Содержание

Определение и примеры (повтор)

Определение

Поляра множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a \rangle \le 1\}$$

$x \in A^\circ \Leftrightarrow \forall a \in A \ \ \langle x, a \rangle \le 1$

Переформулировка: $A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : h_A(x) \le 1\}$,
где h_A — опорная функция.

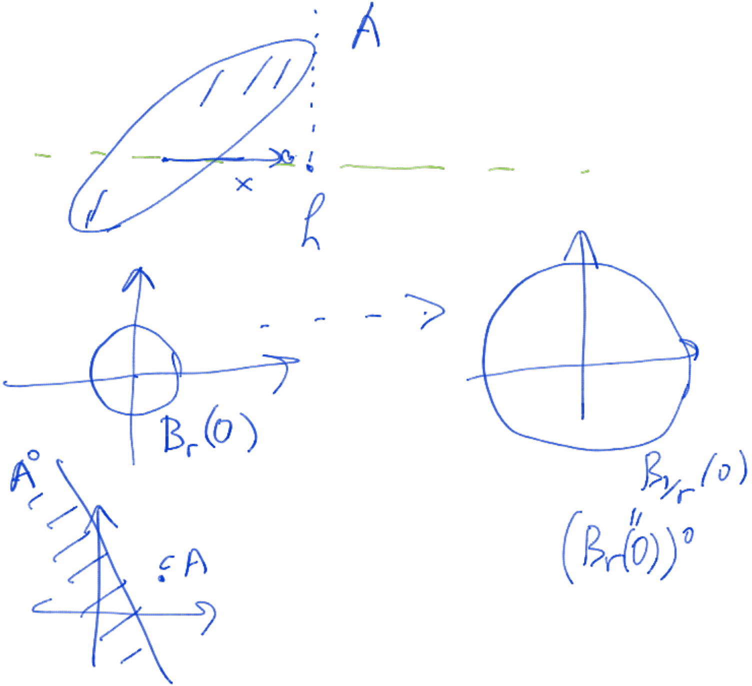
Примеры

- $(\overline{B}_r(0))^\circ = \overline{B}_{1/r}(0)$.
- $\{0\}^\circ = \mathbb{R}^n$
- Для $p \neq 0$, $\{p\}^\circ$ — замкнутое полупространство

$$\{p\}^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, p \rangle \le 1\}$$

- Если A — линейное подпространство, то $A^\circ = A^\perp$.
- (Упражнение) Если A — конус, то

$$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \langle x, a \rangle \le 0\}$$



Антимонотонность

Определение (повтор)

$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a \rangle \leq 1\}$

Свойство

Если $A \subset B$, то $A^\circ \supset B^\circ$.

$A \subset B \Rightarrow A^\circ \supset B^\circ$

Антимонотонность

Определение (повтор)

$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall a \in A \ \ \langle x, a\rangle \le 1\}$

Свойство

Если $A \subset B$, то $A^\circ \supset B^\circ$.

Применяя к шарам, получаем

Следствие

1. *Если A ограничено, то $0 \in \mathrm{Int}(A^\circ)$.*
2. *Если $0 \in \mathrm{Int}(A)$, то A° ограничено.*

1) A огр. $\Rightarrow A \subset \overline{B}_R(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow A^0 \supset \overline{B}_{1/R}(0) \Rightarrow$

$0 \in \mathrm{Int}(A)$

2) $\mathrm{Int}(A) \ni 0 \Rightarrow$

$\exists r>0 \quad \overline{B}_r(0) \subset A \Rightarrow$

$A^0 \supset \overline{B}_{1/r}(0) \Rightarrow A^0$ - огр.

Свойства — 1

- Для любых $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

$\boxed{A^\circ = \{ x : \forall a \in A \ \langle x, a \rangle \leq 1 \}.}$

$A \to A \cup B$

$(A \cup B)^\circ = \{ x : \forall a \in A \cup B \ \dots \}$

$= \{ x : \begin{matrix} \forall x \in A & \dots \\ \forall x \in B & \dots \end{matrix} \}.$

$= A^\circ \cap B^\circ$

Свойства — 1

- Для любых $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- То же для бесконечных объединений: $(\bigcup A_i)^\circ = \bigcap A_i^\circ$.

$(\cup A_i)^\circ = \{ x : \forall a \in A_i \ \underbrace{\langle x, a \rangle \leq 1}_{} \}$

$A = \cup A_i$

$\forall i$

Свойства — 1

- Для любых $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- То же для бесконечных объединений: $(\bigcup A_i)^\circ = \bigcap A_i^\circ$.
- Следствие: поляра любого множества замкнута, выпукла и содержит 0.

  ▷ $A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{x\}^\circ$ — пересечение замкнутых полупространств, содержащих 0.

$\forall A \subset \mathbb{R}^n$

A° – замк, вып, $\ni 0$.

$\{x\}^\circ$ – полупр-во. (или $\mathbb{R}^n$ если $x=0$).

Свойства — 2

Поляра не меняется при некоторых действиях над множеством:

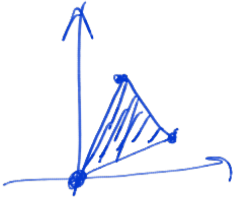
- $(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ$

$$(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ \cap \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\parallel}{\{0\}^\circ}} = A^\circ.$$

Свойства — 2

Поляра не меняется при некоторых действиях над множеством:

- $(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ$
- $(\mathrm{conv}(A))^\circ = A^\circ$



$\mathrm{conv}(A) \supset A$

$\Downarrow$

$\mathrm{conv}(A)^\circ \subset A^\circ.$

<u>Надо:</u> $\forall x \in A^\circ \quad x \in \underline{\mathrm{conv}(A)^\circ}$

$x \in A^\circ \Rightarrow \forall a \in A \quad \langle x, a\rangle \le 1.$

? $\forall$ вып. комб $\boxed{p = \sum t_i a_i}$ $(a_i \in A,\ t_i \ge 0,\ \sum t_i = 1).$

$\langle x, p\rangle \le 1.$

$$\langle x, p\rangle = \sum t_i \underbrace{\langle x, a_i\rangle}_{\le 1} \le \sum t_i \cdot 1 = 1.$$

Свойства — 2

Поляра не меняется при некоторых действиях над множеством:

- $(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ$
- $\mathrm{conv}(A)^\circ = A^\circ$
- $\mathrm{Cl}(A)^\circ = A^\circ$

$\boxed{\text{Надо: } x \in A^0 \Rightarrow x \in Cl(A)^0.}$

$A \subset Cl(A) \Rightarrow$

$Cl(A)^0 \subset A^0$

$\boxed{x \in A^0 \Rightarrow \forall a \in A \ \langle x, a \rangle \leq 1}$

Надо: $A^0 \subset Cl(A)^0$

Пусть $p \in Cl(A) \Rightarrow p = \lim a_i$, $a_i \in A$.

? $\forall x \in A^0$ $\forall p \in Cl(A)$ $\langle x, a \rangle \leq 1$.

$\langle x, p \rangle = \langle x, \lim a_i \rangle = \lim \underbrace{\langle x, a_i \rangle}_{\leq 1} \leq 1.$ ∎

фикс.

Свойства — 2

Поляра не меняется при некоторых действиях над множеством:

- $(A \cup \{0\})^\circ = A^\circ$
- $\mathrm{conv}(A)^\circ = A^\circ$
- $\mathrm{Cl}(A)^\circ = A^\circ$

Следствие

$A^\circ = (\mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}(A \cup \{0\}))^\circ$

Замечание

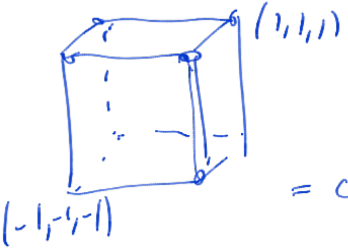
$\mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}(A \cup \{0\})$ — наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее A и 0.

conv(Cl ...) — м. быть не замкнута

Пример

Пример

Поляра куба $[-1,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ — октаэдр (выпуклая оболочка векторов $\pm e_i$, $i = 1, 2, 3$).
И наоборот.



$$K = [-1,1]^3 = \operatorname{conv}\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$$

$$(1,1,1)^\circ = \{x+y+z \le 1\}$$

$$x+y+z = \langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle.$$

$$(1,1,-1)^\circ = \{x+y-z \le 1\}$$

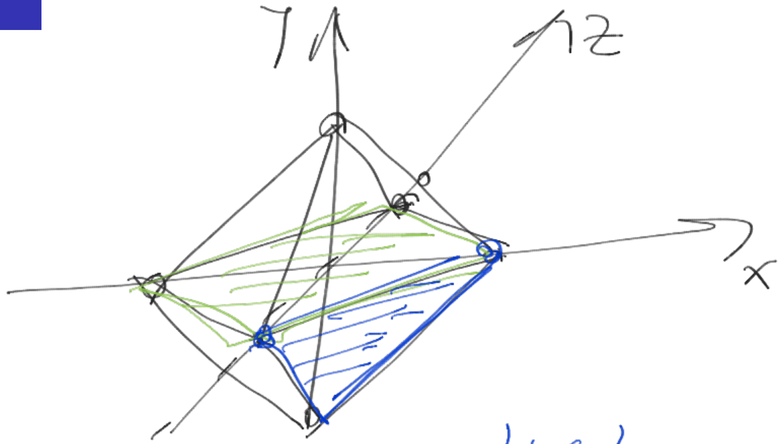
$$\vdots$$

$$K^\circ = \left(\operatorname{conv}\{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}\right)^\circ = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}^\circ =$$

$$= \{\pm x \pm y \pm z \le 1\}$$

$$= |x| + |y| + |z| \le 1$$

Содержание



октаэдр $= \{\pm e_i\}$

(октаэдр)$^\circ =$ куб $[-1,1]^n$.

Формулировка

$$A^{\circ\circ} := (A^{\circ})^{\circ}$$

Теорема

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

1. *Если A выпукло, замкнуто и $0 \in A$, то $A^{\circ\circ} = A$.*
2. *В общем случае, $A^{\circ\circ} = \boxed{\operatorname{Cl}\operatorname{conv}(A \cup \{0\})}$.*

Доказательство — 1

Доказываем 1-ю часть: A выпукло, замкнуто, $0 \in A$.

1. $A \subset A^{\circ\circ}$: если $a \in A$, то $\forall b \in A^\circ$ $\langle b, a \rangle \leq 1$ по определению $A^\circ \implies a \in A^{\circ\circ}$.

Надо: $\forall\, a \in A \quad a \in A^{\circ\circ}$

$\Updownarrow \qquad \qquad \|$

$\forall a \in A \quad \forall b \in A^\circ \quad \langle a, b \rangle \leq 1$

Св-во: $\forall\, a \in A \quad \forall\, b \in A^\circ$

$\langle a, b \rangle \leq 1$

Доказательство — 1

Доказываем 1-ю часть: A выпукло, замкнуто, $0 \in A$.

1. $A \subset A^{\circ\circ}$: если $a \in A$, то $\forall b \in A^\circ$ $\langle b, a\rangle \le 1$ по определению A° $\implies$ $a \in A^{\circ\circ}$.

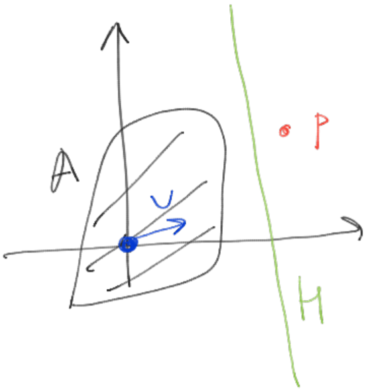
2. $A^{\circ\circ} \subset A$. От противного, пусть $p \in A^{\circ\circ} \setminus A$. Существует гиперплоскость H, строго отделяющая A от p. Так как $0 \in A$, $0 \notin H \implies H$ имеет вид

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = 1\},$$

где $v \in \mathbb{R}^n$.

Надо: $p \in A^{\circ\circ} \Rightarrow p \in A$

От прот.: $p \in A^{\circ\circ}$, $p \notin A$.



$H = \{\langle x, v\rangle = c\}$.

$c \neq 0$ $(0 \notin H)$

$\rightarrow$ сделаем $c = 1$.

Доказываем 1-ю часть: A выпукло, замкнуто, $0 \in A$.

1. $A \subset A^{\circ\circ}$: если $a \in A$, то $\forall b \in A^\circ$ $\langle b, a\rangle \le 1$ по определению A° $\implies$ $a \in A^{\circ\circ}$.

2. $A^{\circ\circ} \subset A$. От противного, пусть $p \in A^{\circ\circ} \setminus A$. Существует гиперплоскость H, строго отделяющая A от p. Так как $0 \in A$, $0 \notin H$ $\implies$ H имеет вид

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = 1\},$$

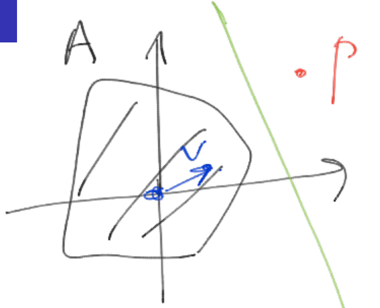
где $v \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\boxed{H^+ = \{x : \langle x, v\rangle > 1\}}$ и $\boxed{H^- = \{x : \langle x, v\rangle < 1\}}$. Тогда $0 \in H^- \implies A \subset H^- \implies p \in H^+$.

$A \subset H^- \implies \forall a \in A\ \langle v, a\rangle < 1 \implies v \in A^\circ$.

$p \in H^+ \implies \langle v, p\rangle > 1 \implies p \notin A^{\circ\circ}$.

Противоречие.



$x \in H^+$ $\langle x, v\rangle > 1$

$x \in H^-$ $\langle x, v\rangle < 1$

$0 \in A \Rightarrow$

$0 \in H^- \Rightarrow$

$A \subset H^- \Rightarrow$

$p \in H^+$

$A \subset H^- \Rightarrow \forall a \in A\ \langle v, a\rangle < 1$

$\Rightarrow v \in A^0$

$\left\{\begin{array}{l}\langle p, v\rangle > 1 \\ v \in A^0\end{array}\right. \Rightarrow p \notin (A^0)^0$

Доказательство — 2

Доказываем 1-ю часть: A произвольно.

Пусть $B = \operatorname{Cl}\operatorname{conv}(A \cup \{0\})$. Тогда $B^{\circ\circ} = B$ по 1-й части.
Из свойств, $A^\circ = (\operatorname{Cl}\operatorname{conv}(A \cup \{0\}))^\circ = B^\circ$.
$\implies A^{\circ\circ} = B^{\circ\circ} = B$. □

$B := \mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}(A \cup \{0\})$

1я часть $\Rightarrow B^{\circ\circ} = B$

$B^\circ = \boxed{(\mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}(A \cup \{0\}))^\circ = A^\circ}$

$\Downarrow$

$B = B^{\circ\circ} = A^{\circ\circ}$

Следствия — 1

Следствие

Обозначим через $\mathfrak{B}^n$ *множество всех замкнутых, выпуклых, содержащих 0 множество в* $\mathbb{R}^n$.
Тогда отображение $A \mapsto A^\circ$ *— биекция из* $\mathfrak{B}^n$ *в себя.*

$\mathfrak{B}^n = \{$ все вып, замк, $\ni 0$ подмн-в $\mathbb{R}^n \}$

Следствия — 1

Следствие

Обозначим через $\mathfrak{B}^n$ множество всех замкнутых, выпуклых, содержащих 0 множество в $\mathbb{R}^n$.
Тогда отображение $A \mapsto A^\circ$ — биекция из $\mathfrak{B}^n$ в себя.

Доказательство.

1. Множество значений содержится в $\mathfrak{B}^n$ — из свойств поляры.

2. Инъективность. Если $A^\circ = B^\circ$, то $A = B$, так как $A = (A^\circ)^\circ = (B^\circ)^\circ$.

3. Сюръективность. Любое $A \in \mathfrak{B}^n$ — поляра некоторого множества из $\mathfrak{B}^n$, так как $A = (A^\circ)^\circ$. $\square$

1) $\forall$ поляра замкнута, вып, $\ni 0$. $\Rightarrow \forall A \subset \mathbb{R}^n$ $A^\circ \in \mathfrak{B}^n$.

2) $A^\circ = B^\circ \Rightarrow A^{\circ\circ} = B^{\circ\circ} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = B$.

3) $A = A^{\circ\circ} = (A^\circ)^\circ$

Следствия — 2

Следствие

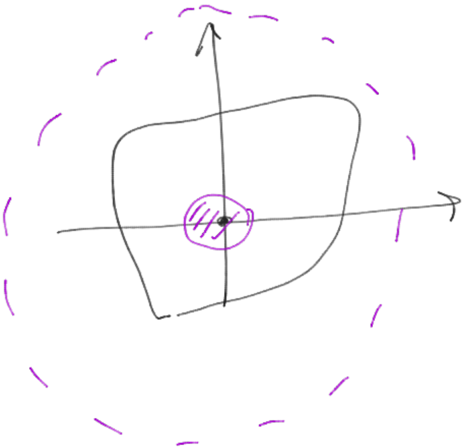
Обозначим через $\mathfrak{B}_0^n$ множество всех выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ содержащих 0 во внутренности. Тогда отображение $A \mapsto A^\circ$ — биекция из $\mathfrak{B}_0^n$ в себя.

Доказательство.

Из предыдущего следствия и свойств:

$0 \in \mathrm{Int}(A) \implies A^\circ$ ограничено

A ограничено $\implies 0 \in \mathrm{Int}(A^\circ)$. □



Следствия — 3

Следствие

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ замкнуты, выпуклы и содержат 0. Тогда $(A \cap B)^\circ = \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ))$.

Было: $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

$$(A \cap B)^\circ \overset{?}{=} \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ))$$

Следствия — 3

Следствие

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ замкнуты, выпуклы и содержат 0. Тогда $(A \cap B)^\circ = \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ))$. $\in \mathfrak{B}^n$.

Доказательство.

Множества справа и слева принадлежат $\mathfrak{B}^n$. ✓
$\Longrightarrow$ Достаточно доказать, что их поляры равны.

Поляра левой части: $(A \cap B)^{\circ\circ} = A \cap B$,
так как $A \cap B \in \mathfrak{B}$.

Поляра правой части:
$(\mathrm{Cl}(\mathrm{conv}(A^\circ \cup B^\circ)))^\circ = (A^\circ \cup B^\circ)^\circ = A^{\circ\circ} \cap B^{\circ\circ} = A \cap B$
по свойствам. □

$(A \cap B)^\circ \in \mathfrak{B}^n$

$(A \cap B)^{\circ\circ} = \boxed{A \cap B}$

$(\cancel{\mathrm{Cl}\,\mathrm{conv}}(A^\circ \cup B^\circ))^\circ =$

$= (A^\circ \cup B^\circ)^\circ = A^{\circ\circ} \cap B^{\circ\circ}$

$= \boxed{A \cap B}$

Содержание

Формулировка

Теорема

Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая оболочка конечного множества точек, то оно полиэдральное (пересечение конечного набора замкнутых полупространств).

Опр V-представление многогр-ка
- представление в виде conv (конечного мн-ва)

H-представление —||—
в виде $\cap$ полупр-в.

1) Вып. многогр-к — ограниченное $\cap$ конечного набора полупр-в.

2) —||— — вып. оболочка конечного мн-ва.

Было: $(1) \Rightarrow (2)$

Теорема: $(2) \Rightarrow (1)$

Доказательство — 1: случай $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$

Сначала разберём случай $\mathrm{Int}(A) \neq \emptyset$.

В этом случае можно считать, что $0 \in \mathrm{Int}(A)$. Рассмотрим $B := A^\circ$. Это тоже выпуклый компакт с $0 \in \mathrm{Int}(B)$.

Пусть $A = \mathrm{conv}\{p_1, \ldots, p_m\}$. Тогда

$$B = (\mathrm{conv}\{p_1, \ldots, p_m\})^\circ = \{p_1, \ldots, p_m\}^\circ = \bigcap \{p_i\}^\circ.$$

Это пересечение конечного набора замкнутых полупространств $\implies$ по первой части теоремы $B = \{q_1, \ldots, q_k\}$ для некоторых точек $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}^n$.

Применяя к B то же рассуждение, получаем, что $A = B^\circ = \cancel{\bigcup}\{q_j\}^\circ$ — пересечение конечного набора замкнутых полупространств, ч.т.д.

conv $\bigcap$

$0 \in \mathrm{Int}(A)$

$A \in \mathcal{B}_0^n$

$B \in \mathcal{B}_0^n$

$B = A^\circ$.

$A = \mathrm{conv}\{p_1, \ldots, p_m\}$.

$B = A^\circ = (\cancel{\mathrm{conv}}\{p_1, \ldots, p_m\})^\circ =$

$= \{p_1, \ldots, p_m\}^\circ = \bigcap \{p_i\}^\circ$

по 1й части В.-М. пересечение полупр-в.

$= \mathrm{conv}\{q_1, \ldots, q_k\}$

$\implies$ (аналогично).

$A = B^\circ = \bigcap \{q_j\}^\circ$ — пересечение полупр-в.

Доказательство — 2: случай $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$

Для $A = \emptyset$ теорема тривиальна. V

Пусть $\mathrm{Aff}(A)$, $\dim A = k$. Тогда можно применить разобранный случай в $Y \simeq \mathbb{R}^k$, так как $\mathrm{RelInt}(A) \neq \cancel{\infty}$ $\emptyset$.

Получаем, что A — конечное пересечение $\bigcap \overline{G}_i^+$, где $\overline{G}_i^+$ — полупространства в Y.

Для каждого i построим замкнутое полупространство $\overline{H}_i^+ \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\overline{H}_i^+ \cap Y = \overline{G}_i^+$. V

А также представим Y в виде пересечения замкнутых полупространств $\overline{P}_j^+$, $\overline{P}_j^-$, $j = 1, \dots, n-k$, где $\{P_j\}$ — набор гиперплоскостей, пересечение которых равно Y.

Тогда A — пересечение всех полупространств $\overline{H}_i^+$ и $\overline{P}_j^\pm$. V

Теорема доказана

$$\overline{G}_1^+ = \{y \in Y : f(y) \geq 0\}.$$

$$\overline{H}_1^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : f(P_Y(x)) \geq 0\}$$

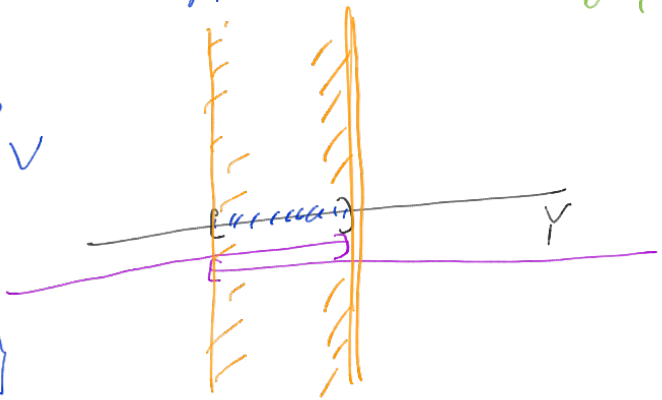
0) $A = \emptyset$ — трив.

1) $A \neq \emptyset$, $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$.

$Y := \mathrm{Aff}(A) \cong \mathbb{R}^k$

$\mathrm{Int}_Y(A) \neq \emptyset$.

$\Rightarrow A = \bigcap \overline{G}_i^+ \leftarrow$ полупр-ва в Y

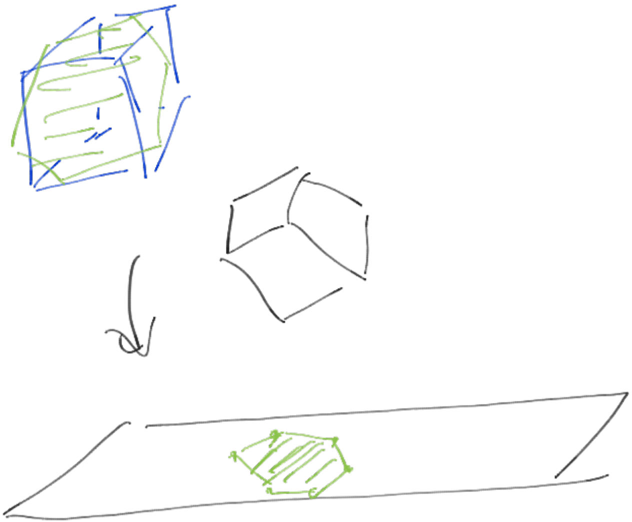


Комментарии

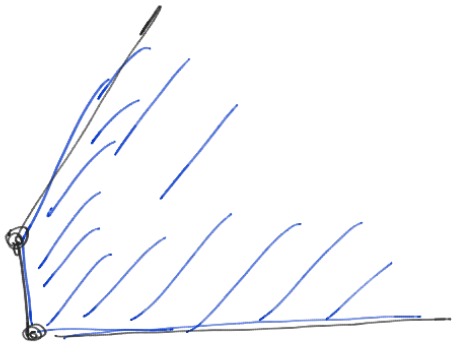
Удобно считать, что описания: «компактное пересечение полупространств» и «выпуклая оболочка конечного множества» — два равносильных определения выпуклого многогранника.

Разные свойства выпуклых многогранников удобно выводить из разных определений. Например:

- 1 Пересечение выпуклых многогранников, пересечение выпуклого многогранника с подпространством — тоже выпуклый многогранник. (Из того, что выпуклые многогранники — перечесения полупространств).
- 2 Проекция выпуклого многогранника с подпространством — тоже выпуклый многогранник. (Из того, что выпуклые многогранники — выпуклые оболочки конечных множеств).



Содержание



Теорема Вейля-Минковского для конусов

Определение

Многогранный конус — полиэдральное множество, которое является конусом (с вершиной в 0).

Замечание

Многогранные конусы — решения систем однородных линейных неравенств вида $L(x) \geq 0$, где $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция (без свободного члена).

Теорема Вейля-Минковского для конусов

Определение

Многогранный конус — полиэдральное множество, которое является конусом (с вершиной в 0).

Замечание

Многогранные конусы — решения систем однородных линейных неравенств вида $L(x) \geq 0$, где $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция (без свободного члена).

Теорема

Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является многогранным конусом $\iff$ оно представимо в виде конечной суммы по Минковскому лучей, выходящих из 0.

Замечание

$\{0\}$ — особый случай конуса. Он считается суммой пустого набора лучей.

Теорема Вейля-Минковского, общий случай

Теорема

Любое выпуклое полиэдральное множество — сумма выпуклого многогранника и многогранного конуса, и наоборот.

Содержание

Определения граней

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — полиэдральное множество.

Определение (1)

Собственная грань A — пересечение A с любой опорной гиперплоскостью.
Несобственная грань A — само множество A.
Иногда к несобственным граням относят также и $\emptyset$.

Определения граней

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — полиэдральное множество.

Определение (1)

Собственная грань A — пересечение A с любой опорной гиперплоскостью.
Несобственная грань A — само множество A.
Иногда к несобственным граням относят также и $\emptyset$.

Определение (2)

Грань A — экстремальное подмножество, то есть такое замкнутое выпуклое подмножество $F \subset A$, что

- $\forall x, y \in A$ если $\frac{x+y}{2} \in F$, то $x, y \in F$.

Определения граней

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — полиэдральное множество.

Определение (1)

Собственная грань A — пересечение A с любой опорной гиперплоскостью.
Несобственная грань A — само множество A.
Иногда к несобственным граням относят также и $\emptyset$.

Определение (2)

Грань A — экстремальное подмножество, то есть такое замкнутое выпуклое подмножество $F \subset A$, что

- $\forall x, y \in A$ если $\frac{x+y}{2} \in F$, то $x, y \in F$.

Задача

Два определения эквивалентны.

Вершины, ребра, гиперграни

Определение

Грани размерности 0 — вершины.
Грани размерности 1 — рёбра.
Грани размерности $n-1$ — гиперграни.

Решётка граней

Грани образуют частично упорядоченное множество по включению.
Если в список граней включено $\emptyset$, то это частично упорядоченное множество — решётка. Она называется решётка граней.

Решётка граней

Грани образуют частично упорядоченное множество по включению.
Если в список граней включено $\emptyset$, то это частично упорядоченное множество — решётка. Она называется решётка граней.

Верны следующие свойства:

- Каждая грань F — полиэдральное множество, и её грани — в точности те грани A, которые содержатся в F.
- Пересечение граней — грань.
- Если $\operatorname{Int}(A) \neq \emptyset$, то гиперграни покрывают $\operatorname{Fr}(A)$.
- Каждая собственная грань содержится в хотя бы одной грани на 1 большей размерности.
- Граф вершин и рёбер связен.

Формула Эйлера

Теорема

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый многогранник,* $f_0, f_1, \ldots, f_n$ *— количество граней размерности 0, 1,. . . , n соответственно. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k = 1.$$

Для записей 1

Y — афф. подпр-во $\Rightarrow$ Y — конизотропное.

$$\begin{cases} x_{k+1} \geq 0 \\ x_{k+1} \leq 0 \\ \vdots \end{cases}$$

М. считать, что $Y = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow Y = \begin{cases} x_{k+1} \geq 0 \\ -x_{k+1} \geq 0 \\ \vdots \\ x_n \geq 0 \\ -x_n \geq 0 \end{cases}$$ — пересечение конуср.

$$Y = \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 = \{(x,0)\} = \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} y \geq 0 \\ -y \geq 0 \end{cases}$$

Для записей 2

Проект. пр-во $X = \mathbb{P}(V)$.

$H \subset X$ — проективная гиперпл-ть

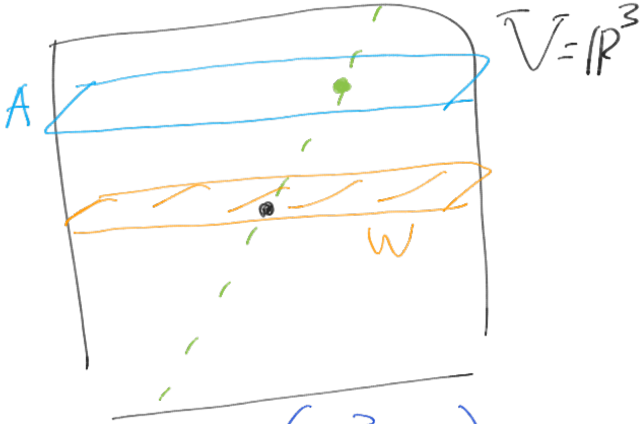
$H = \mathbb{P}(W)$, W — лин. гиперпл-ть в V

Афф. карта —

$$X \setminus H = \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(W)$$

со структурой афф. пр-ва

из отождествления $X \setminus H \leftrightarrow A$, $A \parallel W$



$$X = \mathbb{RP}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus 0)/\sim$$

v $x^2 - yz = 0$

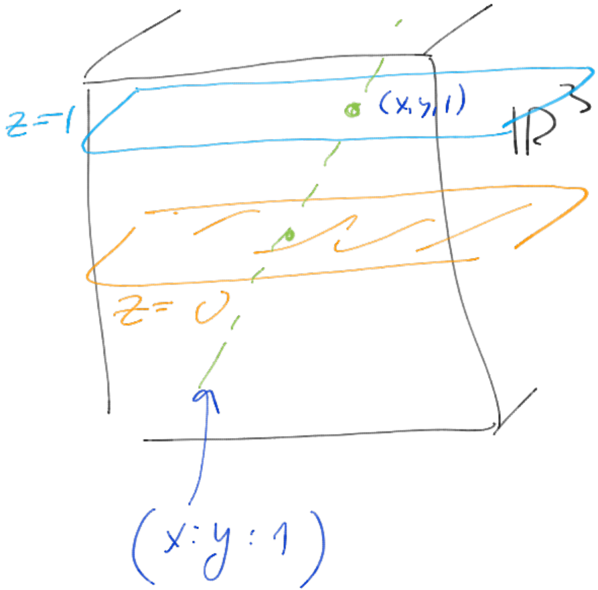
$$\mathbb{R}P^2 = \{(x:y:z)\} = P(\mathbb{R}^3)$$

$$\begin{matrix} \mathbb{R}P^2 \\ \cup \\ \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r] & (x:y:1) \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, phantom, "\cap"] & \mathbb{R}P^2 \arrow[u, phantom, "\cap"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{z=1 \rightsquigarrow x^2 - yz = 0} \longrightarrow x^2 - y = 0$$

парабола.



Для записей 4

Для записей 5

Для записей 6

Для записей 7

Для записей 8

Для записей 9

Для записей 10