

Напоминание - уравнение Якоби в полярных координатах

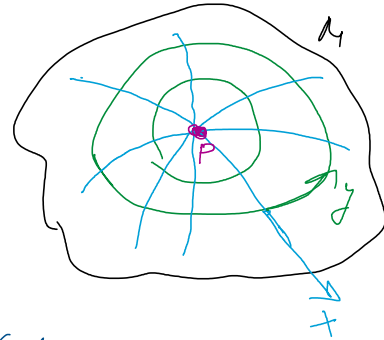
5 апреля 2021 г. 19:46

M - двумерное риманово многообразие

$p \in M$

Вводим полярные геодезические координаты (x, y)

x - радиальная координата, y - угловая



Это пологодезические координаты $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (\sqrt{G})''_{xx} = -K \sqrt{G} \\ \sqrt{G}|_{x=0} = 0 \\ (\sqrt{G})'_x|_{x=0} = 1 \end{cases}, \quad K - \text{внутренняя кривизна}$$

если продолжить на $x=0$

$\Rightarrow$

$K = K(x, y)$ определяет метрику

Асимптотическое разложение метрики в нуле (задача)

30 марта 2021 г. 0:16

Теорема

В полярных координатах с центром в p ,
при $\boxed{r \rightarrow 0}$

$$\boxed{\sqrt{G} \Big|_{x=r} = r - \frac{K(p)}{6} r^3 + o(r^3)}$$

Доказ

$$f(x) = \sqrt{G}(x, y_0), \quad y_0 = \text{const.}$$

$$f'' = -K \cdot f, \quad K = K_n(x, y_0)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = (-Kf) \Big|_{x=0} = -K(p) \cdot f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= (-Kf)'(0) = -K'(p) f(0) - K(p) f'(0) \\ &= -K(p) \end{aligned}$$

Применяем ф-лу Тэйлора.

$o(r^3)$ равномерно по y , так как оценивается
через K''' .



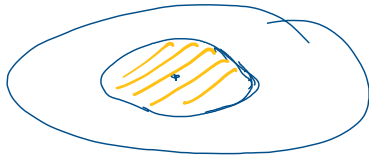
Следствие

Длина окружности и площадь круга при $r \rightarrow 0$:

$$\ell(\partial B_r(p)) = \underline{2\pi r} \left(1 - \underbrace{\frac{K(p)}{6} r^2}_{\text{}} + o(r^2) \right)$$

$$A(B_r(p)) = \pi r^2 \left(1 - \underbrace{\frac{K(p)}{12} r^2}_{\text{}} + o(r^2) \right)$$

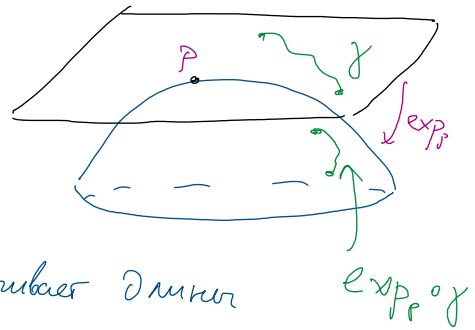
задача



Сравнение длин и расстояний

30 марта 2021 г. 0:17

Теорема ① Пусть $p \in M^2$, $r < \rho_{inj}(p)$.
и $K_M \geq 0$ в $B_r(p)$.



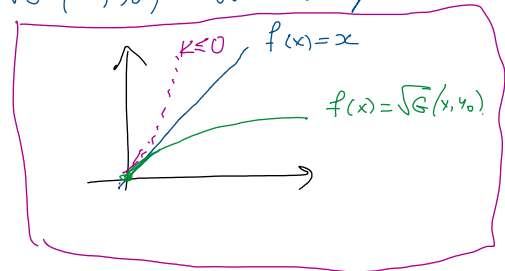
Тогда $\exp_p|_{B_r(0)}$ не увеличивает длины
($\forall \gamma: [a,b] \rightarrow B_r(0) \subset T_p M$ $\ell(\exp_p \circ \gamma) \leq \ell(\gamma)$)

② Если $K \leq 0$ в $B_r(p)$, то
 $\exp_p|_{B_r(p)}$ не уменьшает длины. ($\geq$)

2-во. (для $K \geq 0$)

$$(\sqrt{G})''_{xx} = -K\sqrt{G} \leq 0 \Rightarrow \sqrt{G}(\cdot, y_0) \text{ вын. вверх}$$

$$\Rightarrow \sqrt{G}(x, y_0) \leq x$$



Равенство для $M = \mathbb{R}^2 \simeq T_p M$.

$$(g_{ij})^{евкл} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}.$$

$\gamma(t)$ с координатами $x(t), y(t)$, $t \in [a,b]$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2 + G_0 y'^2} dt$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}.$$

$$\ell(\exp_p \gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2 + G y'^2}$$

$$G \leq G_0$$

$$x^2$$



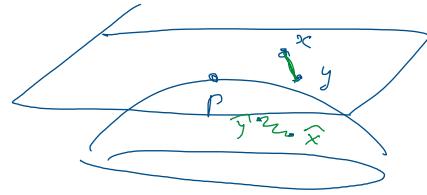
Следствие ① $K \geq 0$, $r < \rho_{inj}(p)$,

Следствие / ① $K \geq 0$, $r < \text{inj}(p)$,

$\exp_p$ не
убав. расст.

$$x, y \in B_r(0) \subset T_p M$$

$$\Rightarrow d_M(\exp_p(x), \exp_p(y)) \leq |x - y|.$$

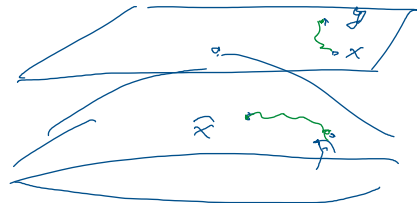


② $K \leq 0$ $r < \text{inj}(p)/2$

$\exp_p$ не
уменьшает
расст.

$$x, y \in B_r(0) \subset T_p M.$$

$$\Rightarrow d_M(\exp_p(x), \exp_p(y)) \geq |x - y|.$$



Сравнение углов

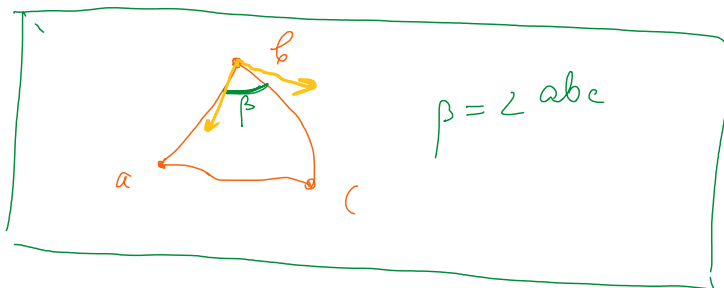
30 марта 2021 г. 1:12

M - 2-мерное риманово многообразие

Опр Маленький треугольник - 3 точки $a, b, c \in M$
(и 3 отрезка $[ab], [bc], [ac]$) т.е.

$$d(a, b) + d(a, c) + d(b, c) \leq \min \{ \rho_{inj}(a), \rho_{inj}(b), \rho_{inj}(c) \}.$$

Угол $\angle abc$ - $\angle([ba], [bc])$ в точке b



угол между векторами скорости в $T_b M$.

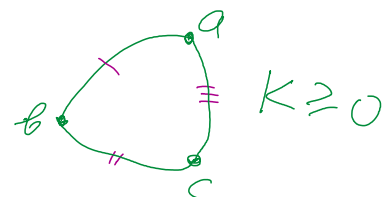
Теорема Пусть $\triangle abc$ - маленький треугольник в M
 $\triangle \bar{a}\bar{b}\bar{c} \subset \mathbb{R}^2$ - треугольник с такими же длинами сторон:

$$|\bar{a}\bar{b}| = d(a, b), \quad |\bar{a}\bar{c}| = d(a, c), \quad |\bar{b}\bar{c}| = d(b, c)$$

Тогда

① Если $K_M \geq 0$ всюду, то

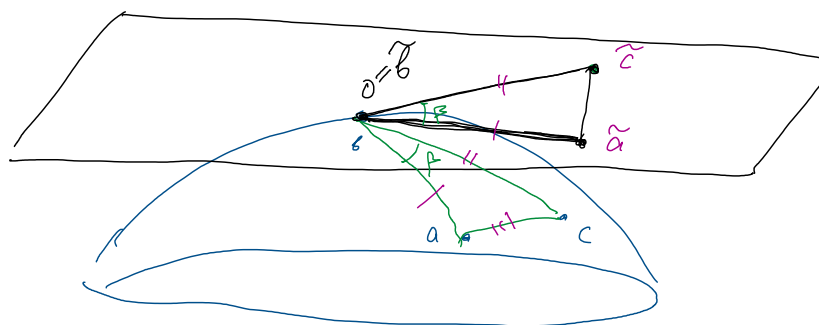
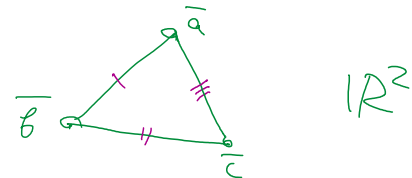
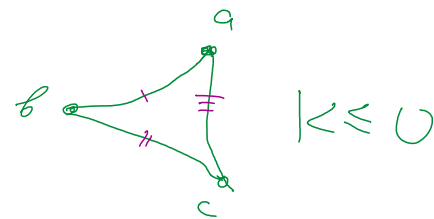
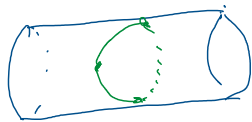
$$\angle abc \geq \angle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$



② Если $K_M \leq 0$ всюду, то

(2) Если $K_M \leq 0$ всюду, то

$$\angle abc \leq \angle \bar{a}\bar{b}\bar{c}$$

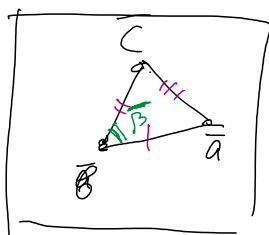


$$\beta := \angle abc = \angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \quad (b \in T_p M)$$

Из предыдущей Т-лм

$$d(a, c) \leq |\tilde{a} - \tilde{c}|.$$

$$|\bar{c} - \bar{a}| = d(a, c) \leq |\tilde{a} - \tilde{c}|.$$



$$\begin{cases} |\bar{b} - \bar{a}| = |\tilde{b} - \tilde{a}| \\ |\bar{b} - \bar{c}| = |\tilde{b} - \tilde{c}| \\ |\bar{a} - \bar{c}| \leq |\tilde{a} - \tilde{c}| \end{cases}$$

$\Downarrow$ (т. косинусов)

$$\angle \bar{a}\bar{b}\bar{c} \leq \angle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = \angle abc$$

При $K \leq 0$ все пер-ва - наоборот



Формула Гаусса-Бонне - план

30 марта 2021 г. 1:14

Определение: многоугольник, треугольник

Теорема: формула Гаусса-Бонне для треугольника

Теорема: формула Гаусса-Бонне для многоугольника

Доказательство формул

Теорема: формула Гаусса-Бонне для замкнутой поверхности (кривизна и Эйлера характеристика).

Формулировка

30 марта 2021 г. 2:10

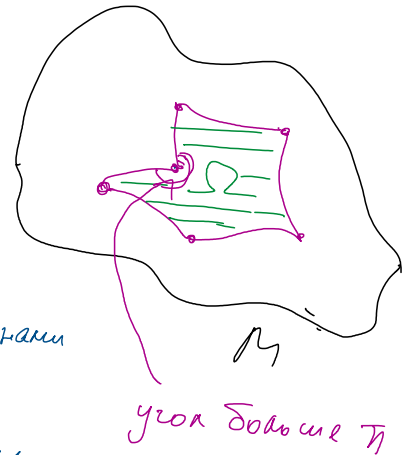
Опр Многоугольник - область $\Omega \subset M$:

(!) $\overline{\Omega}$ гомеоморфно D^2 ,

(!) граница $\partial\Omega$ - геодезическая ломаная

Треугольник - многоугольник с 3-мя сторонами

Углы многоугольника - внутренние углы
(могут быть больше π).



Теорема (формула Гаусса-Бонне для треугольника)

Пусть Δ - треугольник, α, β, γ - его углы. Тогда

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K dA$$

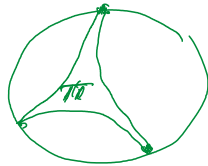
A - площадь
(мера Хаусдорфа).

интеграл кривизны по площади

Следствие

На плоскости Лобачевского

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A(\Delta) \Rightarrow A(\Delta) \leq \pi.$$



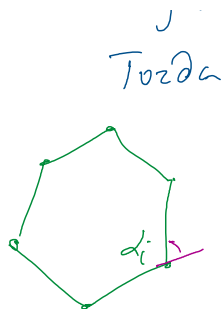
Теорема

(формула Гаусса-Бонне для многоугольника).

Пусть $\Omega \subset M$ - многоугольник, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - его углы

Тогда

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = (n-2)\pi + \int_{\Omega} K dA$$



$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \int_{\Omega} K dA$$

↑
внешние углы

Замечание Формула для треугольника — частный случай.

$$(\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma) = 2\pi - \int_{\Delta} K dA$$



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_{\Delta} K dA$$

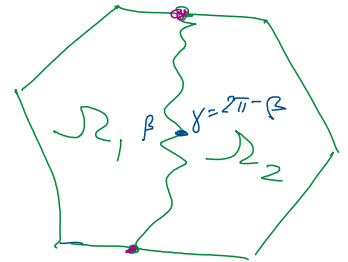
АДДИТИВНОСТЬ

30 марта 2021 г. 2:10

$$\pi - \beta = -(\pi - \gamma).$$

Лемма Пусть Ω - многоугольник,

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ как на картинке
(Ω_1, Ω_2 - геодезические ломаные).



Предположим, что формула Гаусса-Бонне
верна для Ω_1 и Ω_2 . Тогда она верна для Ω

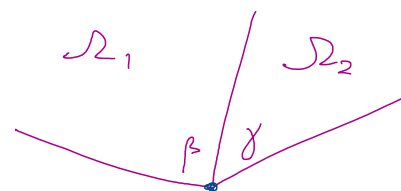
Д-во: $\{\alpha_i\}$ - углы Ω
 $\{\beta_j\}$ - углы Ω_1
 $\{\gamma_k\}$ - углы Ω_2

$$+ \begin{cases} \sum (\pi - \beta_j) = 2\pi - \int_{\Omega_1} K dA & (\Omega_1) \\ \sum (\pi - \gamma_k) = 2\pi - \int_{\Omega_2} K dA & (\Omega_2) \end{cases}$$

$$\sum (\pi - \alpha_i) + 2\pi =$$

$$= \cancel{4\pi}^2 - \int_{\Omega} K dA$$

↑
ф-ла Г-Б для Ω



$$\alpha = \beta + \gamma$$

$$(\pi - \beta) + (\pi - \gamma) =$$

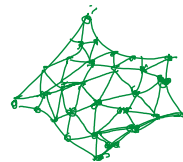
$$= (\pi - \alpha) + \pi$$



Случай маленького треугольника

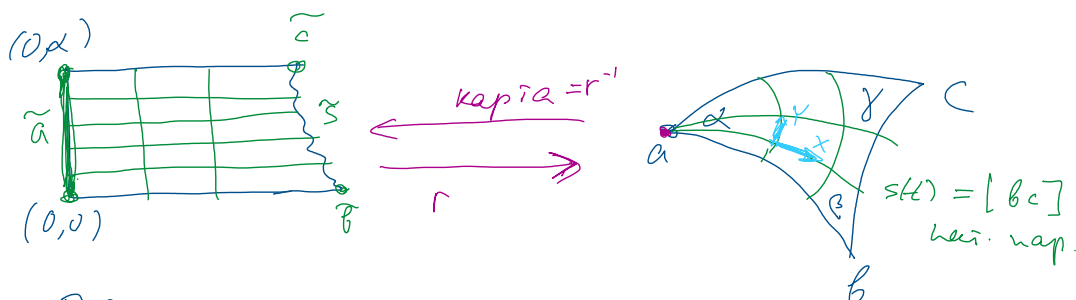
30 марта 2021 г. 2:10

Приним без доказательства: многоугольник можно разбить геодезическими отрезками на сколь угодно маленькие треугольники.



$\Rightarrow$ Для док-ва формулы достаточно доказать ее для маленьких треугольников

Док-во для маленького треугольника $\Delta = \Delta abc$



Введем полярные геодезические координаты (x, y) с центром в a . Т.е. b и c имеют угловые коорд. 0 и α

Обозначения: X, Y - координатные коме, $G = |Y|$.

$$Z = \frac{Y}{|Y|} = \frac{Y}{\sqrt{G}}$$

$$S(t) = r(x(t), y(t))$$

$$X = \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$Y = \frac{\partial r}{\partial y}$$

$\underline{S}: [0, L] \rightarrow M$ - натуральная параметризация отрезка $[bc]$

$(x(t), y(t))$ - координаты $S(t)$.

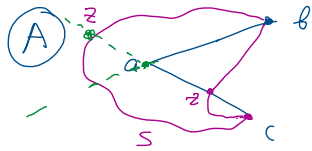
Свойства:

$$1) S'(t) = x'(t) \cdot \underline{X}(S(t)) + y'(t) \cdot \underline{Y}(S(t))$$

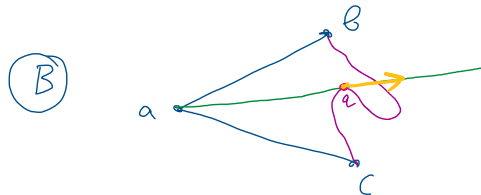
$$2) \underline{y'(t)} > 0 \quad \forall t$$

$$2) \underline{y'(t) > 0} \quad \forall t$$

Доказ-во: Не бывает:



Отрезки пересекаются
дважды в пределах
радиуса инъективности



Две разные геодезические
с общей касательной
в точке z.

Сокр. обозначения:

$$X(t) = X(s(t))$$

$$X'(t) = \frac{\nabla}{dt} X(t) \quad \text{и т. п.}$$

$$S''(t) = \frac{\nabla}{dt} s'(t) = 0 \quad \text{у-е геодезической}$$

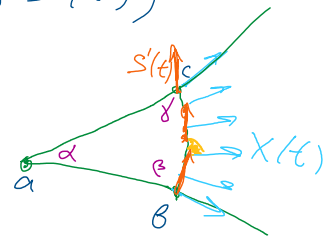
1 шаг Определим $\varphi(t) = \angle(X(t), s'(t))$

Тогда $\underline{\varphi(0) = \pi - \beta}$

$\underline{\varphi(L) = \gamma}$

$$\Rightarrow \boxed{\beta + \gamma - \pi} = \varphi(L) - \varphi(0)$$

$$= \boxed{\int_0^L \varphi'(t) dt}$$



2 шаг

Преобразует $\varphi'(t)$.

Лемма:

$$\boxed{\varphi' = -\langle X', z \rangle}$$

$$X' = -\varphi' \cdot z$$

лемма : $\varphi = \angle X, z$

До-во: $\cos \varphi = \langle X, s' \rangle$ (*)

1) дифференцируем: (*)

$\varphi = \varphi(t)$
 $\dot{\varphi} = \varphi'(t)$
 $\dots$

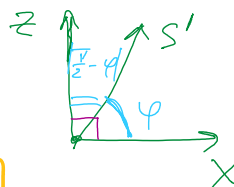
$$-\sin \varphi \cdot \varphi' = \underbrace{\langle X', s' \rangle} + \underbrace{\langle X, s'' \rangle}_{\overset{0}{\parallel} \text{ (у р-е геодезической)}}$$

2) Исследует $\langle X', s' \rangle$

$$|X| \equiv 1 \Rightarrow X' \perp X \Rightarrow \underline{X' = \psi \cdot Z}$$

$$\underline{\langle X', s' \rangle} = \psi \cdot \langle Z, s' \rangle = \psi \cdot \cos \angle(Z, s') =$$

$$\underline{\underline{= \psi \cdot \sin \varphi}}$$



3) Итак $\underline{-\sin \varphi \cdot \varphi' = \psi \cdot \sin \varphi}$

$$\Rightarrow \varphi' = -\psi = -\langle X', Z \rangle$$

↑ из равенства $X' = \psi \cdot Z$



3 шаг

Мы знаем:

$$\underline{\pi - \beta - \gamma} = - \int \varphi' dt = \underline{\int \langle X', Z \rangle dt} \quad \left(\begin{array}{l} \text{поменяли} \\ \text{знак} \end{array} \right)$$

Выразим $\langle X', Z \rangle$ через $\sqrt{g}$ и $(\sqrt{g})'_x$.

• 1) $X' = \frac{D}{dt} X = \underbrace{\nabla_{s'}}_{s' = x' \cdot X + y' \cdot Y} X = x' \cdot \underbrace{\nabla_X X}_{\overset{0}{\parallel} \text{ в полярн. коорд.}} + y' \cdot \nabla_Y X$

(иногда): $\underline{\nabla \cdot X} = \nabla \cdot \underline{X} = \nabla \cdot \underline{X} = \underline{\nabla \cdot X}$

(повтор): $\boxed{\nabla_Y X} = \nabla_X Y = \nabla_X (\sqrt{G} Z) = \boxed{(\sqrt{G})'_x Z}$

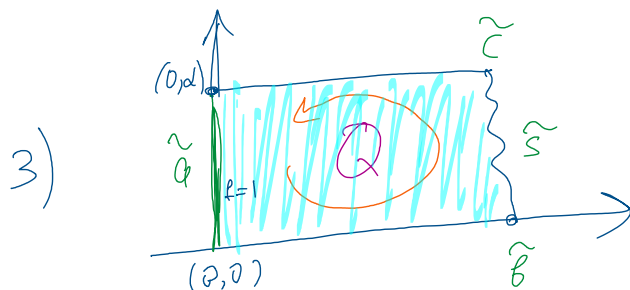
$\langle X', Z \rangle = (\sqrt{G})'_x$

2) Итак,

$$\pi - \beta - \gamma = \int_0^L y'(t) \cdot (\sqrt{G})'_x \Big|_{\substack{x=x(t) \\ y=y(t)}} dt =$$

$$= \int_{\tilde{S}} f(x, y) dy,$$

где $\tilde{S} = \text{карта}(S)$, $f = (\sqrt{G})'_x$ продолженное
как решение
диф. ур-а
 $f'' = -K f$



$\boxed{Q := \text{карта}(\Delta)}$

$f(0, y) = (\sqrt{G})'_x|_{x=0} = 1$

Рассмотрим $\int_{\partial Q} f(x, y) dy$

По верхней и нижней стороне $\int = 0$

По правой стороне $\tilde{S}$ $\int = \pi - \beta - \gamma$ (из предыдущего)

По левой стороне $\int = -\alpha$, так как $\boxed{f(0, y) = 1}$

Итак $\int_{\partial Q} f(x, y) dy = \pi - \alpha - \beta - \gamma$

По формуле Грина (Гюкса).

$f = (\sqrt{G})'_x$

$$\int_{\partial Q} f(x, y) dy \stackrel{\downarrow}{=} \int_Q \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = f = (\sqrt{G})'_x$$

$$= \int_Q (\sqrt{G})''_{xx} dx dy \stackrel{\downarrow}{=} - \int_Q K \underbrace{\sqrt{G}}_{\substack{\text{''} \\ dA}} dx dy$$

$$= - \int_{\Delta} K dA$$

$$\int dA = \int \sqrt{\det g_{ij}} dx dy$$

Теорема доказана!



КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 8