

Пример: подуровни и надуровни (упражнение)

19 апреля 2021 г. 20:16

Пример

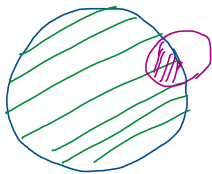
Пусть M - гладкое многообразие

$f: M \rightarrow \mathbb{R}$ - гладкая функция

$c \in \mathbb{R}$ - регулярное значение.

Тогда $f^{-1}([c, +\infty))$ и $f^{-1}((-\infty, c])$ -
гладкие многообразия с краем $f^{-1}(c)$.

$\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 1$. - рег. значение.



Теорема о воротнике (информация)

Monday, April 19, 2021 11:09 PM

Теорема Пусть M — гладкое многообразие с краем,
 M^+ — результат приклеивания
 $\partial M \times \mathbb{R}_+$ к M по отображению $(x, 0) \rightarrow x$.



Тогда на M^+ есть дифференциальная структура, согласованная с M .

Следствие $\forall$ n -мерное мн-е с краем вкладывается
в гладкое мн-е без края той же размерности,
как подмногообразие, ограниченное гладкой
гиперповерхностью ∂M .

Для формальной полноты добавим это свойство
в определение гладкого многообразия с краем

$$\partial M \subset M \subset M^+ \\ \partial M = \begin{cases} \text{граница } M \text{ в } M^+ \\ \text{край в смысле } n\text{-мн-е с краем.} \end{cases}$$

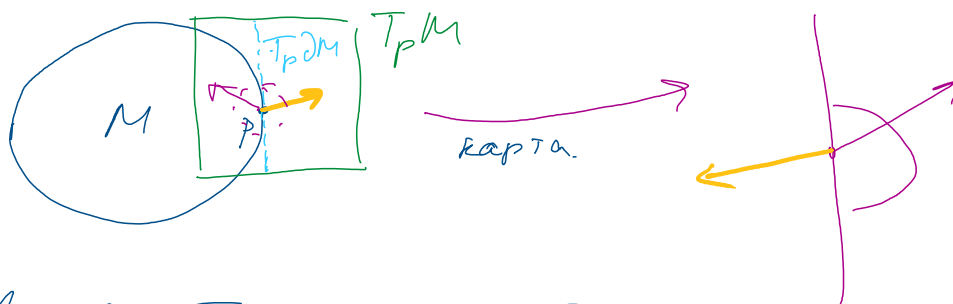
Касательное пространство

19 апреля 2021 г. 20:42

Опр Пусть M — гладкое многообразие с краем, $p \in M$.

Касательное пространство $T_p M = T_p M^+$,

где M^+ — продолжение M за край
(как в т. о. воротнике).



Свойства $T_p M$ для $p \in \partial M$:

1) $T_p M \cong \mathbb{R}^n$

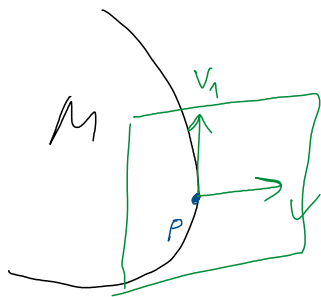
2) $T_p(\partial M)$ — гиперплоскость в $T_p M$.

Она разбивает $T_p M$ на 2 части:

векторы, направленные **внутрь** и **наружу**

Теорема Если M ориентируемо, то ∂M тоже

D-во



$p \in \partial M$.

Пусть $v_1, \dots, v_{n-1}$ — базис $T_p M$

Выберем $v \in T_p M$, направленный наружу, и положим

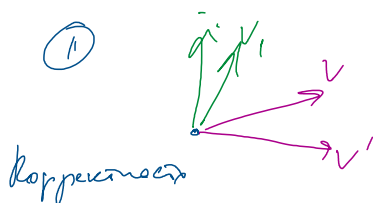
$$\underline{\tau_{\partial M}}(v_1, \dots, v_{n-1}) = \underline{\tau_M}(v, v_1, \dots, v_{n-1})$$

Опр

$\tau_{\partial M}$ — каноническая ориентация края

Теорема Опр-е ориентации края корректно, это действительно ориентация края.

①



$$(v, v_1, \dots, v_{n-1}) \rightsquigarrow (v', v_1, \dots, v_{n-1}).$$

матрица перехода.

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ * & & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_1 > 0 \Rightarrow \det \geq 0.$$

② Согласованность при фикс. точке

$$(v_1, \underbrace{v_1, \dots, v_{n-1}}_{\text{basis}}) \rightsquigarrow (v_1, \underbrace{v_1', \dots, v_{n-1}'}_{\text{basis}})$$

$$1 \quad \underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{n-1} \quad \dots \quad \underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_{n-1}$$

Период: $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \right) \leftarrow$ переход от $(v_1, \dots, v_{n-1})$
к $(v'_1, \dots, v'_{n-1})$.

③ Непрерывность: локально, даются векторы
$$v = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

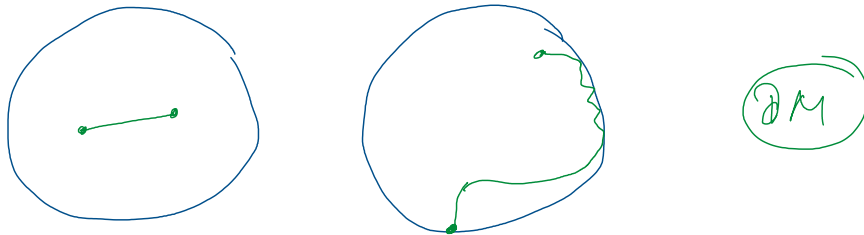


Подмногообразия

19 апреля 2021 г. 20:46

Опр Подмногообразие ^(с краем) — образ вложения

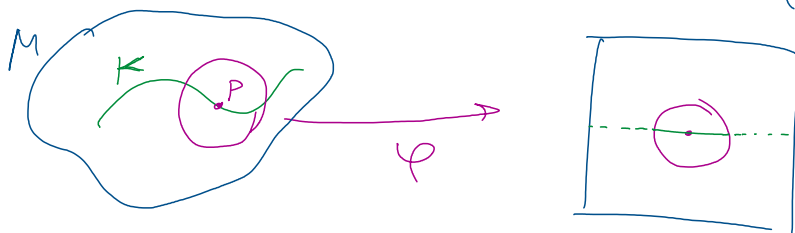
Примеры



Опр Пусть M^n — гладкое многообразие с краем, $K \subset M$.

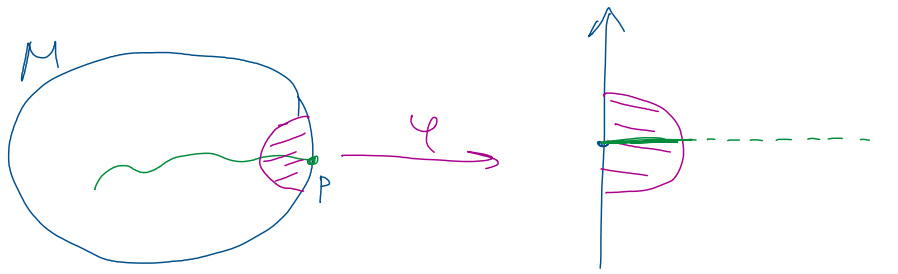
K — правильно вложенное подмногообразие размерности k , если

(1) $\forall p \in K \setminus \partial M \quad \exists$ карта $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \mapsto p$,
т.е. $\varphi(K \cap U) = \mathbb{R}^k \cap \varphi(U)$



(как в определении для мног-ий без края).

(2) $\forall p \in K \cap \partial M \quad \exists$ карта $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, $u \mapsto p$
 $\varphi(K \cap U) = \mathbb{R}_+^k \cap \varphi(U)$



Свойства:

Если K правильно вложено, то

(1) оно действительно подмногообразие с краем,

! (2) $\partial K = K \cap (\partial M)$.

Дважды регулярный прообраз

19 апреля 2021 г. 20:46

Напоминание Пусть $f: M^m \rightarrow N^n$ — гладкое отображ.

Точка $q \in N$ — регулярное значение f ,

если $\forall p \in f^{-1}(q)$

$df_p f: T_p M \rightarrow T_q N$ — сюръекция

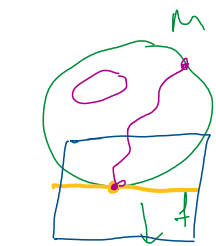
Теорема о регулярном прообразе: Если q — регулярное значение, то $f^{-1}(q) \subset M$ — гладкое подмн-е размерности $m-n$

Теорема

Пусть M^m — гладкое мн-е с краем

N — без края

$f: M \rightarrow N$ — гладкое отображ.



$q \in N$ — регулярное значение и для f , $(m \rightarrow n)$
и для $f|_{\partial M}$, $(m-1 \rightarrow n)$.

Тогда $f^{-1}(q) \subset M$ — правильно вложенное подмногообразие размерности $m-n$.

D-во

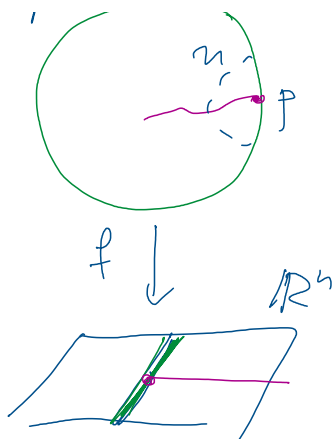
Как в г. о трансверсальном пересечении.

$p \in f^{-1}(q) \cap (\partial M)$



Есть $h: U \rightarrow \mathbb{R}$ —

для 1-й координаты.



Здесь $h: U \rightarrow \mathbb{K} -$

f - 1-я координата
в стандартной карте.

Можно считать, что $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$

Добавим $g: U \rightarrow \mathbb{R}^{m-n-1}$ т.д.

$F = (h, f, g)$ - невоплощено
в т. p

$$d_p F = \underbrace{(d_p h, d_p f)}_{\text{можно выделить}} \underbrace{d_p g}_{\text{можно выделить}}$$

$$\dim \ker(\dots) = \dim(\ker(d_p h) \cap \ker d_p f)$$

$$\begin{aligned} A = \dim d_p f &= m-n. \\ B = \dim d_p h &= m-1 \end{aligned} \Rightarrow \dim A \cap B = \begin{cases} m-n, & \text{если } B \subset A \\ m-n-1, & \text{иначе} \end{cases}$$

невозможно

$f|_{\partial M}$ - рег. в точке p.

$$\dim \ker(d_p f|_{T_p \partial M}) = m-1-n.$$

$$\dim(\ker(d_p f) \cap T_p M)$$

$$\begin{bmatrix} d_p h \\ d_p f \\ d_p g \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{строки лев. нез.} \\ \leftarrow \exists \text{ такие строки} \end{array} \right\}$$

$$F = (h, f, g) : U \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n-1}$$

$$\partial M \rightarrow (0, \dots, \dots)$$

$$f^{-1}(q) \rightarrow \{(\dots, 0, \dots)\} = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n-1}$$

↖ ↗
переставить

$$\rightarrow \mathbb{R}_+^{m-n} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$$



карта.
в меньшей
окрестности.
по т. об
обратной ф-и.

Теорема Сарда и приложения - план

25 апреля 2021 г. 14:43

Теорема Сарда (пока без доказательства)

Теорема Борсука

Теорема (гладкий случай). Не существует гладкой ретракции компактного гладкого многообразия с краем на его край.

Теорема (непрерывный случай для шара). Не существует непрерывной ретракции диска D^n на его край.

Приложения

Теорема Брауэра: Любое непрерывное отображение D^n в себя имеет неподвижную точку.

Теорема: Тожественное отображение S^n в себя не гомотопно id .

Теорема (топологическая инвариантность размерности): R^m не гомеоморфно R^n при разных m, n .

Задачи

1. Топологическая инвариантность размерности (более общая формулировка): Никакое открытое множество в R^n не гомеоморфно открытому множеству в R^m . Следствие: многообразия разных размерностей не гомеоморфны.
2. Топологическая инвариантность края: Замкнутое полупространство не гомеоморфно открытому множеству в R^n . Следствие: При гомеоморфизме между многообразиями с краем край переходит в край.

Теорема Сарда (пока без доказательства)

19 апреля 2021 г. 20:04

Теорема (Сард)

Пусть M^m, N^n — гладкие многообразия, $m \geq n$
 $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение.

Тогда множество регулярных значений f в N
имеет полную меру в любой карте
($\Leftrightarrow$ его дополнение имеет меру 0 в $\forall$ карте)

Случай $m < n$: $f(M)$ — мера 0 в $\forall$ карте N .

Гладкая теорема Борсука

25 апреля 2021 г. 15:55

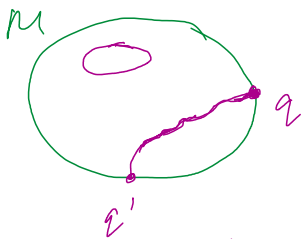
Напоминание. Ретракция - непрерывное отображение

$f: X \rightarrow Y$, где X - топологическое пр-во, $Y \subset X$,

Такое, что $f|_Y = id_Y$

Теорема Пусть M - компактное гладкое многообразие с краем. Тогда $\nexists$ гладкой ретракции из M в ∂M

Д-во. $f: M \rightarrow \partial M$ - гладкая ретракция



$\exists q \in \partial M$ - регулярная точка f .

q - регулярная для $f|_{\partial M} = id$.

$f(q') = q \neq q'$.

$\Rightarrow$ по предыдущей теореме

$f^{-1}(q)$ - 1-мерное гладкое мн-е с краем правильно вложенное

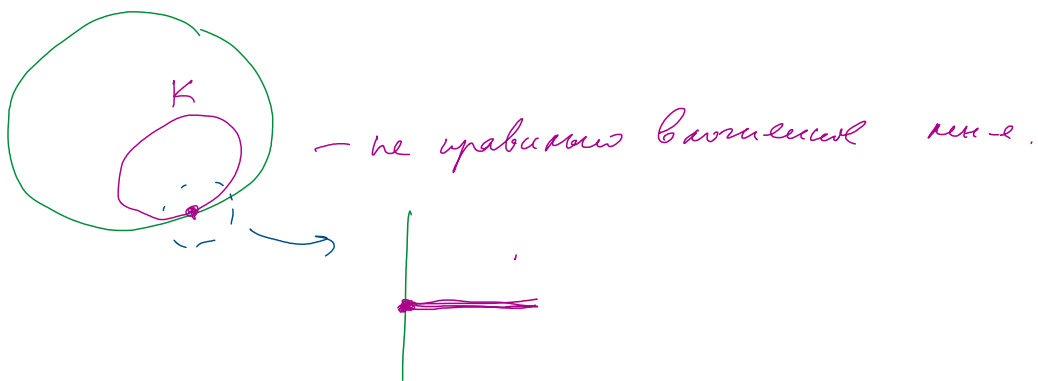
а еще $f^{-1}(q)$ - компакт.

$\Rightarrow f^{-1}(q)$ гомеоморфно несвязному $\cup$ отрезков и окружностей.

прав. влож. $\Rightarrow \partial(f^{-1}(q)) = f^{-1}(q) \cap \partial M = \{q\}$ -
одна точка! $\overset{''}{=} (f|_{\partial M})^{-1}(q)$

Должно быть четное число!

$\square$



Теорема Борсука для D^n

25 апреля 2021 г. 15:55

Теорема Не существует непрерывной ретракции $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$

2-во От противного: пусть $f: D^n \rightarrow S^{n-1}$ — ретракция

План: сгладим f , оставив её ретракцией.

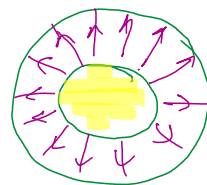
Это даст противоречие с гладкой теоремой

Замечание: Можно сделать это для любой пары $(M, \partial M)$, но мы делаем только для D^n .

1 шаг $\exists$ ретракция $f_1: D^n \rightarrow S^{n-1}$, такая что

$$f_1(x) = \frac{x}{|x|} \text{ при } |x| \geq \frac{1}{2}$$

Далее $f_1(x) = \begin{cases} x/|x|, & |x| \geq \frac{1}{2} \\ \underline{f(2x)}, & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

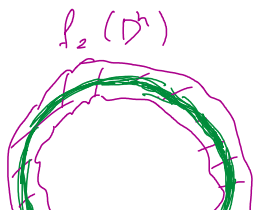


Мы построим ретракцию, гладкую около края.

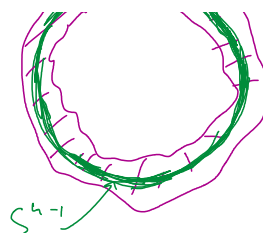
2 шаг $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_2: D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ т.ч. $(\varepsilon = 1/10)$.

$$\forall x \in D^n \quad |f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon$$

и $\boxed{f_2 \in C^\infty}$



2-во: Из теоремы Стоуна-Вейерштрасса.
($\forall$ непрерывную функцию можно приблизить



($\forall$ непрерывную функцию можно приблизить многогоном).

$f_2 \in C^\infty$, но не ретракция, и не в сферу.
Возьмем $\varepsilon = 1/10$

3 шаг

"Склеим" f_1 и f_2

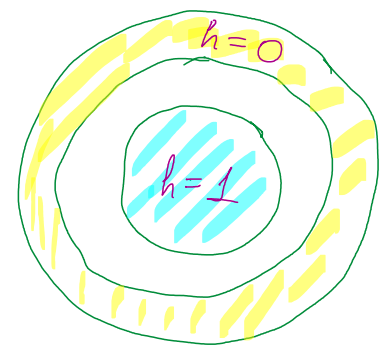
Построим гладкую $h: D^n \rightarrow [0, 1]$

$$h(x) = 1 \quad \text{при } |x| \leq 1/2$$

$$h(x) = 0 \quad \text{при } |x| \geq 3/4$$

$$f_3 = (1-h)f_1 + h \cdot f_2$$

Свойства:



$\forall x$
 $f_3(x) \in [f_1(x), f_2(x)]$
 длина $\leq \varepsilon$

- $f_3 \in C^\infty$
- При $x \in S^{n-1}$, $f_3(x) = f_1(x) = x$
- $|f_3 - f_1| \leq \varepsilon$

правильные значения на сфере

$\Rightarrow f_3(D^n) \neq \emptyset$ для следующего шага

4 шаг

Орбитал:

$$\tilde{f}(x) = \frac{f_3(x)}{|f_3(x)|}$$

Это гладкая ретракция



Теорема Брауэра для D^n

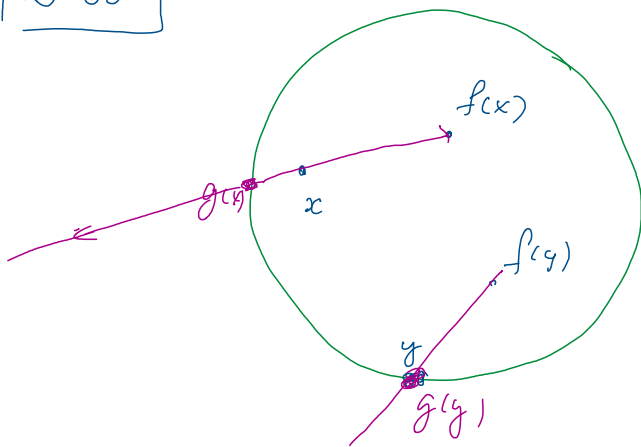
25 апреля 2021 г. 15:55

Теорема (Т. Брауэра для D^n)

$\forall$ непрерывного $f: D^n \rightarrow D^n$

$\exists x \in D^n : f(x) = x$

D-во



От противного: пусть $\forall x \in D^n$
 $f(x) \neq x$.

Строим $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$
как на рисунке.

g — ретракция.

Противоречие с т. Борсука

□

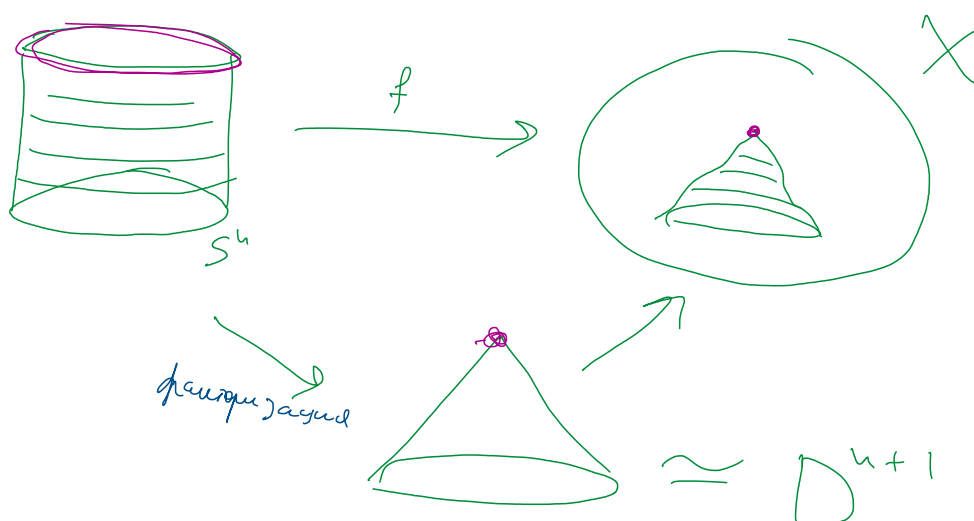
Теорема $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$ не гомотопна постоянному.

З-во: $\forall$ топ. пр-ва X и $\forall$ непрерыв $f: S^n \rightarrow X$ верно

$f \sim \text{const}$

$\Rightarrow$

f продолжается до
 $F: D^{n+1} \rightarrow X$



Т. Борсука: $\text{id}: S^n \rightarrow S^n$ не продолжается до непрерывного $F: D^{n+1} \rightarrow S^n$

$\Rightarrow \text{id}_{S^n} \not\sim \text{const}$.

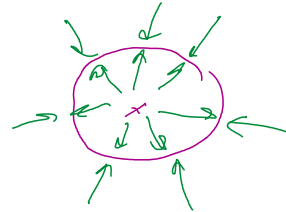


Теорема $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^m$ при $n \neq m$

Д-во. От противного: пусть $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^m$ ($\simeq$ - гомео).

Тогда $\mathbb{R}^n - \{0\} \simeq \mathbb{R}^m - \{0\}$.

Н.У.О. $n < m$.

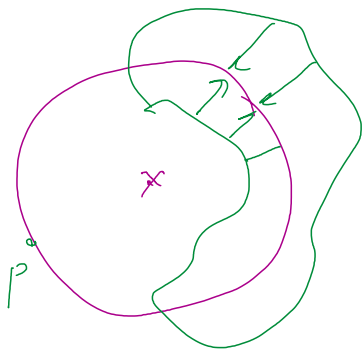


План ① $\exists$ неупр. $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$, не гомотопное постоянному
(подходит f - стандартное включение $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$)

② $\forall$ неупр. $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$ гомотопное постоянному

① и ② $\Rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\} \not\simeq \mathbb{R}^m - \{0\}$.

Док-во ②



1. Сглаживаем.

$\exists \tilde{f}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f} \in C^\infty$
 $|\tilde{f} - f| < \varepsilon$, где $\varepsilon < \min |f(x)|$

$\Rightarrow \tilde{f}: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$.

2. Заменим $\tilde{f}$ на $f_1(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{|\tilde{f}(x)|}$.

$\tilde{f} \sim f_1$

$f_1 \in C^\infty$: $f_1: S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$

$\Rightarrow \exists$ свободная точка
 $p \in S^{m-1} \setminus f_1(S^{n-1})$

$$f_1: S^{n-1} \rightarrow S^{m-1} \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^{m-1}$$

отображен в $\mathbb{R}^{m-1}$.



Задачи

25 апреля 2021 г. 15:57

① Топологическая инвариантность размерности —
короткая формулировка:

Пусть $m \neq n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ и $V \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $U \neq \emptyset$.
Тогда U и V не гомеоморфны.

Следствие: Многообразие разных размерностей
не гомеоморфно.

② Топологическая инвариантность края.

а) $\mathbb{R}_+^n$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$

б) $\mathbb{R}_+^n$ не гомеоморфно никакому открытому
подмн-ву $\mathbb{R}^n$

в) При гомеоморфизме между многообразиями
с краем край переходит в край.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ 11
