Рекламная пауза

Н.С. Калинин планирует кружок по геометрии по вторникам вечером, начиная с 17 ноября.

Информация — в команде Teams с кодом присоединения x71fjmw
(этот код также можно найти в таблице Classes в общем канале факультета).

Содержание

Напоминание: второй дифференциал — билинейная форма

Пусть $U \subset \mathbb{R}^m$ — открытая область, $f\colon U \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $x \in U$.

Тогда определен второй дифференциал $d_x^2 f$ — симметричная билинейная форма на $\mathbb{R}^m$.

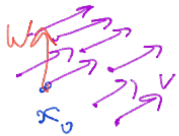
Значение $d_x^2(v, w)$ на векторах $v, w \in \mathbb{R}^m$ определяется так: дифференцируем f вдоль v во всех точках, полученную функцию от точки дифференцируем вдоль w в точке x.

Матрица этой билинейной формы состоит из вторых частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Аналогично, для гладкого $f\colon U \to \mathbb{R}^N$ второй дифференциал $d_x^2 f$ — билинейная функция из $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^N$.

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^m$

$d_{x_0} f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$



$d^2_{x_0} f(v,w) = (f'_v)'_w (x_0).$

билинейная,
симметричная.

Содержание

Нормаль

Соглашение

Далее рассматриваем только поверхности коразмерности 1, т.е. размерности m в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Поверхности и подмногообразия коразмерности 1 называются гиперповерхностями.

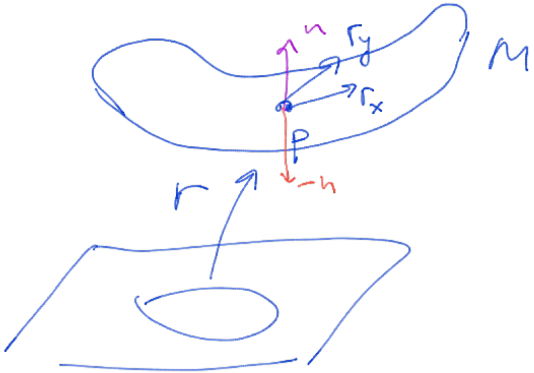
Определение

Нормаль гиперповерхности M в точке $p \in M$ — единичный вектор n, ортогональный T_pM.

Замечание

Нормаль определена однозначно с точностью до $\pm$. Считаем, что в каждой точке поверхности выбрана и зафиксирована одна из двух нормалей, причем выбор зависит от точки непрерывно (и гладко).

В классическом случае по умолчанию $n = \dfrac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_y|}$.



$|n| = 1.$

Вторая форма

Пусть $r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$ — регулярная поверхность, $x \in U$, n — нормаль в точке $r(x)$.

Определение

Вторая фундаментальная форма r в точке x (относительно нормали n) — симметричная билинейная форма $\mathbf{II}$ на $\mathbb{R}^m$, определяемая равенством

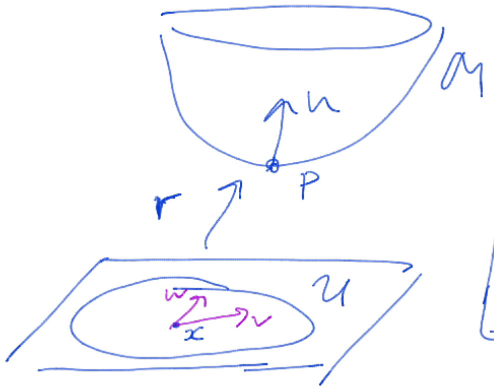
$$\mathbf{II}(v,w) = \langle d_x^2 r(v,w), n\rangle, \qquad v,w \in \mathbb{R}^m.$$

Так же называются соответствующая квадратичная форма и матрица.

Краткая запись: $\mathbf{II} = \langle d^2 r, n\rangle$.

Обозначение матрицы: (h_{ij}) или $\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ (при $m=2$).

от Гаусса.



$r_{x_i} := \frac{\partial r}{\partial x_i}$

$\cancel{r_{x_i x}}$

$r_{x_i x_j} = \\ = \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}$

$p = r(x)$.

$d_x^2 r : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$

$\mathrm{II} = (h_{ij}), \quad h_{ij} = \langle r_{x_i x_j}, n \rangle$

Пример вычисления

Рассмотрим цилиндр $r(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$.
Первые производные и нормаль:

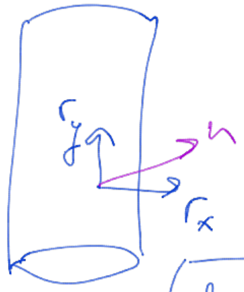
$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

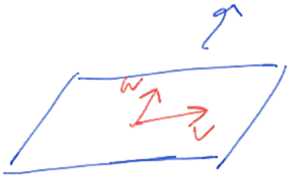
$$r_x = (-\sin x, \cos x, 0) \qquad (1)$$

$$r_y = (0, 0, 1) \qquad (2)$$

$$n = \frac{r_x \times r_y}{|r_x \times r_y|} = (\cos x, \sin x, 0) \qquad (3)$$

$n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$





Вторые производные:

$$r_{xx} = (-\cos x, -\sin x, 0) \qquad (4)$$

$$r_{xy} = r_{yx} = 0 \qquad (5)$$

$$r_{yy} = 0 \qquad (6)$$

$$dr = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dn = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ \cos x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$-\langle dr(e_1), dn(e_1) \rangle = -1$$

Вторая форма:

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} \langle r_{xx}, n \rangle & \langle r_{xy}, n \rangle \\ \langle r_{yx}, n \rangle & \langle r_{yy}, n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ответ.

Вторая форма и производная нормали

Теорема (другое определение II)

Для второй формы r в точке x верно равенство

$$\mathbf{II}(v, w) = -\langle d_x r(v), d_x n(w)\rangle,$$

для любых $v, w \in \mathbb{R}^m$, где нормаль n рассматривается как функция на U.

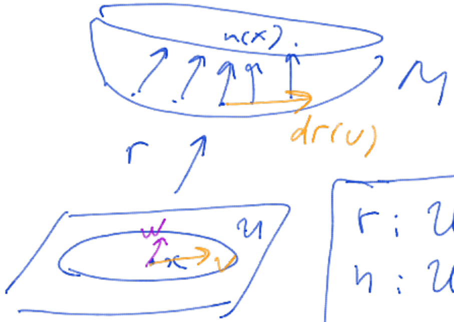
Краткая запись: $\mathbf{II} = -\langle dr, dn\rangle$.

Замечание: правая часть симметрична по v и w, так как она равна левой части.

формулы Френе в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} v' = k n \\ n' = -k v \end{cases} \quad (v' = \gamma'')$$

V.



$r: U \to \mathbb{R}^{m+1}$

$n: U \to \mathbb{R}^{m+1}$.

$n: U \to S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$.

$d_x n: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$

$d_x n(w)$ – производная n вдоль w.

Вторая форма и производная нормали

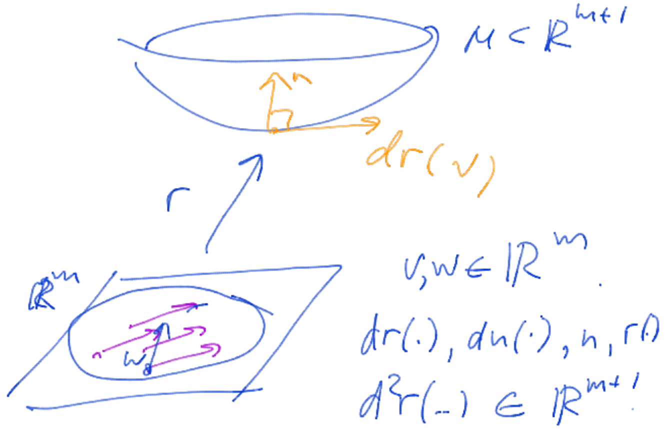
Теорема (другое определение $\mathbf{II}$)

Для второй формы r в точке x верно равенство

$$\mathbf{II}(v,w) = -\langle d_x r(v), d_x n(w)\rangle,$$

для любых $v, w \in \mathbb{R}^m$, где нормаль n рассматривается как функция на U.

Краткая запись: $\mathbf{II} = -\langle dr, dn\rangle$.



Замечание: правая часть симметрична по v и w, так как она равна левой части.

Доказательство.

Дифференцируем равенство $\langle dr(v), n\rangle = 0$ вдоль w. Получаем

$$f(x) = \langle d_x r(v), n(x)\rangle = 0$$

$$\underbrace{\langle d^2 r(v,w), n\rangle}_{\mathbb{II}(v,w)} + \langle dr(v), dn(w)\rangle = 0.$$

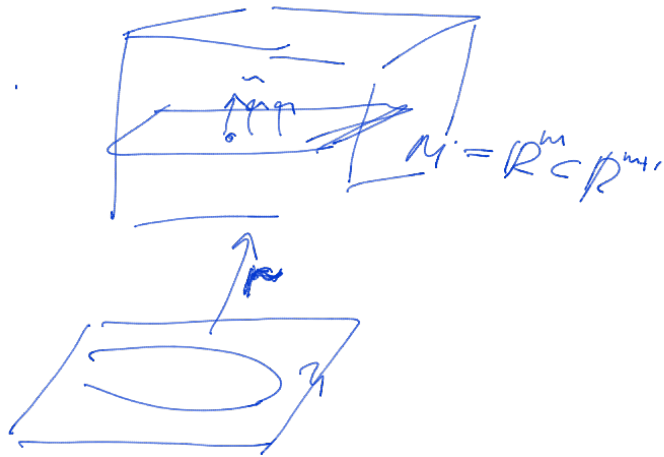
$$dn = d_x n \qquad d^2 r = d_x^2 r.$$

$$dr = d_x r.$$

Первое слагаемое по определению равно $\mathbf{II}(v,w)$. $\square$

Примеры: плоскость и сфера

- Пусть r параметризует подмножество аффинной гиперплоскости.
  Тогда $\underline{n = const} \implies \underbrace{dn = 0} \implies \mathbf{II} = 0.$



Примеры: плоскость и сфера

- Пусть r параметризует подмножество аффинной гиперплоскости.
  Тогда $n = const \implies dn = 0 \implies \mathbf{II} = 0.$
- Пусть r параметризует подмножество сферы радиуса R с центром в 0. Направим нормаль внутрь. Тогда

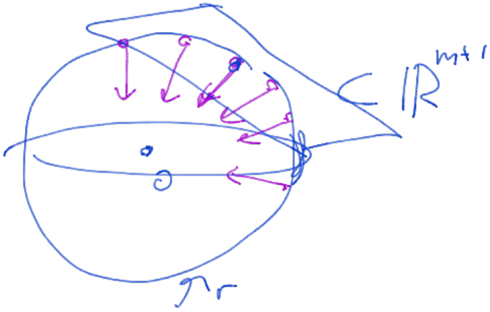
$$n = -\frac{1}{R} r \qquad (1)$$

потому что сфера с центром 0.

$$dn = -\frac{1}{R} dr \qquad (2)$$

$$\langle dr, dn \rangle = -\frac{1}{R} \langle dr, dr \rangle \qquad (3)$$

$$\boxed{\mathbf{II} = \frac{1}{R} \mathbf{I}}$$



$I = \langle dr, dr \rangle$

$II = \langle dr, dn \rangle$

Замечание

Для поверхностей, параметризованных связной областью, верно и обратное: если $\mathbf{II} = \frac{1}{R}\mathbf{I}$, где $R > 0$ — константа, то поверхность — часть сферы радиуса R.

Это станет ясно потом.

Для записей

Содержание

Напоминание из алгебры

Пусть X — евклидово пространство, $B\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — билинейная форма. Тогда B можно записать в виде

$$B(x, y) = \langle x, Ay \rangle,$$

где $A\colon X \to X$ — линейный оператор.

Матрицы A и B в любом ортонормированном базисе совпадают.

В неортонормированном базисе матрицы A и B связаны соотношением $B = GA$, где G — матрица Грама данного базиса.

Форма B симметрична $\iff$ оператор A симметричен (самосопряжен), т.е. $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$ для любых $x, y \in X$.

(1) $(x)^T B (y) = B(x,y).$

(2) $(x)^T A (y)$

(3) $\boxed{(x)\, G\, (y) = \langle x, y \rangle}$

(4)

$\langle (x), B(y) \rangle = (x)\, \boxed{G}\, \boxed{A}\, (y)$

Гауссово отображение

Пусть $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — гладкое подмногообразие.

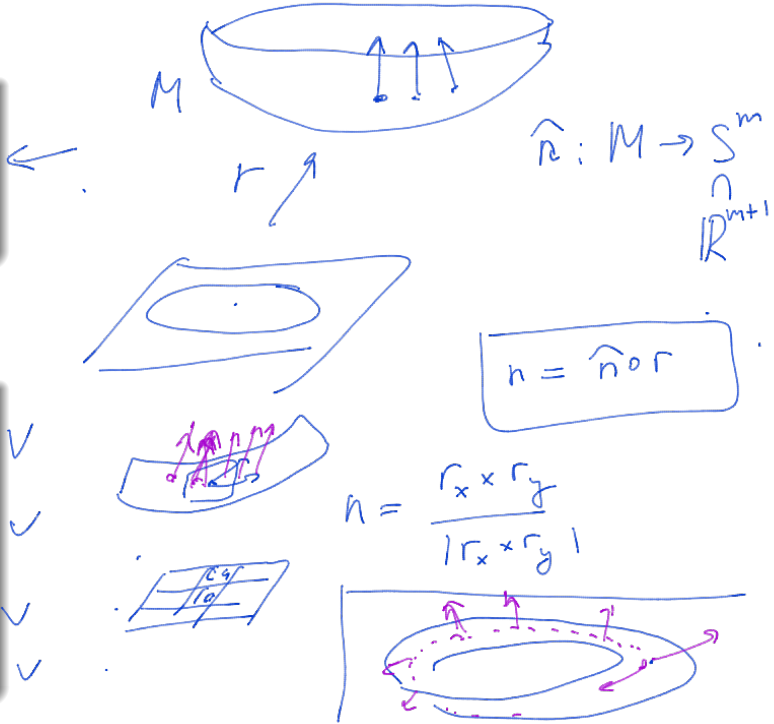
Определение

Гауссово отображение M — это непрерывное (и, следовательно, гладкое) отображение $\widehat{n} \colon M \to \mathbb{S}^m$ такое, что для каждой $p \in M$ вектор $\widehat{n}(p)$ — нормаль к M в этой точке.

Т.е. это та же нормаль, но рассматриваемая как функция на поверхности, а не на области координат U.

Замечание

- Если M покрывается одной картой, то гауссово отображение существует.
- В общем случае оно существует тогда и только тогда, когда M ориентируемо (см. ниже).
- $n = \widehat{n} \circ r$, где n — нормаль как функция от координат.
- Обычно n и $\widehat{n}$ обозначаются одинаково.



Ориентация многообразия (анонс)

Определение

Ориентация гладкого многообразия M — это следующая структура:

- Для каждой точки $p \in M$ на касательном пространстве T_pM введена ориентация (т.е. отображение из множества базисов T_pM в $\{\pm 1\}$, согласованное со знаками определителей матриц перехода).
- Эта ориентация непрерывно зависит от p.

Многообразие ориентируемо, если на нём существует ориентация, иначе — неориентируемо.

Подробности про это будут будут позже.

$\{\text{базисы}\} \subset TM \times TM \times \ldots \times TM.$

Оператор Вейнгартена

Пусть $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — гиперповерхность, $\widehat{n}$ — её гауссово отображение, $p \in M$.

Рассмотрим дифференциал $d_p\widehat{n}\colon T_pM \to T_{n(p)}\mathbb{S}^m$.

T_pM и $T_{n(p)}\mathbb{S}^m$ — гиперплоскости, ортогональные $n(p)$ $\implies$ они параллельны (а если рассматривать их как линейные подпространства в $\mathbb{R}^{m+1}$, то совпадают).

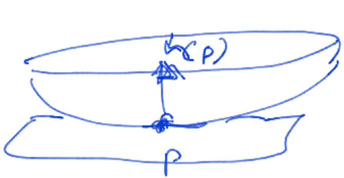
Определение

Пусть $P\colon T_{n(p)}\mathbb{S}^m \to T_pM$ — «параллельный перенос» между этими гиперплоскостями (при правильных отождествлениях это тождественное отображение).

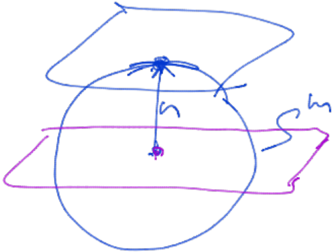
Оператор Вейнгартена (оператор формы, shape operator) M в точке p — линейное отображение $S\colon T_pM \to T_pM$,

$$\boxed{S = -P \circ d_p\widehat{n}.}$$

Отождествляя касательные пространства с линейными подпространствами в $\mathbb{R}^{m+1}$, имеем $S = -d_p\widehat{n}$.



$\widehat{n}: M \to S^m$



$d_p\widehat{n}: T_pM \to T_{\widehat{n}(p)}S^m$

с точностью до пар. пер.

$d_p\widehat{n}: T_pM \circlearrowleft$

или W $\quad S = -d_p\widehat{n}: T_pM \circlearrowleft$

$T_pM = (n(p))^\perp = T_{n(p)}S^m$

$\boxed{\text{Отождествление} \quad T_p\mathbb{R}^{m+1} \cong \mathbb{R}^{m+1}}$

Вторая форма на касательной плоскости

Определение

В тех же обозначениях, определим билинейную форму $\widehat{\mathbf{II}}$ на T_pM равенством

$$\widehat{\mathbf{II}}(v,w) = \langle v, S(w)\rangle = -\langle v, d\widehat{n}(w)\rangle$$

Теорема

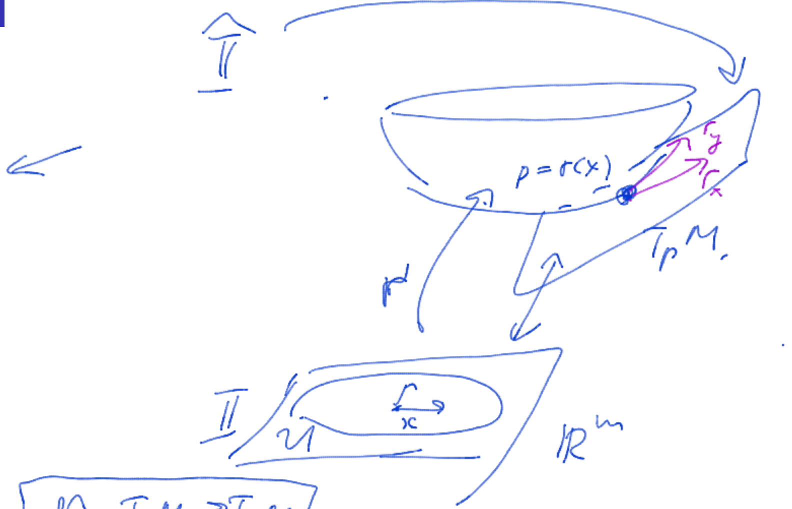
Пусть M параметризована регулярной поверхностью $r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$, $x \in U$, $p = r(x)$.

Тогда билинейные формы $\mathbf{II}$ на $\mathbb{R}^m$ (определяемая r) и $\widehat{\mathbf{II}}$ на T_pM соответствуют друг другу при изоморфизме $d_x r\colon \mathbb{R}^m \to T_pM$.

То есть

$$\boxed{\mathbf{II}(v,w) = \widehat{\mathbf{II}}(d_x r(v), d_x r(w))}$$

для любых $v, w \in \mathbb{R}^m$.



$\boxed{d\widehat{n} : T_pM \to T_pM}$

$\mathbb{R}^m \xleftrightarrow[d_x r]{} T_pM$

Klingenberg. Погорелов

Доказательство

Продифференцировав равенство $n = \widehat{n} \circ r$ в точке x, получаем

$$d_x n = d_p \widehat{n} \circ d_x r = -S \circ d_x r \qquad (1)$$

Подставим $w \in \mathbb{R}^n$:

$$d_x n(w) = -S(d_x r(w)) \qquad (2)$$

Умножим скалярно на $d_x r(v)$ и на -1:

$$-\langle d_x r(v), d_x n(w) \rangle = \langle d_x r(v), S(d_x r(w)) \rangle = \widehat{\mathrm{II}}(dr(v), dr(w))$$

2-е опр-е II.

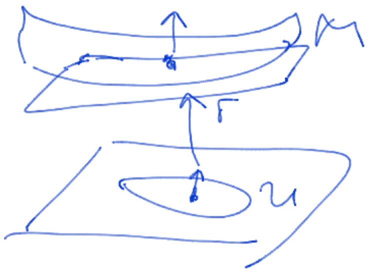
Левая часть равна $\mathbf{II}(v, w)$ по второму определению $\mathbf{II}$.

Правая часть равна $\widehat{\mathbf{II}}(d_x r(v), d_x r(w))$ по определению.

Итак,

$$\boxed{\mathbf{II}(v, w) = \widehat{\mathbf{II}}(d_x r(v), d_x r(w))}$$

□



Следствия

Следствия из теоремы:

1. $\widehat{\mathbf{II}}$ симметрична
2. S — симметричный оператор на T_pM
3. Матрица $\mathbf{II}$ — матрица $\widehat{\mathbf{II}}$ в базисе (r_{x_i})
4. Матрицы $\mathbf{I}$, $\mathbf{II}$ и S связаны соотношением

$$B = G \cdot A \qquad [\mathbf{II}] = [\mathbf{I}] \cdot [S]$$

где $[S]$ — матрица S в базисе (r_{x_i})

5. При замене координат $\mathbf{II}$ меняется по тому же правилу, что $\mathbf{I}$.

$A = S$

$G = I$

$B = II$

Предупреждение

Далее $\widehat{n}$ и $\widehat{\mathbf{II}}$ часто будут обозначаться без крышки.

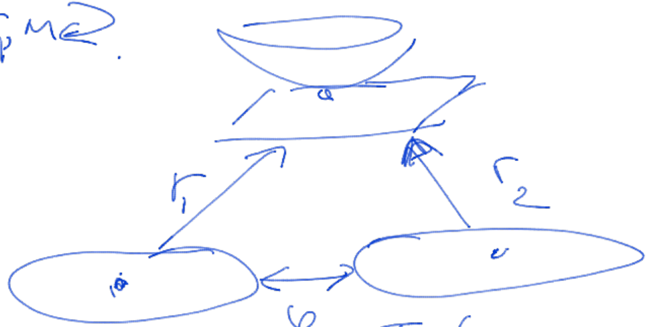
$$\hat{I} = \langle , \rangle|_{T_pM}.$$

$$\widehat{II}(v,w) = \langle v, S(w)\rangle = -\langle v, d\hat{n}(w)\rangle.$$

$I = G$ — матрица Грама.

$S: T_pM \circlearrowleft$.

V.



$$II_2 = \varphi (d\varphi)^T II_1 (d\varphi)$$

Приложение: характеризация плоскости

Рассмотрим простую поверхность $r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема

Пусть U связна, ~~$R > 0$~~. Тогда два условия равносильны:

1. $\mathrm{II} = 0$ *во всех точках.*
2. $M = r(U)$ *содержится в некоторой гиперплоскости.*

Доказательство.

$2 \implies 1$ было

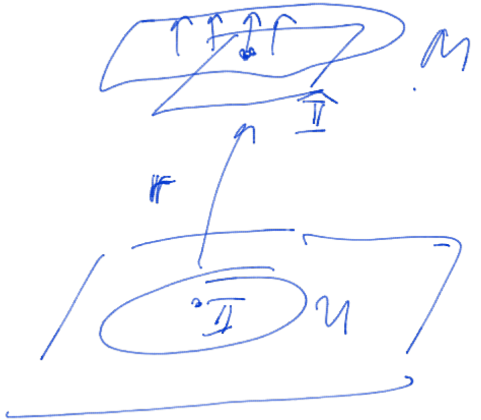
$1 \implies 2$: $\mathrm{II} = 0 \implies \widehat{\mathrm{II}} = 0$ (1)

$\implies S = 0$ всюду (2)

$\implies \widehat{n} = const$ (так как $S = -d\widehat{n}$)

$\implies$ Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, n\rangle$ имеет нулевую производную ($df = \langle \cdot, n\rangle|_{TM} = 0$) $\implies$ она константа.

$\implies$ M лежит в гиперплоскости, ортогональной n $\square$



$f(x) = \langle x, n\rangle$, $f\colon M \to \mathbb{R}$.

$d f(v) = \langle v, n\rangle = 0$

$v \in TM$

$n \perp TM$

Приложение: характеризация сферы

Рассмотрим простую поверхность $r\colon U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+1}$.

Теорема

Пусть U связна, $R > 0$. Тогда два условия равносильны:

1. $\mathbf{II} = \pm\frac{1}{R}\mathbf{I}$ *во всех точках.*
2. $M = r(U)$ *содержится в некоторой сфере радиуса R.*

Доказательство.

2 $\implies$ 1 было ($\pm$ зависит от направления нормали).

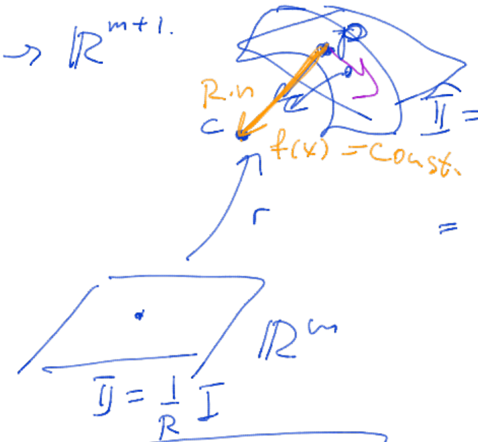
1 $\implies$ 2: $\underbrace{\mathbf{II} = \frac{1}{R}\mathbf{I}}$ $\implies$ $\underbrace{\widehat{\mathbf{II}} = \frac{1}{R}\langle , \rangle}$ (1).

$\implies S = \frac{1}{R} id_{T_pM}$ для всех $p \in M$ (2)

$\implies d\widehat{n}(v) = -\frac{1}{R}v$ (в $\mathbb{R}^{m+1}$) для любого $v \in TM$ (3)

(4). $\implies$ Функция $f\colon M \to \mathbb{R}^{m+1}$, $f(x) = x + \frac{\cancel{1}}{R}n(x)$ имеет всюду нулевой дифференциал $\implies$ она константа. Это центр сферы. ∎

$f\colon M \to \mathbb{R}^{m+1}.$



$\overline{II} = \frac{1}{R}\hat{I} =$

$= \langle , \rangle|_{T_pM}.$

$$\boxed{S(v) = \frac{1}{R}\cdot v.} \quad \forall v \in T_pM$$

$$\boxed{f(p) = p + R\cdot\hat{n}(p)} \quad p \in M$$

$$d_pf(v) = v + R\cdot d_p\hat{n}(v) = v - v = 0.$$

Для записей

$$\begin{cases} v' = k u \\ u' = -k v \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{R} = \text{const}$$

$$c(t) = \underline{\gamma(t)} + \underline{R \cdot n(t)}$$

$$c' = \gamma' + R n' = v - R k v = 0.$$

$$c(t) = \text{const}.$$

$$f : M \to \mathbb{R}^{m+1}$$

$$f(p) = p + R \cdot \hat{n}(p)$$

Для кривой II – матрица 1×1

$$= (k_\gamma \cdot |\gamma'|^2).$$

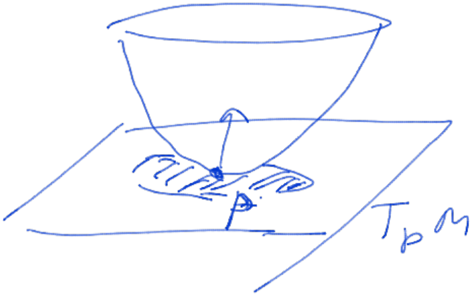
Содержание

Пусть $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — гиперповерхность, $p \in M$.

Поместим начало отсчёта в точку p и выберем декартовы координаты так, что T_pM — первая координатная гиперплоскость и $n(p) = (0, \ldots, 0, 1)$.

Тогда M окрестности $p = 0$ совпадает с графиком функции $f\colon U \subset T_pM = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, причем $\boxed{d_0 f = 0.}$

Бегло



Теорема

В этих условиях в точке 0

$$\widehat{\mathbf{II}} = d_0^2 f$$

V.

p - начало отсчёта

$T_pM = (e_1, \ldots, e_m)$

$n(p) = e_{m+1}$.

$f\colon T_pM \to \mathbb{R}$.

d^2 в нуле.

$$\boxed{d_0^2 f : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}}$$

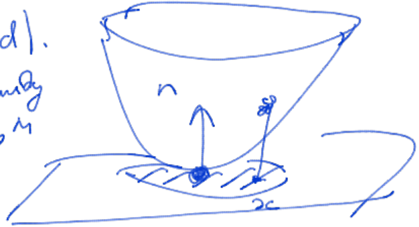
Доказательство

Рассмотрим стандартную параметризацию графика:

$$\underline{r(x) = (x, f(x))}, \qquad x \in U \subset \mathbb{R}^m$$

$d_0 f = 0 \implies d_0 r$ — включение $\mathbb{R}^m = T_p M$ в $\mathbb{R}^{m+1} \implies$ $\widehat{\mathbf{II}} = \mathbf{II}$.

$\Big\}$ $(d_0 r = id)$. соотв. между $\mathbb{R}^m$ и T_pM $= id$.



Подставляем определение $\mathbf{II} = \langle d^2 r, n \rangle$ в точке $x = 0$:

$$\mathbf{II} = \langle \underbrace{(0, \ldots, 0, d_0^2 f)}_{d^2r}, \underbrace{(0, \ldots, 0, 1)}_{n} \rangle = d_0^2 f$$

$\square$

$$x \in \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$$
$$\| $$
$$T_pM.$$

$$\mathrm{II} = \langle d^2 r, n \rangle$$

$$r(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots x_n, f(\ldots))$$

Соприкасающийся параболоид

Определение

В тех же предположениях и обозначениях, соприкасающийся параболоид M в точке p — график квадратичной формы

$$\frac{1}{2}\widehat{\mathrm{II}}\colon\ T_pM \to \mathbb{R}$$

$f(h) = 0 + 0 + \frac{1}{2} d_0^2 f(h,h) + o(|h|^2)$

$f(0) \quad d_0 f(h).$

Соприкасающийся параболоид

Определение

В тех же предположениях и обозначениях, соприкасающийся параболоид M в точке p — график квадратичной формы

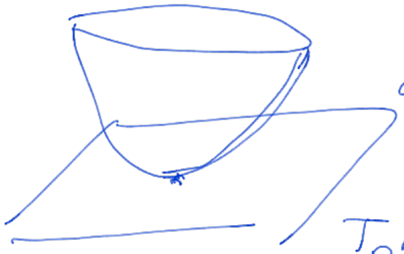
$$\tfrac{1}{2}\widehat{\mathrm{II}}\colon\ T_pM \to \mathbb{R}$$

Теорема

Соприкасающийся параболоид имеет касание 2-го порядка с M в точке p.

Доказательство.

Из формулы Тейлора для f. □



ax^2+by^2

$T_pM=(e_1,\dots,e_{n-1})$

$ax^2-by^2.$

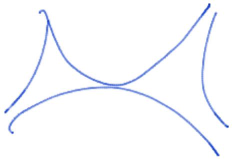
ax^2

Типы точек ($m = 2$)

Пусть $m = 2$, П — соприкасающийся параболоид поверхности M в точке p. В зависимости от его вида точка p принадлежит одному из типов:

1. p — эллиптическая точка, если $\mathbf{II}$ знакоопределена (т.е. положительно или отрицательно определена) $\iff$ П — эллиптический параболоид

2. p — гиперболическая точка (седловая точка), если $\mathbf{II}$ — знакопеременная форма $\iff$ П — гиперболический параболоид



3. p — параболическая точка, если $\mathbf{II}$ вырождена, но не равна 0 $\iff$ П — параболический цилиндр

4. p — точка уплощения, если $\mathbf{II} = 0$ $\iff$ П — плоскость