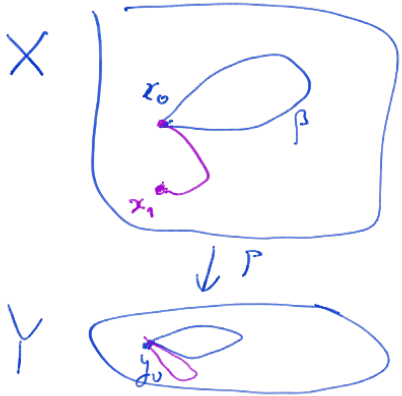
Содержание

1. Приложения
   - Инвариантность размерности и края (dim = 2)
   - Теоремы Борсука и Брауэра
   - Основная теорема алгебры
   - Индекс и компоненты дополнения
   - Теорема Улама-Борсука



? $\ker p_* = \{e\}$

$[\beta] \neq \{e\}$

β – не стяг.

$\alpha = p \circ \beta$ – стягиваема

$\beta = \tilde{\alpha}$ ≡ стяг.

p – унив. (X – односв)

$\alpha \in \Omega(Y, y_0) \longrightarrow \tilde{\alpha}(1)$.

$[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(y_0)$

$\tilde{\alpha}(0) = x_0$

биекция

(1) $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

$\pi_1(S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$

$[\alpha] \longrightarrow$ индекс.

"число оборотов вокруг 0"

(rotation number).

Инвариантность размерности 2

Теорема

$\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$.

Инвариантность размерности 2

Теорема

$\mathbb{R}^2$ *не гомеоморфно* $\mathbb{R}^n$ *при* $n \geq 3$.

Доказательство.

При удалении одной точки $\mathbb{R}^n$ остаётся односвязным, а $\mathbb{R}^2$ нет. $\square$

Упражнение

Никакое непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^2 \not\leftrightarrow \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

не односвязна $(\pi_1 \cong \mathbb{Z})$

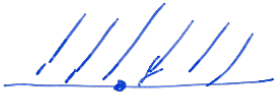
односвязно

$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \pi_1(S^{n-1}) = \{e\}$

Инвариантность края в размерности 2

Теорема

$\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ *не гомеоморфно никакому открытому подмножеству* $\mathbb{R}^2$.



$\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$

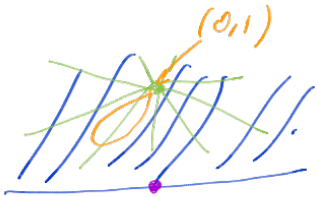
Инвариантность края в размерности 2

Теорема

$\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ *не гомеоморфно никакому открытому подмножеству* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство.

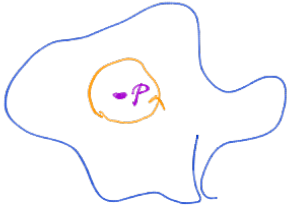
$\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ без точки $(0, 0)$ односвязно.
Открытое подмножества $\mathbb{R}^2$ без любой точки не односвязно. □



$\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$ – односв.

$\mathbb{R}^2_+ \simeq U \subset \mathbb{R}^2$ – откр.

$\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \simeq U \setminus \{p\}$ – не односв.



$\alpha \sim \beta$

$\{\alpha_t\}$ $\quad \alpha_t(x) = (1-t)\alpha(x) + t\beta(x).$

$\alpha : [0,1] \to X$

$\beta : [0,1] \to X$

$\beta = \text{const}_{(0,1)}$

Содержание

1 Приложения
- Инвариантность размерности и края ($\dim = 2$)
- Теоремы Борсука и Брауэра
- Основная теорема алгебры
- Индекс и компоненты дополнения
- Теорема Улама-Борсука

Теорема Борсука

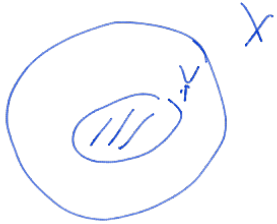
Определение

Ретракция — непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, где $Y \subset X$, такое, что $f|_Y = \mathrm{id}_Y$.

Если существует ретракция $f\colon X \to Y$, то Y называется ретрактом пространства X.

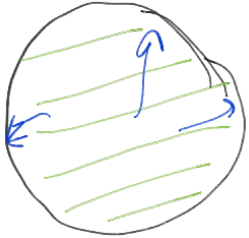
$f: X \to Y$ непр

$f|_Y = id_Y$



Теорема (Борсук)

Не существует ретрации из D^2 на $\mathbb{S}^1$.



$\nexists\, f: D^2 \to S^1$

$f|_{S^1} = id_{S^1}$

Теорема Борсука

Определение

Ретракция — непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, где $Y \subset X$, такое, что $f|_Y = \mathrm{id}_Y$.

Если существует ретракция $f\colon X \to Y$, то Y называется ретрактом пространства X.

Теорема (Борсук)

Не существует ретрации из D^2 на $\mathbb{S}^1$.

Доказательство.

Продолжимость тождественного отображения $\mathbb{S}^1$ в себя до непрерывного отображения из D^2 в $\mathbb{S}^1$ равносильна стягиваемости $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ как петли в S^1.
Из строения $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ эта петля не стягиваема. □

петля $\alpha: S^1 \to X$ стяг

$\Updownarrow$

$\exists$ непр продолжение $\tilde{\alpha}: D^2 \to X$

$\alpha = id_{S^1}: S^1 \to S^1$

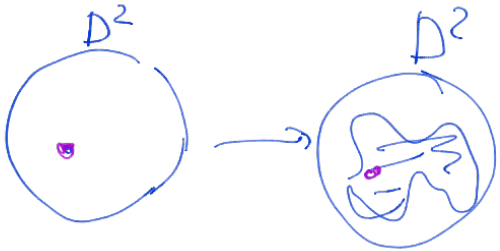
– не стягиваема!

$\Rightarrow$ не продолжается до $f: D^2 \to S^1$.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Теорема (Брауэр)

Любое непрерывное отображение $f : D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку, т.е. существует точка $x \in D^2$ такая, что $f(x) = x$.



Теорема Брауэра о неподвижной точке

Теорема (Брауэр)

Любое непрерывное отображение $f\colon D^2 \to D^2$ имеет неподвижную точку, т.е. существует точка $x \in D^2$ такая, что $f(x) = x$.

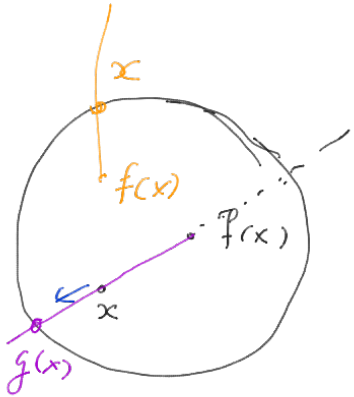
Доказательство.

От противного, пусть $f(x) \neq x$ для всех $x \in D^2$.
Построим $g\colon D^2 \to S^1$ так: $g(x)$ — точка пересечения луча, начинающегося в $f(x)$ и проходящего через x, с окружностью.
Это g противоречит теореме Борсука. □

$g(x) = x + t_0(x - f(x))$

$t_0 \geq 0$ — корень ур-я

$|x + t(x - f(x))|^2 = 1$ — кв. ур-е



$g\colon D^2 \to S^1$ — ретракция

$g|_{S^1} = id_{S^1}$

Для записей

Содержание

1 Приложения
- Инвариантность размерности и края ($\dim = 2$)
- Теоремы Борсука и Брауэра
- Основная теорема алгебры
- Индекс и компоненты дополнения
- Теорема Улама-Борсука

Формулировка

Теорема (основная теорема алгебры)

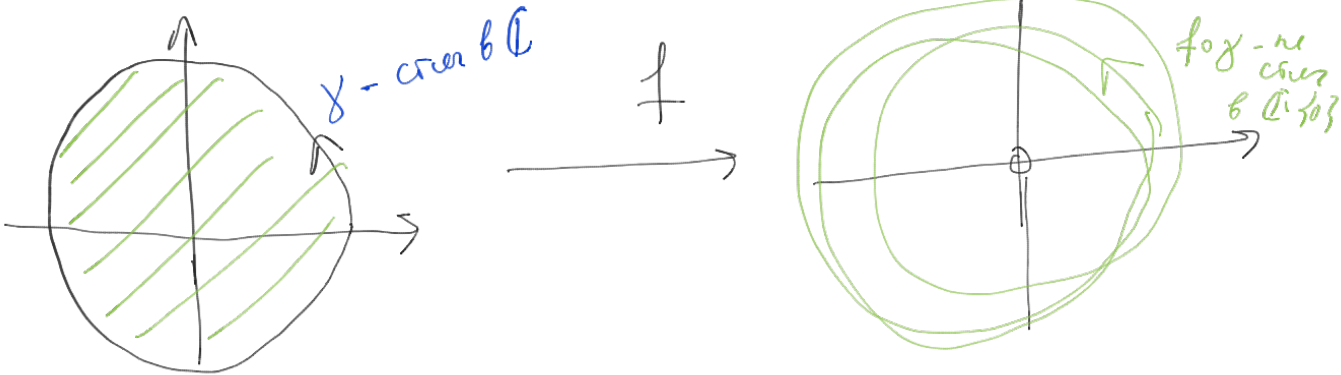
Любой многочлен $f \in \mathbb{C}[x]$ степени ≥ 1 имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \overset{1}{\overset{\shortparallel}{a_n}} z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists\, z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0.$

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}.$



Доказательство — 1: план

Можно считать, что старший коэффициент равен 1:

$$f(z) = z^n + g(z)$$

где $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Доказываем от противного: пусть корней нет.
Тогда f — непрерывное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Построим петлю $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ такую, что её образ $f \circ \gamma$ не стягиваема в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (имеет ненулевой индекс относительно 0). Это даст противоречие.

В качестве γ возьмем обход окружности радиуса R, $\gamma(x) = R \cdot e^{2\pi i x}$, где $R > 0$ — достаточно большое число.

Доказательство — 2: выбор R

Выберем $R > 0$ столь большим, что при $|z| \geq R$ верно неравенство

$$|z^n| > |g(z)| \qquad (*)$$

Для этого достаточно взять

$$R > n \cdot \max\{|a_i| + 1\}.$$

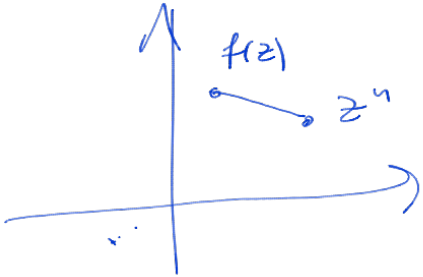
Из $(*)$ следует, что отрезок между $f(z)$ и z^n не проходит через 0.

$$f(z) = z^n + g(z)$$

$$|z^n| > n \cdot |a_k z^k| \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z| > 1 \\ |z| > n \cdot a_k \end{cases}$$

$$f(z) = z^n + g(z)$$



Доказательство — 3

Положим $\gamma(x) = R\,e^{2\pi i x}$ и рассмотрим петли $\alpha, \beta\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\alpha(x) = f(\gamma(\cancel{x}t)) = (\gamma(\cancel{x}t))^n + g(\gamma(\cancel{x}t)),$$

$$\beta(x) = (\gamma(\cancel{x}t))^n = R^n e^{2\pi i n x}.$$

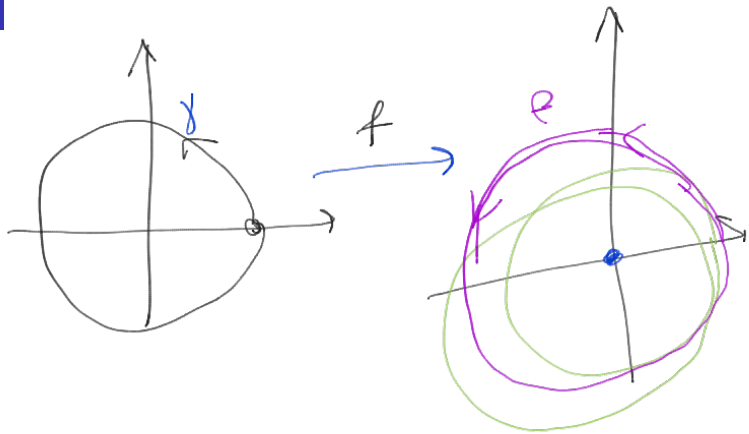
Они свободно гомотопны линейной гомотопией в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Longrightarrow$ у них одинаковые индексы относительно 0

$\Longrightarrow$ индексы равны n, так как β — n-кратный обход окружности

$\Longrightarrow$ α не стягиваема в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Но γ стягиваема в $\mathbb{C}$ $\Longrightarrow$ ее образ $\alpha = f \circ \gamma$ тоже стягиваема. Противоречие.



$\operatorname{Arg} \beta(x) = 2\pi n x$

изм. арг. $\beta(x)$, $x \in [0,1]$

$= 2\pi n$

индекс $= n$.

Для записей

Содержание

1 Приложения
- Инвариантность размерности и края ($\dim = 2$)
- Теоремы Борсука и Брауэра
- Основная теорема алгебры
- Индекс и компоненты дополнения
- Теорема Улама-Борсука

Индекс и компоненты дополнения

Теорема

Пусть $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ — петля, p, q лежат в одной компоненте связности $\cancel{\alpha([0,1])}$ $\mathbb{R}^2 - \alpha([0,1])$. Тогда индексы α относительно p и q равны.

Индекс и компоненты дополнения

Теорема

Пусть $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *— петля,* p, q *лежат в одной компоненте связности* $\cancel{\alpha([0,1])}$. $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha([0,1])$

Тогда индексы α *относительно* p *и* q *равны.*

Доказательство.

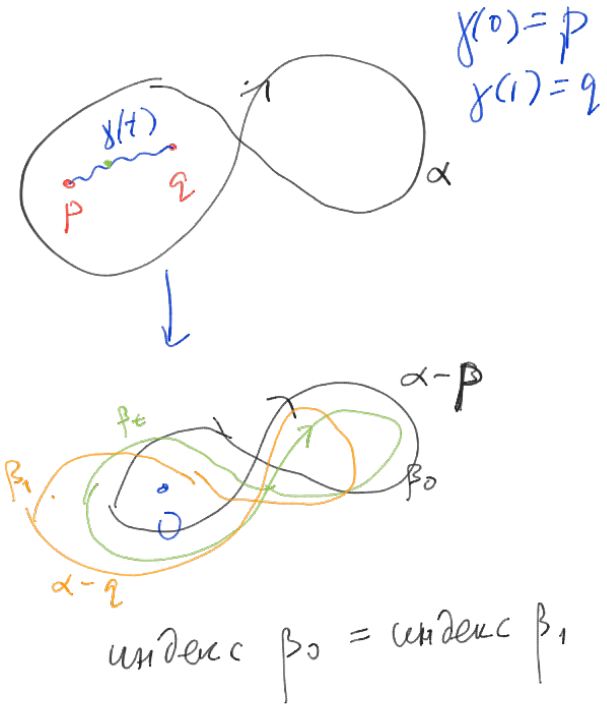
Из локальной линейной связности, компоненты связности и линейной связности совпадают. Пусть γ — путь, соединяющий p и q в дополнении α.

Рассмотрим свободную гомотопию петель $\{\beta_t\}$:

$$\beta_t(x) = \alpha(x) - \gamma(t).$$

Она не задевает 0 $\implies$ индексы β_0 и β_1 относительно 0 равны.

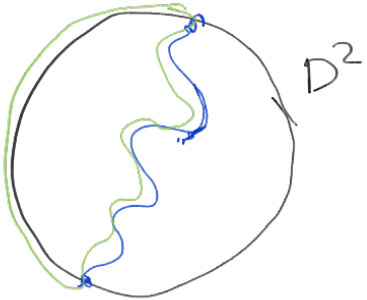
Это то же самое, что индексы α относительно p и q. $\square$



Приложение: детская теорема Жордана

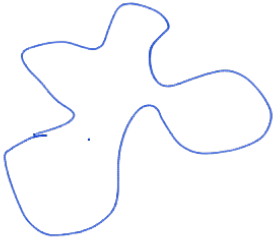
Следствие

Пусть α — путь в D^2, соединяющий две различные точки $\mathbb{S}^1$ и не имеющий других общих точек с $\mathbb{S}^1$. Тогда образ α разбивает внутренность диска хотя бы на две компоненты.



$f: S^1 \to \mathbb{R}^2$ – инъекц.

$\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$ – две компоненты.



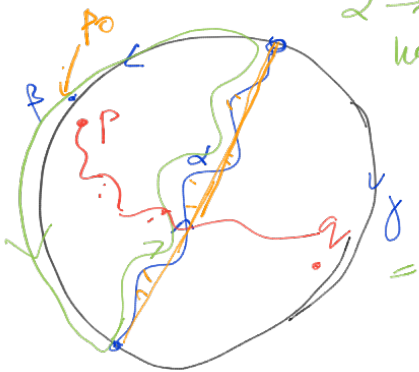
Приложение: детская теорема Жоржана

Следствие

Пусть α — путь в D^2, соединяющий две различные точки $\mathbb{S}^1$ и не имеющий других общих точек с $\mathbb{S}^1$. Тогда образ α разбивает внутренность диска хотя бы на две компоненты.

Доказательство.

Пусть β и γ — дуги, на которые концы α разбивают окружность.
Выберем $p, q \in D^2$ очень близко (ближе, чем α) к серединам этих дуг.
Тогда линейная гомотопия между α и отрезком с теми же концами не задевает p и q
$\Longrightarrow$ индексы петли $\alpha\beta$ относительно p и q различны (равны 0 и 1)
$\Longrightarrow$ p и q лежат в разных компонентах. □



$\alpha \to$ хорда
получим
петлю
$\Theta =$
$= \alpha$(хорда)

p_0 – середина дуги β

$|p - p_0| < \cancel{\frac{1}{10} d(p_0, \alpha)}$

$\alpha([0,1])$

$< d(p_0,$ образ мин. гомотопии между α и хордой$)$.

Для записей

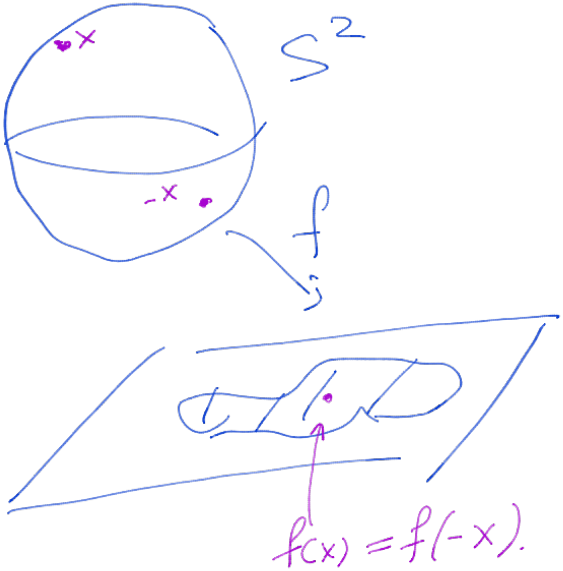
Содержание

1 Приложения
- Инвариантность размерности и края ($\dim = 2$)
- Теоремы Борсука и Брауэра
- Основная теорема алгебры
- Индекс и компоненты дополнения
- Теорема Улама-Борсука

Формулировка

Теорема

Для любой непрерывной функции $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ существует точка $x \in \mathbb{S}^2$ такая, что $f(-x) = f(x)$.



Доказательство — 1: план

От противного, пусть $f(-x) \neq f(x)$ для всех $x \in \mathbb{S}^2$. ✓
Тогда определим $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$g(x) = f(x) - f(-x).$$

Она непрерывна и нечётна: $g(-x) = -g(x)$ $\forall x \in \mathbb{S}^2$.

$g: S^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$g(x) = f(x) - f(-x)$

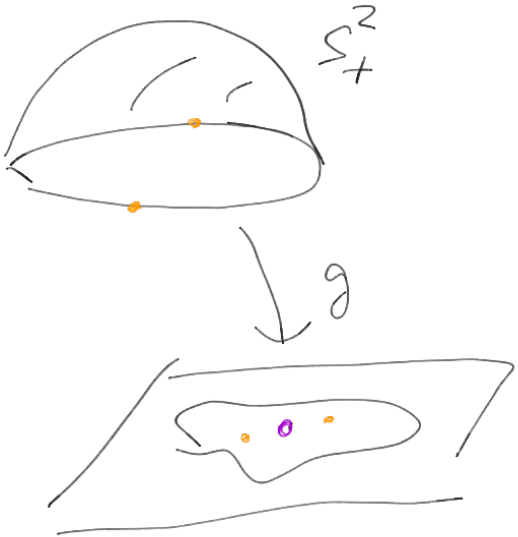
Доказательство — 1: план

От противного, пусть $f(-x) \neq f(x)$ для всех $x \in \mathbb{S}^2$. Тогда определим $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$g(x) = f(x) - f(-x).$$

Она непрерывна и нечётна: $g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$.

Докажем, что такого g не существует. Будем рассматривать g только на верхней полусфере $\mathbb{S}^2_+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 0\}$.



Доказательство — 1: план

От противного, пусть $f(-x) \neq f(x)$ для всех $x \in \mathbb{S}^2$.
Тогда определим $g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$g(x) = f(x) - f(-x).$$

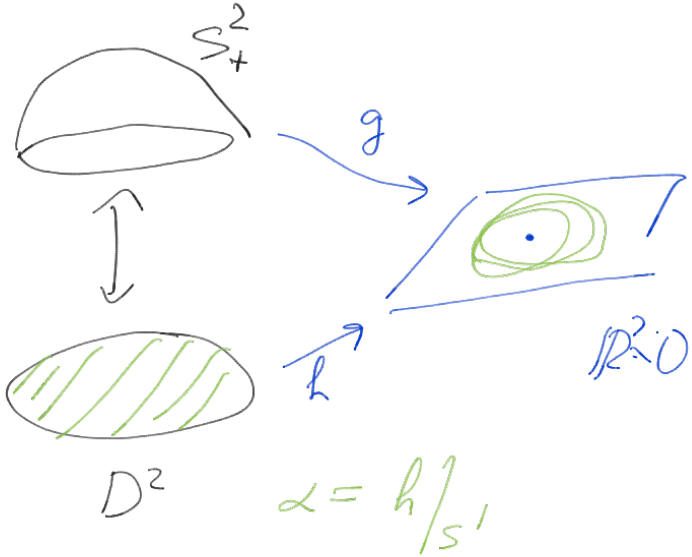
Она непрерывна и нечётна: $g(-x) = -g(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^2$.

Докажем, что такого g не существует. Будем рассматривать g только на верхней полусфере $\mathbb{S}^2_+ := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 0\}$.

Так как $\mathbb{S}^2_+ \simeq D^2$, достаточно доказать, что не существует непрерывной $h\colon D^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ такой, что

$$h(-x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{S}^1$$

Для этого докажем, что петля $\alpha = h|_{\mathbb{S}^1}$ не стягиваема в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Из этого будет следовать, что она не продолжается до отображения $h\colon D^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.



Нечётная петля имеет нечётный индекс

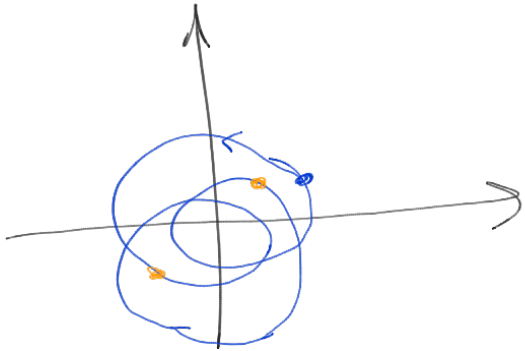
Лемма

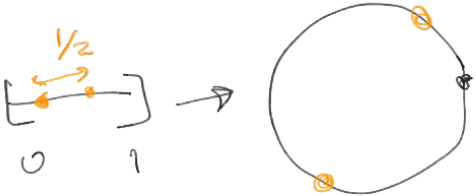
Пусть непрерывное отображение $\alpha\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *нечётно, т.е.* $\alpha(-x) = -\alpha(x)$ *для всех* $x \in \mathbb{S}^1$.
Тогда индекс α *относительно 0 нечётен.*
В частности, он не равен 0.

Доказательство леммы

Рассмотрим соответствующий путь $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\beta(x) = \alpha(cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.
Нечётность α переписывается в виде

$$\beta(x + \tfrac{1}{2}) = -\beta(x) \qquad (*)$$





Доказательство леммы

Рассмотрим соответствующий путь $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\beta(x) = \alpha(cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.
Нечётность α переписывается в виде

$$\beta(x + \tfrac{1}{2}) = -\beta(x) \qquad (*)$$

Пусть $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывный аргумент β.
Из (*) следует, что

- Для любого $x \in [0, \frac{1}{2}]$, изменение аргумента $\varphi(\frac{1}{2}) - \varphi(0)$ имеет вид $(2k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.
- $\varphi(x + \frac{1}{2}) - \varphi(x)$ — константа.
  То есть k не зависит от x.

$\varphi(x+\frac{1}{2}) - \varphi(x)$

$\varphi = \operatorname{Arg} \beta$

$\forall x \in [0, 1/2]$

$\boxed{\varphi(x+1/2) - \varphi(x)} =$

(нечётное кратное π)

$= (2k+1)\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

const (по непр)

Доказательство леммы

Рассмотрим соответствующий путь $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,
$\beta(x) = \alpha(cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.
Нечётность α переписывается в виде

$$\beta(x + \tfrac{1}{2}) = -\beta(x) \qquad (*)$$

Пусть $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывный аргумент β.
Из (*) следует, что

- Для любого $x \in [0, \frac{1}{2}]$, изменение аргумента $\varphi(\frac{1}{2}) - \varphi(0)$ имеет вид $(2k+1)\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$.
- $\varphi(x + \frac{1}{2}) - \varphi(x)$ — константа.
  То есть k не зависит от x.

равно $(2k+1)\pi$

Отсюда
$\varphi(1) - \varphi(0) = \boxed{\varphi(\frac{1}{2}) - \varphi(0)} + \boxed{\varphi(1) - \varphi(\frac{1}{2})} = (2k+1)2\pi$ $\Rightarrow$ индекс $= 2k+1 \neq 0$.
$\implies$ индекс равен $2k+1$.

Лемма и теорема доказаны

Для записей 1

Для записей 2

Для записей 3

Для записей 4

Для записей 5

Для записей 6

Для записей 7

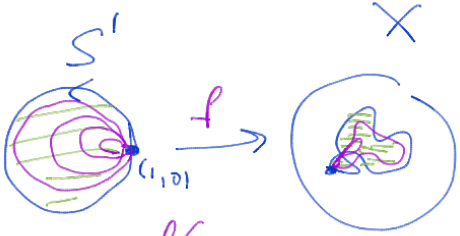
Для записей 8

Для записей 9

Для записей 10

$$\alpha : S^1 \to X = S^1$$

$$\alpha = f|_{S^1}, \quad f : D^2 \to X$$



$$\alpha_t(x) = f\big((1-t)\cdot(\cos x, \sin x) + t\cdot(1,0)\big).$$