемме, существует гиперплоскость H_0 такая, что $0 \in H_0$ и C лежит нестрого по одну сторону от H_0 .

$$A, B - \text{вып.}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

$$C = A - B = A + (-B) = \\ = \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

$$1) \quad C - \text{вып.}$$

$$2) \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow C = A - B \neq \emptyset.$$

$$\Rightarrow \text{применяем лемму к } C \\ \text{и } p = 0.$$

$$\Rightarrow \exists H_0 : 0 \in H_0 \\ \text{и } C \subset \overline{H_0^+}$$

$H_0 = L^{-1}(0)$, где $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — линейная функция.

Считаем, что $C \subset \overline{H}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : L(x) \geq 0\}$.

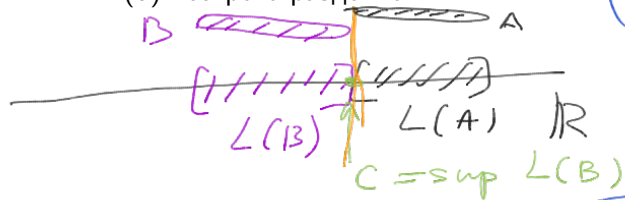
Тогда для любых $a \in A$, $b \in B$,

$$L(a) - L(b) = L(a - b) \geq 0$$

$\Rightarrow L(A)$ лежит нестрого правее $L(B)$ на $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ для $c = \sup L(B)$ верно, что $L(B) \leq c \leq L(A)$

$\Rightarrow H := L^{-1}(c)$ нестрого разделяет A и B .



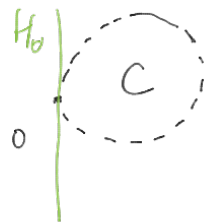
$$L(B) \leq c \leq L(A)$$

$$H := L^{-1}(c)$$

$$\begin{aligned} A &\subset \overline{H}^+ = L^{-1}([c, +\infty)) \\ B &\subset \overline{H}^- \end{aligned}$$

$$L(a) - L(b) = L(a - b) \geq 0$$

$$\Downarrow \\ \underline{\underline{L(A) \geq L(B)}}$$



$$H_0 = \ker L = \{x : L(x) = 0\}$$

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ линейная}$$

$$C \subset \overline{H}_0^+ = \{x : L(x) \geq 0\}$$

$$\forall x \in C \quad L(x) \geq 0.$$

$$\forall a \in A, b \in B$$

Упражнение

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — непустые **открытые** выпуклые, $A \cap B = \emptyset$.

Тогда они **строго** отделимы гиперплоскостью.

Упражнение (конечномерная теорема Хана-Банаха)

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ выпукло и открыто, $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Тогда существует гиперплоскость H такая, что $p \in H$ и $H \cap A = \emptyset$.

1) A, B — вып., откр., $\neq \emptyset$
 $A \cap B = \emptyset$
 $\Rightarrow A$ и B строго отделимы.

2)

