

1 Скобка Ли векторных полей (продолжение)

- Скобка Ли и потоки

2 Язык векторных расслоений

- Определение векторного расслоения
- Подрасслоения
- Тривиальные и нетривиальные расслоения (информация)

- Определение скобки Ли:

$$[X, Y] = XY - YX$$

где векторные поля рассматриваются как операторы дифференцирования на пространстве функций $\mathfrak{F}(M)$.

- Координатная формула:

$$[X, Y] = Y'_X - X'_Y$$

где Y'_X и X'_Y — координатные производные.

Поток, порождаемый векторным полем

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение

Поток, порождаемый V — это семейство $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ частично определенных отображений $\Phi^t: M \rightarrow M$, заданных следующими условиями: для любой $x \in M$, кривая $t \mapsto \Phi^t(x)$ — максимальная траектория V с начальными данными $\Phi^0(x) = x$.

Полное обозначение: Φ_V^t .

Поток, порождаемый векторным полем

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение

Поток, порождаемый V — это семейство $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ частично определенных отображений $\Phi^t: M \rightarrow M$, заданных следующим условием: для любой $x \in M$, кривая $t \mapsto \Phi^t(x)$ — максимальная траектория V с начальными данными $\Phi^0(x) = x$.

Полное обозначение: Φ_V^t .

Свойства:

- 1 $\Phi^t(x)$ определено и гладко на открытом множестве пар (t, x) в $\mathbb{R} \times M$.

Поток, порождаемый векторным полем

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение

Поток, порождаемый V — это семейство $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ частично определенных отображений $\Phi^t: M \rightarrow M$, заданных следующими условиями: для любой $x \in M$, кривая $t \mapsto \Phi^t(x)$ — максимальная траектория V с начальными данными $\Phi^0(x) = x$.

Полное обозначение: Φ_V^t .

Свойства:

- 1 $\Phi^t(x)$ определено и гладко на открытом множестве пар (t, x) в $\mathbb{R} \times M$.
- 2 Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ там, где правая часть определена.

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение

Поток, порождаемый V — это семейство $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ частично определенных отображений $\Phi^t: M \rightarrow M$, заданных следующими условиями: для любой $x \in M$, кривая $t \mapsto \Phi^t(x)$ — максимальная траектория V с начальными данными $\Phi^0(x) = x$.

Полное обозначение: Φ_V^t .

Свойства:

- 1 $\Phi^t(x)$ определено и гладко на открытом множестве пар (t, x) в $\mathbb{R} \times M$.
- 2 Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ там, где правая часть определена.
- 3 Φ^t — диффеоморфизм между своей областью определения и множеством значений

Поток, порождаемый векторным полем

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V \in \mathfrak{X}(M)$.

Определение

Поток, порождаемый V — это семейство $\{\Phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ частично определенных отображений $\Phi^t: M \rightarrow M$, заданных следующими условиями: для любой $x \in M$, кривая $t \mapsto \Phi^t(x)$ — максимальная траектория V с начальными данными $\Phi^0(x) = x$.

Полное обозначение: Φ_V^t .

Свойства:

- 1 $\Phi^t(x)$ определено и гладко на открытом множестве пар (t, x) в $\mathbb{R} \times M$.
- 2 Для любых $t, s \in \mathbb{R}$, $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ там, где правая часть определена.
- 3 Φ^t — диффеоморфизм между своей областью определения и множеством значений
- 4 Если M компактно, то $\Phi^t(x)$ определено всюду на $\mathbb{R} \times M$.

Обозначение: Пусть $f: M \rightarrow N$ — диффеоморфизм,
 $V \in \mathfrak{X}(M)$. Будем обозначать через $f_* V$ векторное поле
на N , в которое f переводит V .

То есть, $(f_* V)_{f(p)} = d_p f(V_p)$ для всех $p \in M$.

Обозначение: Пусть $f: M \rightarrow N$ — диффеоморфизм, $V \in \mathfrak{X}(M)$. Будем обозначать через f_*V векторное поле на N , в которое f переводит V .
То есть, $(f_*V)_{f(p)} = d_p f(V_p)$ для всех $p \in M$.

Теорема

Для любых $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ и $p \in M$,

$$[V, W] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} ((\Phi_V^{-t})_* W),$$

где дифференцирование в правой части — поточечное.

Повтор формулировки: $[V, W] = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} ((\Phi_V^{-t})_* W)$

Зафиксируем $p \in M$ и будем доказывать равенство в p .

Случай $V_p \neq 0$: По теореме о выпрямлении, существует такая карта в окрестности p , в которой $V = \partial_1$.

В координатах этой карты $[V, W] = W'_V = \partial_1 W$,
так как координаты V — константа.

$((\Phi_V^{-t})_* W)_p = W_{p+te_1}$
(при отождествлении касательных пространств к $\mathbb{R}^n$ в
разных точках с помощью параллельных переносов).

$$\implies \frac{d}{dt}\big|_{t=0} ((\Phi_V^{-t})_* W) = \partial_1 W. \quad \square$$

Случай $V_p = 0$: сводится к случаю $V_p \neq 0$ добавлением еще одной координаты («времени»).

Рассмотрим $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ и введём на нём векторные поля $\tilde{V} = (V, 1)$ и $\tilde{W} = (W, 0)$. Для них утверждение уже доказано, так как $\tilde{V}$ не обращается в 0.

Случай $V_p = 0$: сводится к случаю $V_p \neq 0$ добавлением еще одной координаты («времени»).

Рассмотрим $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ и введём на нём векторные поля $\tilde{V} = (V, 1)$ и $\tilde{W} = (W, 0)$. Для них утверждение уже доказано, так как $\tilde{V}$ не обращается в 0.

Имеем

$$[\tilde{V}, \tilde{W}] = ([V, W], 0)$$

Случай $V_p = 0$: сводится к случаю $V_p \neq 0$ добавлением еще одной координаты («времени»).

Рассмотрим $\tilde{M} = M \times \mathbb{R}$ и введём на нём векторные поля $\tilde{V} = (V, 1)$ и $\tilde{W} = (W, 0)$. Для них утверждение уже доказано, так как $\tilde{V}$ не обращается в 0.

Имеем

$$[\tilde{V}, \tilde{W}] = ([V, W], 0)$$

и

$$\Phi_{\tilde{V}}^{-t}(x, s) = (\Phi_V^{-t}(x), s - t)$$

$$(\Phi_{\tilde{V}}^{-t})_* \tilde{W} = ((\Phi_V^{-t})_* W, 0)$$

Применяя доказанное для $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$, получаем ту же формулу для V и W . □

Коммутирующие потоки

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Следствие

$[V, W] = 0 \iff$ потоки $\{\Phi_V^t\}$ и $\{\Phi_W^s\}$ коммутируют, то есть

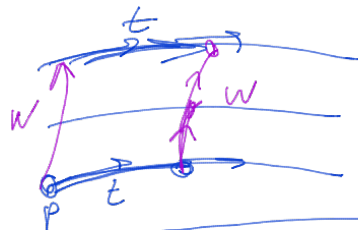
$$\Phi_V^t(\Phi_W^s(x)) = \Phi_W^s(\Phi_V^t(x))$$

для всех $x \in M$ и всех $t, s \in \mathbb{R}$, достаточно близких к 0.

Замечание

Точнее, равенство верно при условии, что левая и правая часть определены при всех значениях $t' \in [0, t]$ и $s' \in [0, s]$ на месте t и s .

$$[V, W] = 0 \iff \Phi_V^t \circ \Phi_W^s = \Phi_W^s \circ \Phi_V^t$$



$\forall p \in M \quad \exists \text{ окр. } \mathcal{U} \ni p, \varepsilon > 0:$

$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \forall |t|, |s| < \varepsilon$
равенство

Пусть M^n — гладкое многообразие, $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Следствие

$[V, W] = 0 \iff$ потоки $\{\Phi_V^t\}$ и $\{\Phi_W^t\}$ коммутируют, то есть

$$\Phi_V^t(\Phi_W^s(x)) = \Phi_W^s(\Phi_V^t(x))$$

для всех $x \in M$ и всех $t, s \in \mathbb{R}$, достаточно близких к 0.

Замечание

Точнее, равенство верно при условии, что левая и правая часть определены при всех значениях $t' \in [0, t]$ и $s' \in [0, s]$ на месте t и s .

Доказательство.

Потоки коммутируют $\iff \Phi_V^t$ переводит траектории W друг в друга $\iff \Phi_V^t$ переводит W в себя $\iff (\Phi_V^{-t})_* W$ не зависит от $t \iff$ по формуле из теоремы $[V, W] = 0$. □

$$k \leq n$$

Следствие

Пусть $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}(M)$ линейно независимы в каждой точке и $[V_i, V_j] = 0$ для всех i, j .

Тогда в окрестности каждой точки $p \in M$ существует карта, в которой $V_1, \dots, V_k$ — координатные поля.

Следствие

Пусть $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}(M)$ линейно независимы в каждой точке и $[V_i, V_j] = 0$ для всех i, j .

Тогда в окрестности каждой точки $p \in M$ существует карта, в которой $V_1, \dots, V_k$ — координатные поля.

Доказательство.

Построим гладкое вложение $f: \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M$ так, что $f(0) = p$ и образ $d_0 f$ дополняет $\text{Lin}(V_1, \dots, V_k)$ в $T_p M$.

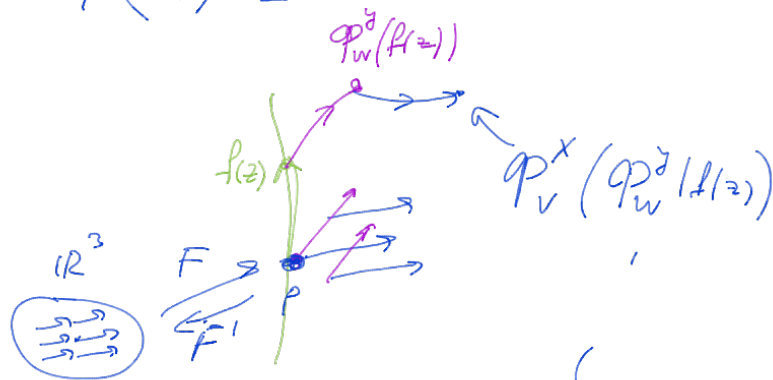
Определим $F: \mathbb{R}^n \rightarrow M$:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{V_1}^{x_1} \circ \dots \circ \Phi_{V_k}^{x_k} (f(x_{k+1}, \dots, x_n))$$

Оно удовлетворяет теореме об обратной функции в точке $0 \in \mathbb{R}^n$, и F^{-1} — искомая карта.

Примечание: все эти отображения определены не на всём пространстве, а в окрестностях 0. $\square$

$$V_i = (F_{x_i}) \partial_i$$



$$G(x_2, \dots, x_n)$$

$$f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(x, y, z) = -$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = V_i(F(\dots))$$

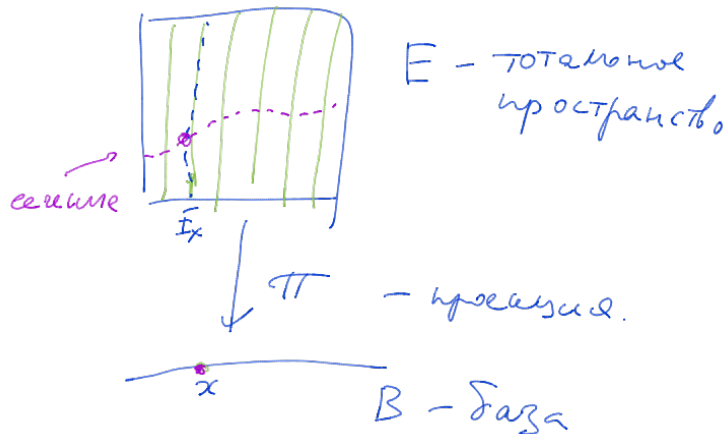
$$\rho_{v_1}^{x_1} \circ \rho_{v_2}^{x_2} \circ (---) = \boxed{\rho_{v_2}^{x_2}} \circ \rho_{v_1}^{x_1} \circ (---)$$

- 1 Скобка Ли векторных полей (продолжение)
 - Скобка Ли и потоки
- 2 Язык векторных расслоений
 - Определение векторного расслоения
 - Подрасслоения
 - Тривиальные и нетривиальные расслоения (информация)

Расслоение — формальный синоним понятия «непрерывное отображение». Он используется тогда, когда внимание уделяется разбиению области определения на прообразы точек («слои»).

Терминология:

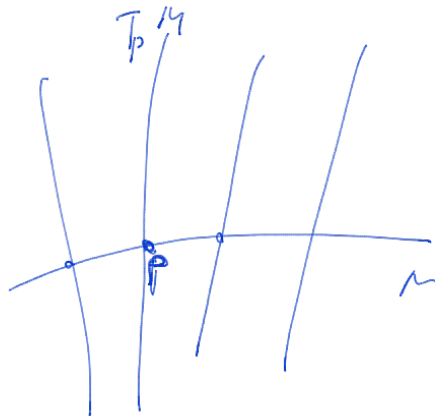
- ✓ • **Расслоение** — тройка (E, π, B) , где B, E — топологические пространства, $\pi: E \rightarrow B$ — непрерывное отображение. Для обозначения расслоения обычно используют элемент E или π .
- ✓ • B — **база** расслоения
- ✓ • E — **расслоенное пространство** или **тотальное пространство** расслоения
- ✓ • $\pi: E \rightarrow B$ — **проекция** расслоения
- ✓ • Множества вида $\pi^{-1}(x)$, где $x \in B$, — **слои** расслоения; часто обозначаются через E_x .
- **Сечение** расслоения — такое непрерывное $s: B \rightarrow E$, что $\pi \circ s = id$.



Пример: касательное расслоение

Для касательного расслоения гладкого многообразия M :

- База — M
- Тотальное пространство — TM
- Слои — касательные пространства $T_p M$, $p \in M$.
- Проекция $\pi: TM \rightarrow M$ сопоставляет касательному вектору его точку приложения, т.е. $\pi(v) = p$ для $v \in T_p M$.
- Сечения — векторные поля.



Векторные расслоения

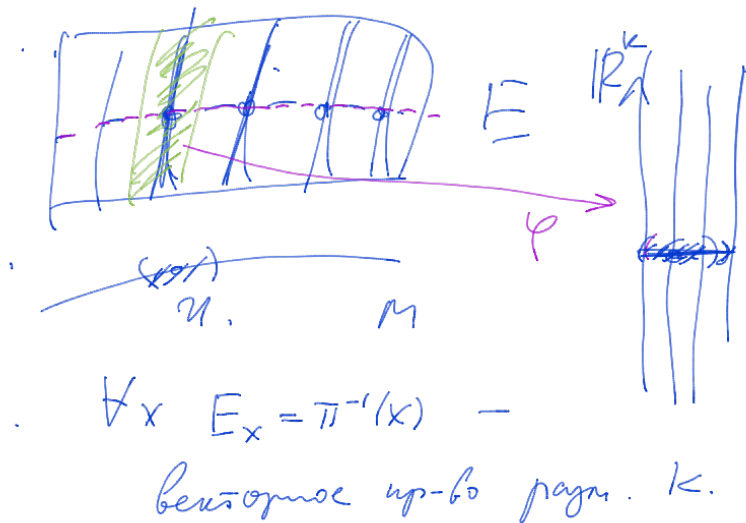
Расслоение — гладкое, если база и тотальное пространство — гладкие многообразия, а проекция — гладкое отображение. Далее все расслоения — гладкие.

Определение

(Гладкое) **векторное расслоение** ранга k — гладкое расслоение $\pi: E^{n+k} \rightarrow M^n$ с дополнительной структурой: на каждом слое задана структура векторного пространства размерности k .

При этом должно выполняться условие локальной тривиальности: для любой $p \in M$ существует окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ такой, что для каждой $x \in U$ сужение $\varphi|_{\pi^{-1}(x)}$ отображает $\pi^{-1}(x)$ в $\{x\} \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$ линейным изоморфизмом.

φ называется **локальной тривиализацией** или **картой расслоения**.



$\forall x \in M \quad E_x = \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^k$ —
векторное пр-во ранга k .

Расслоение — **гладкое**, если база и тотальное пространство — гладкие многообразия, а проекция — гладкое отображение. Далее все расслоения — гладкие.

Определение

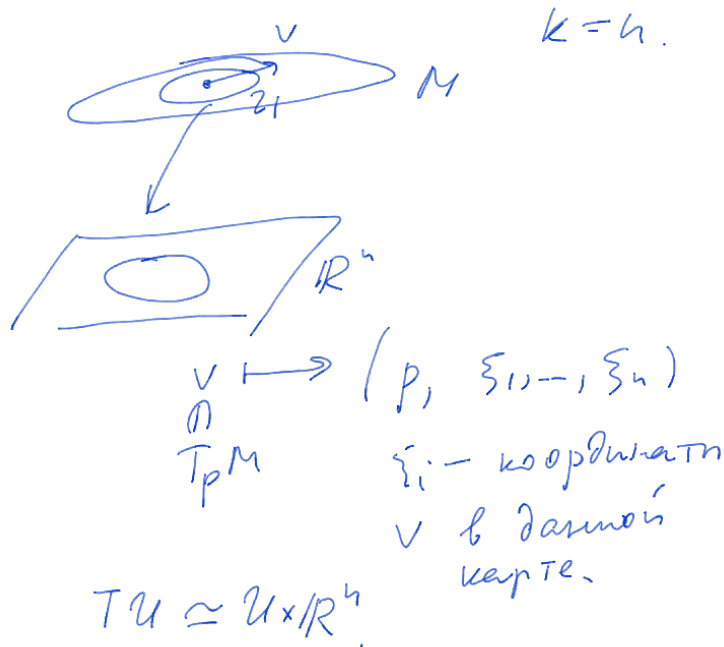
(Гладкое) **векторное расслоение** ранга k — гладкое расслоение $\pi: E^{n+k} \rightarrow M^n$ с дополнительной структурой: на каждом слое задана структура векторного пространства размерности k .

При этом должно выполняться **условие локальной тривиальности**: для любой $p \in M$ существует окрестность $U \subset M$ и диффеоморфизм $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ такой, что для каждой $x \in U$ сужение $\varphi|_{\pi^{-1}(x)}$ отображает $\pi^{-1}(x)$ в $\{x\} \times \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$ линейным изоморфизмом.

φ называется **локальной тривиализацией** или **картой расслоения**.

- Расслоенное произведение (стандартное тривиальное расслоение): $E = M \times \mathbb{R}^k$,
 $\pi: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ — обычная проекция, векторные операции на слое $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ определяются естественным отождествлением с $\mathbb{R}^k$.

- **Расслоенное произведение (стандартное тривиальное расслоение):** $E = M \times \mathbb{R}^k$, $\pi: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ — обычная проекция, векторные операции на слое $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ определяются естественным отождествлением с $\mathbb{R}^k$.
- **Касательное расслоение TM :** локальная тривиализация получается из координат касательного вектора в произвольной карте M .



- **Расслоенное произведение (стандартное тривиальное расслоение):** $E = M \times \mathbb{R}^k$, $\pi: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ — обычная проекция, векторные операции на слое $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ определяются естественным отождествлением с $\mathbb{R}^k$.
- **Касательное расслоение TM :** локальная тривиализация получается из координат касательного вектора в произвольной карте M .
- **Кокасательное расслоение T^*M :** слой T_p^*M — двойственное пространство $(T_p M)^*$, координаты определяются двойственным базисом к базису $T_p M$. Топология и дифференциальная структура порождаются картами (см. ниже).

$$T_p M \xrightarrow{\sim} (T_p M)^*$$

$$\omega \in (T_p M)^*$$

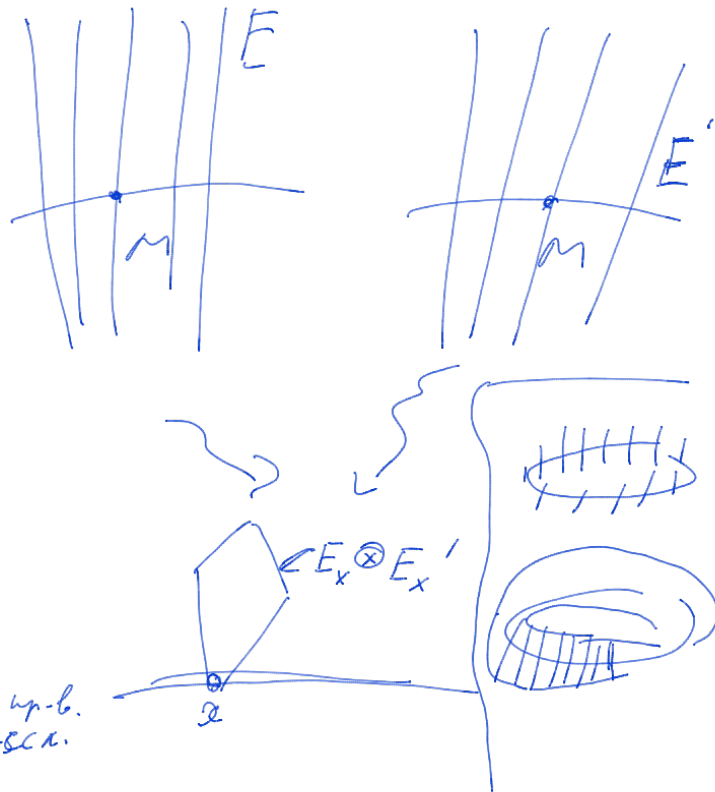


$$(p, \eta_1, \dots, \eta_n)$$

η_i — координаты ω
в разложении по двойств.
базису к базису $T_p M$.

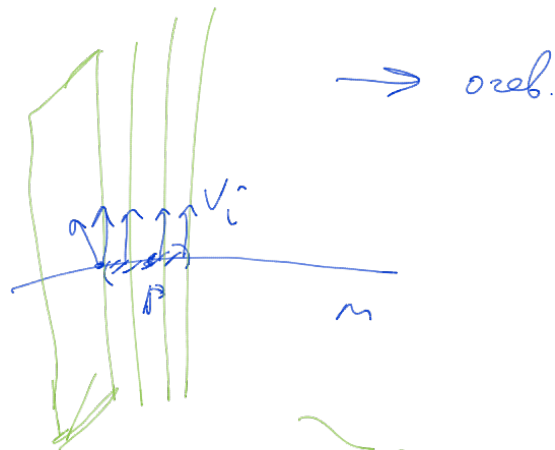
- **Расслоенное произведение (стандартное тривиальное расслоение):** $E = M \times \mathbb{R}^k$, $\pi: M \times \mathbb{R}^k \rightarrow M$ — обычная проекция, векторные операции на слое $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ определяются естественным отождествлением с $\mathbb{R}^k$.
- **Касательное расслоение TM :** локальная тривиализация получается из координат касательного вектора в произвольной карте M .
- **Кокасательное расслоение T^*M :** слой T_p^*M — двойственное пространство $(T_p M)^*$, координаты определяются двойственным базисом к базису $T_p M$. Топология и дифференциальная структура порождаются картами (см. ниже).
- Аналогично для расслоений E, E' с общей базой M можно послойно определить расслоения $E \oplus E'$, $E \otimes E'$, $\text{Hom}(E, E')$ и т.д.

Гладкий функтор на кат. вект. нр.-в.
порождает операцию над вект. рассл.



Свойства

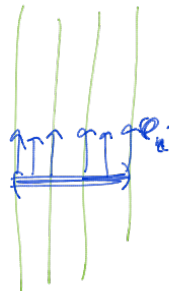
- 1 Выбор локальной тривиализации для $U \subset M$ эквивалентен выбору локальных гладких сечений $V_1, \dots, V_k: U \rightarrow E$, которые образуют базис в каждом слое E_x , $x \in U$ (гладкое семейство базисов).



$$V_i = \varphi^{-1} \circ e_i.$$

$$e_i: U \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

$$x \rightarrow (x, e_i).$$



Свойства

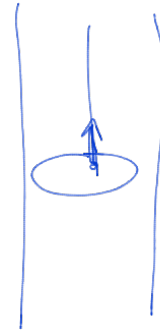
- Выбор локальной тривиализации для $U \subset M$ эквивалентен выбору локальных гладких сечений $V_1, \dots, V_k: U \rightarrow E$, которые образуют базис в каждом слое E_x , $x \in U$ (гладкое семейство базисов).

Рассм $\varphi_1 = L \circ \varphi_0$

$$L(x, v) = L_x^{-1}(v).$$

↑
обр. матрица

(продолжение).



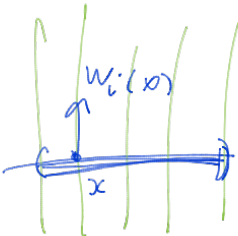
$2x/\mathbb{R}^k$



$$W_i(x) = \varphi_0(V_i(x)).$$

$$(W_1(x), \dots, W_k(x)) =$$

$= L_x$ - невыр. матрица.



Свойства

- 1 Выбор локальной тривиализации для $U \subset M$ эквивалентен выбору локальных гладких сечений $V_1, \dots, V_k: U \rightarrow E$, которые образуют базис в каждом слое E_x , $x \in U$ (гладкое семейство базисов).
- 2 Переход от одного такого семейства к другому задается гладким семейством матриц перехода. И обратно, применив к гладкому семейству базисов гладкое семейство невырожденных матриц, получим снова гладкое семейство базисов.

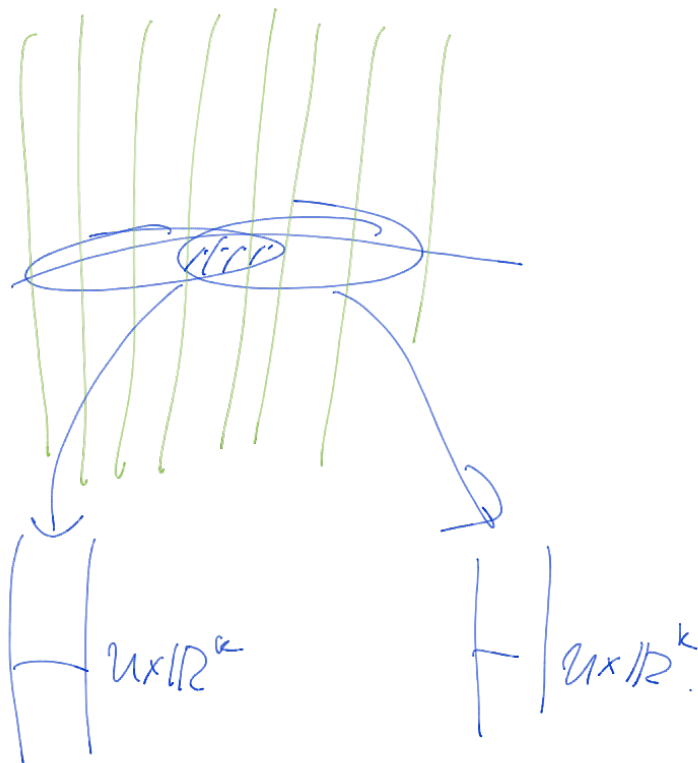
$$V_1, \dots, V_k$$

$$\{L_x\}.$$

$$[V_1 \dots V_k](L_x) = [W_1, \dots, W_k]$$

Свойства

- 1 Выбор локальной тривиализации для $U \subset M$ эквивалентен выбору локальных гладких сечений $V_1, \dots, V_k: U \rightarrow E$, которые образуют базис в каждом слое E_x , $x \in U$ (гладкое семейство базисов).
- 2 Переход от одного такого семейства к другому задается гладким семейством матриц перехода. И обратно, применив к гладкому семейству базисов гладкое семейство невырожденных матриц, получим снова гладкое семейство базисов.
- 3 Часто расслоенное пространство определяется как множество, а топология и гладкая структура определяются тривиализациями. При этом так же необходима и достаточно гладкость матриц перехода как функций от точки базы.



Свойства

- 1 Выбор локальной тривиализации для $U \subset M$ эквивалентен выбору локальных гладких сечений $V_1, \dots, V_k: U \rightarrow E$, которые образуют базис в каждом слое E_x , $x \in U$ (гладкое семейство базисов).
- 2 Переход от одного такого семейства к другому задается гладким семейством матриц перехода. И обратно, применив к гладкому семейству базисов гладкое семейство невырожденных матриц, получим снова гладкое семейство базисов.
- 3 Часто расслоенное пространство определяется как множество, а топология и гладкая структура определяются тривиализациями. При этом так же необходима и достаточно гладкость матриц перехода как функций от точки базы.

- 1 Скобка Ли векторных полей (продолжение)
 - Скобка Ли и потоки
- 2 Язык векторных расслоений
 - Определение векторного расслоения
 - Подрасслоения
 - Тривиальные и нетривиальные расслоения (информация)

Следствие (из свойств)

Пусть (E, π, M) — векторное расслоение ранга k , $F \subset E$ — такое множество, что $F \cap E_x$ — m -мерное линейное подпространство E_x для каждого x .

Тогда два свойства равносильны:

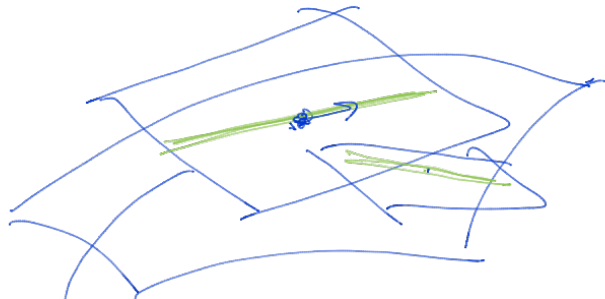
- ① В окрестности любой $p \in M$ существуют гладкие локальные сечения $V_1, \dots, V_m$, образующие базис $F \cap E_x$ для каждой x .
- ② В окрестности каждой точки существует локальная тривиализация $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, переводящая $F \cap \pi^{-1}(U)$ в $U \times \mathbb{R}^m$.

При этих условиях F — гладкое подмногообразие и $(F, \pi|_F, M)$ — векторное расслоение ранга m .

Определение

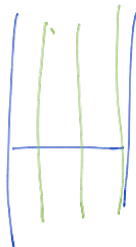
Такое F называется подрасслоением расслоения E .

$$m \leq k = \dim E_x$$



$$F = \bigcup \text{зеленых } x.$$

$$m = \dim(F \cap E_x) \quad \forall x.$$



$$U \times \mathbb{R}^k$$

$$U \times \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^k$$

Следствие (из свойств)

Пусть (E, π, M) — векторное расслоение ранга k , $F \subset E$ — такое множество, что $F \cap E_x$ — m -мерное линейное подпространство E_x для каждой x .

Тогда два свойства равносильны:

- ① В окрестности любой $p \in M$ существуют гладкие локальные сечения $V_1, \dots, V_m$, образующие базис $F \cap E_x$ для каждой x .
- ② В окрестности каждой точки существует локальная тривиализация $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, переводящая $F \cap \pi^{-1}(U)$ в $U \times \mathbb{R}^m$.

При этих условиях F — гладкое подмногообразие и $(F, \pi|_F, M)$ — векторное расслоение ранга m .

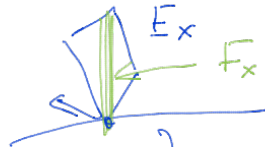
Определение

Такое F называется подрасслоением расслоения E .

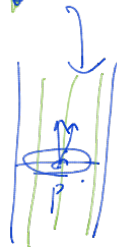
② $\rightarrow$ (подрасслоение). — очев.

② $\Rightarrow$ ① очев.

① $\Rightarrow$ ② ?



$$F_x = F \cap E_x.$$



Дополним до
за. базиса

$$V_1, \dots, V_m, V_{m+1}, \dots, V_k.$$

$V_{m+1}, \dots, V_k = \text{const}$
в координатах.

Пример: нормальное расслоение

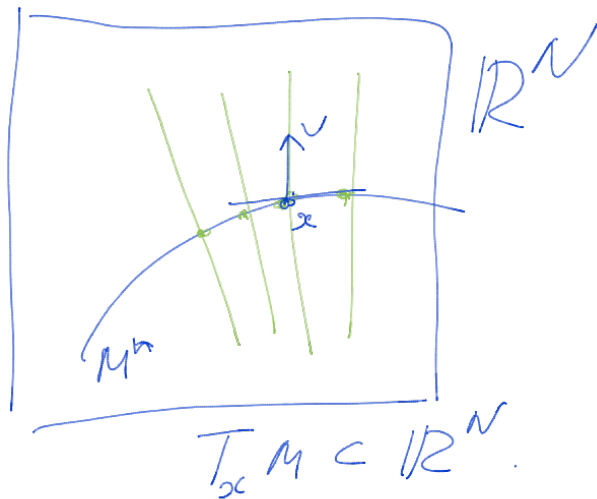
Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое многообразие.

Определение

Нормальное расслоение $M = (\nu M, \pi, M)$, где

$$\nu M = \{(x, v) : x \in M, v \in (T_x M)^\perp\} \subset M \times \mathbb{R}^N$$

где $T_x M$ рассматривается как линейное подпространство $\mathbb{R}^N$, и $\pi(x, v) = x$.



Пример: нормальное расслоение

Пусть $M^n \subset \mathbb{R}^N$ — гладкое многообразие.

Определение

Нормальное расслоение $M = (\nu M, \pi, M)$, где

$$\nu M = \{(x, v) : x \in M, v \in (T_x M)^\perp\} \subset M \times \mathbb{R}^N$$

где $T_x M$ рассматривается как линейное подпространство $\mathbb{R}^N$, и $\pi(x, v) = x$.

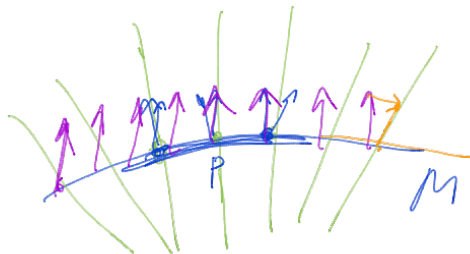
Свойство

Нормальное расслоение — подрасслоение произведения $M \times \mathbb{R}^N$.

В частности, νM — гладкое подмногообразие в $M \times \mathbb{R}^N$.

Доказательство.

Локальный базис ортогонального дополнения получается из постоянного набора векторов в $\mathbb{R}^N$ алгебраическими формулами. $\square$



Выберем $p \in M$,
 $V_1^0, \dots, V_{N-n}^0$ — базис $(T_p M)^\perp$.
Продолжим V_i^0 до const.
опер $V_i^0: U \rightarrow \mathbb{R}^N$
 $V_i(x) = \text{pr}_{(T_x M)^\perp}(V_i^0(x))$
гладкое?

THE END

- 1 Скобка Ли векторных полей (продолжение)
 - Скобка Ли и потоки
- 2 Язык векторных расслоений
 - Определение векторного расслоения
 - Подрасслоения
 - Тривиальные и нетривиальные расслоения (информация)

Определение

Векторное расслоение (E, π, M) **тривиально**, если существует диффеоморфизм $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, переводящий каждый слой E_x в $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ линейным изоморфизмом.

Определение

Векторное расслоение (E, π, M) **тривиально**, если существует диффеоморфизм $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, переводящий каждый слой E_x в $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ линейным изоморфизмом.

Примеры (информация):

- Касательное расслоение $\mathbb{S}^1$ тривиально

Определение

Векторное расслоение (E, π, M) **тривиально**, если существует диффеоморфизм $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, переводящий каждый слой E_x в $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ линейным изоморфизмом.

Примеры (информация):

- Касательное расслоение $\mathbb{S}^1$ тривиально
- Касательное расслоение $\mathbb{S}^2$ нетривиально

Определение

Векторное расслоение (E, π, M) **тривиально**, если существует диффеоморфизм $\varphi: E \rightarrow M \times \mathbb{R}^k$, переводящий каждый слой E_x в $\{x\} \times \mathbb{R}^k$ линейным изоморфизмом.

дане обично
различия

Примеры (информация):

- Касательное расслоение $\mathbb{S}^1$ тривиально
- Касательное расслоение $\mathbb{S}^2$ нетривиально
- Лист Мёбиуса — нетривиальное расслоение над $\mathbb{S}^1$.

М. do Carmo . Riemannian geometry.

Борисович, Близняков, Израилевич, Роменко
"Введение в геометрию".

Про потоки - Google "Lie derivative".

или

Т. Фробениуса.

