На правах рукописи

НИРОВА Марина Сефовна

Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и их группы автоморфизмов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск - 2019

Работа выполнена в ФГБОУ науки "Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук".

Научный консультант:

Махнев Александр Алексеевич
доктор физ.-мат. наук, член-корр. РАН, профессор

Официальные оппоненты:

Баранский Виталий Анатольевич
доктор физ.-мат. наук, профессор
ФГАОУ ВО ”Уральский федеральный университет им. первого Президента
России Б.Н. Ельцина”, кафедра алгебры и фундаментальной информатики, профессор;

Зюляркина Наталья Дмитриевна
доктор физ.-мат. наук, доцент
ФГАОУ ВО ”Южно-Уральский государственный университет”,
кафедра ”Защита информации”, профессор;

Лыткина Дарья Викторовна
доктор физ.-мат. наук, профессор
ФГБОУ ВО ”Сибирский государственный университет телекоммуникаций
и информатики”, кафедра высшей математики, профессор.

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО ”Ярославский государственный университет”.

Защита состоится 12 апреля 2019 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 на базе ФГАОУ ВО ”Сибирский федеральный университет” по адресу 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, ауд. 34-11.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО ”Сибирский федеральный университет” http://www.sfu.kras.ru.

Автореферат разослан __ марта 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Шлапунов Александр Анатольевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы диссертационного исследования и степень ее разработанности. В связи с завершением классификации конечных простых групп возникла задача единого представления конечных простых групп автоморфизмами конечных геометрий. Перспективным направлением здесь является поиск такого класса конечных геометрий, что каждая конечная простая группа действует флаг-транзитивно на некоторой геометрии и все геометрии этого класса допускают классификацию. Например, класс билдингов Титса характеризует группы лиева типа [1].

В диссертации рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер.

Граф Γ диаметр d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, ..., d\}$ и для любых вершин u, v, x, y таких, что $d(u,v) = d(x,y) = i$ ($d = d_\Gamma$ — естественная метрика на Γ), существует автоморфизм g графа Γ такой, что $(u,v)^g = (x,y)$. Хорошо известно, что существует лишь конечное число связных дистанционно транзитивных графов заданной валентности, большей 2. Этот результат был впервые получен в работе Камерона, Прэгер, Саксла и Зейца (1983) с использованием классификации конечных простых групп как следствие доказательства ими известной гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок. Несколько позже Вейс (1985) дал доказательство, не зависящее от этой классификации. Дистанционно транзитивные графы диаметра 2 сыграли важную роль в классификации конечных простых групп. Так, около половины спорадических простых групп были построены как группы автоморфизмов таких графов [3].

Позднее в указанном направлении возникли задачи, не связанные с групповым действием, в частности, такой является задача изучения различных классов комбинаторно симметричных графов и особенно дистанционно регулярных графов.

Для вершины u графа Γ через $\Gamma_i(u)$ обозначим подграф, индуцированный множеством $\{w \in \Gamma \mid d(u,w) = i\}$. Подграф $\Gamma_1(u)$ называется *окрестностью* вершины u и обозначается через $\Gamma(u)$ или $[u]$. Через $u^\top$ обозначается подграф, индуцированный множеством $\{u\} \cup [u]$. Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (соответственно $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении$[w]$ с $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$). *Дистанционно регулярным графом* с массивом пересечений $\{b_0, b_1, ..., b_{d-1}; c_1, c_2, ..., c_d\}$ называется граф, в котором параметры $b_i = b_i(u,w)$ и $c_i = c_i(u,w)$ не зависят от вершин u, w, а зависят только от расстояния, на котором эти вершины находятся в графе Γ.

Дистанционно регулярные графы были введены Бигсом (1970) и начала их теории были разработаны Бигсом, Дамерелом, Гардинером и Смит. Их связь с теорией кодирования был найдена Дельсартом (1973). В 1989 г. вышла монография Броувера, Коэна и Babel Ноймайера "Дистанционно регулярные графы"[2], которая стала настольной книгой многих исследователей. Заметим, что дистанционно регулярный граф существует тогда и только тогда, когда существует его алгебра Боуза-Меснера . Поэтому изучение дистанционно регулярных графов можно считать алгебраической задачей.

Укажем несколько важных классов комбинаторно симметричных графов, тесно связанных с классом дистанционно регулярных графов.

Регулярным графом степени k называется граф Γ такой, что для любой вершины $u \in \Gamma$ выполняется равенство $|\Gamma(u)| = k$.

Реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) называется регулярный граф степени k на v вершинах, любое ребро которого лежит точно в λ треугольниках.

Вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), в котором любые две вершины $u, w \in \Gamma$, находящихся на расстоянии 2, имеют ровно μ общих соседей.

Сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) называется реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), в котором любые две несмежные вершины $u, w \in \Gamma$ имеют ровно μ общих соседей.

Заметим, что сильно регулярный граф с $\mu > 0$ является дистанционно регулярным графом диаметра 2, дистанционно регулярный граф с $d \geq 2$ — вполне регулярным графом с $k = b_0$, $\lambda = k - b_1 - 1$ и $\mu = c_2$.

Д. Хигмен (1964, 1966) развил теорию конечных транзитивных групп подстановок ранга 3. Эти группы являются группами автоморфизмов сильно регулярных графов, причем они действуют транзитивно как на множествах вершин и ребер, так и на множестве пар различных несмежных вершин. Такие графы являются дистанционно транзитивными графами диаметра 2 и называются графами ранга 3.

В теории дистанционно регулярных графов основными задачами являются: нахождение новых бесконечных серий допустимых массивов пересечений, и для данного массива пересечений либо построение графа, либо доказательство несуществования графа.

Новым направлением является решение обратных задач в теории дистанционно регулярных графов (термин принадлежит Падучих Д.В.). Для дистанционно регулярного графа Γ с симметричной структурой Σ прямой задачей является нахождение параметров Σ по массиву пересечений графа Γ. Обратной задачей является восстановление массива пересечений графа Γ по параметрам Σ.

Пусть Γ — граф Γ диаметра d. Для $i \in \{2, ..., d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$. Через $\bar{\Gamma}$ обозначается дополнительный граф к графу Γ.

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией* порядка (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s, t)$). Если $\alpha = 1$, то геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s, t)$. *Точечным графом* частичной геометрии называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой (коллинеарны). Легко понять, что точечный граф (граф коллинеарности) частичной геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с параметрами $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k, при этом полагают $b = b(\Gamma) = k/a$.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа

Γ называется *e-кодом*, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C|\le p^d_{dd}+2$. В случае равенства код называется *максимальным.* Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $c_d\ge a_dp^d_{dd}$. В случае равенства код называется *локально регулярным.* Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d=2e+1$ выполняется граница $|C|\le k_d/\sum_{i=0}^e p^d_{id}+1$. В случае равенства код называется *совершенным относительно последней окрестности* (см. [4]).

Цели диссертационного исследования.

В диссертации изучаются важные классы дистанционно регулярных графов (точечные графы сильно однородных расширений частичных геометрий, 4-изорегулярные графы, графы Шилла и др.), влияние локальных подграфов, симметричных структур и собственных значений на строение дистанционно регулярных графов, а также группы автоморфизмов графов. Планируется исследование проблемы существования новых сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, доказательство несуществования некоторых дистанционно регулярных графов с допустимыми массивами пересечений, нахождение новых бесконечных серий допустимых массивов пересечений, отвечающих графам с максимальным 1-кодом типа $\{a(p+1),cp,a+1;1,a-1,ap\}$. Предполагается разработка программы исследования обратных задач для дистанционно регулярных графов.

Основные результаты диссертации.

В диссертации завершены программы исследования:

- дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов,

- примитивных дистанционно регулярных реберно симметричных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000,

- реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100 (проблема Лама).

В диссертации заложены основы теории графов Шилла, разработана программа изучения обратных задач для дистанцинно регулярных графов, связанных с экстремальными собственными значениями графов, сильно регулярными структурами и максимальными кодами. С помощью теории характеров конечных групп классифицированы реберно симметричные дистанцинно регулярные графы, возникшие в этих направлениях.

Получены следующие основные результаты:

- найдены параметры сильно $(s-2)$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ и классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы;

- перечислены допустимые массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda=2$, иимеющих не более 4096 вершин, найдены автоморфизмы примитивных дистанционно регулярных графов с $\lambda=2$ и числом вершин, не большим 1000;

- найдены автоморфизмы $AT4(4,6,5)$-графа с массивом пересечений $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$, найдены автоморфизмы второй окрестности вершины этого графа, имеющей массив пересечений $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$;

- доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2=-1$ граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогемерическим для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$, с помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44,35,3;1,5,42\}$;

- изучены свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, в частности, перечислены массивы пересечений в случае, когда Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$, найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, для которого граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников;

- получены новые границы для порядков клик в сильно регулярном графе Γ_3, с помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$, в классе массивов $\{a(p+1), cp, a+1; 1, a-1, ap\}$, отвечающих максимальным 1-кодам, найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений;

- доказано, что граф Шилла с $b_2 = c_2$ и нецелым собственным значением имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$ с указанными кратностями неглавных собственных значений, классифицированы графы Шилла с $b_2 = c_2$ и $b = 4$.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Методология и методы исследований. Основными методами исследования являются теоретико-графовые методы, методы линейной алгебры и методы теории конечных групп, в частности, метод Г. Хигмена приложения теории характеров к выяснению порядков автоморфизмов дистанционно регулярных графов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. В работе решена проблема Лама существования новых сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100. Доказано несуществование дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ и $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$. Найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений в классе массивов $\{a(p+1), cp, a+1; 1, a-1, ap\}$, отвечающих максимальным 1-кодам. Изучены реберно симметричные дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{243, 176; 1, 108\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$, $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$, $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. Разработана программа исследования обратных задач для дистанционно регулярных графов.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях конечных геометрий, в теории групп и теории графов, при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в области алгебры.

Публикации. Материал диссертации представлен в цикле работ, состоящем из 17 статей [44–60] (все опубликованы в журналах из списка ВАК), и 11 тезисов докладов.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на семинаре отдела алгебры и топологии ИММ УрО РАН, доложены на семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, основанном О.Ю. Шмидтом, а также были представлены на следующих конференциях: VIII-X Международные школы-конференции по теории групп (2010 г., Нальчик, 2012 г., Владикавказ, 2014 г., Нальчик); Международная конференция "Алгебра и линейная оптимизация" (2013 г., Екатеринбург), 44 Международная молодежная школа-конференция "Современные проблемы математики" (2013 г., Екатеринбург); Международная конференция "Алгебра и комбинаторика" , посвященная 60-летию А.А. Махнева (2013 г., Екатеринбург); Международная конференция "Группы и графы, алгоритмы и автоматы" (2015 г., Екатеринбург), Международная конференция "Актуальные проблемы прикладной математики и физики" (2017 г., Нальчик-Терскол), Международная конференция "Группы и графы, метрики и многообразия" (2017 г., Екатеринбург), Международная конференция "Мальцевские чтения" (2017 г., Новосибирск), XII школа-конференция по теории групп (2018 г., Геленджик).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав и списка литературы, содержащего 93 названия. Общий объем диссертации составляет 201 страницу.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даны основные определения и обозначения, используемые в диссертации, обсуждается общая мотивировка решаемых задач, сформулированы основные результаты.

В главе 1 получено описание параметров сильно $(s-2)$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ [46], классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы [50], изучаются 4-изорегулярные графы, их сильно регулярные подграфы и автоморфизмы. Последние результаты получены в совместной работе с Журтовым А.Х. и Махневым А.А. [44] и в совместной работе с Махневым А.А. [45]. Постанока задачи и идея доказательств принадлежат Журтову А.Х. и Махневу А.А., а доказательства принадлежат Нировой М.С.

В главе 2 перечислены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и числом вершин, не большим 4096 [48,52], найдены автоморфизмы примитивных дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и числом вершин, не большим 1000 [51], и доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, нет [47,49]. Часть результатов этой главы получена совместно с Махневым А.А. [47,52]. Здесь постановка задачи принадлежит Махневу А.А., а доказательства получены Нировой М.С.

Главы 3–5 посвящены изучению влияния собственных значений на строение дистанционно регулярных графов.

В главе 3 найдены автоморфимы AT4(4,6,5)-графа и второй окрестности его вершины [53,54]. Первый результат получен совместно с Махневым А.А. и Падучих Д.В. Здесь постанока задачи принадлежит Махневу А.А., автоморфизмы сильно регулярных графов найдены Падучих Д.В. а автоморфизмы AT4-графа найдены Нировой М.С.

В главе 3 доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2 = -1$ граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$ [56]. С помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$. Результат получен совместно с Махневым А.А., который поставил задачу и предложил идею доказательства, развитую Нировой М.С.

В главе 4 изучены свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Перечислены массивы пересечений в случае, когда графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, Γ_3 не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3) \leq 11$ [58]. Найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, для которого граф Γ_3 является сильно регулярным графом без треугольников [55]. Последний результат получен совместно с Махневым А.А., который поставил задачу и рассмотрел вершинно-симметричный случай.

В главе 5 отмечается, что дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий максимальный 1-код, имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае граф имеет собственное значение $\theta_2 = -1$, и в случае массива $\{a(p+1), cp, a+1; 1, a-1, ap\}$ найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений [59]. Доказано также, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ не существует [57]. Во втором случае получаем граф Шилла с $b_2 = c_2$. Доказано, что граф Шилла с $b_2 = c_2$ и нецелым собственным значением имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$, и найдены кратности его собственных значений. Найдены массивы пересечений графов Шилла с $b_2 = c_2$ без треугольников в случае $b < 170$. Классифицированы графы Шилла с $b_2 = c_2$ и $b = 4$ [56]. Пусть Γ - дистанционно регулярный граф диаметра 3. Тогда графы Γ_2 и $\bar{\Gamma}_3$ не являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника [60]. Результаты в [56,60] получены совместно с Махневым А.А., который поставил задачи и предложил идеи доказательства, развитые Нировой М.С.

Изучение автоморфизмов дистанционно регулярных графов опирается на метод Хигмена приложения теории характеров конечных групп, представленный в третьей главе монографии Камерона [6]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для подходящих неотрицательных целых p^l_{ij}, называемых *числами пересечений* графа Γ. Вещественная алгебра $\langle A_0, A_1, ..., A_d \rangle$ называется *алгеброй Боуза-Меснера* графа Γ. Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$ соответственно. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления

ψ_{W_i}. Тогда для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

В главе 1 получено описание параметров сильно $(s-2)$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$, классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы, найдены параметры сильно регулярных графов, отвечающих 4-изорегулярным графам и некоторые автоморфимы 4-изорегулярных графов.

В кандидатской диссертации М.С. Нировой классифицированы s-однородные и сильно $(s-1)$-однородные расширения частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ (см. [7]).

Пара (a, L) частичной геометрии $(P, \mathcal{L})$ называется *флагом*, если точка a принадлежит прямой L, и *антифлагом* в противном случае. Если (a, L) является антифлагом, то через $f(a, L)$ обозначим число точек в L, коллинеарных a. Геометрия называется *φ-однородной*, если для любого антифлага (a, L) число $f(a, L)$ равно 0 или φ, и *сильно φ-однородной*, если это число всегда равно φ. Геометрия $pG_t(s,t)$ является сетью, а $pG_{s+1}(s,t)$ является 2-схемой с $\lambda = 1$. Если $\mathcal{S}$ — частичная геометрия $pG_\alpha(s,t)$, то двойственная геометрия $(\mathcal{L}, P)$, в которой каждая точка отождествляется с пучком проходящих через нее прямых, является частичной геометрией $pG_\alpha(t,s)$.

Теорема 1.1 [46]. *Пусть $\mathcal{S}$ — сильно $(s-2)$-однородная геометрия $EpG_\alpha(s,t)$, $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$. Тогда либо геометрия $\mathcal{S}$ является расширением двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(2t+2,t)$, Γ — псевдогеометрический граф для сети $pG_{2t}(2t+3,2t)$ и дополнительный граф к блочному графу является псевдогеометрическим графом для $pG_{t+2}(2t+3,t^2+2t)$, либо граф Γ и геометрия $\mathcal{S}$ принадлежат некоторому конечному списку.*

В работе Ф.Бюкенхаута и К.Юбо [8] рассматривается задача классификации локально полярных пространств, в частности, локально $GQ(s,t)$-графов. Там же получено решение этой задачи в случае $s = 2$.

В случае $s = 3$ описание локально $GQ(s,t)$-графов завершено в работе А.А. Махнева [9].

В случае $s = 4$ известны вполне регулярные локально $GQ(4,t)$-графы для $t \in \{2,4,6,8,11,16\}$ (см. [10–15]). Кроме того, известны сильно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы [16].

В диссертации изучены вполне регулярные локально $GQ(4,t)$-графы для $t \in \{1,12\}$. В частности, завершена классификация дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов.

Теорема 1.2 [53]. *Пусть Γ — связный вполне регулярный локально $GQ(4,1)$-граф диаметра, большего 2, с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда либо Γ — граф Джонсона $J(10,5)$, либо диаметр Γ равен 3 и $\mu \in \{4,8\}$.*

Теорема 1.3 [53]. *Пусть Γ — связный вполне регулярный локально $GQ(4,12)$-граф с параметрами (v,k,λ,μ). Тогда диаметр Γ равен 3 и $\mu \in \{56,60,64,70,80,84\}$.*

Следствие 1.1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный локально* $GQ(4,t)$*-граф с параметрами* (v,k,λ,μ)*. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $t=1$*, либо* $\mu=4$ *и* Γ *— граф Джонсона* $J(10,5)$ *или его стандартное частное, либо* $\mu=8$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{25,16,1;1,8,25\}$*;*

(2) $t=2$*,* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(126,45,12,18)$ *на множестве векторов нормы* 1 *в* 6*-мерном ортогональном пространстве типа "−" над* $GF(3)$ *или* Γ *— единственный локально* $GQ(4,2)$*-граф с массивом пересечений* $\{45,32,12,1;1,6,32,45\}$*;*

(3) $t=6$*,* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(726,125,28,20)$ *или* Γ *— граф с массивом пересечений* $\{125,96,1;1,48,125\}$.

Для подмножества S вершин графа Γ через $\Gamma(S)$ обозначим $\cap_{a\in S}([a]-S)$.

Граф Γ называется *t-изорегулярным*, если для любого $i\le t$ и любого i-вершинного подмножества S число $|\Gamma(S)|$ зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного S. Ясно, что класс 2-изорегулярных графов совпадает с классом сильно регулярных графов. Граф Γ на v вершинах называется *абсолютно изорегулярным*, если он является $(v-1)$-изорегулярным. Далее, t-изорегулярный граф называется *точно t-изорегулярным*, если он не является $(t+1)$-изорегулярным.

Камерон [27, теорема 8.21] доказал, что каждый 5-изорегулярный граф Γ является абсолютно изорегулярным и, с точностью до перехода к дополнительному графу, является полным многодольным графом $K_{m\times n}$, пятиугольником или 3×3-решеткой. Далее, каждый точно 4-изорегулярный граф, с точностью до перехода к дополнительному графу, является псевдогеометрическим графом для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$. Через $Izo(r)$ будем обозначать такой граф. При $r=1$ получим точечный граф единственного обобщенного четырехугольника порядка $(2,4)$, а при $r=2$ — граф Маклафлина (граф ранга 3 для спорадической группы Маклафлина).

Существование плотной сферической 5-схемы в S^{n-1} (см. [28]) равносильно существованию графа $Izo(r)$, где $n=(2r+1)^2-2$. В [28, следствие 4.7] доказано несуществование плотных 5-схем для бесконечного набора значений параметра r: 3, 4, 6, 10, 12, 22, 28, 30, 34, 42, 46, ...

В параграфе 1.3 найдены параметры шести сильно регулярных подграфов из $\Gamma=Izo(r)$: $\Sigma=[a]$, $\Delta=\Gamma_2(a)$ для вершины $a\in\Gamma$; $\Sigma(b)$, $\Sigma_2(b)$ для вершины $b\in\Sigma$; $\Delta(c)$, $\Delta_2(c)$ для вершины $c\in\Delta$ (предложения 1.1–1.3).

Далее, с помощью метода Хигмена для автоморфизма g графа $Izo(r)$ найдена формула для значения характера, полученного при проектировании на подпространство размерности $4r^2+4r-2$:

$$\chi_2(g)=(\alpha_0(g)-\alpha_1(g)/r)/((r+1)(2r+1))+(2r^2+2r-1)/(r+1).$$

Найдены возможные простые порядки автоморфизмов g графа $Izo(r)$ таких, что подграф $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ является пустым графом, кликой или кокликой.

Теорема 1.4 [44]. (1) *Если* Ω *— пустой граф, то*

(i) p *делит* $(2r+1)(4r^3+6r^2-1)$*, в частности,* $p\ne 2$*,*

(ii) *если* $p=3$*, то* $r\equiv 1 \pmod 3$*,* $\alpha_1(g)=wr(2r+1)$ *и* $w+1$ *делится на* $r+1$*.*

(2) *Если* Ω *является* n*-кликой, то* $n=1$ *и либо* $p=37$ *и* $r=37u+17$*, либо* $p=2$*.*

(3) *Если* Ω *является* m*-кокликой,* $m\ge 2$*, то* $3\le m\le 4r^2+4r-2$*, число* p *делит* r *и* $m+1$*.*

А.А. Махнев [29] доказал, что псевдогеометрический граф для $pG_2(5,32)$ не существует. Так как окрестность вершины в графе $Izo(3)$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(5,32)$, то и граф $Izo(3)$ не существует. Однако вопрос о существовании сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) (это параметры второй окрестности вершины в графе $Izo(3)$) остается открытым.

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (640,243,66,108), a — вершина графа Γ. Тогда Γ имеет собственные значения $k = 243, r = 3, s = -45$ и достигается равенство во втором условии Крейна $(s+1)(k+s+2rs) \leq (k+s)(r+1)^2$. Поэтому $[a]$ является сильно регулярным графом с параметрами (243,66,9,21) и $\Gamma_2(a)$ является сильно регулярным графом с параметрами (396,135,30,54). В работах [30, 31] найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярных графов с параметрами (243,66,9,21) и (396,135,30,54). С помощью этих результатов найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108). При этом решалась совершенно новая задача — восстановление автоморфизма графа по его действию на окрестности и на антиокрестности неподвижной точки.

Теорема 1.5 [45]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(640, 243, 66, 108)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G*,* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, и* $p \in \{2, 5\}$*;*

(2) Ω *является* 1*-кликой,* $p = 3$ *или* m*-кокликой,* $m \geq 2$ *и* $p = 3$*;*

(3) $p = 3$*,* Ω *является регулярным графом степени* $3t$*,* $0 \leq t \leq 24$*;*

(4) $p = 2$*,* Ω *содержит вершину степени* $2t + 1$ *и* $16 \leq |\Omega| = 2t + 2 + 6s \leq 154$*.*

Следствие 1.2. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(640, 243, 66, 108)$ *не является реберно симметричным.*

Граф назовем *псевдоциклическим*, если он регулярен степени 2. В главе 2 перечислены массивы пересечений локально псевдоциклических дистанционно регулярных графов с числом вершин, не большим 4096. Для примитивных графов с числом вершин, не большим 1000, найдены автоморфизмы. Доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, нет.

В.П. Буриченко и А.А. Махнев [21] нашли массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с $\mu > 1$ и числом вершин не большим 1000. Отметим, что в [21] пропущены массивы $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$ графа Хемминга $H(3, 4)$ с $v = 64$, $\{12, 9, 6, 3; 1, 2, 3, 4\}$ графа Хемминга $H(4, 4)$ с $v = 256$ и массив $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, зато имеется лишний массив $\{13, 10, 7; 1, 2, 7\}$ (граф с таким массивом пересечений не существует). Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$ найдены А.А. Махневым в [19], а сам граф построен Д.С. Кротовым с соавторами в [20].

Предложение 2.1 [21]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на* $v \leq 1000$ *вершинах. Если* $\lambda = 2$ *и* $\mu > 1$*, то либо* Γ *имеет массив пересечений графа Хэмминга* $H(n, 3)$ *для* $n \in \{3, 4\}$*, либо верно одно из утверждений:*

(1) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$*,* $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$*,* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$*,* $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ *или* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$*;*

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r{+}1, 2r{-}2, 1; 1, 2, 2r{+}1\}$ *для* $r \in \{3, 4, ..., 21\} - \{10, 16\}$ *и* $v = 2r(r+1)$*;*

(3) Γ — *антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$*,* $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$*,* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$*,* $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$*,* $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$*,* $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$*, или* $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Заметим, что В.П. Буриченко и А.А. Махнев не рассматривали случай $\mu = 1$. А.А. Махнев поставил задачу нахождения массивов пересечений антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda = 2$, $\mu = 1$ и числом вершин, не большим 1000. В параграфе 2.1 решена более общая задача. Найдены массивы пересечений антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с $\lambda \leq 2$ и $\mu = 1$. Далее, найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$.

Теорема 2.1 [50]. *Пусть* Γ *является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *с* $\lambda \leq 2$ *и* $\mu = 1$*. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\lambda = 0$ *и* $k \in \{2, 6, 56\}$*;*

(2) $\lambda = 1$ *и* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{2^e, 2^e - 2, 1; 1, 1, 2^e\}$*;*

(3) $\lambda = 2$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$.

Существование графа в пункте (1) теоремы равносильно существованию сильно регулярного графа с параметрами $((k+1)^2+1, k+1, 0, 1)$ (графа Мура).

А.А. Махнев и М.С. Нирова нашли массивы пересечений графов с $\lambda = 2$ и $\mu = 1$, имеющих не более 4096 вершин.

Теорема 2.2 [52]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с* $\lambda = 2$ *и* $\mu = 1$*, имеющий не более* 4096 *вершин. Тогда* Γ *имеет один из следующих массивов пересечений:*

(1) $\{21, 18; 1, 1\}$ $(v = 400)$*;*

(2) $\{6, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 2\}$ (Γ — *обобщенный восьмиугольник порядка* $(3, 1)$*,* $v = 160$), $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$ (Γ — *обобщенный шестиугольник порядка* $(3, 1)$*,* $v = 52$), $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$ (Γ — *обобщенный шестиугольник порядка* $(3, 3)$*,* $v = 364$), $\{6, 3, 3, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 1, 2\}$ (Γ — *обобщенный двенадцатиугольник порядка* $(3, 1)$*,* $v = 1456$)*;*

(3) $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$ ($v = 1 + 18 + 270 + 243 = 532$*,* Γ_3 — *сильно регулярный граф*)*;* $\{33, 30, 8; 1, 1, 30\}$*,* $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$*,* $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$*,* $\{21, 18, 12, 4; 1, 1, 6, 21\}$ ($v = 1 + 21 + 378 + 756 + 144 = 1300$*,* $q^4_{3,4} = 0$).

В следствии 2.1 получен список массивов пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и не более 4096 вершинами.

В [22] найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярных локально псевдоциклических графов с числом вершин, не большим 1000.

В [23-26] найдены возможные простые порядки автоморфизмов графов с 4 первыми массивами пересечений из пункта (1) заключения предложения 2.1. В параграфе 2.2 изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$. Тем самым завершается описание автоморфизмов графов из пункта (1) заключения предложения 2.1. Ни один из этих графов не является реберно симметричным.

Граф с массивом пересечений $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ имеет $v = 1+51+612+136 = 800$ вершин и спектр $51^1, 11^{102}, 3^{425}, -9^{272}$, причем Γ_2 — псевдогеометрический граф для $pG_{39}(51, 11)$.

Теорема 2.3 [51]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и* $p \in \{2, 5\}$;

(2) $p = 17$ *и* $|\Omega| = 1$;

(3) $p = 3$, $2 \le |\Omega| \le 14$ *и* Ω *состоит из вершин попарно находящихся на расстоянии 3 или* $14 \le |\Omega| \le 62$, *или* $\alpha_3(g) = 0$ *и* $65 \le |\Omega| \le 98$;

(4) $p = 2$, $|\Omega|$ *четно,* $\alpha_1(g) = 0$ *и* $\Omega \in \{32, 80\}$ *или* $4 \le |\Omega| \le 62$, *или* $\alpha_3(g) = 0$ *и* $64 \le |\Omega| \le 106$.

Следствие 2.2. *Граф с массивом пересечений* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$ *не является реберно симметричным.*

В параграфе 2.3 найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$.

Теорема 2.4 [48]. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняются одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и* $p \in \{2, 5, 43\}$;

(2) Ω *лежит в антиподальном классе графа* Γ *и* $p \in \{2, 3, 7\}$;

(3) $p = 13$ *и* Ω *является 4-кликой;*

(4) $p = 2$ *и* Ω *— шестиугольник или вторая окрестность вершины в графе Хофмана-Синглтона.*

Следствие 2.3. *Группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$ *действует интранзитивно на множестве его вершин.*

В параграфе 2.4 изучаются сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100, и их автоморфизмы.

Хорошо известно, что имеется 30 наборов параметров неизвестных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100. Из результатов Бехбахани и Лама [38] следует, что только 11 из них могут отвечать реберно симметричным графам.

Предложение 2.2. *Пусть* Γ *— неизвестный реберно симметричный сильно регулярный граф с числом вершин, не большим 100, и* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда* Γ *имеет параметры* $(85, 30, 11, 10)$, $(85, 54, 33, 36)$, $(88, 27, 6, 9)$, $(88, 60, 41, 40)$, $(96, 45, 24, 18)$, $(96, 50, 22, 30)$, $(96, 60, 38, 36)$, $(99, 42, 21, 15)$, $(99, 56, 28, 36)$, $(100, 33, 8, 12)$ *или* $(100, 66, 44, 42)$.

Проблема Лама [38]. Существуют ли новые реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100?

А.А. Махневым и М.С. Нировой предложена программа решения проблемы Лама и сделан первый шаг на пути реализации этой программы.

Теорема 2.5 [47]. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(85, 30, 11, 10)$, g *— элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ — *пустой граф и* $p \in \{5,17\}$*;*
(2) Δ *является* β*-кликой,* $p = 2$ *и* $\beta \in \{3,5,7\}$ *или* $p = 3$ *и* $\beta \in \{1,4,7\}$*;*
(3) $p = 5$*,* Δ *является* γ*-кокликой и* $\gamma \in \{5,10\}$*;*
(4) $p = 3$*,* $|\Delta| = 3t+1$ *и* $2 \le t \le 7$*;*
(5) $p = 2$*,* $|\Delta| = 2s+1$ *и* $2 \le s \le 13$*.*

Следствие 2.4. *Сильно регулярный граф с параметрами* $(85,30,11,10)$ *не является вершинно симметричным.*

В работах [39-42] доказано несуществование реберно симметричных сильно регулярных графов с параметрами $(88,27,6,9)$, $(88,60,41,40)$, $(96,45,24,18)$, $(96,50,22,30)$, $(96,60,38,36)$, $(99,42,21,15)$ и $(99,56,28,36)$. Завершает вышеуказанную программу

Теорема 2.6 [49]. *Пусть* Γ — *сильно регулярный граф с параметрами* $(100,33,8,12)$, g — *элемент простого порядка* p *из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*
(1) Δ — *пустой граф,* $p \in \{2,5\}$*;*
(2) Δ *является* 4*-кликой,* $p \in \{2,3\}$*;*
(3) Δ *является* γ*-кокликой,* $\gamma = 1$*,* $p \in \{3,11\}$ *или* $p = 3$ *и* $\gamma = 4,7,...,16$*;*
(4) Δ *является объединением* $n \ge 2$ *изолированных* m_i*-клик,* $p = 2$*,* $m_i \in \{2,4\}$ *и* $|\Delta| \le 20$*;*
(5) Δ *содержит геодезический* 2*-путь и либо* $p = 3$*,* $|\Delta| = 3t+1$*,* $3 \le t \le 8$*, либо* $p = 2$*,* $|\Delta| = 2s$*,* $3 \le s \le 25$*.*

Следствие 2.5. *Сильно регулярные графы с параметрами* $(100,33,8,12)$ *и* $(100,66,44,42)$ *не являются реберно симметричными.*

Из этого следствия и результатов [39-42,47] получаем решение проблемы Лама.

Следствие 2.6. *Сильно регулярные графы с параметрами из заключения предложения* 2.2 *не являются реберно симметричными.*

В главе 3 приведен обзор свойств АТ4-графов и найдены автоморфизмы АТ4(4,6,5)-графа с массивом пересечений $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$. Вторая окрестность вершины в этом графе является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144,125,32,1;1,8,$
$125,144\}$. Найдены также автоморфизмы указанного графа. Доказано, что для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2 = -1$ граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. С помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44,35,3;1,5,42\}$. В § 3.4 изучены свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого граф Γ_3 или $\bar\Gamma_2$ является псевдогеометрическим для обобщенного четырехугольника.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \ge 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. Тогда выполняется фундаментальная граница

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \ge -\frac{k a_1 b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется *плотным.* Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4, $\bar{\Gamma}'$ — антиподальное частное графа $\bar{\Gamma}$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{k, k-a_1-1, (r-1)c_2, 1; 1, c_2, k-a_1-1, k\}$. Далее, Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q^4_{11} = 0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, и индексом антиподальности r, то все параметры Γ выражаются через p, q, r. В этом случае назовем Γ *антиподальным плотным графом* диаметра 4 с параметрами p, q, r ($AT4(p, q, r)$-графом).

Предложение 3.1. *Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$-графом, u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Если $q = p+2$, то вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $((p+1)(p+3)(p^2+4p+2), p(p+2)^2, p^2+p-2, 2p(p+1))$ и собственными значениями $p, -(p^2+2p+2)$, имеющий дистанционно регулярное r-накрытие с массивом пересечений $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$.*

По предложению 3.1 вторая окрестность вершины в AT4(4,6,5)-графе является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 3.1 [53]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф, $p \in \{2, 5\}$;*

(2) *g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$;*

(3) *Ω является антиподальным классом графа Γ и $p = 17$;*

(4) *Ω является объединением двух антиподальных классов и $p = 7$;*

(5) *$p = 5$ и $t = s = 5$.*

Следствие 3.1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ не является реберно симметричным.*

Для доказательства теоремы 3.1 полезны следующие результаты.

Теорема 3.2 [53]. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф и $p \in \{2, 3, 17\}$;*

(2) *либо Ω является n-кликой, где $n = 1$ и $p = 7$ или $n = 4$ и $p = 5$, либо Ω является l-кокликой, где $p = 2$ и $l = 8, 10, ..., 34$;*

(3) *Ω содержит геодезический 2-путь, $p = 3$ и Ω – октаэдр или $p = 2$, степени вершин в Ω равны $2, 4, ..., 26$ и $|\Omega| = 4, 6, ..., 34$.*

Следствие 3.2. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве его вершин. Тогда $S(G) = O_2(G)$, цоколь $\bar{T}$ группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфен $L_2(16)$ и либо группа G изоморфна $\mathrm{Aut}(L_2(16))$, либо $|\bar{G} : \bar{T}| = 2$, $O_2(G)$ — элементарная абелева 2-группа, $|O_2(G) :$*

$O_2(G)_a| = 2$ *для вершины* a *графа* Γ *и* $\bar{T}$ *действует неприводимо на* $O_2(G)$*, либо* $\bar{G} = \bar{T}|$ *и* $|O_2(G) : O_2(G)_a| = 4$.

Теорема 3.3 [53]. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(800, 204, 28, 60)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и* $p \in \{2, 5\}$*;*

(2) *либо* Ω *является* n*-кликой,* $n = 1$*,* $p = 17$*, или* $n = 5$*,* $p = 5$*, или* $n = 2$*,* $p = 7$*, либо* Ω *является* l*-кокликой,* $p = 3$*,* $l = 3m + 2$ *или* $p = 2$ *и* $l = 8, 10, ..., 92$*;*

(3) Ω *является объединением* m *изолированных 5-клик,* $p = 5$*,* $2 \le m \le 5$*;*

(4) Ω *содержит геодезический 2-путь,* $p = 3$*,* Ω *является объединением* $3m+1$ *полных многодольных графов* $K_{4\times 2}$ *или* $p = 2$*,* $|\Omega| = 2l \le 240$*,* $\lambda_\Omega = 0, 2, ..., 26$ *и степени вершин в* Ω *равны* $0, 2, ..., 34$.

Следствие 3.3 ([53]). *Если сильно регулярный граф* Γ *с параметрами* $(800, 204, 28, 60)$ *является вершинно симметричным, то* $|\mathrm{Aut}(\Gamma)|$ *не делится на* 17*. В частности,* Γ *не является реберно симметричным.*

В параграфе 3.2 перечислены автоморфизмы дистанционно регулярного графам с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$.

Теорема 3.4 [54]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и* $p \in \{5, 7, 17\}$*;*

(2) Ω *— непустой граф и* $p \le 13$.

Следствие 3.4. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений* $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$*. Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ*, то* G *разрешима.*

Для доказательства теоремы 3.4 полезен следующий результат.

Теорема 3.5 [54]. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(595, 144, 18, 40)$*,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$*,* g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$*. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и* $p \in \{5, 7, 17\}$*;*

(2) *либо* Ω *является* n*-кликой, где* $n = 1$ *и* $p \in \{2, 3\}$ *или* $n = 5$ *и* $p = 5$*, либо* Ω *является* l*-кокликой,* $p = 2$ *и* $l = 5, 7, ..., 91$*;*

(3) Ω *является объединением* m *изолированных 5-клик,* $p = 5$*,* $m \le 5$*;*

(4) Ω *содержит геодезический 2-путь и* $p \le 29$.

Теорема 3.6 [59]. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3*, для которого граф* Γ_3 *сильно регулярен. Тогда* $\theta_2 = -1$ *и выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_2 = a_3 + 1$*,* $b_1 = rc_2$ *и граф* $\bar{\Gamma}_3$ *является псевдогеометрическим для* $pG_{c_3}(k, r)$*;*

(2) *если* Γ *— антиподальный граф и граф* Γ_2 *сильно регулярен, то либо* Γ *— граф Тэйлора без треугольников, либо граф* $\bar{\Gamma}_2$ *является псевдогеометрическим для* $GQ(r - 1, c_2 + 1)$.

Замечание 3.1. *Пусть псевдогеометрический граф для $GQ(s,t)$ имеет разбиение множества вершин множеством $\mathcal{S}$ клик порядка $s+1$ (спред). Превратив $\mathcal{S}$ в множество коклик, по* [2, *предложение* 12.5.2] *получим дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{st, s(t-1), 1; 1, t-1, st\}$.

Обобщенные четырехугольники имеют спред для порядков $(s,1), (1,t), (q,q)$, $(q,q^2), (q-1,q+1)$, где q — степень простого числа, $(q+1,q-1)$, где q — степень 2.

Следствие 3.5. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ *не существует.*

Несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ независимо получено в [18].

Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 граф Γ_i может быть сильно регулярным для $i \in \{2,3\}$. Нахождение параметров Γ_i по массиву пересечений графа Γ является прямой задачей. Нахождение массива пересечений графа Γ по параметрам Γ_i является обратной задачей. Прямая и обратная задачи решены для $i=3$ в теореме 3.6.

В § 3.4 продолжено решение обратной задачи в случаях, когда графы Γ_3 или $\bar{\Gamma}_2$ являются псевдогеометрическими для обобщенного четырехугольника.

Теорема 3.7 [60]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф Γ_3 или граф Γ_2 сильно регулярен. Тогда граф $\bar{\Gamma}_3$ или Γ_2 не является псевдогеометрическим для обобщенного четырехугольника.*

Пусть дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности. Юришич и Видали [6, предложение 5] доказали, что Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a=a_3, c=c_2, p=p^3_{33}$.

Теорема 3.8 [60]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3. Если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(l,t)$, то $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим графом для $pG_{(l-1)t}(lt, l-1)$ и Γ имеет массив пересечений $\{lt, c_2(l-1), t+1; 1, c_2, (l-1)t\}$ (массив Юришича-Видали первого типа для $a=t, p=l-1, c=c_2$).*

Обратная задача решена для $i=2$ в [43, теорема 1].

Теорема 3.9 [60]. *Пусть $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника $GQ(s,r)$. Тогда Γ_2 является псевдогеометрическим графом для $pG_{(s-1)r}(sr, s-1)$ с собственными значениями $\kappa = s^2r, r, -s$ и для $\mu = s(s-1)r$, $x = b_2 + c_2$ выполняется одно из утверждений:*

(1) Γ *имеет массив типа* (1) *и является антиподальным графом с массивом пересечений* $\{sr, s(r-1), 1; 1, r-1, sr\}$;

(2) $b_0 = sx$, $b_1 = r(r+1+xs-x)/(r+1)$, $b_2 = x(r+1-x)(s-1)/(s(r+1))$, $c_2 = x(r+1+xs-x)/(s(r+1))$, $c_3 = (s-1)rx/(r+1)$, $(r+1)$ *делит* $(s-1)x$, s *делит* $x(r+1-x)$.

В главе 4 изучены общие свойства дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. Перечислены массивы пересечений графов в случае, когда Γ_3 не содержит треугольников. Найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.

Теорема 4.1 [58]. *Пусть* Γ *является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра* 3, *для которого графы* Γ_2 *и* Γ_3 *сильно регулярны. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $b_1 = rc_2$, $b_2 = a_3 + 1$, $a_2 = (r-1)(c_2+1)$, $c_3 = r(c_2+1)$, $a_1 = a_3 + r - 1$, $k_2 = kr$, $k_3 = k(a_3+1)/(c_2+1)$, $p^1_{33} = a_3(a_3+1)/(c_2+1) = \mu(\Gamma_3)$ *и* Γ *имеет массив пересечений* $\{r(c_2+1)+a_3, rc_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$;

(2) *если* $a_3 = \alpha(c_2+1)$, *то* $k = (r+\alpha)(c_2+1)$, Γ_3 — *псевдогеометрический граф для* $pG_\alpha(r+\alpha, \alpha(c_2+1))$ *и* $k_3 = (r+\alpha)(\alpha(c_2+1)+1)$;

(3) *если* $\alpha = 1$, *то* Γ_3 *является псевдогеометрическим графом для* $GQ(r+1, c_2+1)$, *граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{(r+1)(c_2+1), rc_2, c_2+2; 1, c_2, r(c_2+1)\}$, *собственные значения* $\theta_1 = c_2 + r + 1$, $\theta_2 = -1$, $\theta_3 = -c_2 - 1$ *и* $\bar{\Gamma}_2$ — *псевдогеометрический граф для* $pG_2(r+1, 2c_2+2)$.

Известно существование следующих сильно регулярных графов без треугольников:

а) полный двудольный граф;

б) граф Мура с параметрами $(k^2+1, k, 0, 1)$, $k = 2, 3, 7$ (неизвестно существование графа Мура с $k = 57$);

в) граф Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, граф Гевиртца с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, граф Матье с параметрами $(77, 16, 0, 4)$, граф Хигмена-Симса с параметрами $(100, 22, 0, 6)$.

Крайне важной является задача нахождения нового сильно регулярного графа без треугольников. Доказана

Теорема 4.2 [58]. *Пусть* Γ *является примитивным дистанционно регулярным графом диаметра* 3, *для которого графы* Γ_2 *и* Γ_3 *сильно регулярны. Если* Γ_3 *не содержит треугольников и* $\mu(\Gamma_3) \le 11$, *то* Γ *имеет массив пересечений* $\{14, 10, 3; 1, 5, 12\}$, $\{119, 100, 15; 1, 20, 105\}$ *или* $\{(r+5)((r+3)^2-3)/6, r(r+3)(r+8)/6, r+6; 1, (r+3)(r+8)/6, r(r+5)(r+6)/6\}$, $r = 4, 6, 10, 16, 19, 24, 28, 40, 46, 52, 58, 60, 70, 79$.

В случае $r = 4$ получим граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, автоморфизмы которого найдены в [55]. Такой граф имеет спектр $69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $1 + 69 + 276 + 46 = 392$ вершины.

Теорема 4.3 [55]. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф и* $p \in \{2, 7\}$;

(2) $|\Omega| = 1$, $p = 23$;

(3) $|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$.

Следствие 4.1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, a — *вершина графа* Γ. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* Γ, *то либо* $|G| = 8 \cdot 49$ *и* Γ *является графом Кэли, либо* $G = Z(G) \times L$, $Z(G) \cong Z_7$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ *и* L_a — *силовская* 3*-подгруппа из* L, *либо* G *содержит подгруппу индекса* 2, *изоморфную* $Z_7 \times L_2(7)$, $|L_a| = 6$ *и* $G/S(G) \cong PGL_2(7)$.

Вопрос о существовании сильно регулярного графа с параметрами (392,46,0,6) остается открытым.

Юришич и Видали (см. [6]) доказали, что дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3, содержащий локально регулярный максимальный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3, c = c_2, p = p^3_{33}$. В первом случае граф Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$, и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$. Во втором случае получаем граф Шилла с $b_2 = c_2$. Обратно, граф Шилла с $b_2 = c_2$ имеет массив пересечений $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $p = b-1$.

Сначала исследуем дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен (равносильно $\theta_2 = -1$).

Теорема 5.1 дает частичный ответ на вопрос о существовании дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7, 7, 6; 1, 1, 2\}$. В предложении 5.1 найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, с помощью которого возможно построение вышеуказанного дистанционно регулярного графа, а в следствии 5.1 найдены простые композиционные факторы группы автоморфизмов вершинно симметричного сильно регулярного графа с параметрами $(176, 49, 12, 14)$.

Теорема 5.1 [57]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $a_1 = 0$ и $\theta_2 = -1$. Тогда для графа $\Delta = \bar{\Gamma}_3$ имеем разбиение подграфа $\Delta(u)$ кликами $w^\perp - \{u\}$, $w \in \Gamma(u)$. Если существует сильно регулярный граф с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, то существует и дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 7, 6; 1, 1, 2\}$.*

Предложение 5.1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g – элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(G)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и $p \in \{2, 11\}$;*

(2) Ω *является β-кликой и $p \in \{2, 3, 7\}$;*

(3) Ω *является γ-кокликой, $\gamma = 8, 15, 22$ и $p = 7$;*

(4) Ω *содержит ребро и является объединением (по крайней мере двух) изолированных клик, $p = 2$ и порядок любой максимальной клики из Ω равен $2, 4$ или 6;*

(5) Ω *содержит геодезический 2-путь и $p \leq 11$.*

Следствие 5.1. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действвет транзитивно на множестве его вершин и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/O_2(G)$. Тогда либо $\bar{T} \cong M_{11}$, $|\bar{T} : \bar{T}_a| \in \{11, 22\}$ для вершины a графа Γ, либо $\bar{T} \cong M_{22}$, группа $\bar{T}_a$ изоморфна $L_3(4)$ и имеет индекс 22 в $\bar{T}$.*

Существование сильно регулярного графа с параметрами (176,49,12,14), в котором окрестности вершин являются 7×7-решетками, остается неизвестным.

В теореме 5.2 получены новые верхние границы для порядков клик сильно регулярных графов Γ_3, уточняющие классическую границу Хофмана-Дельсарта. С помощью этих оценок доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$.

Теорема 5.2 [59]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 содержит n-клику $\{u, u_2, ..., u_n\}$. Тогда $\Gamma_3(u) - \cup_{i=2}^n \Gamma(u_i)$ содержит $k_3 - (n-1)(a_3+1)$ вершин и для графа с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ имеем $n \leq 3$, с массивом $\{31, 24, 8; 1, 4, 24\}$ имеем $n \leq 7$, с массивом $\{35, 28, 6; 1, 2, 30\}$ имеем $n \leq 15$, с массивом $\{35, 30, 8; 1, 3, 28\}$ имеем $n \leq 12$, с массивом $\{39, 30, 4; 1, 5, 36\}$ имеем $n \leq 6$, с массивом $\{39, 32, 10; 1, 4, 30\}$ имеем $n \leq 9$, с массивом $\{43, 36, 11; 1, 4, 33\}$ имеем*

$n \le 10$, с массивом $\{44, 30, 9; 1, 5, 36\}$ имеем $n \le 7$, с массивом $\{44, 36, 5; 1, 9, 40\}$ имеем $n \le 3$, с массивом $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ имеем $n \le 9$, с массивом $\{44, 42, 5; 1, 7, 40\}$, имеем $n \le 6$, с массивом $\{49, 36, 5; 1, 4, 45\}$ имеем $n \le 10$, с массивом $\{51, 44, 13; 1, 4, 39\}$ имеем $n \le 12$, с массивом $\{54, 42, 11; 1, 3, 44\}$ имеем $n \le 15$.

Следствие 5.2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27, 20, 7; 1, 4, 21\}$ не существует.*

Для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ можно выдвинуть следующее предположение

Гипотеза 5.1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. Тогда либо Γ принадлежит некоторому конечному множеству графов, либо $c = a - 1$. В последнем случае граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$, $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(p+1, 2a)$ и кратности неглавных собственных значений равны $(a+1)a(p+2)(p+1)/(a+p+1)$, $(ap+a+1)a(p+2)(p+1)/((2a+p)(a+p+1))$, $(ap+a+1)(p+1)p/(2a+p)$.*

Теорема 5.3 [59]. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$. Тогда $a < p(p+1)$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a \le c$, то либо $a = c$ и Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$, либо $2p+2 \le a$;*

(2) *параметр a не равен $c-1$;*

(3) *если $a = c-2$, то $\theta_1 = a-x$, $\theta_3 = -(2p+3+a-x)$, $(a-x)(2p+3+a-x) = a(a+p+3)$ и $0 < x < p/2$;*

(4) *если $a = c+2$, то $\theta_1 = a+x$, $\theta_3 = 2p+1-a-x$, $(a+x)(a+x-2p-1) = a(p+a-1)$ и $3p/2 < x < 2p+1$.*

(5) *если $a = c+1$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$ с квазиклассическими параметрами $\{p+1, a\} = \{q, q\}, \{q^2, q\}, \{q^2, q^3\}, \{q-1, q+1\}$, то Γ имеет массив пересечений $\{q^2-1, q^2-2q, q+2; 1, q, q^2-q-2\}$, $\{15, 8, 4; 1, 2, 12\}$, $\{27, 16, 4; 1, 2, 24\}$ или $\{195, 168, 14; 1, 11, 182\}$.*

Для массива пересечений $\{a(p+1), ap, a+1; 1, a, ap\}$ при $1 \le a, p \le 1000$ только для следующих пар (a, p) кратности собственных значений целые: $(1, 4)$, $(1, 54)$, $(6, 28)$, $(6, 119)$, $(204, 984)$.

Теорема 5.4 [59]. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{a(p+1), (a-1)p, a+1; 1, a-1, ap\}$. Тогда следующие серии содержат бесконечное число допустимых массивов*

(1) *$p = a-3$: $\{a(a-2), (a-1)(a-3), a+1; 1, a-1, a(a-3)\}$, $a \ge 5$;*

(2) *$p = 2a+2$: $\{a(2a+3), 2(a-1)(a+1), a+1; 1, a-1, 2a(a+1)\}$, a не сравнимо с 1 по модулю 3;*

(3) *$p = 2a-4$: $\{a(2a-3), 2(a-1)(a-2), a+1; 1, a-1, 2a(a-2)\}$, a четно и не сравнимо с 1 по модулю 3;*

(4) *$p = 3a-5$: $\{a(3a-4), (a-1)(3a-5), a+1; 1, a-1, a(3a-5)\}$, a четно и сравнимо с $0, 2$ по модулю 5.*

Во второй части главы 5 рассматриваются графы Шилла.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3.

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\max\{a_3, (a_1+\sqrt{k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1 = a_3$ по [5, теорема 7] имеем $\theta_1 = (a_1+\sqrt{k+a_1^2})/2$ и k делится на a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k, и полагают $b(\Gamma) = k/a$.

Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$. Тогда $a_1 = a-b$, Γ имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$ и собственные значения θ_2, θ_3, являющиеся корнями уравнения $x^2 - (a_2 + a - b - ab)x + (b-1)b_2 - a_2 = 0$. Если θ_2, θ_3 – целые числа, то $(a_2 + a - b - ab)^2 - 4((b-1)b_2 - a_2)$ является квадратом натурального числа, в противном случае кратности θ_2 и θ_3 совпадают.

Известные графы Шилла: граф Хэмминга $H(3,3)$ с массивом пересечений $\{6,4,2; 1,2,3\}$, нечетный граф $O(4)$ с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$, обобщенный шестиугольник $GH(2,2)$ с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$, граф Тервиллигера с массивом пересечений $\{10,6,4;1,2,5\}$, граф Доро с массивом пересечений $\{12,10,3;1,3,8\}$, унитарный граф на множестве неизотропных векторов с массивом пересечений $\{12,10,5;1,1,8\}$, граф Джонсона $J(9,3)$ с массивом пересечений $\{18,10,4;1,4,9\}$.

Возможные автоморфизмы графа Шилла с массивом пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$ найдены в [25]. Если собственное значение θ_2 графа Шилла Γ с $b_2 = c_2$ равно -1, то ввиду [56] Γ имеет массив пересечений $\{35,32,8;1,8,28\}$. Но в этом случае $q_{33}^3 = -36/25$, противоречие.

Теорема 5.5 [56]. *Пусть граф Шилла Γ с $b_2 = c_2$ содержит нецелое собственное значение. Тогда граф Γ имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2, (b-1)(b^2-b+2)/2, b(b-1)/4; 1, b(b-1)/4, b(b-1)^2/2\}$, а кратности его неглавных собственных значений равны $(b^2-b+2)(b-1)b/2$, $(b^2-b+2)(b-1)b/2$ и $(b^2-b+1)b$.*

Теорема 5.6. *Пусть граф Шилла Γ с $b_2 = c_2$ не содержит треугольников и $b < 170$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{25,24,3;1,3,20\}$, $\{81,80,18;1,18,72\}$, $\{441,440,9;1,9,420\}$ или $\{441,440,49;1,49,420\}$.*

Утверждение теоремы 5.6 следует из [56] с привлечением [17, лемма 1.5].

Теорема 5.7 [56]. *Пусть Γ является графом Шилла с $b_2 = c_2$ и $b = 4$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{40,33,3;1,3,30\}$, или $\{20(q-2), 3(5q-9), 2q; 1, 2q, 15(q-2)\}$ для $q = 6,9,18$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Tits J. Buildings of spherical type and finite BN-pairs, Springer Lecture Notes in Mathematics, v. 386, 1974.

2. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs, Berlin etc: Springer-Verlag – 1989.

3. Praeger C.E., Soicher L.H. Low rank representations and graphs for sporadic groups, Lecture series 8. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1997.

4. Jurisic A., Vidali J. Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr. 2012, v. 65, 29–47.

5. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010, v. 31, 2064–2073.

6. Cameron P.J. Permutation groups. London Math. Soc. Student Texts №45. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1999.

7. Махнев А.А., Нирова М.С. Об однородных расширениях частичных геометрий // Труды Института математики и механики УрО РАН 2007, т. 13, N 1, 148-157.

8. Buekenhout F., Hubaut X. Locally polar spaces and related rank 3 groups // J. Algebra 1977, v. 45, 391-434.

9. Махнев А.А. Локально GQ(3,5)-графы и геометрии с короткими прямыми // Дискр. матем. 1998, т. 10, 72-86.

10. Махнев А. А., Падучих Д. В. Расширения GQ(4,2), вполне регулярный случай // Дискретная математика 2001, т. 13, N 3, 91-109.

11. Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально GQ(4,4)-графах // Доклады академии наук 2010, т. 434, N 5, 583-586.

12. Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально GQ(4,6)-графах // Доклады академии наук 2011, т. 439, N 2, 146-149.

13. Махнев А.А., Падучих Д.В. О вполне регулярных локально GQ(4,8)-графах // Доклады академии наук 2012, т. 443, N 1, 583-586.

14. Махнев А.А., Падучих Д.В. Обобщенный четырехугольник GQ(4,16) и его расширения // Доклады академии наук 2013, т. 451, № 4, 378-380.

15. Кагазежева А.М. О локально $GQ(4,11)$-графах // Математический форум (Итоги науки. Юг России), т. 6 Группы и графы, Владикавказ 2012, 28-39.

16. Махнев А.А., Падучих Д.В. О сильно регулярных локально GQ(4,t)-графах // Сибирский матем. журнал 2008, т. 49, N 1, 161-182.

17. Белоусов И.Н. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 3, 16-26.

18. Bang S., Koolen J. Distance-regular graphs of diameter three having eigenvalue -1 // Linear Algebra and its Applications 2017, v. 531, 38-53.

19. Махнев А.А. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$ // Доклады академии наук 2014, т. 459, N 5, 539-543.

20. M. Shi, D. Krotov, P. Sole, A new distance-regular graph of diameter 3 on 1024 vertices, https://arxiv.org/pdf/1806.07069.pdf).

21. Буриченко В.П., Махнев А.А. О вполне регулярных локально циклических графах // Современные проблемы математики. Тезисы 42 Всероссийской молодежной конференции. ИММ УрО РАН, Екатеринбург 2011, 11-14.

22. Буриченко В.П., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярных локально циклических графов // Доклады академии наук 2011, т. 441, N 2, 151-155.

23. Зюляркина Н.Д., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$ // Доклады академии наук 2011, т. 439, N 4, 443-4472.

24. Белоусов И.Н. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$ // Доклады академии наук 2012, т. 443, № 3, 305-309.

25. Махнев А.А., Падучих Д.В. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Алгебра и логика 2012, т. 51, № 4, 476-495.

26. Махнев А.А., Циовкина Л.Ю. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2012, т. 18, N 1, 235-241.

27. Cameron P., Van Lint J. Designs, Graphs, Codes and their Links, London Math. Soc. Student Texts 22 1981. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

28. Nebe G., Venkov B. On tight spherical designs // Алгебра и анализ 2012, т. 24, N 3, 163-171.

29. Махнев А.А. О несуществовании сильно регулярных графов с параметрами (486, 165,36,66) // Украинский матем. журнал 2002, т. 54, N 7, 941-949.

30. Махнев А.А., Токбаева А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (243,66,9,21) // Владикавказский матем. журнал 2010. Т. 12, N 4, 35-45.

31. Исакова М.М., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (396,135,30,54) // Владикавказский матем. журнал 2010. Т. 12, N 3, 32-42.

32. Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В. О сильно регулярных графах с собственным значением 2 и их расширениях // Труды Института математики и механики УрО РАН 2010. Т. 16, N 3. С. 105-116.

33. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана-Синглтона // Доклады академии наук 2009, т. 428, N 2, 157-160.

34. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., Падучих Д.В. О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Гевиртца // Труды Института математики и механики УрО РАН 2010, т. 16, N 2, 35-47.

35. Махнев А.А., Падучих Д.В. Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хигмена-Симса // Труды Института математики и механики УрО РАН 2011, т. 17, N 4, 189-198.

36. Махнев А.А., Падучих Д.В. Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Матье // Труды Института математики и механики УрО РАН 2012 т. 18, N 3, 189-198.

37. Зюляркина Н.Д., Махнев А.А. О расширениях сильно регулярных графов с собственным значением 2 // Доклады академии наук 2012, т. 442, N 1, 7-10.

38. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with non-trivial automorphisms // Discrete Math. 2011, v. 311, N 2-3, 132-144.

39. Ефимов К.С., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (88,27,6,9) // Доклады академии наук 2012, т. 445, N 3, 247-250.

40. Журтов А.Х., Махнев А.А., Кагазежева А.М. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (96,45,24,18) // Доклады академии наук 2012, т. 445, N 3, 247-250.

41. Белоусов И.Н., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (96,60,38,36) // Доклады академии наук 2013, т. 451, N 3, 247-250.

42. Ефимов К.С., Махнев А.А. Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами (99,42,21,15) и (99,56,44,42) // Доклады академии наук 2013, т. 449, N 3, 247-250.

43. Махнев А.А., Падучих Д.В. Обратные задачи в теории дистанционно регулярных графов // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018 т. 24, N 3, 134-144.

Работы автора по теме диссертации

44. Журтов А.Х., Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Труды Института математики и механики УрО РАН 2010, т. 16, N 3, 93-104.

45. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами (640,243,66,108) // Доклады академии наук 2011, т. 440, N 6, 743-746.

46. Нирова М.С. Сильно $(s-2)$-однородные расширения частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2011, т. 17, N 4, 244-257.

47. Махнев А.А., Нирова М.С. О небольших симметричных сильно регулярных графах // Доклады академии наук 2012, т. 444, N 1, 23-27.

48. Нирова М.С. Об антиподальных дистанционно регулярных графах с $\mu = 1$ // Доклады академии наук 2013, т. 448, N 4, 392-395.

49. Нирова М.С. Реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин, не большим 100 // Сибирские электронные математические известия 2013, т. 10, 22-30.

50. Нирова М.С. Дистанционно регулярные локально $GQ(4,12)$-графы // Сибирские электронные математические известия 2013, т. 10, 144-150.

51. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{51,48,8;1,4,36\}$ // Доклады академии наук 2013, т. 449, N 3, 258-261.

52. Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with $\lambda = 2$ // J. Siberian Federal Univ. 2014, т. 7, N 2, 188-194.

53. Махнев А.А., Нирова М.С., Падучих Д.В. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{204,175,48,1;1,12,175,204\}$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2016, т. 22, N 1, 212-219.

54. Нирова М.С. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивами пересечений $\{144,125,32,1;1,8,125,144\}$ // Сибирские электрон. матем. известия 2017, т. 14, 178-189.

55. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2017, т. 23, N 3, 182-190.

56. Махнев А.А., Нирова М.С. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Матем. заметки 2018, т. 103, N 5, 730-748.

57. Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 2, 215-228.

58. Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах Γ с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 // Сибирские электрон. матем. известия 2018, т. 15, 175-185.

59. Нирова М.С. Коды в дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Труды Института математики и механики УрО РАН 2018, т. 24, N 3, 155-163.

60. Махнев А.А., Нирова М.С. Обратные задачи в теории графов: обобщенные четырехугольники // Сибирские электрон. матем. известия 2018, т. 15, 927-934.

61. Журтов А.Х., Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах 4-изорегулярных графов // Теория групп и ее приложения. Труды VIII Международной школы-конференции по теории групп. Нальчик 2010, 100-107.

62. Махнев А.А., Нирова М.С. О небольших симметричных сильно регулярных графах // Алгебра и линейная оптимизация. Тез. докл. Международной конф. Екатеринбург 2012, 124-125.

63. Нирова М.С. Об антиподальных дистанционно регулярных графах с $\mu = 1$ // Теория групп и ее приложения. Тез. докл. Международной школы-конференции. Владикавказ 2012, 94-96.

64. Нирова М.С. О локально $GQ(4,12)$-графах // Современные проблемы математики. Тез. докл. 44 Международной молодежной школы-конференции. Екатеринбург 2013, 85-87.

65. Нирова М.С. О реберно симметричных сильно регулярных графах с числом вершин, не большим 100 // Алгебра и комбинаторика. Тез. докл. межд. конф., посвященной 60-летию А.А. Махнева, Екатеринбург 2013, 120-122.

66. Махнев А.А., Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах с $\lambda = 2$ // Теория групп и ее приложения. Труды Международной школы-конф. по теории групп, Нальчик 2014, 41-42.

67. Makhnev A.A., Nirova M., Paduchikh D. Automorphisms of distance-regular graph with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ "Groups and Graphs, Algorithms and Automata". Abstracts of Intern. Conf and PHD Summer School, Yekaterinburg 2015, 69-70.

68. Makhnev A.A., Nirova M.S. On distance-regular graphs with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 // Тез. докл. межд. конф. "Актуальные проблемы прикладной математики и физики" , Нальчик 2017, 253-254.

69. Makhnev A.A., Nirova M.S. Automorphisms of graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ // "Graphs and Groups, Metrics and Manifolds". Abstracts of Intern. Conf and PHD-Master Summer School, Ekaterinburg 2017, 70.

70. Махнев А.А., Нирова М.С. О дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Мальцевские чтения. Тезисы докладов, Новосибирск 2017, 80.

71. Махнев А.А., Нирова М.С. Коды в дистанционно регулярных графах с $\theta_2 = -1$ // Теория групп и ее приложения. Материалы XII школы-конференции по теории групп. Краснодар 2018, 96-98.