

Вопросы к экзамену по римановой геометрии, осенний семестр 2024

Не вошло в вопросы, но надо знать: определение риманова многообразия и близлежащие понятия, тензоры, лемма Гаусса, геодезические и локально кратчайшие, кривизна гиперболического пространства.

1. Риманов объем: два определения и их эквивалентность.
2. Гиперболическое пространство \mathbb{H}^n , его элементарные изометрии.
3. Модельное пространство M_k^n , транзитивность его группы изометрий на касательных базисах.
4. Связность Леви-Чивиты, существование и единственность без док-ва, случай подмногообразия.
5. Ковариантная производная вдоль пути. Следствия симметричности и евклидовости.
6. Параллельные поля и параллельный перенос. Выражение связности через параллельный перенос.
7. Длина и энергия кривой. Формула первой вариации.
8. Геодезические, сокращение не-геодезических, кратчайший путь к подмногообразию.
9. Нормальные координаты. Сравнение метрики с евклидовой в центре нормальных координат.
10. Существование отрезков длины $\leq R$, если экспонента определена в R -шаре.
11. Геодезическая и метрическая полнота, теорема Хопфа-Ринова, геодезические и метрические шары.
12. Локальные изометрии и накрытия.
13. Тензор кривизны. Перестановка ковариантных производных вдоль отображения.
14. Симметрии тензора кривизны.
15. Секционные кривизны. Выражение тензора кривизны через них.
16. Вид тензора кривизны в постоянной секционной кривизне.
17. Вторая форма подмногообразия. Производная нормального поля.
18. Кривизна подмногообразия (теорема Гаусса).
19. Поля Якоби: два определения и их эквивалентность. Поля Якоби с нулевым начальным значением.
20. Касательные и ортогональные поля Якоби. Разложение поля Якоби на касательное и ортогональное.
21. Постоянная кривизна: решение уравнения Якоби.
22. Постоянная кривизна: локальная изометричность модельным пространствам.
23. Сопряжённые точки и вырождения экспоненты. Если геодезическая перестала быть отрезком, то . . .
24. Теорема Картана-Адамара для многообразий без сопряженных точек.
25. Неположительная кривизна: отсутствие сопряженных точек, теорема Картана-Адамара.
26. Неположительная кривизна: выпуклость длины поля Якоби.
27. Неположительная кривизна: сравнение длин и углов с евклидовой метрикой.
28. Многообразия Адамара: выпуклость функций расстояния и квадрата расстояния до точки.
29. Многообразия Адамара: единственность описанного шара и приложения.
30. Формула второй вариации.
31. Теорема Бонне (кривизна и диаметр).
32. Теорема Синга (кривизна, ориентируемость и односвязность).
33. Градиент и гессиан гладкой функции. Симметричность гессиана, f'' вдоль геодезической.
34. Дистанционные функции и их градиентные линии. Вырожденность гессиана на градиенте.
35. Поля Якоби, согласованные с дистанционной функцией. Уравнение Рикатти.
36. Начальные данные и область определения решения уравнения Рикатти для расстояния до точки.
37. Геодезическая после сопряженной точки — не кратчайшая.
38. Сравнение решений уравнения Рикатти с постоянной кривизной.
39. Оценки радиуса сопряженности и радиуса выпуклости шаров.
40. Теорема Рауха (сравнение полей Якоби)
41. Сравнение длин и углов с постоянной кривизной.
42. Неравенство Бишоп-Громова для объема сфер при секционной кривизне $\geq k$.