

Группа движений

15 февраля 2021 г. 21:38

Опр Движение $\mathbb{H}^2$ — композиция нескольких элементарных движений (4 вида из теоремы).

Об-во Они образуют группу.

Задача Движение $\mathbb{H}^2$ — в точности дробно-линейные функции на $\mathbb{C}$ и сопряженные к ним, которые переводят верхнюю полуплоскость в себя

✓
$$\begin{cases} f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \\ f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \end{cases}, \quad \begin{matrix} a, b, c, d \in \mathbb{C} \\ ad-bc \neq 0 \end{matrix}$$

✓
$$f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$$

Переформулировка

др. лин. $\rightarrow \begin{cases} f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \\ f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \end{cases}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \underline{ad-bc > 0}$

сопр. др. лин. $\rightarrow \begin{cases} f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \end{cases}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \underline{ad-bc < 0}$

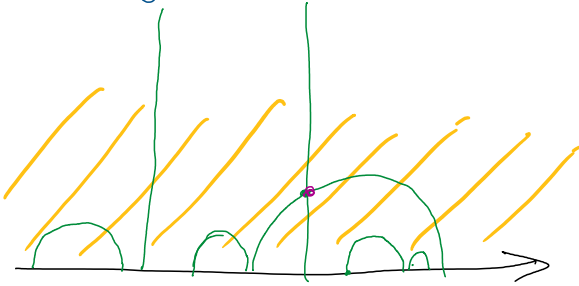
Прямые и отрезки

16 февраля 2021 г. 0:03

Опр

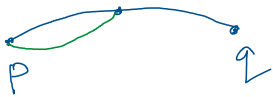
Прямые плоскости Лобачевского — это

- вертикальные лучи (открытые) с началом на абсолюте
- полуокружности (открытые) с центром на абсолюте



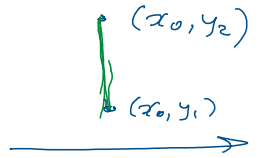
Теорема

Прямые ил-ти Лобачевского изометричны $\mathbb{R}$ как метрические пространства.



Вертикальные отрезки

16 февраля 2021 г. 0:42



- Лемма** • Вертикальный отрезок — единственный кратчайший путь между своими концами.
(в классе кусочно-гладких путей, единственность — с точностью до замены параметра).
- Расстояние между (x_0, y_1) и (x_0, y_2) равно $|\ln(y_1) - \ln(y_2)|$

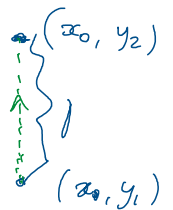
Зок-во $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$l_h(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{\underbrace{x'(t)^2}_{\geq 0} + y'(t)^2} dt \geq$$

$$\geq \int_a^b \frac{1}{y(t)} |y'(t)| dt \geq$$

$$\geq \int_a^b \frac{y'(t)}{y(t)} = \ln(y_2) - \ln(y_1).$$



Рев-во: $\Leftrightarrow$ ① $x' \equiv 0$.
② $y' \geq 0$.



$\Rightarrow$ Отрезок на верт. пути изометричен (как метр. кр-во) отрезку на прямой.

Доказательство теоремы

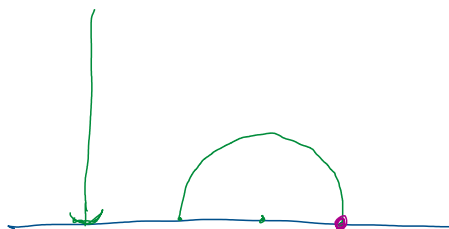
16 февраля 2021 г. 0:43

Следствие Вертикальный луч $\{x=x_0, y>0\}$
изометричен $\mathbb{R}$ как метрическое пр-во.

Док-во Изометрия: $t \mapsto (x_0, e^t)$ $d_h((x_0, e^{t_1}), (x_0, e^{t_2})) = |t_1 - t_2|$.

Док-во теоремы $\forall$ полуокружность — образ верт.
луча при инверсии

□



Аксиомы

16 февраля 2021 г. 0:56

1) Через $\forall$ 2-х разл. точки проходит ровно 1 прямая.

Ⓐ ≤ 1 прямой. - т.к. окружности и прямые пересекаются ≤ 2 раз

Ⓑ = 1.

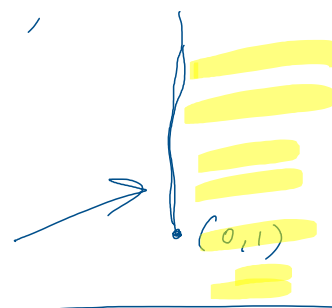
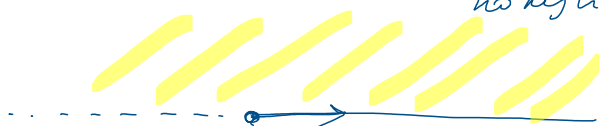
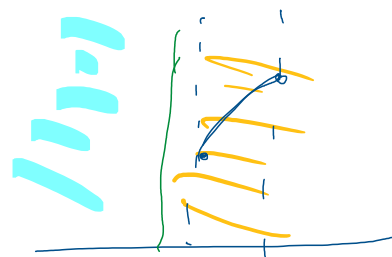
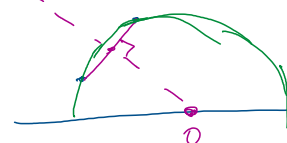
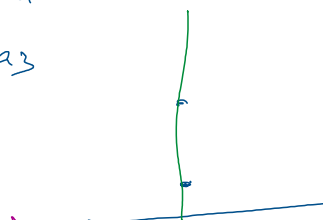
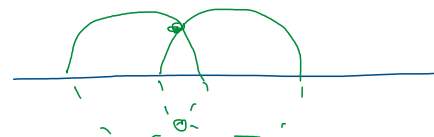
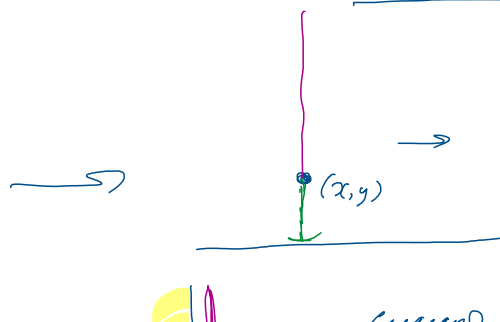
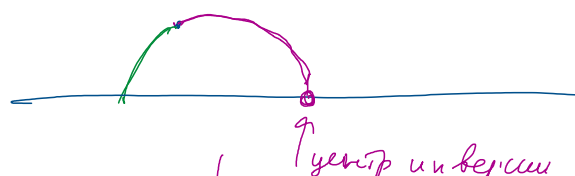
Зам. Аксиома параллельных неверна.

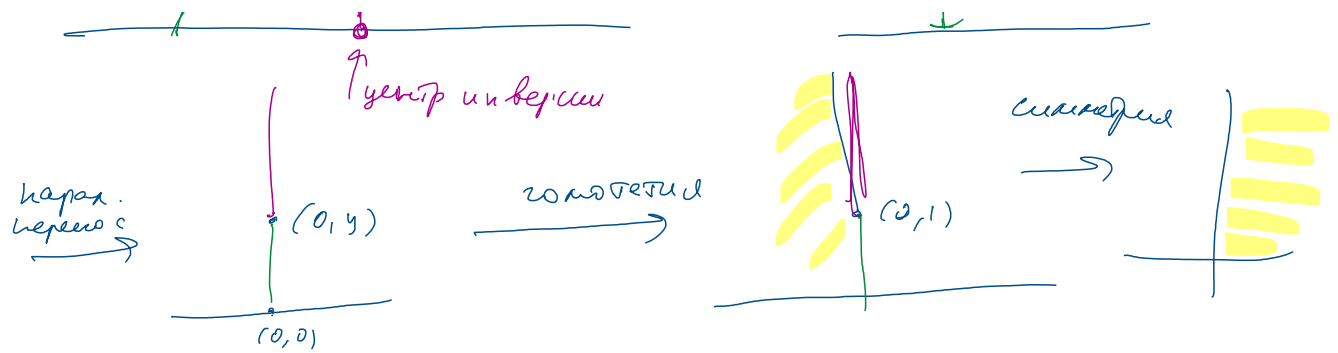
2) Прямая разбивает $\mathbb{H}^2$ на 2 компоненты (компл-ты) отрезок пересекает $\Leftrightarrow$ его концы в разных компл-тах.

3) Ор. Флаг - (точка P , полупрямая с началом P , компл-плоскость, ор. прямая, содержащая P).

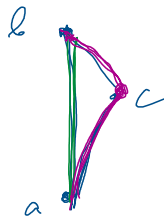
Теорема. $\forall$ 2-х флагов $\exists$ движение, переводящее один в другой.

Длб. Дост. доказать, что $\forall$ флаг можно перевести в выделенный





④ Неравенство Δ -ка — строгое, если точки не лежат на 1 прямой



$$c \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\underbrace{d(a, c) + d(c, b)}_{\text{длина возможного пути}} > d(a, b)$$

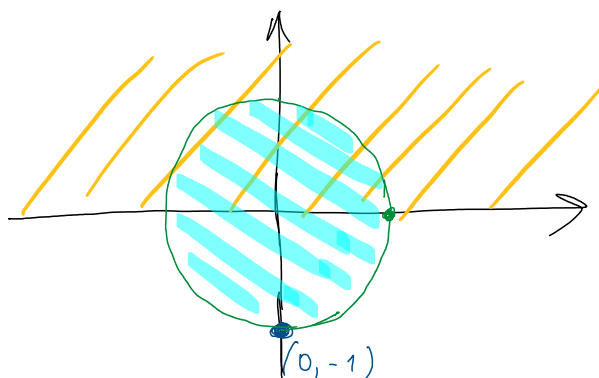
длина возможного пути.

Модель Пуанкаре в круге

15 февраля 2021 г. 21:40

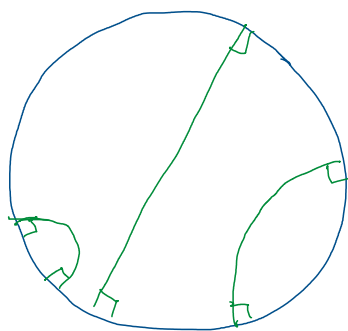
Опр

Модель Пуанкаре в круге - образ ^{модели} $\mathbb{H}^2$ в полупл
при инверсии с центром в $(0, -1)$
и радиусом $\sqrt{2}$ (с метрикой, индуцированной
этой инверсией).



круг радиуса 1
с центром в 0

Прямые



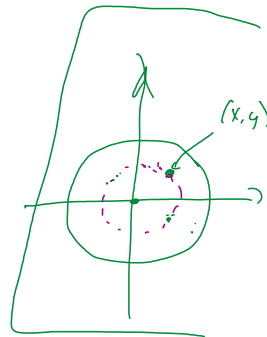
Отрезки и дуги окружностей,
ортогональные "краю"

Вычисление коэффициентов

15 февраля 2021 г. 21:41

Теорема Метрические коэффициенты в модели в круге имеют вид

$$(g_{ij}(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$



Комментарии

- Метрика тоже конформная
- Конформный коэф-т $\frac{2}{1-x^2-y^2}$ инвар. отн. вращений.

Доказ

$q = (x, y)$, $\hat{g}$ - новая метрика

$V \in T_q(\text{круг})$.

$$|V|_{\hat{g}} = ?$$

I - та самая инверсия

$$q' = I(q)$$

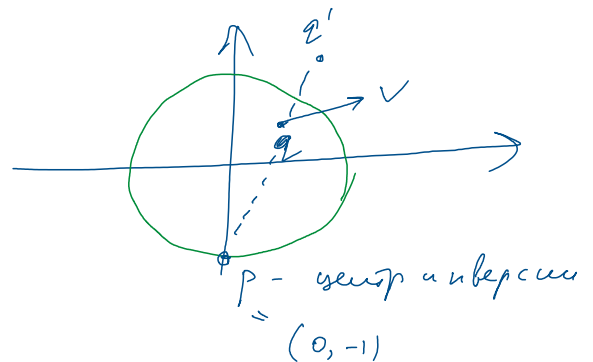
$$|V|_{\hat{g}} = |d_q I(V)|_h$$

$$\vec{pq'} = \vec{pq} \cdot \frac{2}{|pq|^2} = \vec{(x, y+1)} \cdot \frac{2}{x^2 + (y+1)^2} =$$

$$q' = p + \vec{pq'} = (0, -1) + \frac{2}{x^2 + (y+1)^2} \cdot \vec{(x, y+1)} =$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2 + (y+1)^2}, -1 + \frac{2(y+1)}{x^2 + (y+1)^2} \right) =$$

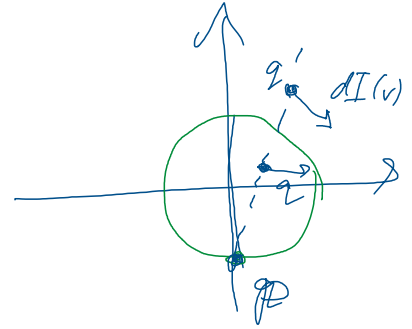
$$= \left(-1, \frac{2y+2 - x^2 - y^2 - 2y - 1}{x^2 + (y+1)^2} \right) =$$



$$= \left(-11 - \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y+1)^2} \right)$$

$$|dI(v)|_{евкл} = |v|_{евкл} \cdot \frac{2}{x^2 + (y+1)^2}$$

из производной инверсии.



$$|v|_{\hat{g}} = |dI(v)|_h = \frac{|dI(v)|_{евкл}}{y\text{-координата } q'} =$$

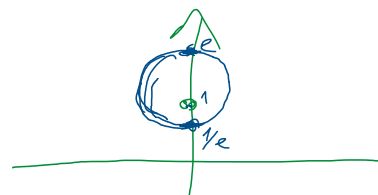
$$= |v|_{евкл} \cdot \frac{2 / (x^2 + (y+1)^2)}{(1 - x^2 - y^2) / (x^2 + (y+1)^2)} = \frac{2}{1 - x^2 - y^2} |v|_{евкл}$$



Шары плоскости Лобачевского

15 февраля 2021 г. 21:42

Теорема В обеих моделях метрические шары
или Лобачевского — евклидовы круги.
(с другим центром).



З-во ① Верно в круговой
модели для шаров
с центром $(0,0)$ — из вращ. симметрии $\hat{g}$.

② $\Rightarrow$ Верно в идеальной модели для
шаров с центром в $(0,1)$.
(образ при той самой инверсии)



③ $\Rightarrow$ Верно для всех шаров в
полуплоскости модели.
(применим движение) $\leftarrow$ хватит гомотетий
и пар. пер.

④ $\Rightarrow$ Верно для всех шаров в круговой
модели — так как I переводит
круг в круг.



Тензоры - план

21 февраля 2021 г. 18:01

Определение: тензоры типа $(k,0)$ и $(k,1)$ в линейной алгебре.

Определение: тензоры типа $(k,0)$ и $(k,1)$ на многообразии.

Определение: действие тензора на векторных полях.

Теорема: Любой оператор на векторных полях, полилинейный над кольцом функций, соответствует некоторому тензору.

Тензоры в линейной алгебре

21 февраля 2021 г. 18:07

Опр (не будем пользоваться).

Пусть V - векторное пр-во, $k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Тензор типа (k, m) - элемент тензорного произведения

$$\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_k \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_m$$

Наши случаи: $m = 0$ и $m = 1$

Тензор типа $(k, 0)$ - полилинейная функция k аргументов

$$F: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_k \longrightarrow \mathbb{R}$$

Тензор типа $(k, 1)$ - полилинейное отображение

$$F: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_k \longrightarrow V$$

Тензоры типа $(k,0)$ и $(k,1)$ на многообразии

Sunday, February 21, 2021 6:10 PM

Опр Пусть M - гладкое многообразие.

Тензор типа $(k,0)$ или $(k,1)$ на M - гладкое семейство

$F = \{F_x\}_{x \in M}$, где каждый F_x - тензор на $T_x M$ (типа $(k,0)$ или $(k,1)$)

Условие гладкости: $\forall$ гладких векторных полей $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$

$F(X_1, \dots, X_k)$ - гладкая функция или векторное поле.

$$\rightarrow \left(\text{Опр: } F(X_1, \dots, X_k)(p) = \underbrace{F_p}_{\text{тензор}}(\underbrace{X_1(p)}_{\text{вектор}}, \dots, \underbrace{X_k(p)}_{\text{вектор}}) \right)$$

Пример Риманова метрика - тензор типа $(2,0)$.

$$TM \mapsto (T^*M)^{\otimes k} \otimes (TM)^{\otimes m}.$$


Полилинейность над кольцом функций

21 февраля 2021 г. 18:13

Обозначения

M - гладкое многообразие

$\mathcal{F}(M) = \{ \text{гладкие функции } M \rightarrow \mathbb{R} \}$

$\mathcal{X}(M) = \{ \text{гладкие векторные поля } M \rightarrow TM \}$.

Для $X \in \mathcal{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$

$f \cdot X$ - произведение (точечное) $\in \mathcal{X}(M)$

Xf - дифференцирование f вдоль $X \in \mathcal{X}(M)$.

Пусть $F = \{F_x\}_{x \in M}$ - тензор типа $(k, 0)$ или $(k, 1)$ на M .

Он задает полилинейное отображение

$$\left[\begin{array}{l} F: \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M) \quad (k, 0) \\ \text{или } \mathcal{X}(M) \quad (k, 1). \end{array} \right.$$

$$\text{где } (F(X_1, \dots, X_k))(p) = F_p(X_1(p), \dots, X_k(p))$$

Свойство

F линейно по $X_1, \dots, X_k$ над $\mathcal{F}(M)$
(не только над $\mathbb{R}$):

$$(*) \quad \forall f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}(M) \quad F(f_1 X_1, \dots, f_k X_k) = f_1 \dots f_k F(X_1, \dots, X_k)$$

Теорема

Пусть $F: \mathcal{X}(M) \times \dots \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ или $\mathcal{X}(M)$
полилинейно над $\mathcal{F}(M)$.

Тогда F - тензор

конец лекции 2