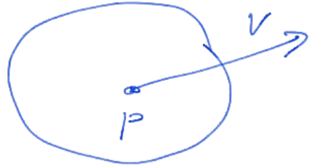
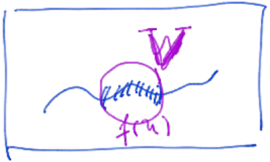
# Содержание

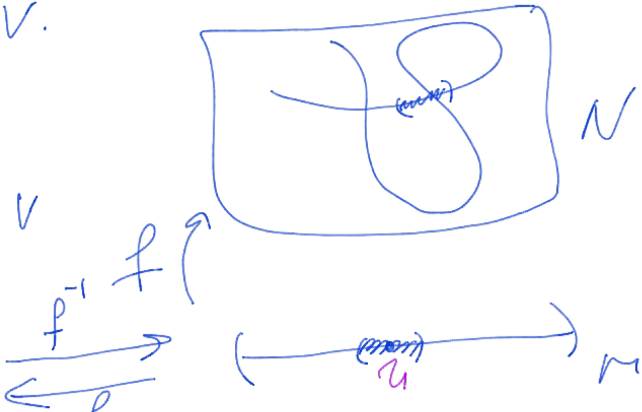
# Что надо вспомнить

Что было про гладкие многообразия.

- Определения: гладкое многообразие, гладкое подмногообразие, гладкое отображение, диффеоморфизм.
- Определения: касательный вектор, касательное пространство, дифференциал отображения.
- Стандартные изоморфизмы и отождествления
  - для области $U \subset \mathbb{R}^n$: $T_pM \cong \{p\} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$;
  - для подмногообразия $M \subset N$: $T_p \subset T_pN$
- Определения: погружение, вложение.
  Любое погружение локально является вложением.
  Подмногообразия — образы вложений.




$f(U) = f(M) \cap V$

# Для информации

**Теорема (Уитни)**

*Любое гладкое многообразие $M$ вкладывается в $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом $N$.*
*Можно даже взять $N = 2 \dim M$.*

Доказательство (более слабого варианта) будет позже.

$\boxed{\dim M^n = n.}$

# Содержание

# Стандартное включение (повтор)

Пусть $N^n$ — гладкое многообразие, $M^k \subset N$ — подмногообразие, $p \in M$.

Рассмотрим включение $in\colon M \to N$.

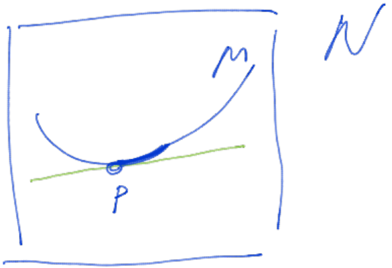
Так как $in$ — вложение, $d_p in$ — мономорфизм, а его образ — $k$-мерное линейное подпространство в $T_pN$.

## Соглашение

Касательное пространство $T_pM$ всегда отождествляют с его образом $d_p in(T_pM) \subset T_pN$.
Таким образом, $T_pM \subset T_pN$.

## Замечание

Геометрический смысл отождествления:
Вектор из $T_pM$, представленный кривой $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, отождествляется с вектором из $T_pN$, представленным той же кривой $\alpha$.




$$d_p in : T_pM \hookrightarrow T_pN$$

# Свойство, забытое в прошлый раз

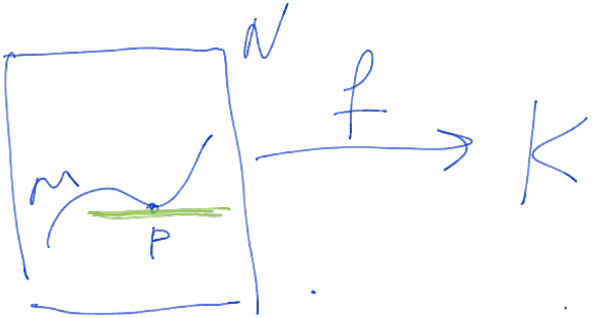
## Свойство

*Пусть* $N, K$ *— гладкие многообразия,* $M \subset N$ *— гладкое подмногообразие,* $f\colon N \to K$ *— гладкое отображение. Тогда*

$$\boxed{d_p(f|_M) = (d_pf)|_{T_pM}}$$

## Доказательство.

$f|_M = f \circ in$, где $in\colon M \to N$ — включение. Из производной композиции получается ответ. □




$$T_pM \subset T_pN$$

$$f|_M = f \circ in \qquad in_{TM \to TN}$$

$$d_p(f|_M) = d_pf \circ \boxed{d_p in}$$

$$= (d_pf)|_{T_pM}.$$

# Касательное пространство образа вложения

## Теорема

*Пусть $f: M \to N$ — вложение, $p \in M$. Тогда касательное пространство к подмногообразию $f(M)$ в точке $f(p)$ — образ дифференциала $d_pf$, т.е.*

$$T_pf(M) = d_pf(T_pM)$$

$f(p)$

## Доказательство.

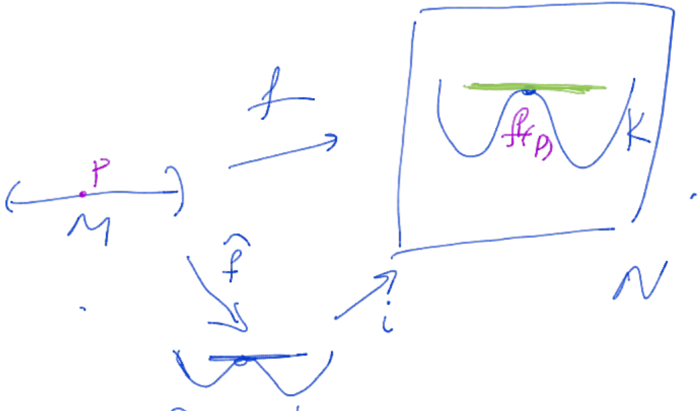
Временно забудем про отождествления.

Пусть $K = f(M)$, $\widehat{f}: M \to K$ — то же самое $f$ с заменой формальной области значений. Тогда $f = i \circ \widehat{f}$, где $i: K \to M$ — включение.

$\implies d_pf = d_{f(p)}i \circ d_p\widehat{f}$

$\implies d_pf(T_pM) = d_{f(p)}i(d_p\widehat{f}(T_pM))$. $(*)$.

Так как $\widehat{f}$ — диффеоморфизм, $d_p\widehat{f}$ — биекция между $T_pM$ и $T_{f(p)}K \implies d_pf(T_pM) = d_{f(p)}i(T_{f(p)}K)$.
Осталось вспомнить про отождествления. □



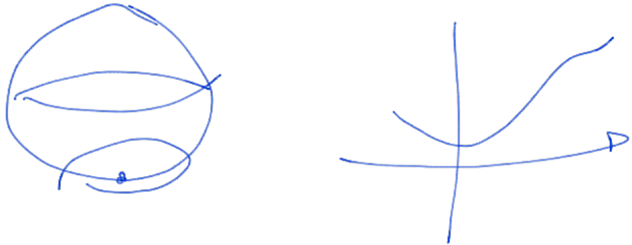

$f = i \circ \hat{f}$

$d_pf = d_{f(p)}i \circ d_p\hat{f}$

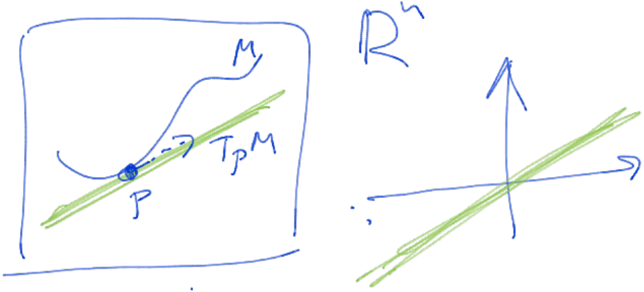
$d_p\hat{f}$ – биекция $T_pM \leftrightarrow T_{f(p)}K$.

# Содержание





# Есть разные формальные понимания касательного пространства




Для подмногообразия $M^k \subset \mathbb{R}^n$ слова «касательное пространство $T_pM$» могут означать формально разные объекты:

1. Касательное пространство многообразия — топология
   Строится по определению для абстрактных многообразий. С учётом стандартного включения, это линейное подпространство в $T_p\mathbb{R}^n$.
2. Линейное касательное пространство: — анализ
   Линейное подпространство $\mathbb{R}^n$ — множество векторов скоростей кривых в $M$ с началом в $p$.
3. Аффинное касательное пространство: — геометрия.
   Аффиное подпространство того же направления, проходящее через $p$.

① $T_pM < T_p\mathbb{R}^n$
$\cup$
$(p, v)$

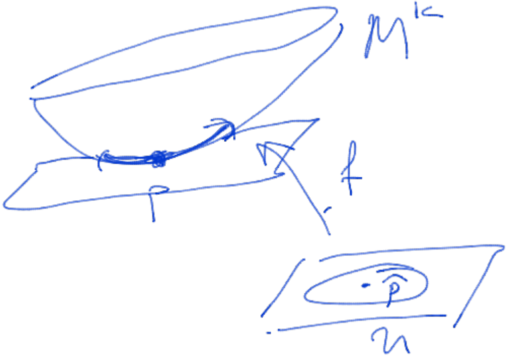
$T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$.

② $T_pM < \mathbb{R}^n$ — лин. подпр-во.

Они превращаются друг в друга стандартными соответствиями. Обычно из контекста ясно, какое понимание имеется в виду.

# Касательное пространство регулярной поверхности

Для подмногообразий в $\mathbb{R}^n$ из доказанного следуют такие факты:




## Теорема

*Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, Пусть $f\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — его локальная параметризация, $\widehat{p} \in U$, $p = f(\widehat{p})$. Тогда $T_pM$, рассматриваемое как линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, равно каждому из следующих множеств:*

1 - *Множество начальных векторов скорости $\alpha'(0)$ всевозможных гладких кривых $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $\alpha(0) = p$ и образ $\alpha$ содержится в $M$.*
2 - *$d_pf(\mathbb{R}^k)$ — образ дифференциала $f$ (в обычном смысле из анализа).*

про линейное кас. пр-во (2).

Доказательство — тривиально из предыдущего.

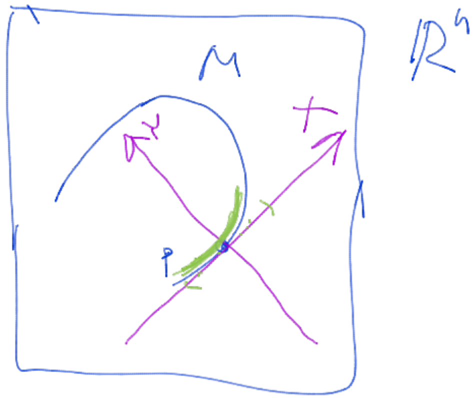
# Представление в виде графика

**Теорема**

*Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие, $p \in M$. Разложим $\mathbb{R}^n$ в прямую сумму $X \oplus Y$, где $X = T_pM$ (в ипостаси линейного подпространства $\mathbb{R}^n$) и $Y = X^\perp$.*

*Тогда достаточно малая окрестность $p$ в $M$ совпадает с графиком гладкой функции $f : U \subset X \to Y$, где $U$ открыто в $X$.*

*При этом, если $x_0$ — проекция $p$ на $X$, то $d_{x_0} f = 0$.*



# Доказательство

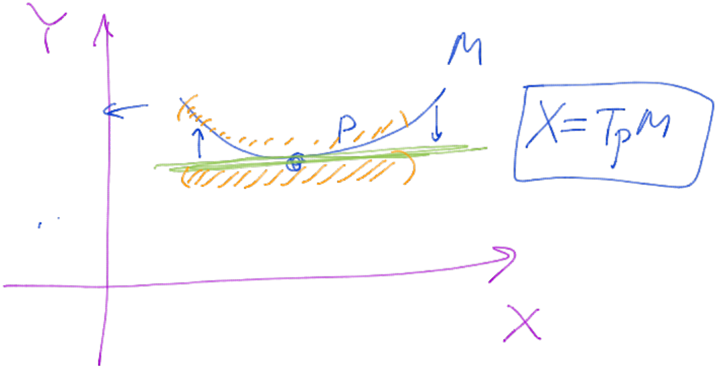
Пусть $P_X : \mathbb{R}^n \to X$ и $P_Y : \mathbb{R}^n \to Y$ — проекции.

1. Представление в виде графика:

Рассмотрим $\varphi = (P_X)|_M$ ($\varphi \colon M \to X$).

Так как $X = T_pM$, имеем $d_p\varphi = (d_pP_X)|_{T_pM} = id_X$.
$\implies$ применима теорема об обратной функции
$\implies$ существует окрестность $V \subset M$ точки $p$ такая, что $\varphi|_V$ — диффеоморфизм между $V$ и $U := \varphi(V)$.

Отсюда $V$ — график функции $f = P_Y \circ \varphi^{-1} \colon U \to Y$.




$\varphi = (P_X)|_M : M \to X$

$P_X : \mathbb{R}^n \to X$ лин.

$P_X = d_p P_X : \mathbb{R}^n \to X$

$f: U \to Y$

$\varphi = (P_X)_M$.

часть $M = \{(x, f(x))\}$.

$d\varphi = (dP_X)|_{T_pM} = (dP_X)|_X = (P_X)|_X = id_X$.

# Доказательство

Пусть $P_X : \mathbb{R}^N \to X$ и $P_Y : \mathbb{R}^n \to Y$ — проекции.

1. Представление в виде графика:

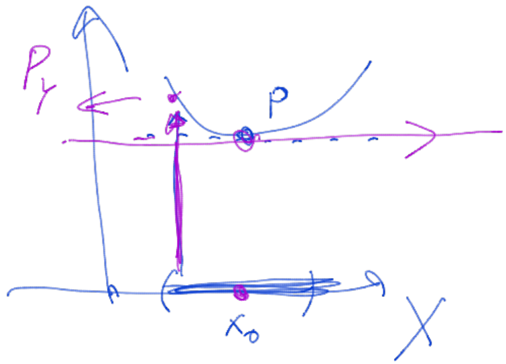
Рассмотрим $\varphi = (P_X)|_M$ $(\varphi\colon M \to X)$.

Так как $X = T_pM$, имеем $d_p\varphi = (d_pP_X)|_{T_pM} = id_X$.
$\implies$ применима теорема об обратной функции
$\implies$ существует окрестность $V \subset M$ точки $p$ такая, что $\varphi|_V$ — диффеоморфизм между $V$ и $U := \varphi(V)$.

Отсюда $V$ — график функции $f = P_Y \circ \varphi^{-1}\colon U \to Y$.

2. Дифференцирование в $x_0$:

$d_{x_0}f = P_Y \circ d_{x_0}(\varphi^{-1}) = P_Y \circ id_X = 0$.




$p = (x_0, y_0)$

## Доказательство

Пусть $P_X \colon \mathbb{R}^N \to X$ и $P_Y \colon \mathbb{R}^n \to Y$ — проекции.

1. Представление в виде графика:

Рассмотрим $\varphi = (P_X)|_M$ ($\varphi\colon M \to X$).

Так как $X = T_pM$, имеем $d_p\varphi = (d_pP_X)|_{T_pM} = id_X$.
$\implies$ применима теорема об обратной функции
$\implies$ существует окрестность $V \subset M$ точки $p$ такая, что $\varphi|_V$ — диффеоморфизм между $V$ и $U := \varphi(V)$.

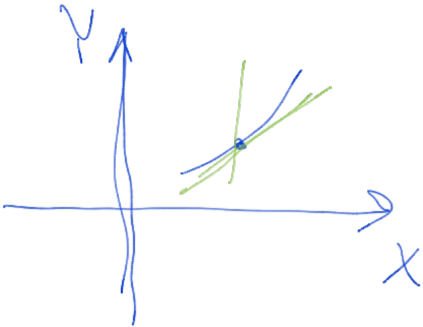
Отсюда $V$ — график функции $f = P_Y \circ \varphi^{-1} \colon U \to Y$.

2. Дифференцирование в $x_0$:

$d_{x_0}f = P_Y \circ d_{x_0}(\varphi^{-1}) = P_Y \circ id_X = 0$.

**Замечание**

Первая часть работает для любого разложения $\mathbb{R}^n = X \oplus Y$, где $\dim X = k$, $\dim Y = n - k$, $Y \cap T_pM = \{0\}$.



# Касательное пространство к графику

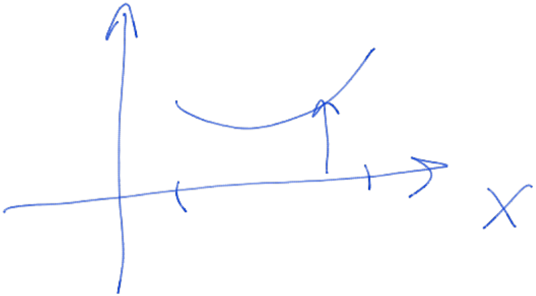
## Замечание

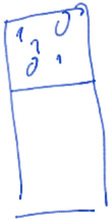
График функции $f\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ легко представить в виде образа регулярной поверхности $F\colon U \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n.$$

(Она регулярна, так как её композиция с проекцией на $\mathbb{R}^k$ регулярна).

стандартная параметризация графика.



$P_x \circ F = id.$

# Касательное пространство к графику

## Замечание

График функции $f\colon U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ легко представить в виде образа регулярной поверхности $F\colon U \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x) = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n.$$

(Она регулярна, так как её композиция с проекцией на $\mathbb{R}^k$ регулярна).

## Следствие

*В тех же обозначениях верно следующее:*
*(Линейное) касательное пространство к графику $f$ в точке $x_0 \in U$ — график линейного отображения $d_{x_0} f$.*

√.

## Доказательство.

Образ $d_{x_0}F$ — множество векторов вида $(v, d_{x_0} f(v))$, где $v \in \mathbb{R}^k$ — график $d_{x_0} f$. □

√.

# Содержание

# Регулярные точки и регулярные значения

Пусть $M^n$ и $K^k$ — гладкие многообразия, $n \geq k$,
$f : M \to K$ — гладкое отображение.

## Определение

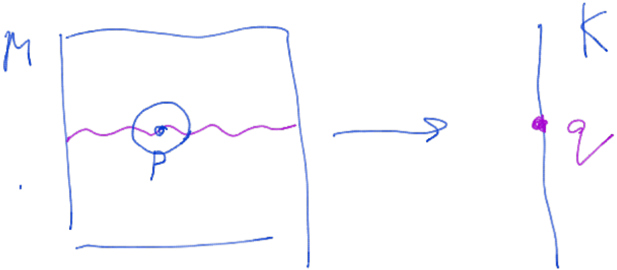
Точка $p \in M$ — регулярная точка $f$, если дифференциал $d_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$ сюръективен (эпиморфизм).
Эквивалентно, $\operatorname{rank} d_p f = k$

Точка $q \in K$ — регулярное значение $f$, если все точки из $f^{-1}(q)$ — регулярные точки.

$f$ — субмерсия, если все точки из $M$ — регулярные точки для $f$.

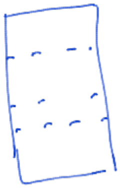
## Замечание

Множество регулярных точек открыто
(так как регулярность точки эквивалентна тому, что хотя бы один из миноров $k \times k$ матрицы дифференциала не равен 0).
Следовательно, в окрестности регулярной точки отображение является субмерсией.




$f(x) = q$

$f^{-1}(q)$



$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 + 1$

0 – не регулярн.

1 – не рег. значение.

# Прообраз регулярного значения

## Теорема

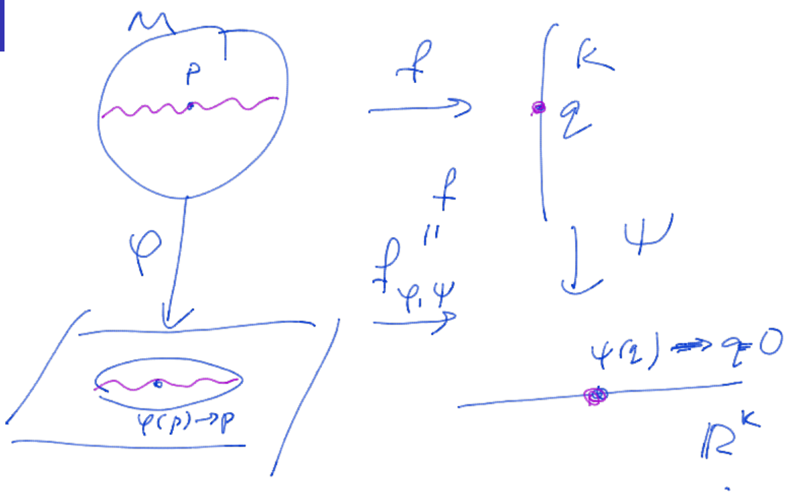
*Пусть* $M^n$ *и* $K^k$ *— гладкие многообразия,* $n \geq k$,
$f : M \to K$ *— гладкое отображение,* $q \in K$ *— регулярное значение* $f$.

*Тогда* $f^{-1}(q)$ *— гладкое подмногообразие в* $M$.
*Его размерность равна* $n - k$.

# Доказательство теоремы

Переходом в карты теорема сводится к случаю, когда $M$ и $K$ — открытые области в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$.

Считаем, что $M = U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $K = \mathbb{R}^k$, $q = 0$. Докажем, что $f^{-1}(0)$ является подмногообразием в малой окрестности регулярной точки $p \in f^{-1}(0)$.



# Доказательство теоремы

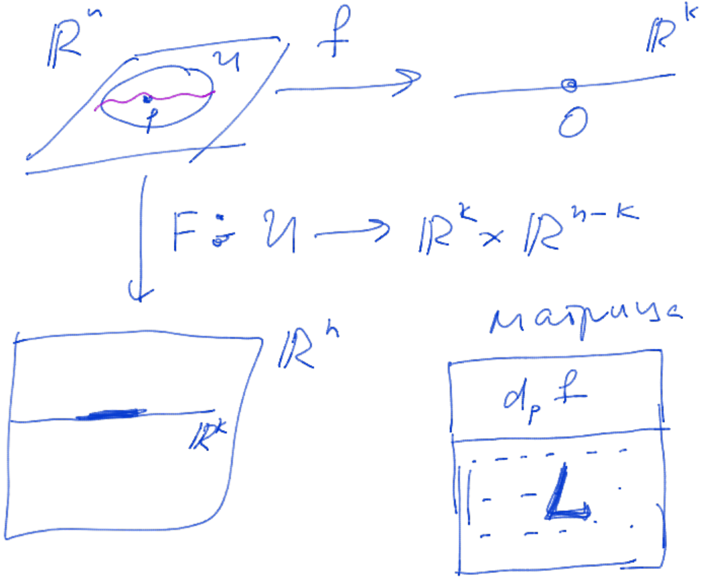
Переходом в карты теорема сводится к случаю, когда $M$ и $K$ — открытые области в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$.

Считаем, что $M = U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $K = \mathbb{R}^k$, $q = 0$. Докажем, что $f^{-1}(0)$ является подмногообразием в малой окрестности регулярной точки $p \in f^{-1}(0)$.

Построим $F\colon U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\boxed{F(x) = (f(x), L(x)),}$$

где $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ — линейное отображение такое, что матрица $[d_p f, L]$ невырождена.



# Доказательство теоремы

Переходом в карты теорема сводится к случаю, когда $M$ и $K$ — открытые области в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$.

Считаем, что $M = U \subset \mathbb{R}^n$ открыто, $K = \mathbb{R}^k$, $q = 0$. Докажем, что $f^{-1}(0)$ является подмногообразием в малой окрестности регулярной точки $p \in f^{-1}(0)$.

Построим $F\colon U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$F(x) = (f(x), L(x)),$$

где $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ — линейное отображение такое, что матрица $[d_p f, L]$ невырождена.

Применим к $F$ теорему об обратной функции в точке $p$. $\implies$ Есть окрестности $V \ni p$ и $W \ni 0$ такие, что $F|_V$ — диффеоморфизм между ними.

По построению, $f^{-1}(0) \cap V = F^{-1}(\mathbb{R}^k \cap W)$ $\implies$ $F$ — выпрямляющая карта для $f^{-1}(0)$. $\square$

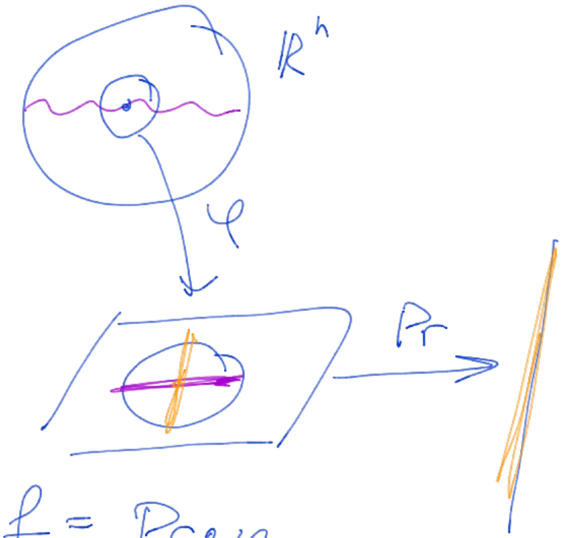
# Локально любое подмногообразие — регулярный прообраз

## Замечание

Локально верно и обратное: для любого подмногообразия $M^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ и любой точки $p \in M$ существует окрестность $U \subset N$ точки $p$ и субмерсия $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ такая, что $M \cap U = f^{-1}(0)$.

## Доказательство.

Возьмем композицию подходящей карты и проекции на $\mathbb{R}^k$. $\square$




$f = Pr \circ \varphi$

# Локально любое подмногообразие — регулярный прообраз

## Замечание

Локально верно и обратное: для любого подмногообразия $M^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ и любой точки $p \in M$ существует окрестность $U \subset N$ точки $p$ и субмерсия $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ такая, что $M \cap U = f^{-1}(0)$.

## Доказательство.

Возьмем композицию подходящей карты и проекции на $\mathbb{R}^k$. $\square$

## Задача

*Аналогичное глобальное утверждение неверно. Контрпример: лист Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$.*

$M$ — лист. Мёб

$\cap$ $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^n$

$\exists$? окр. $U \supset M$.

$f\colon U \to \mathbb{R}^1$

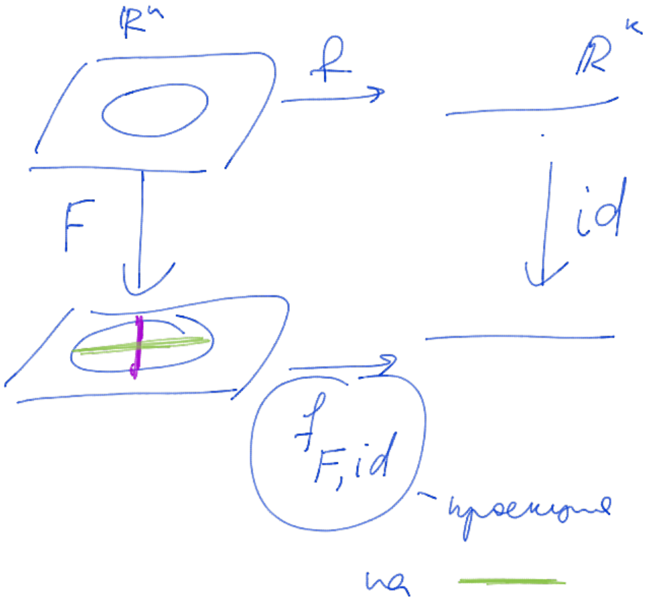
т.ч. $\begin{cases} 0 \text{ — рег. значение} \\ M = f^{-1}(0) \end{cases}$

# Замечание о специальном виде отображения

## Замечание

На самом деле мы доказали больше: существуют карты $\varphi$ и $\psi$ в $M$ и $K$, в которых координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ — координатная проекция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

А именно, $\varphi = F$ и $\psi = id$ (после перехода в первоначальные карты).



# Замечание о специальном виде отображения

## Замечание

На самом деле мы доказали больше: существуют карты $\varphi$ и $\psi$ в $M$ и $K$, в которых координатное представление $f_{\varphi,\psi}$ — координатная проекция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

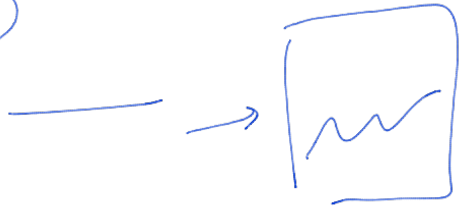
А именно, $\varphi = F$ и $\psi = id$ (после перехода в первоначальные карты).

Аналогичное свойство было для погружений.
Их можно сформулировать единообразно:

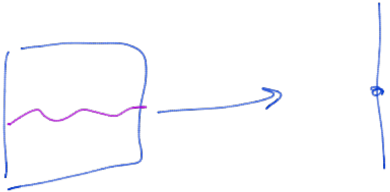
## Свойство

*Если дифференциал $f$ в точке $p$ имеет максимальный ранг, то в некоторых картах координатное представление $f$ в окрестности $p$ — линейное отображение.*

1



2



1 линейное вложение
$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

2 линейная проекция.
$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

# Пример

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$\boxed{f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2}$$

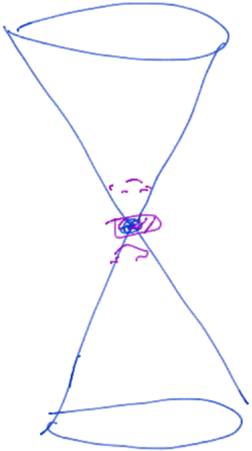
Её дифференциал имеет матрицу $[2x, 2y, -2z]$
Его ранг меньше 1 только при $(x,y,z) = (0,0,0)$.

$\Longrightarrow$ При $c \neq 0$ множество решений уравнения $x^2 + y^2 - z^2 = c$ (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$.

$\{x^2+y^2-z^2 = c\}$ $c \in \{0, \pm 1\}$

$\Vert$

$f^{-1}(c)$.



$\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

# Пример

Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Её дифференциал имеет матрицу $[2x, 2y, -2z]$
Его ранг меньше 1 только при $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$\Longrightarrow$ При $c \neq 0$ множество решений уравнения $x^2 + y^2 - z^2 = c$ (гиперболоид) — гладкое 2-мерное многообразие (поверхность) в $\mathbb{R}^3$.

Легко видеть, что при $c = 0$ решение (конус) не является даже топологическим многообразием в окрестности точки $(0, 0, 0)$. ✓

Если выколоть $(0, 0, 0)$, то остаётся гладкая поверхность. Это следует из теоремы, применённой к сужению $f$ на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. ✓

# Информация: теорема Сарда

**Теорема (Сард)**

*Пусть $M$, $K$ — гладкие многообразия, $f\colon M \to K$ — гладкое отображение.*
*Тогда регулярными значениями $f$ являются все точки $K$, кроме множества меры 0.*
*Под «множеством меры 0» в многообразии понимается множество, образ которого в любой карте имеет меру 0.*

Доказательство будет позже.

# Касательное пространство регулярного прообраза

**Теорема**

*Пусть $M$ и $K$ — гладкие многообразия, $f\colon M \to K$ — гладкое отображение, $q \in K$ — регулярное значение, $p \in f^{-1}(q)$. Тогда*

$$T_p\big(f^{-1}(q)\big) = \ker d_p f.$$

# Касательное пространство регулярного прообраза

## Теорема

*Пусть $M$ и $K$ — гладкие многообразия, $f : M \to K$ — гладкое отображение, $q \in K$ — регулярное значение, $p \in f^{-1}(q)$. Тогда*

$\dim = n - k$

$$T_p f^{-1}(q) = \ker d_p f.$$

## Доказательство.

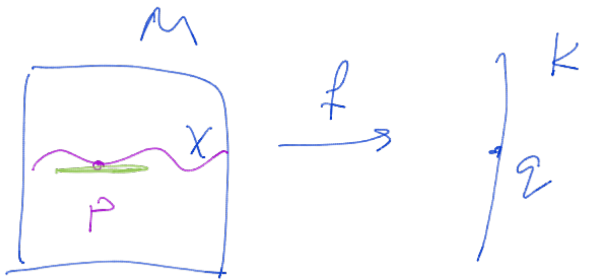
Обозначим $X = f^{-1}(q)$.

$f|_X = const$

$$\implies (d_p f)|_{T_p X} = d_p(f|_X) = 0$$

$$\implies \boxed{T_p X \subset \ker d_p f.}$$

Обратное включение следует из равенства размерностей. □




① $T_p X \subset \ker(d_p f)$

# Итог: 4 определения подмногообразия $\mathbb{R}^n$

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является гладким $k$-мерным многообразием $\iff$ локально (в достаточно малой окрестности каждой точки) выполняется любое из следующих условий

1. $M$ «выпрямляется» некоторым диффеоморфизмом окрестности (как в определении подмногообразия) √
2. $M$ локально является образом регулярной $k$-мерной поверхности √
3. $M$ локально является прообразом регулярного значения отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n-k}$ √
4. $M$ локально является графиком гладкого отображения из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^{n-k}$ при некотором выборе декартовых координат √

# Содержание

1. Подмногообразия (продолжение)
   - Касательное пространство подмногообразия
   - Подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, графики
   - Регулярные прообразы
   - Трансверсальные пересечения
2. Первая квадратичная форма поверхности
   - Определение, свойства, примеры
   - Изометрии

# Определение

## Определение

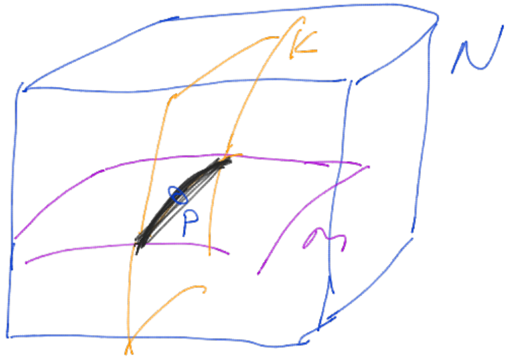
Пусть $N^n$ — гладкое многообразие, $M^m$ и $K^k$ — его подмногообразия.
$M$ и $K$ **пересекаются трансверсально** (**трансверсальны**), если для любой точки $p \in M \cap K$ верно, что

$$\boxed{T_pM + T_pK = T_pN}$$

Обозначение: $M \pitchfork K$.

## Замечание

Определение содержательно только при $m + k \geq n$.
При $m + k < n$ пересечение трансверсально $\iff$ пусто.




$$\boxed{M \pitchfork K}$$

$$\Updownarrow$$

K и M трансверсальны.

# Трансверсальное пересечение — подмногообразие

## Теорема

*Пусть* $N^n$ *— гладкое многообразие,* $M^m$ *и* $K^k$ *— его подмногообразия,* $m + k \geq n$, $M \pitchfork K$.
*Тогда* $M \cap K$ *— гладкое подмногообразие размерности* $m + k - n$.

Докажем, что $M \cap K$ — гладкое подмногообразие в окрестности точки $p \in M \cap K$.

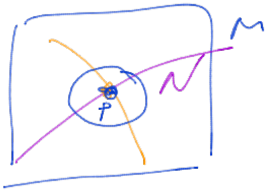
В достаточно малой окрестности $U \ni p$, $M$ и $K$ являются прообразами регулярных значений функций $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ и $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$.
Считаем, что $M \cap U = f^{-1}(0)$ и $K \cap U = g^{-1}(0)$.

Построим $H\colon U \to \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\boxed{H(x) = (f(x), g(x)).}$$

Заметим, что $M \cap K \cap U = H^{-1}(0)$.

$U \subset M.$




$f: U \to \mathbb{R}^{n-m}$

$g: U \to \mathbb{R}^{n-k}$

$M \cap U = f^{-1}(0)$

$K \cap U = g^{-1}(0).$

$(M \cap K) \cap U = H^{-1}(0).$

$H(x) = (f(x), g(x)).$

$H: U \to \mathbb{R}^{2n-m-k}.$

$\dim H^{-1}(0) = n - (2n-m-k)$
$= m + k - n.$

Докажем, что $M \cap K$ — гладкое подмногообразие в окрестности точки $p \in M \cap K$.

В достаточно малой окрестности $U \ni p$, $M$ и $K$ являются прообразами регулярных значений функций $f\colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$ и $g\colon U \to \mathbb{R}^{n-k}$.
Считаем, что $M \cap U = f^{-1}(0)$ и $K \cap U = g^{-1}(0)$.

Построим $H\colon U \to \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$H(x) = (f(x), g(x)).$$

Заметим, что $M \cap K \cap U = H^{-1}(0)$.

Проверим, что $p$ — регулярная точка $H$.

$$\dim \ker d_pH = \dim(\ker d_pf \cap \ker d_pg) = m + k - n$$

из формулы для размерности пересечения линейных подпространств

$\Longrightarrow$ $\operatorname{rank} d_pH = n - (m + k - n) = 2n - k - n$

$\Longrightarrow$ $p$ — регулярная точка $H$.

$d_pH$ — сюръективна?

$d_pH = (d_pf, d_pg)$

$v \in \ker d_pH$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} d_pf(v) = 0 \\ d_pg(v) = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{v \in \underbrace{\ker d_pf}_{= T_pM} \cap \underbrace{\ker d_pg}_{= T_pK}}.$$

(*):

(**):

$$\dim(X \cap Y) + \dim(X+Y) = \dim X + \dim Y$$

$\dim(X+Y) = n$, $\dim X = m$, $\dim Y = k$

# Доказательство теоремы — 2

Так как множество регулярных точек открыто, в некоторой окрестности $V \ni p$ ($p \in V \subset U \subset N$) все точки регулярные

$\implies$ $M \cap K \cap V$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$

$\implies$ (так как $p$ произвольная) $M \cap K$ — гладкое подмногообразие размерности $m + k - n$

# Касательное пространство пересечения

## Теорема

*Пусть* $M, K \subset N$ *— гладкие подмногообразия,* $M \pitchfork K$, $p \in M \cap K$. *Тогда*

$$T_p(M \cap K) = T_pM \cap T_pK$$

## Доказательство.

Включение $T_p(M \cap K) \subset T_pM \cap T_pK$ следует из включений $M \cap K \subset M$ и $M \cap K \subset K$.
Обратное включение — из равенства размерностей. □

$\dim = m + k - n$

$$\begin{cases} M \cap K \subset M \\ M \cap K \subset K \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} T_p(M \cap K) \subset T_pM \\ T_p(M \cap K) \subset T_pK. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

# Задачи

## Задача

*Если $M \pitchfork K$, то в окрестности $p \in M \cap K$ существует карта, в которой $M$ и $K$ — линейные подпространства.*

### Задача

*Если $M \pitchfork K$, то в окрестности $p \in M \cap K$ существует карта, в которой $M$ и $K$ — линейные подпространства.*

### Определение

Пусть $N$ — гладкое многообразие, $M_1, \ldots, M_k$ — его подмногообразия. Будем говорить, что они трансверсальны, если для любой точки $p$ из их пересечения верно, что

$$\operatorname{codim}\left(\bigcap T_p M_i\right) = \sum \operatorname{codim} T_p M_i$$

где $\operatorname{codim} = n - \dim$.

### Задача

*Если $M_1, \ldots, M_k$ трансверсальны как определено выше, то их пересечение — тоже подмногообразие, причем его коразмерность — сумма коразмерностей $M_i$.*