Гладкие многообразия
(заметки к курсу)

С.В. Иванов

18 апреля 2025 г.

Аннотация

Заметки к курсу покрывают несколько начальных тем. Порядок изложения некоторых тем изменен.

Содержание

1 Напоминание основных понятий

1.1 Топологические многообразия

Определение 1.1. Пусть n — неотрицательное целое число. *Топологическое многообразие размерности* n — хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой топологии, обладающее свойством *локальной евклидовости*: у каждой точки есть окрестность, гомеоморфная пространству $\mathbb{R}^n$.

Замечание 1.2. Число n — размерность многообразия — входит в определение и должно быть одним и тем же для всех точек. (В частности, несвязное объединение многообразий разной размерности — не многообразие). Для краткости размерность часто указывается верхним индексом: пишут «многообразие M^n» вместо «n-мерное многообразие M».

Размерность многообразия — топологический инвариант: многообразия разных размерностей (кроме пустого множества) не гомеоморфны между собой. Этот нетривиальный факт называется теоремой об инвариантности размерности. У него есть разные доказательства, одно из них будет в курсе.

Замечание 1.3. Существование окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$, равносильно существованию окрестности, гомеоморфной отрытому множеству в $\mathbb{R}^n$. Действительно, если у точки есть окрестность, гомеоморфная открытому множеству в $\mathbb{R}^n$, то в ней есть подокрестность, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$, а шар в $\mathbb{R}^n$ гомеоморфен всему пространству.

Топологическая классификация многообразий

В малых размерностях есть классификация многообразий (всех или только компактных) с точностью до гомеоморфизма. Прежде всего заметим, что у многообразия компоненты связности открыты и сами являются многообразиями. И обратно, несвязное объединение не более чем счётного набора n-мерных многообразий — n-мерное многообразие (счётность множества компонент необходима для наличия счётной базы у объединения). Поэтому задача топологической классификации сводится к классификации связных многообразий. Известные классификационные результаты таковы.

- 0-мерные многообразия — в точности дискретные пространства.
- Любое связное 1-мерное многообразие гомеоморфно прямой или окружности. (Это доказывается элементарно, но не в два слова). Отсюда следует, что любое 1-мерное многообразие — несвязное объединение не более чем счетного набора прямых и окружностей, а любое компактное 1-мерное многообразие — несвязное объединение конечного набора окружностей.
- Любое компактное связное 2-мерное многообразие гомеоморфно либо сфере, либо сфере с несколькими ручками, либо сфере с несколькими плёнками. Доказательство основывается на (сложной) теореме о триангулируемости двумерных многообразий и комбинаторном исследовании триангуляций. Негомеоморфность разных типов поверхностей доказывается либо с помощью «наглядно очевидных» свойств ориентируемости и эйлеровой характеристики, либо средствами алгебраической топологии.
- В размерности 3 и далее подобного «списка всех многообразий» не существует, но имеются классификационные результаты, описывающие многообразия в терминах разложения на более простые «блоки». Один из таких результатов — геометризационная гипотеза Тёрстона, доказанная Перельманом.

1.2 Гладкие многообразия

Далее слово «гладкий» всюду подразумевает класс гладкости C^∞.

Определение 1.4. Пусть M^n топологическое многообразие. *Картой* или *локальной системой координат* на M называется пара (U,φ), где $U\subset M$ — открытое множество, а $\varphi\colon U\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм между U и открытой областью $\varphi(U)\subset\mathbb{R}^n$. Отображения φ и $\varphi^{-1}\colon\varphi(U)\to M$ тоже называются картами.

Множество U называется *носителем* карты (U,φ). Слово «носитель» обычно пропускают, говоря, например «множество содержится в карте» вместо «содержится в носителе карты». Если носитель содержит точку x, то карту называют «картой в окрестности x».

Для двух карт (U,φ) и (V,ψ) *отображением перехода* (или *функцией замены координат*) между ними называется отображение

$$\tau_{\varphi\psi}:=\psi\circ\varphi^{-1}\colon\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V).$$

Карты называются *гладко согласованными*, если оба отображения $\tau_{\varphi\psi}$ и $\tau_{\psi\varphi}$ гладкие. Карты, носители которых не пересекаются, всегда гладко согласованы.

Набор карт, носители которых покрывают всё многообразие, называется *атласом. Гладкий атлас* — атлас, в котором каждые две карты гладко согласованы. *Дифференциальная структура* — максимальный по включению гладкий атлас. *Гладкое многообразие* — топологическое многообразие с заданной на нём дифференциальной структурой.

Нетрудно доказать, что для любого гладкого атласа существует единственный содержащий его максимальный гладкий атлас — он состоит из всевозможных карт, которые гладко согласованы с каждой картой из данного атласа. Таким образом, дифференциальную структуру на многообразии можно задать, указав один гладкий атлас. Два гладких атласа задают одну и ту же дифференциальную структуру тогда и только тогда, когда их объединение — тоже гладкий атлас.

Соглашение. Если на рассматриваемом многообразии M зафиксирована дифференциальная структура, то «картами» называют только карты, принадлежащие этой структуре (а не произвольные локальные гомеоморфизмы в $\mathbb{R}^n$).

Примеры и конструкции

Обычно гладкие многообразия строятся не описанием гладкого атласа «вручную», а применением одной из стандартных конструкций. Основные конструкции таковы:

- **Открытые области.** Любое открытое множество $U\subset\mathbb{R}^n$ является гладким многообразием. Дифференциальная структура определяется одной картой: включением $U\hookrightarrow\mathbb{R}^n$.

  Более общо, открытое подмножество U гладкого многообразия M тоже является гладким многообразием. Картами дифференциальной структуры U являются те карты M, носители которых содержатся в U.

- **Произведения.** Если M и N — гладкие многообразия, то на произведении $M\times N$ естественно определена структура гладкого многообразия размерности $m+n$, которая строится из произведений карт на M и N.

- **Подмногообразия.** Пусть M^n — гладкое многообразие. Множество $K \subset M$ называется *k-мерным гладким подмногообразием* (где $0 \le k \le n$), если выполняется следующее условие: для любой точки $x \in K$ существует такая карта (U, φ) из дифференциальной структуры M, что $x \in U$ и

  $$\varphi(U \cap K) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k.$$

  Здесь в правой части подразумевается, что $\mathbb{R}^k$ вложено в $\mathbb{R}^n$ стандартным образом.

  Такое подмножество K естественным образом получает дифференциальную структуру: гладкий атлас состоит из всевозможных карт вида $(U \cap K, \varphi|_{U \cap K})$, где (U, φ) — карта на M описанного выше типа.

  Гладкие подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ имеют простое геометрическое описание: это такие подмножества, которые локально совпадают с гладкими графиками. Под *гладким графиком* здесь понимается такое подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое при некотором ортогональном преобразовании переходит в график гладкой функции $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$.

  Отметим, что n-мерные подмногообразия n-мерного многообразия — в точности его открытые подмножества.

Замечание 1.5. Можно строить гладкие многообразия «с нуля», не имея структуры топологического многообразия. А именно, пусть X — произвольное множество, $\{U_i\}$ — его покрытие подмножествами, и для каждого i задано инъективное отображение $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ так, что все образы $\varphi_i(U_i)$ открыты в $\mathbb{R}^n$ и все отображения вида $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ определены на открытых множествах и гладкие. Тогда на существует единственная топология, для которой каждое отображение φ_i является гомеоморфизмом на образ. Если эта топология хаусдорфова и имеет счетную базу (эти свойства надо проверять отдельно), то X становится многообразием, а отображения φ_i — картами гладкого атласа.

1.3 Гладкие отображения

Определение 1.6. Пусть M^m и N^n — гладкие многообразия, $f : M \to N$ — отображение, (U, φ) и (V, ψ) — карты на M и N соответственно. *Координатным представлением* f в данных картах называется отображение

$$f_{\varphi\psi} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

с естественной областью определения $\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m$ и значениями в $\mathbb{R}^n$. Отображение f называется *гладким*, если все его координатные представления определены на открытых множествах и являются гладкими в обычном смысле из анализа. Класс гладких отображений из M в N обозначается $C^\infty(M, N)$.

Условие «определены на открытых множествах» обеспечивает непрерывность отображения f и осмысленность понятия гладкости, которая требуется далее в определении.

Следующее предложение показывает, что гладкость отображения достаточно проверять в сколь угодно малой окрестности каждой точки и в выбранных картах.

Предложение 1.7. *Отображение $f : M \to N$ гладкое тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in M$ существуют карты (U, φ) и (V, ψ) для M и N соответственно такие, что $x \in U$, $f(U) \subset V$, и координатное представление $f_{\varphi\psi}$ гладкое.*

Следствие 1.8 (локальность свойства гладкости). *Пусть M, N — гладкие многообразия, $\{U_i\}$ — отрытое покрытие M. Пусть отображение $f\colon M \to N$ таково, что для каждого i сужение $f|_{U_i}$ гладкое. Тогда f гладкое.*

Рассматривая координатные представления в подходящих картах, легко доказать следующие свойства, которых достаточно для проверки гладкости отображений в большинстве случаев:

- Тождественное отображение гладкого многообразия в себя — гладкое.
- Композиция гладких отображений — тоже гладкое отображение.
- Для отображений между открытыми областями евклидовых пространств гладкость эквивалентна обычной гладкости в смысле анализа.
- Карты дифференциальной структуры и обратные к ним отображения — гладкие.
- Проекции произведения $M \times N$ на сомножители — гладкие отображения.
- Пусть M, N_1, N_2 — гладкие многообразия, $f = (f_1, f_2)$ — отображение из M в $N_1 \times N_2$. Тогда гладкость f равносильна тому, что f_1 и f_2 оба гладкие.
- Сужение гладкого отображения на гладкое подмногообразие — гладкое отображение из этого подмногообразия.
- Пусть $K \subset N$ — гладкое подмногообразие, $f\colon M \to N$ — такое гладкое отображение, что $f(M) \subset K$. Тогда f, рассматриваемое как отображение из M в K, — тоже гладкое.

  И обратно, если отображение $f\colon M \to K$ гладкое, то оно гладкое и как отображение из M в N.

Определение 1.9. *Диффеоморфизм* — гладкая биекция между гладкими многообразиями, обратное отображение которой тоже гладкое. Два многообразия *диффеоморфны*, если между ними существует диффеоморфизм.

Ясно, что диффеоморность гладких многообразий — отношение эквивалентности. Диффеоморфизм $f\colon M \to N$ естественно определяет биекцию между максимальными атласами: каждой карте (U, φ) на M соответствует карта $(f(U), \varphi \circ f^{-1})$ на N. При этом отображения перехода между картами на M — те же, что между соответствующими картами на N. Поэтому у диффеоморфных многообразий дифференциальные структуры неотличимы, и любые свойства, формулируемые в терминах только дифференциальной структуры, одинаковы.

Замечание 1.10. В размерностях, не превосходящих 3, на каждом топологическом многообразии существует дифференциальная структура, единственная с точностью до диффеоморфизма. Другими словами, при $n \le 3$ любое топологическое n-многообразие гомеоморфно некоторому гладкому, и гомеоморфные гладкие n-многообразия диффеоморфны. В старших размерностях оба утверждения неверны.

1.4 Касательное расслоение и дифференцирование

Каждому n-мерному гладкому многообразию M сопоставляется $2n$-мерное гладкое многообразие TM, называемое *касательным расслоением* M, а каждому гладкому отображению $f\colon M \to N$ между гладкими многообразиями — гладкое отображение $Tf\colon TM \to TN$, называемое *касательным отображением* или *производной* f, со следующими дополнительными структурами и свойствами:

- TM — дизъюнктное объединение $\bigsqcup_{x\in M} T_xM$, где T_xM — n-мерное векторное пространство, называемое *касательным пространством M в точке x* или *слоем касательного расслоения над x*.

- Для каждой точки $x \in M$ касательное отображение Tf отображает T_xM в $T_{f(x)}N$, причём соответствующее сужение
$$T_xf = Tf|_{T_xM} \colon T_xM \to T_{f(x)}N$$
линейно. Это отображение часто называется *дифференциалом* f в точке x и обозначается через d_xf вместо T_xf.

- Выполняется теорема о производной композиции: $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$ для любых гладких отображений f и g с подходящими областями определения и значений. Кроме того, $T(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{TM}$ для любого гладкого многообразия M.

- Если $U \subset M$ — открытое множество, то $T_xU = T_xM$ для всех $x \in U$, и TU — открытое множество в TM.

- Для открытой области $U \subset \mathbb{R}^n$ имеется каноническое отождествление $TU = U \times \mathbb{R}^n$, при этом $T_xU = \{x\} \times \mathbb{R}^n$, и векторные операции в T_xU соответствуют операциям в $\mathbb{R}^n$ при естественной биекции $\{x\} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

- Для гладкого отображения $f \colon U \to V$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые области, касательное отображение действует по правилу:
$$Tf(x, v) = (f(x), d_xf(v)),$$
где $d_xf \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — дифференциал отображения в смысле анализа.

Элементы касательного расслоения TM называются *касательными векторами.* Каждый касательный вектор $v \in TM$ принадлежит ровно одному из касательных пространств T_xM, где $x \in M$. Точка x, для которой $v \in T_xM$, называется *точкой приложения* касательного вектора v, а v в этом случае называется *касательным вектором в точке x*. Отображение $\pi\colon TM \to M$, которое сопоставляет каждому касательному вектору его точку приложения, называется *проекцией* касательного расслоения.

Локальные координаты на TM строятся из карт M. А именно, карта (U, φ) определяет диффеоморфизм $T\varphi\colon TU \to T(\varphi(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, который является картой на TM. В этой карте касательный вектор $v \in T_xM$, где $x \in U$, имеет $2n$ координат, из которых первые n штук представляют точку $\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$, а остальные n — координаты вектора v в некотором базисе пространства T_xM.

Операция T («касательный функтор») определяется вышеуказанными свойствами по существу однозначно. Построить касательный функтор можно разными способами — например, определить касательный вектор как правило, сопоставляющее каждой карте, содержащей точку приложения вектора, набор координат вектора так, чтобы они правильно менялись при переходе в другую карту. Другие удобные определения касательного вектора: «общий вектор скорости» класса гладких кривых, «оператор дифференцирования вдоль вектора» гладких функций на многообразии.

Канонические отождествления

Для открытой области $U \subset \mathbb{R}^n$ и точки $x \in U$, касательное пространство $T_xU = \{x\} \times \mathbb{R}^n$ можно отождествить с $\mathbb{R}^n$, забыв точку приложения. Это отождествление используется по умолчанию, например, для гладких числовых функций на многообразии: для гладкой функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ выражение df, как правило, обозначает отображение из TM в $\mathbb{R}$, а не в $T\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Пусть M — гладкое многообразие, K — его гладкое подмногообразие. Рассмотрим отображение включения $i\colon K \to M$. Нетрудно проверить, что в любой точке $x \in K$ производная $d_x i\colon T_xK \to T_xM$ инъективна. Это позволяет отождествить касательное пространство T_xK с его образом $d_x i(T_xK)$ и таким образом считать его линейным подпространством в T_xM. Это отождествление используется всегда при рассмотрении подмногообразий.

Теорема об обратной функции

Теорема 1.11 (об обратной функции)**.** *Пусть M, N — гладкие многообразия одинаковой размерности, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, $x \in M$. Предположим, что дифференциал $d_x f\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ невырожден (т.е. биективен). Тогда существует такая окрестность U точки x в M, что $f(U)$ открыто в N и $f|_U$ — диффеоморфизм между U и $f(U)$.*

Следствие 1.12. *Если гладкое отображение $f\colon M^n \to N^n$ имеет невырожденный дифференциал во всех точках, то оно открытое (т.е. образ любого открытого множества открыт).*

Следствие 1.13. *Пусть M и N — гладкие многообразия одинаковой размерности. Отображение $f\colon M \to N$ является диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно гладкое, биективное, и его дифференциал о всех точках невырожден.*

1.5 Погружения и вложения

Определение 1.14. Пусть M^m и N^n — гладкие многообразия. Гладкое отображение $f\colon M \to N$ называется *погружением*, если $d_x f$ инъективно для всех $x \in M$.

Отображение $f\colon M \to N$ называется *вложением*, если оно — погружение и гомеоморфизм между M и $f(M)$.

Определение имеет смысл только при $m \le n$ (иначе погружений не существует), а при $m = n$ погружения — это то же самое, что локальные диффеоморфизмы.

Замечание 1.15. Более точные термины — «гладкое погружение» и «гладкое вложение», но в этом курсе гладкость подразумевается без явного упоминания.

Теорема 1.16. *Локально любое погружение является вложением.*

А именно, если $f\colon M^m \to N^n$ — погружение и $p \in M$, то существует такая окрестность $U \ni p$, что $f|_U$ — вложение.

Более того, существуют такие карты в окрестностях точек p и $f(p)$, что координатное представление f в этих картах на своей области определения совпадает со стандартным вложением $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Следствие 1.17. *Образ любого вложения $f\colon M \to N$ — гладкое подмногообразие в N. При этом f, рассматриваемое как отображение из M в $f(M)$, — диффеоморфизм.*

Следствие 1.18. *Подмножество гладкого многообразия является подмногообразием тогда и только тогда, когда оно совпадает с образом некоторого вложения.*

Теорема 1.19 (касательное пространство образа вложения)**.** *Пусть $f\colon M \to N$ — вложение, $K = f(M)$, $p \in M$, $q = f(p)$. Тогда $T_qK = \operatorname{Im} d_p f$.*

1.6 Прообразы регулярных значений

Определение 1.20. Пусть M и N — гладкие многообразия, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение.

Точка $x \in M$ называется *регулярной точкой* отображения f, если $d_x f$ сюръективно.

Точка $y \in N$ называется *регулярным значением* отображения f, если все точки из её прообраза $f^{-1}(y)$ являются регулярными точками f.

Отображение f называется *субмерсией*, если все точки из M — регулярные точки f.

Определение формально применимо при любых размерностях $m = \dim M$ и $n = \dim N$, но содержательно оно только при $m \geq n$. При $m < n$ регулярных точек не существует, а регулярные значение — те и только те точки из N, которые не принадлежат $f(M)$. Далее предполагается, что $m \geq n$.

Теорема 1.21. *Множество регулярных точек отображения $f\colon M \to N$ открыто в M.*

Теорема 1.22 (о локальном строении субмерсии)**.** *Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, $p \in M$ — его регулярная точка. Тогда существуют такие карты в окрестностях точек p и $f(p)$, что координатное представление f в этих картах на своей области определения совпадает со стандартной координатной проекцией $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.*

Теорема 1.23 (о прообразе регулярного значения)**.** *Если $f\colon M^m \to N^n$ — гладкое отображение и $y \in N$ — его регулярное значение, то $f^{-1}(y)$ — гладкое подмногообразие размерности $m - n$ в M.*

Теорема 1.24 (касательное пространство прообраза)**.** *Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, $q \in N$ — его регулярное значение, $K = f^{-1}(q)$, $p \in K$. Тогда $T_p K = \ker d_p f$.*

2 Паракомпактность и разбиение единицы

2.1 Паракомпактность

Определение 2.1. Пусть X – топологическое пространство. Семейство $\{A_i\}_{i \in I}$ подмножеств X называется *локально конечным*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $U \ni x$, которая пересекается только с конечным набором из множеств A_i.

В дальнейшем будут полезны следующие свойства локально конечных семейств.

Предложение 2.2.

1. *Если семейство множеств $\{A_i\}$ локально конечно, то семейство их замыканий $\{\mathrm{Cl}\, A_i\}$ тоже.*
2. *Объединение локально конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.*
3. *Если семейство множеств $\{A_i\}$ локально конечно, то $\mathrm{Cl}(\bigcup U_i) = \bigcup \mathrm{Cl}\, U_i$.*

Доказательство. Простая общая топология. □

Упражнение. Если X имеет счётную базу топологии, то любое локально конечное семейство его непустых подмножеств не более, чем счетно.

Определение 2.3. Семейство множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ *вписано* в семейство множеств $\{B_j\}_{j \in J}$, если каждое множество A_i содержится в хотя бы одном из множеств B_j (для любого $i \in I$ существует $j \in J$ такое, что $A_i \subset B_j$).

Очевидно, что вписанность семейств множеств — транзитивное отношение.

Определение 2.4. Топологическое пространство X называется *паракомпактным*, если для любого его открытого покрытия $\{U_i\}$ существует открытое покрытие $\{V_j\}$, вписанное в $\{U_i\}$.

Напоминание. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если у любой его точки есть окрестность с компактным замыканием. Топологическое пространство называется *регулярным*, если оно хаусдорфово и в нем выполняется свойство отделимости точек от замкнутых множеств. Легко видеть, что регулярность пространства X равносильна следующему свойству: для любой точки $x \in X$ и любой окрестности $U \ni x$ существует подокрестность $V \ni x$ такая, что $\operatorname{Cl} V \subset U$.

Обозначение. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, $A, B \subset X$. Будем говорить, что A *компактно вложено* в B (обозначение: $A \Subset B$), если $\operatorname{Cl} A \subset B$ и $\operatorname{Cl} A$ компактно.

Лемма 2.5. *Любое многообразие M локально компактно и регулярно. Более того, для любой точки $x \in M$ и любой окрестности $U \ni x$ существует подокрестность $V \ni x$ такая, что $V \Subset U$.*

Доказательство. Пусть M, x, U — такие, как в условии. Из определения многообразия следует, что существует подокрестность U' ($x \in U' \subset U$), гомеоморфная открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi\colon U' \to \varphi(U') \subset \mathbb{R}^n$ — соответствующий гомеоморфизм. Можно считать, что $\varphi(x) = 0$. Пусть $r > 0$ таково, что замкнутый шар $\overline{B} = \overline{B}_r(0)$ содержится в $\varphi(U')$. Положим $V = \varphi^{-1}(B_r(0))$. Множество V открыто в U и, следовательно, в M, так как U открыто в M и φ — гомеоморфизм.

Рассмотрим множество $\overline{V} = \varphi^{-1}(\overline{B})$. Оно компактно как непрерывный образ компакта. Следовательно, оно замкнуто в M, так как компакт в хаусдорфовом пространстве замкнут. Значит $\operatorname{Cl} V \subset \overline{V}$ (на самом деле $\operatorname{Cl} V = \overline{V}$) □

Замечание 2.6. На самом деле любое локально компактное хаусдорфово пространство регулярно. Это доказывается аналогично теореме о регулярности и нормальности хаусдорфовых компактов.

Теорема 2.7. *Любое регулярное топологическое пространство со счетной базой (в частности, любое многообразие) паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X — рассматриваемое пространство, $\{U_i\}$ — открытое покрытие. Докажем, что в него можно вписать локально конечное открытое покрытие.

В силу регулярности, у каждой точки есть окрестность, замыкание которой содержится хотя бы в одном из множеств U_i. Воспользовавшись счётной базой, выберем из таких окрестностей счётное покрытие $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для каждого k выберем такой номер $i(k)$, что $\operatorname{Cl} V_k \subset U_{i(k)}$, и определим

$$W_k = U_{i(k)} \setminus (\operatorname{Cl} V_1 \cup \dots \cup \operatorname{Cl} V_{k-1}).$$

Тогда $\{W_k\}$ — искомое открытое покрытие, вписанное в $\{U_i\}$. Действительно, для точки $x \in X$ обозначим через $k(x)$ наименьший номер k, для которого $x \in \operatorname{Cl} V_k$. Тогда $x \in W_{k(x)}$, и окрестность $W_{k(x)}$ не пересекается с W_k при $k > k(x)$. □

2.2 Лемма о сжатии и покрытия координатными шарами

Теорема 2.8 (лемма о сжатии)**.** *Пусть X — регулярное паракомпактное пространство, $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует открытое покрытие $\{V_i\}$ такое, что $\operatorname{Cl} V_i \subset U_i$ для всех i.*

Доказательство. В силу регулярности, у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, замыкание которой содержится в одном из множеств U_i. Воспользовавшись паракомпактностью, впишем в покрытие такими окрестностями локально конечное открытое покрытие $\{W_j\}$. Для каждого i определим V_i как объединение всех тех множеств из семейства $\{W_j\}$, замыкания которых содержатся в U_i. Тогда $\{V_i\}$ — искомое покрытие.

Действительно, по построению для каждого j существует такое i, что $\operatorname{Cl} W_j \subset U_i$ и, следовательно, $W_j \subset V_i$. Отсюда $\{V_i\}$ — покрытие X. По свойствам локально конечных покрытий, семейство $\{\operatorname{Cl} W_j\}$ локально конечно и $\operatorname{Cl} V_i \subset U_i$. □

Определение 2.9. Пусть M — гладкое многообразие, (U, φ) — карта его дифференциальной структуры. Будем называть множество $B \subset U$ *координатным шаром* этой карты, если $\varphi(B)$ — открытый шар с центром в 0 в $\mathbb{R}^n$, и $\varphi(U)$ содержит соответствующий замкнутый шар (эквивалентно, $B \Subset U$). Множество $B \subset U$ будем называть *координатным шаром*, если оно является координатным шаром какой-нибудь карты.

Теорема 2.10. *В любое открытое покрытие гладкого многообразия можно вписать покрытие координатными шарами.*

Доказательство. Пусть $\{U_i\}$ — данное открытое покрытие. Воспользовавшись паракомпактностью, впишем в него открытое покрытие $\{V_j\}$ множествами, замыкание каждого из которых компактно и содержится в одной карте. Применив к $\{V_j\}$ лемму о сжатии, построим открытое покрытие $\{W_j\}$ такое, что $W_j \Subset V_j$ для всех j. По построению для каждого j существует карта φ_j с носителем V_j. Рассмотрим множество $\varphi_j(W_j)$, его замыкание компактно и содержится в $\varphi_j(V_j)$. Покроем его конечным набором евклидовых шаров $B_{j,1}, \dots, B_{j,k_j}$ такими, что соответствующие замкнутые шары содержатся в $\varphi_j(V_j)$. Тогда объединение наборов шаров $\{\varphi_j^{-1}(B_{j,1}), \dots, \varphi_j^{-1}(B_{j,k_j})\}$ по всем j — искомое покрытие координатными шарами. □

Теорема 2.11 (лемма о сжатии для координатных шаров)**.** *Пусть $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ — покрытие гладкого многообразия M координатными шарами карт $\{\varphi_i\}$. Тогда существует набор $\{B_i'\}$ координатных шаров тех же карт φ_i такой, что $B_i' \Subset B_i$ для всех i, и шары $\{B_i'\}$ тоже покрывают M.*

Доказательство. Применяя к покрытию $\{B_i\}$ лемму о сжатии, построим открытое покрытие $\{W_i\}$ такое, что $W_i \Subset B_i$ для всех i. Пусть r_i — радиус шара $\varphi_i(B_i)$ в $\mathbb{R}^n$. Так как $\varphi(W) \Subset B_{r_i}(0)$, множество $\Phi(W)$ содержится в некотором шаре $B_{r_i'}(0)$, где $0 < r_i' < r_i$. Положим $B_i' = \varphi_i^{-1}(B_{r_i'}(0))$, тогда набор $\{B_i'\}$ удовлетворяет требованиям. □

Комбинируя доказанные выше теоремы, можно построить особо удобные покрытия многообразия парами «концентрических» координатных шаров:

Следствие 2.12. *Для любого гладкого многообразия M^n существуют счетный набор карт $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что*

- $\varphi(U_i) = \mathbb{R}^n$ *для всех i;*
- *координатные шары $B_i' := \varphi_i^{-1}(B_1(0))$ покрывают M;*
- *координатные шары $B_i := \varphi_i^{-1}(B_2(0))$ образуют локально конечное семейство.*

Более того, для любого наперед заданного открытого покрытия $\mathcal{U}$ эти карты φ_i можно выбрать так, что покрытие $\{B_i\}$ вписано в $\mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}$ — открытое покрытие M. По теореме 2.10 построим локально конечное покрытие $\{B_i\}$ координатными шарами, вписанное в $\mathcal{U}$. По теореме 2.11 существует покрытие уменьшенными шарами $B'_i \Subset B_i$ тех же карт. Пусть (V_i, ψ_i) — соответствующие карты. Остается подправить каждую карту ψ_i так, чтобы полученная карта φ_i имела образом всё $\mathbb{R}^n$ и переводила B'_i и B_i в стандартные шары $B_1(0)$ и $B_2(0)$.

С помощью гомотетий можно добиться того, что $\psi_i(B'_i) = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ (для других карт, которые обозначены теми же буквами ψ_i). Пусть $r_i > 1$ и $\varepsilon_i > 0$ таковы, что $\psi_i(B_i) = B_{r_i}(0)$ и $\psi_i(U_i) \supset B_{r_i+\varepsilon_i}(0)$. Нетрудно построить диффеоморфизм $f_i \colon B_{r_i+\varepsilon_i}(0) \to \mathbb{R}^n$, который переводит шар $B_1(0)$ в себя, а шар $B_{r_i}(0)$ — в $B_2(0)$. Положим $U_i = \psi_i^{-1}(B_{r_i+\varepsilon_i}(0))$ и $\varphi_i = f_i \circ \psi_i$, тогда (U_i, φ_i) — искомая карта. □

2.3 Гладкое разбиение единицы

Определение 2.13. Пусть X — топологическое пространство, $f \colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. *Носитель* функции f (обозначение: $\operatorname{supp} f$) — это множество

$$\operatorname{supp} f = \operatorname{Cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Семейство функций $\{f_i\}$ называется *локально конечным*, если их носители образуют локально конечное семейство множеств.

Аналогично определяется носитель для векторнозначных функций.

Теорема 2.14. *Пусть M — гладкое многообразие, $\{f_i\}$ — локальное конечное семейство гладких функций. Тогда поточечная сумма $f = \sum f_i$ всюду определена и является гладкой функцией. Кроме того,* $\operatorname{supp} f \subset \bigcup \operatorname{supp} f_i$.

Доказательство. Первое очевидно из определения локальной конечности. Второе следует из перестановочности объединения и замыкания для локально конечных семейств множеств. □

Теорема 2.15. *Пусть M — гладкое многообразие, $\{U_i\}$ — его открытое покрытие. Тогда существует локально конечное семейство гладких функций $f_i \colon M \to [0,1]$ такое, что* $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ *для всех i, и $\sum f_i = 1$.*

Доказательство. Построим для покрытия $\mathcal{U} = \{U_i\}$ карты $\{(V_i, \varphi_j)\}_{j=1}^{\infty}$ и координатные шары $B'_j \Subset B_j \Subset V_j$ как в следствии 2.12. Пусть $h \colon [0, +\infty) \to [0,1]$ — такая гладкая функция, что $h(t) = 1$ при $t \in [0,1]$ и $h(t) = 0$ при $t \geq \frac{3}{2}$. Для каждого j определим функцию $h_j \colon M \to [0,1]$ равенствами

$$h_j(x) = \begin{cases} h(|\varphi_j(t)|), & x \in V_j, \\ 0, & x \in M \setminus V_j. \end{cases}$$

Функция h_j гладкая, $h_j|_{B'_j} = 1$ и $\operatorname{supp} h_j \subset B_j$. В силу локальной конечности покрытия $\{B_j\}$ определена гладкая функция $H = \sum h_j$. И она положительна, так как $\{B'_j\}$ — покрытие. Рассмотрим функции $g_j = h_j / H$. Они образуют разбиение единицы для покрытия $\{B_j\}$. Сопоставим каждому номеру j номер i_j такой, что $B_j \subset U_{i_j}$ и положим $f_i = \sum_{j : i_j = i} g_j$. Набор функций $\{f_i\}$ удовлетворяет требованиям. □

2.4 Некоторые приложения

Теорема 2.16 (гладкая лемма Урысона)**.** *Пусть M — гладкое многообразие, $A, B \subset M$ — замкнутые множества, $A \cap B = \emptyset$. Тогда существует гладкая функция $f\colon M \to [0,1]$ такая, что $f|_A = 0$ и $f|_B = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим покрытие M двумя открытыми множествами: $U_1 = M \setminus A$ и $U_2 = M \setminus B$. Построим для него разбиение единицы (f_1, f_2). В качестве f подходит f_1. □

Задача. Для любого гладкого многообразия M и замкнутого множества $A \subset M$ существует гладкая функция $f\colon M \to [0, +\infty)$ такая, что $A = f^{-1}(0)$.

Теорема 2.17. *Пусть M — гладкое многообразие, $f\colon M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует гладкая функция $\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$|\widetilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in M$.

Доказательство. В силу непрерывности f, у каждой точки $p \in M$ существует такая окрестность U_y, что $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ для всех $x \in U_p$. Пусть $\{h_p\}$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_p\}$. Определим искомую функцию $\widetilde{f}$ равенством

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{p \in M} f(p) h_p(x). \tag{2.1}$$

Это сумма локально конечного семейства гладких функций, поэтому она корректно определена и гладкая.

Чтобы доказать, что $\widetilde{f}$ приближает f с точностью до ε, зафиксируем $x \in M$, и пусть $p_1, \dots, p_m$ — все такие точки $p \in M$, что $h_p(x) \neq 0$ (список $\{p_i\}$ конечен в силу локальной конечности семейства $\{h_p\}$). Тогда

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{m} f(p_i) h_{p_i}(x).$$

Это средне-взвешенное чисел $f(p_1), \dots, f(p_m)$ с весами $h_{p_1}(x), \dots, h_{p_m}(x)$, сумма которых равна 1. Так как все числа $f(p_i)$ лежат в интервале $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$, в нём лежит и средне-взвешенное значение, то есть $|\widetilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Так как x — произвольная точка из M, теорема доказана. □

Для компактных многообразий равномерного приближения функции как в теореме 2.17 всегда достаточно. В некомпактном случае обычно нужны более тонкие условия на близость функций, которые мы рассмотрим позже.

Замечание. Конструкция из доказательства — частный случай «склеивания функций по разбиению единицы». В общем виде оно определяется следующим образом.

Пусть на многообразии M задано открытое покрытие $\{U_i\}$ и на каждом множестве U_i определена гладкая функция f_i. Пусть $\{h_i\}$ — гладкое разбиение единицы, подчинённое покрытию $\{U_i\}$. Определим функцию $f\colon M \to \mathbb{R}$ равенством

$$f(x) = \sum_i h_i(x) f_i(x), \qquad x \in M,$$

где выражение $h_i(x)f_i(x)$ считается равным 0 при $x \notin U_i$. Так как $\operatorname{supp} h_i \subset f_i$, каждое слагаемое является гладкой функцией от $x \in M$, и эти функции образуют локально конечное семейство. Поэтому сумма корректно определена, и f — гладкая функция на M. Её описывают словами «функция, склеенная из $\{f_i\}$ по разбиению единицы». Формулу для f обычно записывают без аргументов: $f = \sum h_i f_i$.

В доказательстве теоремы 2.17 эта конструкция применяется к покрытию $\{U_p\}_{p\in M}$ и семейству констант $f_p = f(p)$, определенных на соответствующих областях U_p.

3 Теорема Уитни о вложении

Теорема 3.1 (лёгкая теорема Уитни)**.** *Для любого гладкого многообразия M^n существует вложение в $\mathbb{R}^{2n+1}$, образ которого — замкнутое множество.*

Замечание 3.2. Добавление про замкнутый образ интересно только для некомпактных многообразий, так как образ компактного автоматически замкнут.

Замечание 3.3. Верна и «трудная теорема Уитни»: любое n-мерное многообразие допускает гладкое вложение в $\mathbb{R}^{2n}$.

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству теоремы Уитни.

3.1 Компактный случай: вложение в большую размерность

План доказательства теоремы Уитни для компактного многообразия: сначала вложим многообразие в евклидово пространство большой размерности, а потом уменьшим размерность.

Лемма 3.4. *Пусть M — компактное гладкое многообразие. Тогда для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ существует вложение M в $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. По компактности существует конечное покрытие M координатными шарами $\{B_i\}_{i=1}^k$. Пусть $\{(U_i, \varphi_i)\}$ — карта, для которой $B_i \Subset U_i$. Пусть B_i' — координатный шар той же карты, для которого $B_i \Subset B_i' \Subset U_i$. Построим такую гладкую функцию $h_i \colon M \to [0,1]$, что $h_i|_{B_i} = 1$ и $h_i|_{M\setminus B_i'} = 0$. (Такая функция существует по гладкой лемме Урысона, или можно явно задать её). Определим $f_i \colon M \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ равенством

$$f_i(x) = (h_i(x)\varphi_i(x), h_i(x)),$$

где выражение $h_i(x)\varphi_i(x)$ считается равным 0 при $x \notin U_i$. По построению f_i — гладкое и обладает следующими свойствами:

1. $f_i|_{M\setminus B_i'} = 0$.

2. Если $x \in B_i$, $y \in M$ и $f_i(x) = f_i(y)$, то $x = y$.

   Действительно, если $f_i(x) = f_i(y)$, то $h_i(y) = 1$, откуда $y \in B_i'$ и $\varphi_i(y) = \varphi_i(x)$. Так как φ_i — карта, отсюда следует, что $x = y$.

3. $f_i|_{B_i}$ — гладкое вложение.

   Действительно, для $x \in B_i$ имеем $f_i(x) = (\varphi_i(x), 1)$, откуда следует наличие гладкого обратного отображения $\varphi_i(B_i) \to B_i : (\xi, t) \mapsto \varphi^{-1}(\xi))$.

Определим $F\colon M \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})^k \cong \mathbb{R}^{(n+1)k}$ равенством

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)).$$

Из свойств отображений f_i следует, что F — искомое вложение. Действительно, второе свойство обеспечивает инъективность, а третье — невырожденность производной, таким образом F — инъективное погружение. Так как M компактно, любое инъективное погружение является вложением. □

3.2 Множества меры ноль

Вспомним, что в $\mathbb{R}^n$ мера Лебега совпадает с n-мерной мерой Хаусдорфа. Отсюда следует, что

- Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0 тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует счётный набор $\{A_i\}$ подмножеств $\mathbb{R}^n$ такой, что $A \subset \bigcup A_i$ и
$$\sum (\operatorname{diam} A_i)^n < \varepsilon.$$
- Если $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру 0 и $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ гладкая (более общо, локально липшицева), то $f(A)$ тоже имеет меру 0.

Определение 3.5. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Будем говорить, что множество $A \subset M$ *имеет меру 0*, если оно имеет меру 0 в любой карте, то есть для любой карты (U, φ) многообразия M верно, что $\varphi(A \cap U)$ имеет меру 0 в $\mathbb{R}^n$.

Определение нулевой меры имеет смысл несмотря на то, что выделенной меры на многообразии нет. Из упомянутых выше свойств следует, что свойство меры 0 достаточно проверить для любого атласа многообразия M (не обязательно максимального).

Главное для нас свойство: дополнение множества меры 0 непусто и, более того, всюду плотно. Как обычно, мы говорим, что некоторое свойство выполняется для *почти всех* точек многообразия, если оно верно для всех точек, кроме некоторого множества меры 0.

Лемма 3.6. *Пусть M^m и N^n — гладкие многообразия, $m < n$, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение. Тогда $f(M)$ имеет меру 0 в N.*

Доказательство. С помощью счётной базы многообразий и счётной аддитивности меры Лебега утверждение сводится к такому: Пусть $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, $K \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество, тогда $f(K)$ имеет меру ноль в $\mathbb{R}^n$.

В силу компактности K имеет конечную m-мерную меру Хаусдорфа, а отображение $f|_K$ липшицево. Отсюда следует, что $f(K)$ имеет конечную m-мерную меру Хаусдорфа и, как следствие, нулевую n-мерную меру. □

3.3 Понижение размерности

Лемма 3.7 (понижение размерности)**.** *Пусть $F\colon M^n \to \mathbb{R}^N$ — инъективное погружение, $N > 2n+1$. Тогда существует такой единичный вектор $v \in \mathbb{R}^N$, что $\mathrm{pr}_{v^\perp} \circ F$ — тоже инъективное погружение. Здесь $\mathrm{pr}_{v^\perp}$ — ортогональная проекция вдоль вектора v на его ортогональное дополнение.*

Более того, в качестве v подходит почти любой вектор из сферы S^{N-1}.

Доказательство. Пусть Σ_1 — множество тех $v \in S^{N-1}$, для которых $\mathrm{pr}_{v^\perp} \circ F$ не инъективно. Ясно, что $v \in \Sigma_1$ тогда и только тогда, когда

$$v = \frac{F(x) - F(y)}{|x-y|} =: f_1(x,y)$$

для некоторых $x, y \in M$, $x \neq y$. То есть Σ_1 — множество значений определенного выше отображения $f_1 \colon M \times M \setminus \Delta \to S^{N-1}$, где Δ — диагональ в $M \times M$. Так как f_1 гладкое и $\dim(M \times M) = 2n < N-1$, множество Σ_1 имеет меру 0 в S^{N-1}.

Пусть Σ_2 — множество тех $v \in S^{N-1}$, для которых $\mathrm{pr}_{v^\perp} \circ F$ — не погружение. Ясно, что $v \in \Sigma_1$ тогда и только тогда, когда $v = dF(v)/|v|$ для некоторого ненулевого касательного вектора $v \in TM$. Значит Σ_2 — образ отображения $f_2 \colon TM \setminus 0_{TM} \to S^{n-1}$, заданного равенством $f_2(v) = dF(v)/|v|$. Так как f_2 гладкое и $\dim(TM) = 2n < N-1$, множество Σ_2 имеет меру 0 в S^{N-1}.

Осталось заметить, что для требуемого условия подходит любой вектор v из дополнения множества $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ в S^{N-1}. $\square$

Доказательство теоремы 3.1 для компактного M. По лемме 3.4 построим вложение M в $\mathbb{R}^N$ для большого натурального N. Затем, пока $N > 2n+1$, уменьшаем N с помощью предыдущей леммы. В силу компактности M полученное инъективное погружение является вложением. $\square$

3.4 Некомпактный случай: построение инъективного погружения

Теперь начнем доказательство теоремы для общего (некомпактного) случая. В этом разделе построим инъективное погружение M в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Построим локально конечные покрытия M координатными шарами $B_i \Subset B_i'$ как в следствии 2.12, и пусть (U_i, φ_i) — соответствующие карты, для которых $\varphi(B_i)$ и $\varphi_i(B_i')$ шары в $\mathbb{R}^n$ с центрами в 0 и радиусами 1 и 2 соответственно. Для каждого i построим отображение $f_i \colon M \to \mathbb{R}^{n+1}$ как в доказательстве леммы 3.4.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $V_k = B_1 \cup \dots \cup B_k$. По индукции построим последовательность отображений $F_k \colon M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ с такими свойствами:

1. $F_k|_{V_k}$ — инъективное погружение.
2. F_k и F_{k-1} совпадают на $M \setminus B_k'$.

Из второго условия и локальной конечности покрытия $\{B_k\}$ следует, для каждой точки $x \in M$ последовательность значений $\{F_k(x)\}$ стабилизируется. Более того, для каждой точки $x \in M$ существуют окрестность $W_x \ni x$ и номер $k_0(x)$ такие, что при $k \geq k_0(x)$ все функции $F_k|_{W_x}$ совпадают. Отсюда следует, что существует поточечный предел $F(x) = \lim_{k\to\infty} F_k(x)$, и он будет искомым инъективным погружением.

Осталось построить F_k с требуемыми свойствами. Отображение F_1 определим равенством $F_1(x) = (f_1(x), 0) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$. (Набор нулевых координат добавлен только для единообразия, чтобы область значений всегда была в $\mathbb{R}^{2n+1}$). Далее по индукции, пусть $k \geq 2$ и отображение F_{k-1} уже построено. Определим

$$F_k(x) = P_k(F_{k-1}(x), f_k(x)),$$

где $P_k \colon \mathbb{R}^{3n+2} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ — проектор, который строится в следующей лемме, применяемой к V_k вместо M.

Лемма 3.8 (улучшенная лемма о понижении размерности)**.** *Пусть M — гладкое многообразие, $F\colon M \to \mathbb{R}^N$ — инъективное погружение, $N > 2n+1$. Тогда существует линейное отображение $P\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{2n+1}$ такое, что $P \circ F$ — тоже инъективное погружение, и P тождественно на $\mathbb{R}^{2n+1}$ (которое считается стандартно вложенным в $\mathbb{R}^N$).*

Доказательство. Достаточно построить такой проектор P не в $\mathbb{R}^{2n+1}$, а в $\mathbb{R}^{N-1}$ — потом можно повторять конструкцию до тех пор, пока не получим отображение в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

По предыдущей лемме о понижении размерности можно выбрать единичный вектор $v \in \mathbb{R}^N$ так, что $v \notin \mathbb{R}^{N-1}$ и $G := \mathrm{pr}_{v^\perp} \circ F$ — инъективное погружение. Образ отображения G — гиперплоскость $v^\perp \subset \mathbb{R}^N$, причем так как $v \notin \mathbb{R}^{N-1}$, сужение $\mathrm{pr}_{v^\perp}$ на $\mathbb{R}^{N-1}$ — биекция между $\mathbb{R}^{N-1}$ и $v^\perp$. Пусть H — обратное отображение этой линейной биекции. Положим $P = H \circ G$, оно подходит. □

Таким образом, мы доказали, что у любого гладкого многообразия размерности n есть инъективное погружение в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

3.5 Некомпактный случай: окончание доказательства

Осталось переделать инъективное погружение из предыдущего раздела во вложение с замкнутым образом.

Определение 3.9. Пусть X, Y — топологические пространства. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если для любого компакта $K \subset Y$ верно, что $f^{-1}(K)$ компактно.

Пример 3.10. Рассмотрим вещественную функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Она не является собственным отображением из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, но является собственным отображением из $\mathbb{R}$ в $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Упражнение. Непрерывное отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является собственным тогда и только тогда, когда $|f(x)| \to \infty$ при $|x| \to \infty$.

Теорема 3.11. *Пусть X — произвольное топологическое пространство, Y — локально компактное хаусдорфово, $f\colon X \to Y$ — собственное отображение. Тогда его образ $f(X)$ замкнут в Y, а если f ещё и инъективно, то оно — топологическое вложение.*

Доказательство. Сначала докажем, что $f(X)$ замкнуто. Пусть $y \in Y \setminus f(X)$, по локальной компактности найдем у точки y окрестность U с компактным замыканием $K = \operatorname{Cl} U$. Так как f — собственное отображение, множество $A := f^{-1}(K) \subset X$ компактно. Следовательно, $f(A)$ компактно и, следовательно, замкнуто в Y. Значит, $U \setminus f(A)$ — окрестность точки y, и по построению она не пересекается с $f(X)$. Так как y — произвольная точка из $Y \setminus f(X)$, отсюда следует, что $f(X)$ замкнуто в Y.

Теперь предположим, что f инъективно и докажем, что обратное отображение из $f(X)$ в Y непрерывно. Проверим непрерывность f^{-1} в точке $y \in f(X)$. Пусть $U \subset Y$ — окрестность точки y с компактным замыканием $K = \operatorname{Cl} U$. Тогда множество $A := f^{-1}(K)$ компактно, так как f собственное. Следовательно, сужение $f|_A$ — гомеоморфизм между множествами $A \subset X$ и $f(A) = K \cap f(X) \subset Y$ (как непрерывная биекция из компактного пространства в хаусдорфово). В частности, сужение f^{-1} на множество $K \cap f(X)$ непрерывно. Но это множество содержит $U \cap f(X)$, которое открыто в $f(X)$ и содержит y. Следовательно, f^{-1} непрерывно в точке y. □

Лемма 3.12. *Для любого гладкого многообразия M существует гладкое собственное отображение $f\colon M \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Построим локально конечные покрытия M парами координатными шаров $B_i \Subset B_i'$, $i = 1, 2, \dots$. Для каждого i по гладкой лемме Урысона найдем гладкую функцию $h_i \colon M \to [0,1]$ такую, что $h_i|_{B_i} = 1$ и $\operatorname{supp} h_i \subset B_i'$. Функция $f = \sum_{i=1}^{\infty} i h_i$ подходит. Действительно, для любого натурального k множество $f^{-1}([0,k])$ содержится в конечном объединении $\bigcup_{i=1}^{k} B_i$, замыкание которого компактно. □

Завершение доказательства теоремы Уитни. Из теоремы 3.11 следует, что для данного гладкого многообразия M^n достаточно построить собственное инъективное погружение M в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Пусть $F \colon M \to \mathbb{R}^{2n+1}$ — инъективное погружение, построенное в предыдущем разделе. Скомбинировав его с диффеомофизмом между пространством $\mathbb{R}^{2n+1}$ и открытым шаром в нём, можно считать, что $F(M)$ содержится в шаре $B_1(0)$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Определим $G \colon M \to \mathbb{R}^{2n+2}$ равенством $G(x) = (F(x), f(x))$, где $f \colon M \to \mathbb{R}$ — функция из леммы 3.12. Отображение G тоже инъективное погружение, и оно собственное, так как прообраз любого компакта содержится в подуровне функции f. Пусть $P = P_{v^\perp}$ — проекция из леммы о понижении размерности, причем вектор v не пропорционален последнему координатному вектору в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Тогда нетрудно проверить, что $P \circ G$ — тоже собственное отображение. Так как оно инъективное погружение, из теоремы 3.11 следует, что оно вложение с замкнутым образом.

Таким образом, $P \circ G$ — вложение, удовлетворяющее требованиям теоремы Уитни 3.1, и теорема 3.1 доказана. □

4 Нормальное расслоение и трубчатые окрестности

В этом разделе M — k-мерное гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$.

4.1 Нормальное расслоение

Определение 4.1. Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие. Будем называть его *нормальным расслоением* (обозначение: νM) множество всех пар (x, v), где $x \in M$, $v \in \mathbb{R}^n$, и $v \perp T_x M$.

Для фиксированной точки $p \in M$ множество элементов νM вида (p, v) обозначается через $\nu_p M$. Оно естественно отождествляется с ортогональным дополнением $(T_p M)^\perp$ касательного пространства $T_p M$ в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4.2. *νM — n-мерное гладкое подмногообразие в $M \times \mathbb{R}^n$ (и, как следствие, в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$).*

Доказательство. Свойство быть подмногообразием локально, поэтому достаточно проверить его в любой окрестности произвольной точки $(x_0, v_0) \in \nu M \subset M \times \mathbb{R}^n$. В качестве такой окрестности возьмём множество $\Omega := U \times \mathbb{R}^n \subset M \times \mathbb{R}^n$, где $U \subset M$ — окрестность точки x_0, содержащаяся в одной карте.

Пусть $W_1, \dots, W_k$ — касательные векторные поля на U, которые линейно независимы в каждой точке (например, координатные поля карты). Для любой точки $(x, v) \in \Omega$ условие $(x, v) \in \nu M$ равносильна системе уравнений

$$\begin{cases} \langle v, W_1(x) \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle v, W_k(x) \rangle = 0. \end{cases}$$

То есть пересечение $\nu M \cap \Omega$ совпадает с прообразом нуля при отображении $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^k$, определяемом равенством

$$f(x,v) = (\langle v, W_1(x)\rangle, \dots, \langle v, W_k(x)\rangle), \qquad x \in U,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Нетрудно проверить, что это отображение — субмерсия, то есть имеет сюръективный дифференциал в каждой точке (для этого достаточно рассмотреть производные по v при фиксированном x). Следовательно $\nu M \cap \Omega = f^{-1}(0)$ — гладкое подмногообразие в Ω размерности $\dim \Omega - \dim \mathbb{R}^k = n$. □

Определение 4.3 (векторное расслоение)**.** Пусть M^k — гладкое многообразие, $m \in \mathbb{N}$. *Гладкое векторное расслоение* ранга m над M — структура, состоящая из следующих объектов:

- Гладкое многообразие E размерности $k+m$, называемое *тотальным пространством* данного расслоения;
- Гладкое отображение $\pi\colon E \to M$, называемое *проекцией расслоения.* Для точки $x \in M$ прообраз $\pi^{-1}(x)$ называется *слоем* данного расслоения над x и обозначается E_x.
- Для каждой точки $x \in M$ на слое E_x задана структура m-мерного векторного пространства.
- Выполняется *условие локальной тривиальности*: у любой точки из M есть окрестность U, диффеоморфная $U \times \mathbb{R}^m$, причём диффеоморфизм может быть выбран так, что для каждой точки $x \in U$ слой E_x переходит в $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ и это отображение слоя — изоморфизм векторных пространств с учётом отождествления $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ с $\mathbb{R}^m$.

  Эквивалентно, в области $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{x\in U} E_x$ можно выбрать локальные координаты

  $$(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m)$$

  так, что $x_1, \dots, x_k$ — координаты точки из U, а $y_1, \dots, y_m$ — координаты в соответствующем слое, согласованные с векторными операциями.

  Такие локальные координаты или диффеомофизмы с $U \times \mathbb{R}^m$ называются *картами векторного расслоения.*

Нормальное расслоение νM имеет естественную проекцию на M, заданную равенством $\pi(x,v) = x$. Каждый слой $\pi^{-1}(x) = \nu_x M$ естественно отождествляется с линейным подпространством $(T_x M)^\perp \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, это определяет на $\nu_x M$ структуру векторного пространства. То есть векторные операции в $\nu_x M$ выполняются над второй компонентой пары (x,v) при фиксированной первой.

Теорема 4.4. *Нормальное расслоение с определенными выше структурами является гладким векторным расслоением.*

Доказательство. Аналогично касательным векторным полям, *нормальным векторным полем* на M называется гладкое отображение $V \to \nu M$ такое, что $V(x) \in \nu_x M$ для всех $x \in M$. Нормальные векторные поля — это по существу то же самое, что отображения $V \to \mathbb{R}^n$ такие, что $V(x) \perp T_x M$ для всех $x \in M$.

Сначала заметим, что для любых $p \in M$ и $v_0 \in (T_p M)^\perp$ существует нормальное векторное поле V на M такое, что $V(p) = v_0$. Действительно, можно определить

$$V(x) = \mathrm{pr}_{(T_x M)^\perp}(v_0)$$

для всех $x \in M$, где $\mathrm{pr}_{(T_xM)^\perp}$ обозначает ортогональную проекцию на подпространство $(T_xM)^\perp$ в $\mathbb{R}^n$. Нетрудно проверить, что так построенное отображение V гладкое.

Теперь построим в малой окрестности точки p в M набор нормальных полей $V_1, \dots, V_{n-k}$, которые в каждой точке x из окрестности образуют базис пространства $\nu_x M$. Для этого выберем базис $v_1, \dots, v_{n-k}$ в $\nu_p M$ и продолжим каждый вектор v_i до векторного поля V_i. По непрерывности поля V_i сохраняют линейную независимость в достаточно малой окрестности $U \subset M$ точки p.

Теперь построим карту векторного расслоения для νM над U. Определим отображение $\Psi\colon U \times \mathbb{R}^{n-k} \to \nu M$ равенством

$$\Psi(x, y) = \left(x, \sum_{i=1}^{n-k} y_i V_i(x)\right),$$

где $y_1, \dots, y_{n-k}$ — координаты вектора $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Нетрудно проверить, что это диффеоморфизм между $U \times \mathbb{R}^{n-k}$ и множеством $\pi^{-1}(U) \subset \nu M$. Это доказывает условие локальной тривиальности векторного расслоения. $\square$

4.2 Существование трубчатой окрестности

Теорема 4.5. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмногообразие. Тогда существует открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащее M, и гладкое отображение $\pi\colon U \to M$ такое, что для любой $x \in U$ точка $\pi(x)$ — единственная ближайшая к x точка из M (в частности, $\pi(x) = x$ при $x \in M$).*

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что можно построить окрестность U специального «трубчатого» вида: существует непрерывная функция $\rho\colon M \to (0, +\infty)$ такая, что

$$U = \bigcup_{x \in M} B^\perp_{\rho(x)}(x),$$

где $B^\perp_{\rho(x)}(x)$ — шар радиуса $\rho(x)$ с центром x в аффинном нормальном подпространстве $x + (T_xM)^\perp$; при этом все эти шары дизъюнктны, и каждый из них при отображении π переходит в свой центр. Такая окрестность называется *трубчатой окрестностью* многообразия M в $\mathbb{R}^n$.

Перед доказательством теоремы докажем две леммы о ближайших точках. Во-первых, так как M не предполагается замкнутым, вообще говоря, не у каждой точки из $\mathbb{R}^n$ есть ближайшая точка в M. Следующая лемма показывает, что в достаточно малой окрестности многообразия такой проблемы нет.

Лемма 4.6. *Множество точек в $\mathbb{R}^n$, для которых существует хотя бы одна ближайшая точка в M, содержит некоторую окрестность M.*

Доказательство. От M здесь требуется только локальная компактность.

Пусть $p \in M$, и пусть $V \subset M$ — окрестность точки p в M, замыкание которой в M компактно (как следствие, оно совпадает с замыканием V в $\mathbb{R}^n$). Так как V открыто в M, существует открытое $\widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\widetilde{V} \cap M = V$. Пусть $r > 0$ таково, что $\widetilde{V}$ содержит шар $B_{2r}(p)$. Докажем, что множество точек из $\mathbb{R}^n$, имеющих ближайшие точки в M, содержит шар $B_r(p)$. Пусть $x \in B_r(p)$. По компактности существует точка y, ближайшая к x в $\mathrm{Cl}\, V$. При этом $|x - y| < r$, так как $|x - p| < r$. С другой стороны, по неравенству треугольника расстояние от x до любой точки из $M \setminus V$ больше r, откуда y — ближайшая к x среди всех точек M. $\square$

Следующая лемма говорит, что все ближайшие точки в подмногообразии — основания опущенных на него перпендикуляров. (Примечание: обратное верно не всегда).

Лемма 4.7. *Пусть $q \in \mathbb{R}^n$, p — ближайшая к q точка из M. Тогда $q - p \in (T_pM)^\perp$.*

Доказательство. Положим $f(x) = |x - q|^2$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда f — гладкая функция, и её сужение на M достигает минимума в точке p. Следовательно, $d_pf(v) = 0$ для всех $v \in T_pM$. С другой стороны, $d_pf(v) = 2\langle q - p, v\rangle$. Значит, вектор $q - p$ ортогонален любому касательному вектору $v \in T_pM$. □

Доказательство теоремы 4.5. Определим отображение $I: \nu M \to \mathbb{R}^n$ равенством

$$I(x, v) = x + v,$$

для всех $x \in M$ и $v \in (T_xM)^\perp$. Заметим, что это гладкое отображение между гладкими многообразиями νM и $\mathbb{R}^n$ одинаковой размерности n.

Зафиксируем $p \in M$ и рассмотрим точку $(p, 0) \in \nu M$. Легко проверить, что в этой точке отображение I удовлетворяет условиям теоремы об обратной функции. Действительно, производные I в точке $(p, 0)$ по направлениям вдоль подмногообразия

$$M_0 = \{(x, 0) : x \in M\} \subset \nu M$$

порождают подпространство $T_pM \subset \mathbb{R}^n$, а производные I по второй компоненте при фиксированном p порождают $(T_pM)^\perp$. Из теоремы об обратной функции существуют окрестность $W \subset \nu M$ точки $(p, 0)$ в M и окрестность $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ точки p в $\mathbb{R}^n$ такие, что $I|_W$ — диффеоморфизм между W и Ω. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что W содержит множество

$$W_\varepsilon(p) := \{(x, v) \in \nu M : |x - p| < \varepsilon \text{ и } |v| < \varepsilon\}.$$

Такое ε существует, так как топология на νM является топологией подпространства в произведении $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

По лемме 4.6 существует такое $\delta \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, что для любой точки x из шара $B_\delta(p)$ существует точка y, ближайшая к x в M. Докажем, что такая точка y единственна и гладко зависит от x. По лемме 4.7 вектор $v := x - y$ ортогонален T_yM, то есть $(y, v) \in \nu M$ и $x = I(y, v)$. Так как $\delta < \varepsilon/2$, из неравенства треугольника следует, что $|y - p| < \varepsilon$ и $|v| < \varepsilon$, то есть $(y, v) \in W$. Отсюда и из инъективности $I|_W$ следует единственность ближайшей точки $y =: \pi(x)$. Построенное отображение π гладкое, так как оно является композицией I^{-1} и забывания второй координаты.

Обозначим полученный шар $B_\delta(p)$ через U_p. Искомая окрестность U всего многообразия получается объединением окрестностей U_p по всем точкам $p \in M$. Построенные отображения π на разных окрестностях согласованы между собой, так как описываются словами «единственная ближайшая точка в M». □

5 Сглаживание непрерывных отображений

5.1 Сильная C^0-топология Уитни

Для формулировки теорем о сглаживании необходимо выбрать топологию на пространстве непрерывных отображений $C(M, N)$, где M и N — рассматриваемые многообразия. В топологии на пространствах отображений обычно вводят компактно-открытую топологию (которой в анализе соответствует топология равномерной сходимости на компактах). Но нам потребуется другая топология, называемая *сильной топологией Уитни*, которая определяется ниже.

Определение 5.1. Пусть X, Y — топологические пространства. Через $C(X,Y)$ обозначим множество всех непрерывных отображений из X в Y. Для отображения $f \in C(X,Y)$ обозначим через Γ_f его график:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Для открытого множества $U \subset X \times Y$ определим множество $\Gamma_U \subset C(X,Y)$ равенством

$$\Gamma_U = \{f \in C(X,Y) : \Gamma_f \subset U\}.$$

Сильная топология Уитни на $C(X,Y)$ — наименьшая топология, в которой все множества вида Γ_U открыты. Пространство $C(X,Y)$ с этой топологией обозначается $C_s(X,Y)$ или $C^0_s(X,Y)$.

Замечание. Обозначение $C^0_s(X,Y)$ используется только в случае, когда X и Y — гладкие многообразия. Оно намекает на то, что есть определение сильной топологии Уитни на $C^r(X,Y)$ для всех $r \in [0, +\infty]$. Мы это обобщение не рассматриваем.

Замечание. Множества вида Γ_U, где U открыто в $X \times Y$, образуют базу топологии $C_s(X,Y)$. Это следует из равенства $\Gamma_{U\cap V} = \Gamma_U \cap \Gamma_V$ для всех $U, V \subset X \times Y$.

Обозначение. Пусть X — топологическое пространство, Y — метрическое пространство, $f \in C(X,Y)$, $\varepsilon \colon X \to (0, +\infty)$ — непрерывная положительная функция на X. Определим множество $\mathcal{U}_{f,\varepsilon} \subset C(X,Y)$ равенством

$$\mathcal{U}_{f,\varepsilon} = \{g \in C(X,Y) : d_Y(g(x), f(x)) < \varepsilon(x) \text{ для всех } x \in X\}.$$

Теорема 5.2. *Пусть X — многообразие, Y — метрическое пространство, $f \in C(X,Y)$. Тогда всевозможные множества вида $\mathcal{U}_{f,\varepsilon}$, где ε — непрерывная положительная функция на X, образуют базу окрестностей точки f в пространстве $C_s(X,Y)$.*

Замечание. Предположение, что X — многообразие, требуется для разбиения единицы. Вместо этого можно было бы предположить только паракомпактность и нормальность (доказав соответствующую теорему о непрерывном разбиении единицы). Для произвольного топологического пространства X верна такая же теорема, где условие непрерывности функций ε заменено на полунепрерывность снизу.

Доказательство теоремы 5.2. Сначала проверим, что каждое множество $\mathcal{U}_{f,\varepsilon}$ открыто. Для этого заметим, что $\mathcal{U}_{f,\varepsilon} = \Gamma_{U(f,\varepsilon)}$, где множество $U(f,\varepsilon) \subset X \times Y$ определено формулой

$$\Gamma_{U(f,\varepsilon)} = \{(x,y) \in X \times Y : d_Y(y, f(x)) < \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что множество $U(f,\varepsilon)$ открыто в $X \times Y$.

Теперь проверим, что каждое базовое открытое множество $\Gamma_U \subset C_s(X,Y)$, содержащее функцию f, содержит и некоторую окрестность вида $\mathcal{U}_{f,\varepsilon}$. Пусть $p \in X$. Так как U открыто в $X \times Y$ и содержит точку $(p, f(p))$, оно содержит и окрестность вида $V_p \times B_{r_p}(f(p))$, где V_p — некоторая окрестность точки p в X, $B_{r_p}(f(p))$ — шар в Y с центром в $f(p)$ и некоторым радиусом $r_p > 0$. Положим $\varepsilon_p = r_p/2$. В силу непрерывности f существуют такая подокрестность $W_p \subset V_p$ точки p, что $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon_p$ для всех $x \in W_p$. Из неравенства треугольника имеем

$$\{(x,y) \in X \times Y : x \in W_p \text{ и } d_Y(y, f(p)) < \varepsilon_p\} \subset W_p \times B_{r_p}(f(p)) \subset U.$$

Пусть ε — функция на X, полученная склеиванием по разбиению единицы семейства констант $\{\varepsilon_p\}_{p\in X}$, определённых на соответствующих множествах W_p. Тогда из предыдущей формулы следует, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ таких, что $d_Y(y, f(x)) < \varepsilon(x)$, верно, что $(x,y) \in U$. Отсюда следует включение $\Gamma_g \subset U$ для всех $g \in \mathcal{U}_{f,\varepsilon}$, что и требовалось. $\square$

Следствие 5.3. *Если (при тех же условиях) X компактно, то топология $C_s(X,Y)$ совпадает с топологией равномерной сходимости.*

5.2 Теорема о сглаживании

Цель этого раздела — доказать, что непрерывное отображение между гладкими многообразиями можно сколь угодно хорошо приблизить (в смысле сильной топологии Уитни) гладкими отображениями. Начнём с леммы, которая фактически доказывает этот утверждение для случая числовых функций.

Лемма 5.4. *Пусть M — гладкое многообразие и $f\colon M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Пусть $\varepsilon\colon M \to \mathbb{R}$ — положительная непрерывная функция. Тогда существует гладкая функция $\widetilde{f}\colon M \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$|\widetilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$$

для всех $x \in M$.

Доказательство. Доказательство почти такое же, как в теореме 2.17. Пусть $p \in M$. Так как функция ε непрерывна и $\varepsilon(p) > 0$, существуют окрестность $V_p \ni p$ и число $\varepsilon_p > 0$ такие, что $\varepsilon(x) > \varepsilon_p$ для всех $x \in V_p$. По непрерывности f существует подокрестность $U_p \subset V_p$ такая, что $|f(x) - f(p)| < \varepsilon_p$ для всех $x \in U_p$. Отсюда

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon(x)$$

для всех $x \in U_p$. Определим $\widetilde{f}$ склеиванием по разбиению единицы семейства констант $c_p = f(p)$, определённых на соответствующих окрестностях V_p, $p \in M$. Легко проверить (аналогично доказательству теоремы 2.17), что эта функция подходит. □

Теорема 5.5. *Для любых гладких многообразий M и N множество гладких отображений $C^\infty(M,N)$ плотно в $C_s(M,N)$.*

Доказательство. По теореме о вложении можно считать, что N — подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (где $n = 2\dim N + 1$, но это не важно). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — трубчатая окрестность N как в теореме 4.5. Будем считать N метрическим пространством, расстояние в котором получено сужением евклидова расстояния из $\mathbb{R}^n$.

С учётом теоремы 5.2 достаточно проверить, что для любой непрерывной функции $f\colon M \to N$ и любой положительной непрерывной функции $\varepsilon\colon M \to (0,+\infty)$ существует гладкая функция $\widetilde{f}\colon M \to N$ такая, что $|\widetilde{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$ для всех $x \in M$. Уменьшая при необходимости функцию ε, можно считать, что $\varepsilon(x)$ не превосходит толщины трубчатой окрестности в точке x, то есть $B_{\varepsilon(x)}(x) \subset U$ для всех $x \in M$. Пусть $f_1,\dots,f_n$ — координатные функции f как отображения из M в $\mathbb{R}^n$. По лемме 5.4 существуют такие гладкие функции $\widetilde{f}_1,\dots,\widetilde{f}_n\colon M \to \mathbb{R}$, что

$$|\widetilde{f}_i(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2n}$$

для всех $i \in \{1,\dots,n\}$ и всех $x \in M$. Для $x \in M$ определим

$$\widehat{f}(x) = (\widetilde{f}_1(x),\dots,\widetilde{f}_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $|\widehat{f}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon(x)}{2}$, откуда следует, что $\widehat{f}(x) \in U$. Пусть $\widetilde{f}(x)$ — ближайшая точка к $\widehat{f}(x)$ в M, то есть $\widetilde{f}(x) = \pi(\widehat{f}(x))$ в обозначениях из теоремы 4.5. Из свойств трубчатой окрестности следует, что полученное отображение $\widetilde{f}\colon M \to N$ — гладкое. По неравенству треугольника

$$|\widetilde{f}(x) - x| \le 2\,|\widehat{f}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$$

для всех $x \in M$, что и требовалось. □

5.3 Гладкая продолжимость и относительное сглаживание

Определение 5.6. Пусть M, N — гладкие многообразия, $A \subset M$ — произвольное подмножество. Отображение $f\colon A \to N$ называется *локально гладко продолжимым*, если для любой точки $p \in A$ существует окрестность $U_p \ni p$ в M и гладкое отображение $\widetilde{f}_p\colon U_p \to \mathbb{R}$ такое, что $\widetilde{f}_p|_{U_p \cap A} = f|_{U_p \cap A}$.

Отображение $f\colon A \to N$ называется *гладко продолжимым на окрестность*, если существуют открытое множество $U \supset A$ и гладкая функция $\widetilde{f}\colon U \to \mathbb{R}$ такая, что $\widetilde{f}|_A = f$.

Замечание. Если в этом определении A — гладкое подмногообразие в M, то локальная гладкая продолжимость равносильна гладкости отображения относительно дифференциальной структуры подмногообразия. Это легко следует из определения подмногообразия.

Свойство локальной гладкой продолжимости можно использовать в качестве определения понятия гладкости для отображений, области определения которых не открыты.

Первая цель этого раздела — доказать, что свойства локальной гладкой продолжимости и гладкой продолжимости на окрестность равносильны. Сначала докажем это для числовых функций.

Лемма 5.7. *Пусть M — гладкое многообразие, $A \subset M$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ — локально гладко продолжимая функция. Тогда f гладко продолжима на окрестность множества A.*

Доказательство. Пусть U_p и $\widetilde{f}_p$ — окрестности и функции из определения локальной гладкой продолжимости. Рассмотрим множество $U = \bigcup_{x \in A} U_x$. Оно открыто в M, следовательно, является гладким многообразием той же размерности. На нём имеется открытое покрытие $\{U_p\}$ и семейство гладких функций $\{\widetilde{f}_p\}$, каждая из которых определена на соответствующих элементах покрытия. Определим $\widetilde{f}\colon U \to \mathbb{R}$ склеиванием функций $\{\widetilde{f}_p\}$ по разбиению единицы. Для каждой точки $x \in A$ все значения $f_p(x)$ равны $f(x)$, поэтому $\widetilde{f}(x)$ тоже равно $f(x)$. Таким образом, $\widetilde{f}$ — искомое гладкое продолжение f. □

Задача. Если в лемме множество A замкнуто, то f имеет гладкое продолжение на всё M.

Теорема 5.8. *Пусть M, N — гладкие многообразия, $A \subset M$, $f\colon A \to N$ — локально гладко продолжимое отображение. Тогда f гладко продолжимо на окрестность множества A.*

Доказательство. Благодаря теореме о вложении можно считать, что N — гладкое подмногообразие в некотором $\mathbb{R}^n$. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — координатные функции отображения f, рассматриваемого как отображение в $\mathbb{R}^n$. Применив к ним лемму, получим гладкие продолжения $\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_n$ на окрестности множества A. Пусть U_0 — пересечение областей определения функций $\widetilde{f}_i$. На U_0 определено гладкое отображение

$$\widetilde{f}_0 = (\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_n)$$

со значениями в $\mathbb{R}^n$, продолжающее f. Однако его значения не лежат в N.

Чтобы это исправить, построим для N трубчатую окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$ и соответствующую гладкую ретракцию $\pi\colon V \to N$. Положим $U = \widetilde{f}_0^{-1}(V)$. Множество U открыто в U_0 и, следовательно, в M. Кроме того, $A \subset U$, так как $\widetilde{f}_0(A) = f(A) \subset N$. Теперь определим $\widetilde{f}\colon U \to N$ равенством $\widetilde{f} = \pi \circ \widetilde{f}_0|_U$. Это и есть искомое гладкое продолжение f. □

Замечание. В отличие от числовых функций, даже в случае замкнутого A отображение $f\colon A \to N$ из теоремы 5.8 может не продолжаться до отображения из всего M в N. Например, по теореме Борсука тождественное отображение окружности S^1 в себя не продолжается до отображения из $\mathbb{R}^2$ в S^1.

Для дальнейшего потребуется следующее уточнение теоремы о сглаживании.

Теорема 5.9 (относительное сглаживание). *Пусть $f \in C(M, N)$, где M, N — гладкие многообразия, $A \subset M$ — замкнутое множество. Предположим, что $f|_A$ локально гладко продолжимо. Тогда в любой окрестности отображения f в $C^s(M, N)$ существует такое гладкое отображение $\widetilde{f}\colon M \to N$, что $\widetilde{f}|_A = f|_A$.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение в случае $N = \mathbb{R}$, после этого можно повторить рассуждения из доказательства теоремы 5.5. Далее считаем, что $N = \mathbb{R}$.

Можно считать, что рассматриваемая окрестность f в $C^s(M, \mathbb{R})$ имеет вид $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{f,\varepsilon}$, где $\varepsilon\colon M \to (0, +\infty)$ — положительная непрерывная функция. По теореме 5.5 существует гладкая функция $\widetilde{f_1} \in \mathcal{U}$. По теореме 5.8 существует гладкое продолжение $\widetilde{f_2}$ функции f на некоторую окрестность $V \supset A$. Рассмотрим множество

$$U = \{x \in V : |\widetilde{f_2}(x) - f(x)| < \varepsilon(x)\}.$$

Ясно, что оно открыто в M. Искомое $\widetilde{f}$ можно определить формулой $\widetilde{f} = h_1\widetilde{f_1} + h_2\widetilde{f_2}$, где (h_1, h_2) — разбиение единицы, подчинённое покрытию $(M \setminus A, U)$. $\square$

5.4 Сглаживание гомотопий

Смысл результатов этого раздела в том, что для гладких многообразий гладкая теория гомотопий не отличается от непрерывной.

Теорема 5.10. *Пусть M, N — гладкие многообразия. Тогда любое непрерывное отображение $f\colon M \to N$ гомотопно некоторому гладкому.*

Доказательство. По теореме о вложении можно считать, что N — гладкое подмногообразие в некотором $\mathbb{R}^n$. Построим для него трубчатую окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$ и ретракцию $\pi\colon U \to N$. Для $x \in M$ пусть $\rho(x)$ — толщина трубчатой окрестности в точке x, то есть радиус наибольшего шара с центром в x, содержащегося в U. По теореме о сглаживании построим гладкое отображение $\widetilde{f}\colon M \to N$ такое, что

$$|\widetilde{f}(x) - f(x)| < \rho(x)$$

для всех $x \in M$. Тогда можно определить гомотопию между f и $\widetilde{f}$ формулой

$$H(x, t) = \pi((1-t)f(x) + t\widetilde{f}(x)), \qquad x \in M,\ t \in [0, 1].$$

Это композиция прямолинейной гомотопии в $\mathbb{R}^n$ и проекции на N с помощью π. Она определена, так как отрезок между $f(x)$ и $\widetilde{f}(x)$. содержится в U. $\square$

Определение 5.11. Гомотопия $H\colon M \times [0, 1] \to N$ называется *гладкой*, если она локально гладко продолжима на окрестность множества $M \times [0, 1]$ в $M \times \mathbb{R}$. Два отображения называются *гладко гомотопными*, если между ними существует гладкая гомотопия.

Теорема 5.12. *Пусть M, N — гладкие многообразия. Тогда любые два гомотопных гладких отображения из M в N гладко гомотопны.*

Доказательство. Пусть $H\colon M \times [0, 1]$ — гомотопия, и отображения $H(\cdot, 0)$ и $H(\cdot, 1)$ гладкие. Чтобы не связываться раньше времени с многообразиями с краем, продолжим H на $M \times \mathbb{R}$ равенствами $H(x, t) = H(x, 0)$ при $t < 0$ и $H(x, t) = H(x, 1)$ при $t < 1$. Применим теорему 5.9 к отображению H, зафиксированному на подмножестве $A = M \times \{0, 1\}$. Получится искомая гладкая гомотопия. $\square$