Содержание

Содержание

Теорема Фенхеля

Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — натуральнo параметризованная регулярная кривая.

Определение (повтор)

Кривизна γ в момент t — $\kappa(t) := |\gamma''(t)|$.
Поворот γ — $\int \kappa(t)\,dt$.
γ **замкнута**, если она продолжается до гладкой периодической.

Теорема (Фенхель)

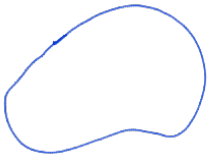
У любой замкнутой регулярной кривой в $\mathbb{R}^n$, поворот $\geq 2\pi$.

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^4$

$|\gamma'| = 1$

$k(t) = |\gamma''(t)|$

$v(t) = \gamma'(t)$



Поворот $= \int k$

Доказательство — 1

Пусть γ натурально параметризована отрезком $[a, b]$.
Рассмотрим кривую $v(t) = \gamma'(t)$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$.
Это замкнутая кривая, её длина равна повороту γ.

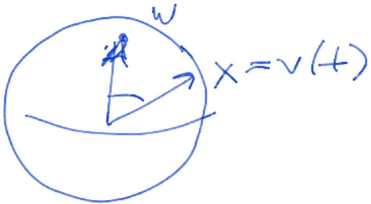
Доказательство — 1

Пусть γ натурально параметризована отрезком $[a, b]$.
Рассмотрим кривую $v(t) = \gamma'(t)$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$.
Это замкнутая кривая, её длина равна повороту γ.

1 шаг: кривая v не лежит ни в какой открытой полусфере.

Доказательство: От противного, пусть при всех t вектор $v(t)$ лежит в открытой полусфере с центром w, где $w \in \mathbb{S}^{n-1}$ — фиксированный вектор.

Тогда $\langle v(t), w\rangle > 0$ при всех t ✓ (1)
$\implies \langle \gamma(t), w\rangle' = \langle \gamma'(t), w\rangle > 0$ при всех t ✓
$\implies$ функция $t \mapsto \langle \gamma(t), w\rangle$ возрастает ✓
$\implies \gamma$ не замкнута $\square$



полусфера с центром w

$= \{x \in S^{n-1} : \langle x, w\rangle > 0\}$

$w = e_n$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$v = \gamma' = (\gamma_1', \dots, \gamma_n')$

$\forall t \ \langle v(t), w\rangle > 0$

$\gamma_n'(t) > 0 \Rightarrow \gamma_n \nearrow$

$\gamma_n(a) \neq \gamma_n(b)$.

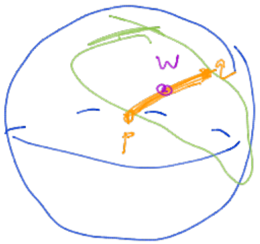
Доказательство — 2

2 шаг: если замкнутая кривая v на единичной сфере не лежит ни в какой открытой полусфере, то $\ell(v) \geq 2\pi$.

Доказательство: от противного, пусть $\ell(v) < 2\pi$.

Пусть $p = v(t_1)$ и $q = v(t_2)$ — точки на кривой v, которые делят ей длину пополам.
Тогда для каждого t

$$\angle(v(t), p) + \angle(v(t), q) \leq \frac{\ell(v)}{2} < \pi \qquad (*)$$



2 шаг: если замкнутая кривая v на единичной сфере не лежит ни в какой открытой полусфере, то $\ell(v) \geq 2\pi$.

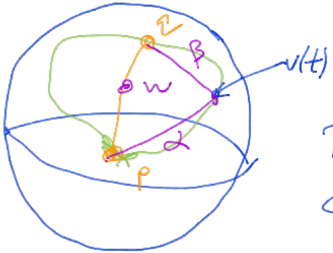
Доказательство: от противного, пусть $\ell(v) < 2\pi$.

Пусть $p = v(t_1)$ и $q = v(t_2)$ — точки на кривой v, которые делят ей длину пополам.
Тогда для каждого t

$$\angle(v(t), p) + \angle(v(t), q) \leq \frac{\ell(v)}{2} < \pi \qquad (*)$$ (3)

Пусть w — середина дуги между p и q ($w = \frac{p+q}{|p+q|}$). (1)
Тогда из $(*)$ следует, что $\langle v(t), w\rangle > 0$ (2)
$\implies$ $v(t)$ лежит в открытой полусфере с центром w.
Противоречие.

Теорема доказана



$w = \frac{p+q}{|p+q|}$

? $\forall t$ $\langle v(t), w\rangle > 0$

$\Updownarrow$

$\langle v(t), p+q\rangle > 0$

$\langle v(t), p\rangle + \langle v(t), q\rangle > 0$

$\cos\alpha \qquad \cos\beta$

$(\alpha = \angle(p, v(t)), \ \beta = \angle(q, v(t)))$

$\alpha + \beta \leq \frac{\ell(v)}{2} < \pi \quad (*)$

$\Downarrow$

$\cos\alpha + \cos\beta > 0$

Для записей

Содержание

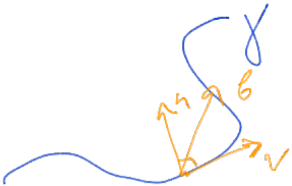
Определение

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ — натурально параметризованная кривая, и её кривизна не обращается в 0.
Пусть v, n — скорость и главная нормаль, κ — кривизна (всё это — функции от t).

Определение

Бинормаль γ в точке t — вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$ (краткая запись: $b = v \times n$),
где $\times$ — векторное произведение.

Кручение γ в точке t — число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle$ (краткая запись: $\tau = \langle n', b \rangle$).



$$b = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

$n = (n_1, n_2, n_3)$.

$b = v \times n$

$|b| = 1$

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ — натурально параметризованная кривая, и её кривизна не обращается в 0.
Пусть v, n — скорость и главная нормаль, κ — кривизна (всё это — функции от t).

Определение

Бинормаль γ в точке t — вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$ (краткая запись: $b = v \times n$),
где $\times$ — векторное произведение.

Кручение γ в точке t — число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t) \rangle$ (краткая запись: $\tau = \langle n', b \rangle$.

Свойства:

- $(v(t), n(t), b(t))$ — положительно ориентированный ортонормированный базис (базис Френе); V

Определение

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ — натурально параметризованная кривая, и её кривизна не обращается в 0.
Пусть v, n — скорость и главная нормаль, κ — кривизна (всё это — функции от t).

Определение

Бинормаль γ в точке t — вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$ (краткая запись: $b = v \times n$),
где $\times$ — векторное произведение.

Кручение γ в точке t — число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t)\rangle$ (краткая запись: $\tau = \langle n', b\rangle$).

Свойства:

- $(v(t), n(t), b(t))$ — положительно ориентированный ортонормированный базис (базис Френе);
- v, n, b, κ, τ — гладкие функции;

Определение

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ — натурально параметризованная кривая, и её кривизна не обращается в 0.
Пусть v, n — скорость и главная нормаль, κ — кривизна (всё это — функции от t).

Определение

Бинормаль γ в точке t — вектор $b(t) = v(t) \times n(t)$ (краткая запись: $b = v \times n$),
где $\times$ — векторное произведение.

Кручение γ в точке t — число $\tau(t) = \langle n'(t), b(t)\rangle$ (краткая запись: $\tau = \langle n', b\rangle$).

Свойства:

- $(v(t), n(t), b(t))$ — положительно ориентированный ортонормированный базис (базис Френе);
- v, n, b, κ, τ — гладкие функции;
- κ и τ сохраняются при движениях, сохраняющих ориентацию. $\checkmark$

Формулы Френе

$\gamma' = v$

Теорема

Для натурально параметризованной кривой в $\mathbb{R}^3$, *кривизна которой не обращается в 0, верны формулы*

$$\begin{cases} v' = \kappa n \\ n' = -\kappa v + \tau b \\ b' = -\tau n \end{cases} \quad (1)$$

где v, n, b *— базис Френе,* κ *— кривизна,* τ *— кручение.*

Доказательство формул

1. Первая формула — определение кривизны и нормали. ✓

2. Разложим n' по базису v, n, b (коэффициенты разложения — скалярные произведения)
$\langle v, n\rangle' = 0 \implies \langle n', v\rangle = -\langle n, v'\rangle = -\langle n, \kappa n\rangle = -\kappa$ ✓
$\langle n, n\rangle' = 0 \implies \langle n', n\rangle = 0$ ✓
$\langle n', b\rangle = \tau$ по определению
Отсюда $n' = -\kappa v + \tau b$. (2)

3. Разложим b' по базису v, n, b.
$\langle b, v\rangle' = 0 \implies \langle b', v\rangle = -\langle b, v'\rangle = -\langle b, \kappa n\rangle = 0$
$\langle b, n\rangle' = 0 \implies \langle b', n\rangle = -\langle b, n'\rangle = -\langle b, -\kappa v + \tau b\rangle = -\tau$
$\langle b, b\rangle' = 0 \implies \langle b', b\rangle = 0.$
Отсюда $b' = -\tau n.$ $\square$

$$\begin{cases} v' = \kappa n & (1) \\ n' = -\kappa v + \tau b & (2) \\ b' = -\tau \cdot n & (3) \end{cases}$$

$0 = \langle v, n\rangle' = \langle v', n\rangle + \langle v, n'\rangle$

Изменение соприкасающейся плоскости

Направляющая идея: из формулы $b' = -\tau n$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается со скоростью $|\tau|$.

Следствие

Кривая γ (с ненулевой кривизной) лежит в одной плоскости $\iff$ $\tau \equiv 0$.

$b' = -\tau n$

$|b'| = |\tau|$

Изменение соприкасающейся плоскости

Направляющая идея: из формулы $b' = -\tau n$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается со скоростью $|\tau|$.

Следствие

Кривая γ (с ненулевой кривизной) лежит в одной плоскости $\iff$ $\tau \equiv 0$.

Доказательство.

$\Longleftarrow$: Пусть $\tau \equiv 0$. Тогда $b' = -\tau n = 0$

$\implies$ $b = const = b_0$

$\implies$ $\langle \gamma(t), b_0 \rangle' = \langle v(t), b_0 \rangle = \langle v(t), b(t) \rangle = 0$

$\implies$ $\langle \gamma(t), b_0 \rangle = const = d$

$\implies$ γ лежит в одной плоскости, ортогональной b_0.

$\Longrightarrow$: Аналогично. □

$b = b_0 \perp v = \gamma'$

$\langle v, b_0 \rangle = 0$

$\parallel$

$\langle \gamma', b_0 \rangle$

$\parallel$

$\langle \gamma, b_0 \rangle'$

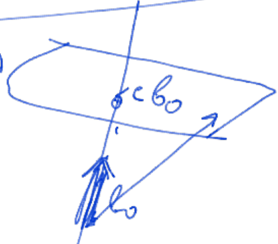
Ур-е плоскости

$\langle x, W \rangle = c$

$b_0 = (a, b, c)$

$const = d.$

$\gamma(t)$ – удовл. $\boxed{ax + by + cz = d}$



Скорость ухода от соприкасающейся плоскости

$n' = -\kappa v + \tau b$

Из формул Френе

$$\gamma' = v \qquad (1)$$

$$\gamma'' = \kappa n \qquad (2)$$

$$\gamma''' = (\kappa n)' = -\kappa^2 v + \kappa' n + \kappa\tau b \qquad (3)$$

По формуле Тейлора, расстояние от $\gamma(t)$ до соприкасающейся плоскости в точке t_0 при $t \to t_0$ равно

$$\frac{\kappa\tau}{6}(t - t_0)^3 + o(\cancel{t}^3) \qquad o(|t-t_0|^3)$$

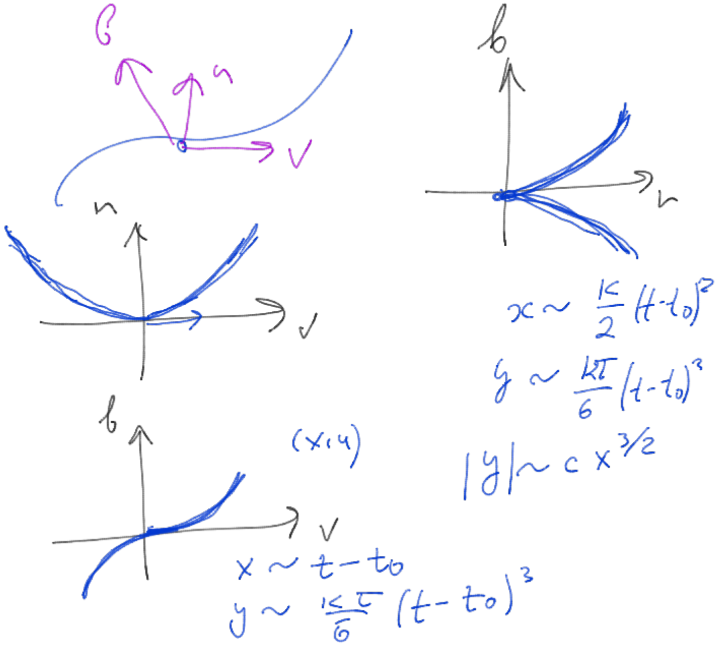
Скорость ухода от соприкасающейся плоскости

Из формул Френе

$$\left\{\begin{aligned} \gamma' &= v \\ \gamma'' &= \kappa n \\ \gamma''' &= (\kappa n)' = -\kappa^2 v + \kappa' n + \underline{\kappa\tau b} \end{aligned}\right\}$$

По формуле Тейлора, расстояние от $\gamma(t)$ до соприкасающейся плоскости в точке t_0 при $t \to t_0$ равно

$$\frac{\kappa\tau}{6}(t-t_0)^3 + \cancel{o(t^3)} \qquad o(|t-t_0|^3)$$



Определение

Плоскость (v, n) — соприкасающаяся плоскость

Плоскость (n, b) — нормальная плоскость

Плоскость (v, b) — спрямляющая плоскость

Название «спрямляющая плоскость» объясняется внешним видом проекции кривой на эту плоскость.

Вычисление кручения

Теорема

Для *не натурально* *параметризованной кривой* γ *в* $\mathbb{R}^3$

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}. \qquad (1)$$

При $\kappa \neq 0$*:*

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2} \qquad (2)$$

В $\mathbb{R}^2$ $\quad k = \dfrac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3}$

площадь

В $\mathbb{R}^n$ $\quad k = \dfrac{|\gamma' \wedge \gamma''|}{|\gamma'|^3}$

Вычисление кручения

Теорема

Для *не натурально* *параметризованной кривой* γ *в* $\mathbb{R}^3$

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

При $\kappa \neq 0$*:*

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

Следствие

Кручение сохраняется при изменении направления обхода.

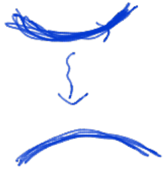
$t \to -t$

$\gamma' \to -\gamma'$

$\gamma'' \to \gamma''$

$\gamma''' \to -\gamma'''$

$\mathbb{R}^2$



Упр. Что происходит с κ и τ при гомотетии?

$\gamma(t) \to \lambda \gamma(t)$.

Доказательство — 1

Формула для кривизны уже была, но все равно проверим обе. Пусть $\overline{\gamma}$ — натуральная параметризация, $\overline{v}, \overline{n}, \overline{b}, \overline{\kappa}, \overline{\tau}$ — базис Френе, кривизна и кручение как функции натурального параметра. Пусть φ — замена параметра: $\gamma(t) = \overline{\gamma}(\varphi(t))$, $v(t) = \overline{v}(\varphi(t))$ и т.д.

Пусть $s(t) = |\gamma'(t)| = \varphi'(t)$. Тогда из производной композиции и формул Френе: V

$$\left\{\begin{aligned} \gamma' &= sv && (1)\\ v' &= s\kappa n && (2)\\ n' &= -s\kappa v + s\tau b && (3) \\ b' &= -s\tau n && (4) \end{aligned}\right.$$

Отсюда

$$\gamma'' = s'v + s^2\kappa n, \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} \gamma''' &= s''v + ss'\kappa n + 2ss'\kappa n + s^2\kappa' n - s^3\kappa^2 v + s^3\kappa\tau b \qquad (6)\\ &= (s'' - s^3\kappa^2)v + (3ss'\kappa + s^2\kappa')n + s^3\kappa\tau b \end{aligned}$$

$\bar\gamma$ — нат. пар.

φ — замена параметра

$\boxed{\gamma = \bar\gamma \circ \varphi.}$

$\bar v$ — скорость нат. пар.

$v(t) = \bar v(\varphi(t))$, ...

$s(t) = \varphi'(t) = |\gamma'(t)|$.

$n(t) = \bar n(\varphi(t))$

$n'(t) = \underset{\displaystyle s}{\underset{\shortparallel}{\varphi'(t)}} \cdot \underset{\displaystyle -\kappa v + \tau b}{\underset{\shortparallel}{\bar n'(\varphi(t))}}$

Из формул

$$\begin{cases} \gamma' = sv \\ \gamma'' = (\dots)v + s^2\kappa n \\ \gamma''' = (\dots)v + (\dots)n + s^3\kappa\tau b \end{cases}$$

следует:

$$|\gamma'| = s \quad (1)$$

$$\gamma' \times \gamma'' = s^3\kappa b \quad (2)$$

$$|\gamma' \times \gamma''| = s^3\kappa \quad (3)$$

$$[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = s^6\kappa^2\tau \quad (4)$$

$\Longrightarrow$ верны формулы из теоремы:

$$\kappa = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}$$

$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

$$K = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}$$

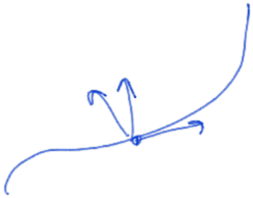
$$\tau = \frac{[\gamma', \gamma'', \gamma''']}{|\gamma' \times \gamma''|^2}$$

$$b = v \times n$$

$$(4) \quad \begin{vmatrix} s & \dots & \dots \\ 0 & s^2 K & \dots \\ 0 & 0 & s^3 K\tau \end{vmatrix}$$

Для записей

Содержание



Условие невырожденности

Определение

Будем называть гладкую кривую $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ невырожденной, если для любого $t \in I$ векторы $\gamma'(t), \gamma''(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t)$ линейно независимы.

Примеры:

- При $n = 2$ невырожденность $\iff$ регулярность.
- При $n = 3$ невырожденность $\iff$ кривизна не обращается в 0.

регулярность +

Условие невырожденности

Определение

Будем называть гладкую кривую $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ невырожденной, если для любого $t \in I$ векторы $\gamma'(t), \gamma''(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t)$ линейно независимы.

Примеры:

- При $n = 2$ невырожденность $\iff$ регулярность.
- При $n = 3$ невырожденность $\iff$ кривизна не обращается в 0.

Задача

Свойство невырожденности не меняется пи заменах параметра.

Дальше рассматриваем только натурально параметризованные кривые

Теорема

Пусть $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ — невырожденная натурально параметризованная кривая. Тогда существует единственный набор гладких функций $v_1, \dots, v_n\colon I \to \mathbb{R}^n$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}\colon I \to \mathbb{R}$ (кривизны) такой, что для всех $t \in I$

- *$v_1(t), \dots, v_n(t)$ — положительно ориентированный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ (базис Френе).*
- *$\kappa_1(t), \dots, \kappa_{n-2}(t) > 0$.*
  Примечание: κ_{n-1} может менять знак.
- *$v_1 = \gamma'$.*
- *Верны формулы Френе:*

$$\begin{cases} v_1' = \kappa_1 v_2 \\ v_i' = -\kappa_{i-1} v_{i-1} + \kappa_i v_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ v_n' = -\kappa_{n-1} v_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1' = K_1 V_2 \\ V_2' = -K_1 V_1 + K_2 V_3 \\ V_3' = -K_2 V_2 + K_3 V_4 \\ \vdots \\ V_n' = -K_{n-1} V_{n-1} \end{cases}$$

V.

V.

V

Матричная запись формул Френе

Пусть $V(t)$ — матрица $n \times n$, у которой в строках записаны координаты векторов $v_1(t), \dots, v_n(t)$,

$K(t)$ — матрица $n \times n$, у которой над диагональю стоят числа $\varkappa_1(t), \dots, \varkappa_{n-1}(t)$, под диагональю — $-\varkappa_1(t), \dots, -\varkappa_{n-1}(t)$

Тогда формулы Френе можно записать в виде

$$V'(t) = K(t)V(t).$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \\ & -k_2 & \ddots & k_{n-1} \\ 0 & & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$V' = K \cdot V$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ n \\ b \end{pmatrix}}$$

Доказательство — 1: конструкция

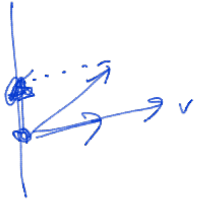
Построим $v_1(t), \ldots, v_{n-1}(t)$ ортогонализацией по Граму-Шмидту из векторов $\gamma'(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t)$, используя условие невырожденности.

Последний вектор $v_n(t)$ определяется однозначно из условия о том, что векторы образуют положительный правильно ориентированный базис.

Определим $\kappa_i(t) = \langle v_i'(t), v_{i+1}(t) \rangle$.

Всё выражается алгебраическими формулами через $\gamma'(t), \ldots, \gamma^{(n-1)}(t) \implies$ это гладкие функции.

По построению $v_1 = \gamma'$.



Доказательство — 2: формулы

Разложим v'_i по базису $v_1, \ldots, v_n$:

$$v'_i = \kappa_{i1} v_1 + \ldots \kappa_{in} v_n$$

Коэффициенты удобно записать в матрицу $K = (\kappa_{ij})$.
Цель: доказать, что все коэффициенты — нули, кроме $\kappa_{i,i+1} = \kappa_i$ (это определение) и $\kappa_{i,i-1} = -\kappa_{i-1}$.

$k_i = \langle v'_i, v_{i+1} \rangle$

Доказательство — 2: формулы

Разложим v_i' по базису $v_1, \ldots, v_n$:

$$v_i' = \kappa_{i1} v_1 + \ldots \kappa_{in} v_n$$

Коэффициенты удобно записать в матрицу $K = (\kappa_{ij})$.
Цель: доказать, что все коэффициенты — нули, кроме $\kappa_{i,i+1} = \kappa_i$ (это определение) и $\kappa_{i,i-1} = -\kappa_{i-1}$.

1 шаг: матрица кососимметрична.
$\langle v_i, v_j \rangle = const \implies \langle v_i', v_j \rangle + \langle v_i, v_j' \rangle = 0 \implies \kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$. V.
В частности, $\kappa_{ii} = 0$ и $\kappa_{i,i-1} = -\kappa_{i-1,i} = -\kappa_{i-1}$

Доказательство — 2: формулы

Разложим v_i' по базису $v_1, \dots, v_n$:

$$v_i' = \kappa_{i1} v_1 + \dots \kappa_{in} v_n$$

Коэффициенты удобно записать в матрицу $K = (\kappa_{ij})$.
Цель: доказать, что все коэффициенты — нули, кроме $\kappa_{i,i+1} = \kappa_i$ (это определение) и $\kappa_{i,i-1} = -\kappa_{i-1}$.

1 шаг: матрица кососимметрична.
$\langle v_i, v_j \rangle = const \implies \langle v_i', v_j \rangle + \{v_i, v_j' \rangle = 0 \implies \kappa_{ij} = -\kappa_{ji}$.
В частности, $\kappa_{ii} = 0$ и $\kappa_{i,i-1} = -\kappa_{i-1,i} = -\kappa_{i-1}$

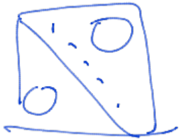
2 шаг: $k_{ij} = 0$ при $j > i + 1$ или $j < i \cancel{+} 1$.
Выразим v_i через производные γ:

$$v_i = c_{i,i}\,\gamma^{(i)} + c_{i,i-1}\,\gamma^{(i-1)} + \dots + c_{i,1}\,\gamma', \qquad (*)$$

где $c_{i,1}, \dots, c_{i,i}$ — гладкие функции от t, причём $c_{i,i} > 0$.
Дифференцируя, получаем, что $v_i' \in \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i+1})$
$\implies \kappa_{ij} = \langle v_i', v_j \rangle = 0$ при $j > i + 1$.

Случай $j < i - 1$ следует по кососимметричности.

$j > i+1$



$v_i' = c_{ii}' \cdot \gamma^{(i)} + c_{ii}\,\gamma^{(i+1)} + \dots$

$\in \mathrm{Lin}(\gamma^{(i+1)}, \dots, \gamma')$.

$= \mathrm{Lin}(v_1, \dots, v_{i+1})$

$\langle v_i', v_{i+2} \rangle, \dots = 0$.

Доказательство — 3: положительность

$\boxed{c_{i,i} > 0}$

Докажем, что $k_i > 0$ при $i \leq n-2$. Из той же формулы

$$v_i = c_{i,i}\,\gamma^{(i)} + c_{i,i-1}\,\gamma^{(i-1)} + \ldots + c_{i,1}\,\gamma', \qquad (1)$$

дифференцированием получаем

$$v_i' = c_{i,i}\,\gamma^{(i+1)} + \text{слагаемые из } \operatorname{Lin}(\gamma', \ldots, \gamma^{(i)}) \qquad (2)$$

Отсюда

$$\kappa_i = \langle v_i', v_{i+1}\rangle = c_{i,i}\langle \gamma^{(i+1)}, v_{i+1}\rangle > 0 \qquad (3)$$

так как $c_{i,i} > 0$ и $\langle \gamma^{(i+1)}, v_{i+1}\rangle > 0$.

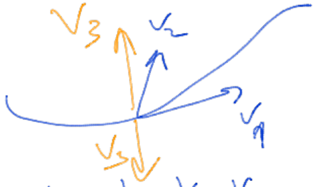
Доказательство — 4: единственность

Единственность доказывается по индукции.
Индукционное предположение: векторы $v_1, \ldots, v_i$ и числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{i-1}$ определены однозначно.
База $i = 1$ тривиальна.

Переход от i к $i+1$:
Вектор v_{i+1} однозначно определяется условиями:

- $v_{i+1} \perp \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_i)$, $|v_i| = 1$.
- $v_i' \in \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{i+1})$.
- $\langle v_i', v_{i+1} \rangle = \varkappa_i > 0$ (для $i < n-1$).
- $v_1, \ldots, v_n$ — положительный базис (для $i = n-1$).

Числа $\varkappa_i$ однозначно определяются из формул Френе.



$V_3 \perp V_1, V_2$

$V_2' = K_2 V_3 - K_1 V_1$

$\langle V_2', V_3 \rangle > 0.$

$V_i' = K_i V_{i+1} - K_{i-1} V_{i-1}$

$\Downarrow$

$K_i = \langle V_i', V_{i+1} \rangle.$

Содержание

Формулировка

Натуральное уравнение кривой — задание кривой её кривизнами как функциями натурального параметра.

Теорема

Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1} \colon I \to \mathbb{R}$ *— гладкие функции, причём* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2} > 0$. *Тогда*

- *Существует невырожденная натурально параметризованная кривая* $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$, *у которой кривизны равны* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$.
- *Такая кривая единственна с точностью до движения, сохраняющего ориентацию.*

Переформулировка

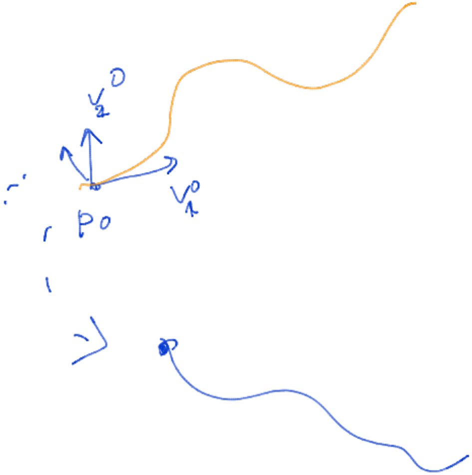
Будем доказывать более точное утверждение: кривая задаётся своими кривизнами и базисом Френе в начальный момент времени. Полная формулировка:

Теорема (переформулировка)

Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1} \colon I \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, причём $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-2} > 0$. Пусть $t_0 \in I$, $p_0 \in \mathbb{R}^n$, $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_n^0$ — положительно ориентированный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Тогда существует единственная невырожденная натурально параметризованная кривая $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$, у которой кривизны равны $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{n-1}$, $\gamma(t_0) = p_0$, и базис Френе в точке t_0 совпадает с $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_n^0$.

Из этой теоремы следует предыдущая таким же рассуждением, как в размерности 2.



Доказательство — 1: единственность

Пусть γ — искомая кривая, $V(t)$ — матрица из векторов базиса Френе в строках. Тогда выполняется матричное уравнение

$$\boxed{V'(t) = K(t)V(t),}$$

где $K(t)$ — матрица, определяемая кривизнами.
Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

По теореме, которая будет в курсе дифференциальных уравнений, у него существует единственное решение с начальными данными $V(t_0) = \dots$.
Решение однозначно определяет кривую

$$\gamma(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} v_1$$

$V(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$

$$V(t_0) = \begin{pmatrix} v_1^0 \\ \vdots \\ v_n^0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство — 2: единственность

Пусть $V(t)$ — решение дифференциального уравнения из доказательства единственности.

По теореме о формулах Френе, достаточно проверить, что строки $V(t)$ образуют ортонормированный базис при всех $t \iff V(t)^T V(t) = E$

При $t = t_0$ равенство $V^T V = E$ верно. Продифференцируем:

$$
\begin{aligned}
(V^T V)' &\overset{(1)}{=} \underbrace{(V^T)'}V + V^T V' \overset{(2)}{=} \underbrace{(V')^T} V + V^T V' \\
&\underset{(3)}{=} (KV)^T V + V^T KV = V^T \underbrace{K^T} V + V^T \underbrace{K}V \\
&\underset{(4)}{} \qquad \underset{(5)}{=} V^T (\underbrace{K^T + K}_{= 0}) V = 0
\end{aligned}
$$

так как K кососимметрична.

Теорема доказана

$V(t) \in O(n)$.

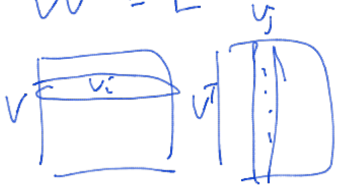
$\boxed{V^T \cdot V = E}$ — верно при $t = t_0$

(3) $V' = KV$

(4) $(KV)^T = V^T K^T$

$V^T V = E$

$V V^T \overset{(!)}{=} E$



Самосовмещающиеся кривые

Упражнение

Кривую γ в $\mathbb{R}^3$ будем называть самосовмещающейся, если любые два интервала γ одинаковой длины совмещаются движением.

Докажите, что любая самосовмещающаяся кривая в $\mathbb{R}^3$ — участок прямой, окружности или винтовой линии.

прямая

окружность

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, at).$

$R, a = \text{const}.$

$R > 0, \quad a \in \mathbb{R}$

Содержание

Нужно
Из анализа.

из откр. области

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$f \in C^\infty$ (гладкие).

$x \in \mathbb{R}^n$ дифференциал

$d_x f \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

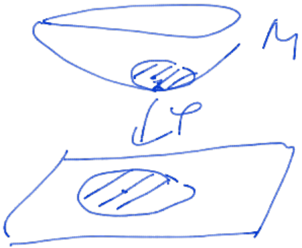
- производная композиции.
- Т. о обратной функции.

Содержание

Топологические многообразия

Определение (напоминание)

Многообразие размерности n — хаусдорфово пространство со счётной базой такое, что у любой точки есть окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$



Многообразия с краем пока не рассматриваем.

Замечание

Если у точки есть окрестность, гомеоморфная открытому $U \subset \mathbb{R}^n$, то есть и окрестность, гомеоморфная $\mathbb{R}^n$
(так как открытый шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$).

Обозначение

Для краткости размерность многообразия часто указывают верхним индексом.
Запись «многообразие M^n» означает то же самое, что «многообразие M размерности n»