

Вопросы по гладким многообразиям, 2025

1. Паракомпактность. Все многообразия паракомпактны.
2. Лемма о сжатии. Локально конечные покрытия координатными шарами.
3. Локально конечные семейства функций. Гладкое разбиение единицы.
4. Гладкая лемма Урысона. Локальная гладкая продолжимость функций.
5. Теорема Уитни: вложение компактного многообразия в $\mathbb{R}^N$ для достаточно большого N .
6. Множества меры 0. Теорема Уитни: понижение размерности.
7. Некомпактный случай теоремы Уитни: построение инъективного погружения.
8. Собственные отображения. Теорема Уитни: от инъективного погружения к вложению.
9. Нормальное расслоение. Почему оно многообразие.
10. Построение трубчатой окрестности.
11. Сильная топология на пространстве непрерывных отображений. Описание через $\varepsilon(x)$.
12. Сглаживание непрерывных отображений.
13. Многообразия с краем: определение, теорема о воротнике.
14. Многообразия с краем: правильно вложенные подмногообразия, дважды регулярные прообразы.
15. Ориентация многообразия. Согласованная ориентация края.
16. Перенос ориентации вдоль пути. Ориентируемость $\iff$ все петли сохраняют ориентацию.
17. Двумлистное ориентирующее накрытие.
18. Теорема Сарда.
19. Обобщенная теорема Борсука. Нестягиваемость сферы.
20. Топологическая инвариантность размерности.
21. Топологическая инвариантность края.
22. Степень отображения. Корректность и гомотопическая инвариантность степени mod 2.
23. Ориентация регулярного прообраза. Ориентация края прообраза = ориентация прообраза края.
24. Ориентированная степень сужения на край равна 0.
25. Корректность и гомотопическая инвариантность ориентированной степени.
26. Индекс гиперповерхности относительно точки в $\mathbb{R}^n$. Его постоянство на компонентах дополнения.
27. Гладкая теорема Жордана для компактной гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$.
28. Теорема о еже.
29. Индекс нуля векторного поля. Корректность определения.
30. невырожденные нули векторного поля, их индексы.
31. Инвариантность суммы индексов нулей векторного поля.
32. Трансверсальность отображения и подмногообразия. Теорема Тома о трансверсальности.
33. Критические точки функции. Гессиан, корректность его определения.
34. Диффеоморфность подуровней функции между критическими значениями.
35. Функции Морса. Их существование.
36. Индексы критических точек функции Морса. Эйлерова характеристика через них.
37. Лемма Морса о строении функции вблизи невырожденной критической точки.
38. Если на многообразии есть функция Морса с двумя критическими точками, то это сфера.
39. Как меняется подуровень функции Морса при переходе через критическую точку.
40. Морсовский клеточный комплекс, гомотопически эквивалентный многообразию.