

Вопросы к экзамену/зачету по симплектической геометрии 4 июня 2025

1. Система точек с потенциальными взаимодействиями: сведение к случаю одной точки.
2. Голономные связи: принцип Даламбера, почему он однозначно определяет движение.
3. Движение в потенциальном поле эквивалентно лагранжевой системе $L = T - U$.
4. Голономные связи в лагранжевой системе, эквивалентность с принципом Даламбера.
5. Преобразование Лежандра, его инволютивность.
6. Переход от уравнений Эйлера-Лагранжа к уравнениям Гамильтона.
7. Симплектические многообразия, примеры: $\mathbb{R}^{2n}$, кокасательное расслоение.
8. Симплектические векторные пространства: четность размерности, специальные координаты.
9. Симплектический объём. Нетривиальность H^2 компактного симплектического многообразия.
10. Согласованные тройки (ω, J, g) на векторном пространстве. Согласованность пар (J, g) и (J, ω) .
11. Стандартная симплектическая форма на $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.
12. Существование согласованной почти комплексной структуры для ω и J на многообразии.
13. Гамильтоновы потоки. Согласованность с уравнениями Гамильтона. Сохранение гамильтониана.
14. Поверхность уровня гамильтониана. Принцип Мопертюи.
15. Производная Ли. Сохранение тензора потоком равносильно тому, что $\mathcal{L}_X = 0$.
16. Производная Ли функции и векторного поля.
17. Формулы для производной Ли: произведения, внешняя производная.
18. Волшебная формула Картана.
19. Симплектические и гамильтоновы поля.
20. Меры на поверхностях уровня. Теорема Лиувилля для симплектического объема и этих мер.
21. Риманов геодезический поток, мера Лиувилля на единичном касательном расслоении.
22. Формула Сантало (интегрирование по геодезическим).
23. Конформная краевая жёсткость простых римановых метрик.
24. Скобка Пуассона: два определения, связь со скобкой Ли.
25. Теорема Дарбу (локальная симплектоморфность с $\mathbb{R}^{2n}$).
26. Дифференцирование формы вдоль потока, зависящего от времени (лемма к изотопии Мозера).
27. Изотопия Мозера.
28. Сечения потоков. Сечение гамильтонова потока — симплектоморфизм.
29. Бильярдное отображение, проекция симплектической формы на край.
30. Интегралы гамильтонова потока, их коммутирование с гамильтонианом.
31. Нётеровские интегралы.
32. Вполне интегрируемые системы. Лиувиллевы торы.
33. Координаты действие-угол: построение угловых координат и их гамильтоновость.
34. Координаты действие-угол: построение коммутирующих угловых координат.
35. Координаты действие-угол: построение координат действия и окончание доказательства.
36. Симплектическая редукция по действию S^1 .