Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Алексеев Иван Алексеевич

Устойчивые случайные величины и векторы с комплексным индексом устойчивости

Специальность 01.01.05 —
Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2022

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, **Смородина Наталия Васильевна**, ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), ведущий научный сотрудник
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук **Тихомиров Александр Николаевич**, ФГБУН ФИЦ физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН, профессор, главный научный сотрудник;
	доктор физико-математических наук **Ульянов Владимир Васильевич**, доцент, профессор кафедры математической статистики ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова.
Ведущая организация	ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится «» 2022 г. на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ http://pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council/.

Автореферат разослан «_____» ______________ 2022 г.

Учёный секретарь диссертационного совета к.ф.-м.н.	________________________ Рядовкин К. С.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных вещественных случайных величин $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Пусть существуют последовательности чисел $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n > 0$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$ такие, что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n$$

сходится по распределению к некоторой случайной величине ξ. *Каким может быть распределение случайной величины ξ?*

Ответ на этот вопрос дал Поль Леви еще в 30-х годах прошлого столетия (см. [11]). Он доказал, что ξ может быть только α-устойчивой случайной величиной с некоторым параметром $\alpha \in (0, 2]$.

Аналогичный вопрос был поставлен и для случайных векторов. Пусть $\{\vec{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^l$, $l \in \mathbb{N}$ и существуют последовательности $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n > 0$, $\{\vec{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^l$ такие, что последовательность случайных векторов

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} \vec{X}_k - \vec{a}_n$$

сходится по распределению к некоторому случайному вектору $\vec{\xi}$. Фельдгейм доказал (см. [9]), что в данном случае ответ окажется таким же, как у П. Леви, а именно, ξ может быть только α-устойчивым вектором с некоторым параметром $\alpha \in (0, 2]$.

Из результата П. Леви следует, что в одномерном случае в схеме суммирования независимых случайных величин случайных величин пределом может быть только α-устойчивая случайная величина с некоторым параметром $\alpha \in (0, 2]$. В многомерном пространстве, в отличие от одномерного, класс устойчивых законов гораздо шире чем класс α-устойчивых законов. Так, например, в [6] вводится понятие устойчивости относительно некоторой группы матриц $\mathcal{M}$. Более точно, случайный вектор ξ, со значениями в $\mathbb{R}^l$, называется устойчивым, если для любых M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$ существует $M \in \mathcal{M}$ и $m \in \mathbb{R}^l$ такие, что

$$M_1\xi_1 + M_2\xi_2 \stackrel{d}{=} M\xi + m,$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии случайного вектора ξ (знаком $\stackrel{d}{=}$ мы всегда будем обозначать равенство по распределению).

В [14] вводится равносильное понятие операторно-устойчивых законов, которые являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных векторов с матричной нормировкой и векторным центрированием. В [12] было доказано, что для всех таких законов существует экспонента, то есть существует вещественная матрица $E \in \mathbb{R}^{l\times l}$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m_n \in \mathbb{R}^l$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} \stackrel{d}{=} n^E\xi + m_n, \tag{1}$$

где $\xi^{(k)}$ — независимые копии вектора ξ.

Важным вопросом теории вероятностей является изучение класса предельных законов в схеме суммирования независимых одинаково распределенных векторов с некоторым центрированием. В одномерном случае основным подходом для изучения устойчивых законов является классическое определение устойчивости (см. [1], [2], [3], [11]). Именно, случайная величина ξ называется устойчивой, если найдется параметр $\alpha \in (0, 2]$ такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \xi + a_n, \tag{2}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии ξ.

В многомерном случае используется подобный подход (см. [9], [10], [12], [14]) с заменой формулы (2) на ее многомерный аналог (1).

Вторым подходом к изучению устойчивых случайных величин является их представление в виде стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере (см. [5], [8], [15], [13]). При данном подходе устойчивость случайных величин будет наследоваться из устойчивости меры интенсивности пуассоновского случайного поля. Такой подход, в частности, позволяет рассматривать и невероятностные аналоги устойчивых случайных величин и процессов и строить приближения для операторов Римана-Лиувилля.

Используемый в данной работе метод идейно близок ко второму подходу. В первой части случайные величины будут задаваться как стохастические интегралы от комплекснозначных функций по одномерной устойчивой мере. В отличие от классического случая, где устойчивость случайных величин наследуется только из устойчивости меры, при данном подходе, будет использована как устойчивость меры, так и устойчивость подинтегральной функции. Во второй части работы окажется удобнее использовать подход, близкий к первому.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей диссертационной работы является определение устойчивых случайных величин и векторов с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим условию $|\alpha - 1| < 1$, и исследование их свойств.

Методы исследований. В первой части диссертации, посвященной построению устойчивых случайных величин и исследованию простейших свойств, в основном используется теория стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере (см. [4], [13]).

При изучении класса предельных законов в схеме суммирования независимых одинаково распределенных комплекснозначных случайных величин и векторов с комплексным нормированием и центрированием, в основном, используется теория операторно-устойчивых случайных векторов (см. [10], [12], [14]).

В части диссертации, посвященной вероятностной аппроксимации операторов типа Римана-Лиувиля, используются методы из [5], [7] и [15].

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных областях теории вероятностей и математической статистики.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Построены α-устойчивые случайные величины и векторы с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим условию $|\alpha - 1| < 1$.

2. Полностью описано множество предельных распределений в схеме суммирования комплексных н.о.р. случайных величин и векторов с комплексными нормировкой и центрированием.

3. Построены соответствующие α-устойчивым векторам процессы Леви и найдены их генераторы.

4. Построен аналог оператора Римана-Лиувилля в случае комплексного индекса α и найдена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации докладывались автором на международной конференции «New Trends in Mathematical Stochastic» (Санкт-Петербург, сентябрь 2021), на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистики под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, сентябрь 2021 г., март 2022 г.), на конференции «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа» (Алушта, сентябрь, 2021 г.), на семинаре «Вероятность и математическая статистика» (Санкт-Петербург, Москва, Новосибирск, октябрь 2021, май 2022), на Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ (Москва, ноябрь 2021), на международной конференции «St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physic» (Санкт-Петербург, декабрь 2021), на семинаре « Вероятность и аппроксимация » (Смоленск, апрель 2022), на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (Санкт-Петербург, май 2022), на XXIII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, май 2022), на международной конференции «Branching processes, random walks and probability on discrete structures» (Москва, июнь 2022).

Публикации. Эти результаты содержатся в 3 работах [A1]–[A3], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и приложения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Общий объем диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 37 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований.

В первой главе диссертации строятся α-устойчивые случайные величины с комплексным параметром α, удовлетворяющим $|\alpha - 1/2| < 1/2$, и изучаются их свойства.

Опишем здесь основную идею построения. Для простоты ограничимся только случаем односторонних случайных величин.

Хорошо известно, что устойчивые величины могут быть заданы стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере. Для задания односторонних устойчивых случайных величин обычно используется пуассоновское случайное поле Y и отвечающая ему пуассоновская случайная мера $\nu_1(dy)$ на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\Pi_1(dy) = \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$. Известно, что α-устойчивая случайная величина задается следующим стохастическим интегралом

$$\xi_1 = \int_0^\infty y\nu_1(dy) = \sum_{y \in Y} y. \tag{3}$$

Рассмотрим отображение $y = x^{-1/\alpha}$. По теореме об отображении, множество $X = \{y^{-\alpha} : y \in Y\}$ является пуассоновским полем с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = \frac{1}{\alpha}dx$, где ν — отвечающая полю X, пуассоновская случайная мера. Делая замену переменной, получаем

$$\int_0^\infty y\nu_1(dy) \stackrel{d}{=} \int_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx).$$

Так как устойчивые случайные величины при умножении на вещественную константу остаются устойчивыми, то одностороннюю α-устойчивую случайную величину можно задавать следующим стохастическим интегралом

$$\xi = \int_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx) = \sum_{x \in X} x^{-1/\alpha}, \tag{4}$$

где X — пуассоновское поле на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = dx$. Здесь ν — отвечающая полю X, пуассоновская случайная мера.

Рассмотрим теперь комплексное число α, удовлетворяющее $|\alpha - 1/2| < 1/2$. Вместо комплексного параметра α оказалось удобнее использовать пару вещественных параметров (ϱ, γ), определяемых по α следующим образом

$$a = \operatorname{Re}\alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im}\alpha^{-1}; \quad \varrho = 1/a; \quad \gamma = b/a. \tag{5}$$

Параметр ϱ будем называть *параметром устойчивости*, параметр γ — *параметром комплексности*. Для вещественных α параметр $\varrho = \alpha$, а $\gamma = 0$.

В этом случае α-устойчивую случайную величину будем определять как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для определения устойчивой случайной величины формула (3) не подходит (мера интенсивности не может быть комплексной), поэтому вместо нее мы будем использовать формулу (4). При этом, с точностью до мультипликативной константы случайная величина, определенная (4) по распределению совпадает со следующим стохастическим интегралом

$$\xi_1 = \int_0^\infty x^{1+i\gamma}\nu(dx) = \sum_{x\in X_1} x^{1+i\gamma}, \tag{6}$$

где X_1 — пуассоновское поле на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности

$$\Pi(dx) = \tfrac{dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Такое определение легко обобщается на случай неодносторонних случайных величин, зависящих от параметров $c_+ \geqslant 0$, $c_- \geqslant 0$, $c_+ + c_- > 0$. Именно, пусть

$$\xi = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xe^{i\gamma\ln|x|}\nu(dx), \text{ где } \mathbb{E}\nu(dx) = \begin{cases} \frac{\varrho c_- dx}{|x|^{1+\varrho}}, & x<0; \\ \frac{\varrho c_+ dx}{x^{1+\varrho}}, & x>0. \end{cases} \tag{7}$$

Интеграл в (7) сходится абсолютно с вероятностью единица. Такая случайная величина является комплексным аналогом односторонней случайной величины. Распределение α-устойчивых случайных величин будет двумерным безгранично делимым, с мерой Леви, сосредоточенной на объединении двух кривых

$$\Gamma_0 = \{x^{1+i\gamma} : x>0\} = \{xe^{i\gamma\ln x} : x>0\} \text{ и } \Gamma_\pi = -\Gamma_0.$$

Отметим, что Γ_0 — логарифмическая спираль, определяемая в полярных координатах уравнением $\gamma\ln r = \varphi$.

Введенные комплекснозначные случайные величины обладают обычным условием устойчивости, но с заменой положительной полуоси на логарифмическую спираль Γ_0. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина, задаваемая* (6)*, ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ и пусть комплексные числа A, B лежат на логарифмической спирали Γ_0. Тогда существует $C\in\Gamma_0$ такое, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \overset{d}{=} C\xi, \tag{8}$$

причем $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$.

Вторая глава посвящена построению случайных величин, удовлетворяющих условию (8), но, возможно, с комплексным сдвигом. Распределения построенных случайных величин будем называть α-устойчивыми с комплексным параметром α. Множество значений параметра α будет расширено до области

$$|\alpha-1|<1. \tag{9}$$

Отметим, что при α, удовлетворяющих $|\alpha - 1/2| < 1/2$, введенный во второй главе класс распределений будет шире, чем класс, рассматриваемый в первой главе. Случайные величины будут зависеть не от параметров c_+, c_-, а от некоторой конечной меры на единичной окружности и параметра сдвига. При $\gamma = 0$ (то есть при $\alpha \in \mathbb{R}$) введенный класс распределений будет совпадать с классом всех двумерных α-устойчивых законов.

Для вещественных α в качестве определения устойчивости берется соотношение (8). Хорошо известно, что всякую негауссовскую ($\alpha < 2$) случайную величину можно задать как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для комплексных α нам будет удобнее сразу (как и в первой главе) определять устойчивую случайную величину как интеграл по пуассоновской случайной мере, а уже потом доказывать, что для построенных случайных величин справедливо (8).

Аналогично вещественному случаю выделим 3 различных случая: $\varrho \in (0, 1)$, $\varrho = 1$ и $\varrho \in (1, 2)$.

Перейдем к определению α-устойчивой случайной величины. Рассмотрим сначала случай

$$|\alpha - 1/2| < 1/2. \tag{10}$$

Напомним, что по комплексному параметру α мы определяли два вещественных параметра ϱ, γ формулой (5). При этом, условие (10) равносильно условию $\varrho \in (0, 1)$.

Пусть $\lambda(d\psi)$ — некоторая конечная мера на $[0, 2\pi)$. Рассмотрим пуассоновскую случайную меру $\nu(d\psi, dx)$ на $[0, 2\pi) \times (0, \infty)$ с интенсивностью

$$\Pi(d\psi, dx) = \lambda(d\psi)\frac{\varrho dx}{x^{1+\varrho}}. \tag{11}$$

Определение 1. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим* (10)*, конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$, и сдвигом $z \in \mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi, dx)$ с интенсивностью* (11)

$$\xi = z + \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \nu(d\psi, dx). \tag{12}$$

Стохастический интеграл в правой части (12) при таких α сходится с вероятностью единица.

Перейдем к определнию случайных величин с параметром α, удовлетворяющим условиям

$$|\alpha - 1| < 1, \quad |\alpha - 1/2| > 1/2, \tag{13}$$

которые равносильны условию $\varrho \in (1, 2)$.

Определение 2. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим условию* (13)*, конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$, и сдвигом $z \in \mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi, dx)$ с интенсивностью* (11)

$$\xi = z + \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \tilde{\nu}(d\psi, dx). \tag{14}$$

Здесь и далее, $\tilde{\nu}(d\psi, dx) = \nu(d\psi, dx) - \Pi(d\psi, dx)$ — центрированная пуассоновская случайная мера.

Стохастический интеграл в правой части (14) понимается как

$$(L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde{\nu}(d\psi, dx), \tag{15}$$

где

$$\xi_\varepsilon = \xi_{\varepsilon,1} + i\xi_{\varepsilon,2} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{1} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde{\nu}(d\psi, dx). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь α, удовлетворяющие условие

$$|\alpha - 1/2| = 1/2, \quad \alpha \neq 0, \tag{17}$$

которое равносильно условию $\varrho = 1$.

Определение 3. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим (17), конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$, и сдвигом $z \in \mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi, dx)$ с интенсивностью* (11)

$$\xi = z + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\nu(d\psi, dx), \tag{18}$$

где ξ_ε определено (16).

Отметим, что построенные случайные величины являются безгранично делимыми. Следующее утверждение дает точную формулу для соответствующей меры Леви.

Теорема 2. *Для любого α, удовлетворяющего* (9), *α-устойчивое распределение является двумерным безгранично делимым с мерой Леви Λ равной*

$$\Lambda(B) = |\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi} \mathbb{I}_B(u)\frac{dS_u}{|u|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi), \tag{19}$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^2$, $\Gamma_\psi = \{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\colon\ x > 0\} = e^{i\psi}\Gamma_0$, dS_y — дифференциал длины дуги на логарифмической спирали Γ_ψ.

Для построенных случайных величин также будет выполнено условие алгебраической устойчивости.

Теорема 3. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина с параметром α, удовлетворяющим (9), ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ и пусть комплексные числа A, B лежат на логарифмической спирали Γ_0. Тогда существуют $C \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{20}$$

причем

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha, \quad q = \tilde{z}\big(C - A - B\big), \quad \tilde{z} = \begin{cases} z, & \varrho \neq 1; \\ z - i\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\psi}\lambda(d\psi), & \varrho = 1. \end{cases}$$

Для α, удовлетворяющих (9), утверждение теоремы 3 является характеризационным для введенного класса устойчивых случайных величин.

Теорема 4. *Для любого фиксированного α, удовлетворяющего* (9)*, следующие два условия равносильны*

1. *Для всех комплексных чисел A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$ и $q \in \mathbb{C}$ такие, что справедливо*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{21}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ, а число $C \in \Gamma_0$ в (21) *однозначно определяется из уравнения $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$.*

2. *Распределение случайной величины ξ (рассматриваемой как двумерный вектор) является безгранично делимым с нулевой гуассовской компонентой и мерой Леви Λ, определенной* (19).

Теорема 5. *Для любого фиксированного α комплексная случайная величина ξ является α-устойчивой тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $q_n \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi + q_n, \tag{22}$$

где ξ_k — независимые копии ξ.

Будем говорить, что комплекснозначная случайная величина X принадлежит области притяжения комплекснозначной случайной величины ξ, если существуют две последовательности комплексных чисел $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - q_n \tag{23}$$

сходится по распределению к ξ.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть для некоторых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varrho \in (0, 2)$ распределение комплексной случайной величины X удовлетворяет условию*

$$\frac{\mathbb{P}(|X| > d \cdot x, (\arg X - \gamma \ln |X|) \pmod{2\pi} \in G)}{\mathbb{P}(|X| > x)} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho} \sigma(G), \tag{24}$$

где $\sigma(d\psi)$ — некоторая вероятностная мера на $[0, 2\pi)$, а G — произвольное борелевское множество на $[0, 2\pi)$ такое, что $\sigma(\partial G) = 0$. Тогда X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ.

Из теоремы 6 следует, что построенные случайные величины являются операторно-устойчивыми. В данном случае можно найти экспоненту распределения E.

$$E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{25}$$

По построенным случайным величинам ξ можно задать процесс Леви $\xi(t)$ с условиями $\xi(1) \overset{d}{=} \xi$, $\xi(0) = 0$. Для процессов Леви верна следующая характеризационная теорема.

Теорема 7. *Пусть $\xi(t)$ — комплекснозначный случайный процесс Леви. Для любого фиксированного α следующие два условия равносильны*

1. *Для любого $t > 0$ и $d > 0$ существует $z = z(t, d) \in \mathbb{C}$ такое, что $\xi(d \cdot t) \overset{d}{=} d^{1/\alpha} \xi(t) + z$.*
2. *Случайная величина $\xi(1)$ является α-устойчивой с некоторым сдвигом $z \in \mathbb{C}$ и конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$.*

По процессу $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$ построим полугруппу операторов P^t, $t \geqslant 0$. Для каждого $t > 0$ оператор P^t действует на функцию $\varphi \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как

$$\big(P^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E} \varphi\big(x_1 - \xi_1(t), x_2 - \xi_2(t)\big). \tag{26}$$

Известно, что тогда существует оператор $\mathcal{L}$ такой, что $P^t = e^{t\mathcal{L}}$. Для простоты выпишем оператор $\mathcal{L}$ только для случая $\varrho \in (0, 1)$.

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) = |\alpha| \int_0^{2\pi} \int_{\Gamma_\psi} \Big(\varphi(x - y) - \varphi(x)\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi),$$

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *оператором типа Римана-Лиувиля порядка α.*

Верна следующая теорема.

Теорема 8. *Функция $u(t, x_1, x_2) = \big(P^t \varphi\big)(x_1, x_2)$ является решением задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u$ с начальным условием $u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2)$.*

Введем следующее определение. Будем говорить, что случайная величина ξ называется *комплексно-устойчивой*, если ξ является слабым пределом для последовательности случайных величин

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - z_n,$$

где $\{B_n\}$, $\{z_n\}$ — некоторые последовательности комплексных чисел, $\{X_k\}$ — последовательность комплекнозначных н.о.р. случайных величин. Иными словами, случайная величина ξ комплексно-устойчива, если ее область притяжения не пуста.

Следующая теорема дает полное описание класса комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 9. *Пусть ξ — комплексно-устойчивая случайная величина. Тогда ξ или вырожденная или гауссовская, или α-устойчивая случайная величина.*

Зафиксируем параметр $\gamma \in \mathbb{R}$. Тогда из теоремы 9 будет следовать классическое для устойчивых случайных величин определение.

Теорема 10. *Пусть для любых A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \overset{d}{=} C\xi + q, \tag{27}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ.

Тогда или существует $\varrho \in (0,2)$ такое, что ξ — α-устойчивая случайная величина, где $\alpha = \varrho(1+i\gamma)^{-1}$; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что ξ — комплекснозначная гауссовская случайная величина с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица.

В третьей главе результаты из второй главы обобщаются на случай случайных векторов со значениями в $\mathbb{C}^l$, $l \in \mathbb{N}$.

Определение 4. *Комплексный случайный вектор $\vec{\xi}$ будем называть устойчивым случайным вектором с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим (9), если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\vec{q}_n = \vec{q}_{n,1} + i\vec{q}_{n,2} \in \mathbb{C}^l$ такой, что*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\vec{\xi}_k \overset{d}{=} \vec{\xi} + \vec{q}_n, \tag{28}$$

где $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n$ — независимые копии $\vec{\xi}$.

Для α-устойчивых векторов справедлив следующий критерий.

Теорема 11. *Для любого фиксированного α, удовлетворяющего (9), случайный вектор $\vec{\xi}$ является устойчивым тогда и только тогда, когда распределение случайного вектора $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ является безгранично делимым с нулевой гуассовской компонентой и мерой Леви Λ, равной*

$$\Lambda(B) = |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}}\int\limits_{\Gamma_s} \mathbb{I}_B(y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(ds), \tag{29}$$

где $\mathcal{K}((z_1,\dots,z_l)^T) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_l, \operatorname{Im} z_l)^T$, $\Gamma_s = s\cdot\Gamma_0$, $s\in S^l_{\mathbb{C}}$ *— единичная сфера в* $\mathbb{C}^l$, B *— борелевское множество в* $\mathbb{R}^{2l}$, $\lambda(ds)$ *— некоторая конечная мера на* $S^l_{\mathbb{C}}$, dS_y *— длина дуги на кривой* Γ_s.

Аналогично одномерному случаю, доказываются некоторые предельные теоремы, строятся процессы Леви и находится генератор их полугрупп.

Введем следующее определение. Будем говорить, что случайный вектор $\vec{\xi}$ называется *комплексно-устойчивым*, если $\vec{\xi}$ является пределом по распределению для последовательности случайных векторов

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\vec{X}_k - \vec{z}_n,$$

где $\{B_n\}$, $B_n\in\mathbb{C}$, $\{\vec{z}_n\}$, $\vec{z}_n\in\mathbb{C}^l$ — некоторые последовательности, $\{\vec{X}_k\}$ — последовательность комплекнозначных н.о.р. случайных векторов. Иными словами, случайный вектор $\vec{\xi}$ комплексно-устойчив, если его область притяжения не пуста.

Следующая теорема дает полное описание класса комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 12. *Пусть* $\vec{\xi}$ *— комплексно-устойчивый случайный вектор. Тогда* $\vec{\xi}$ *или вырожденный или гауссовский, или* α*-устойчивый случайный вектор.*

Введем также определение устойчивости относительно кватернионов.

Определение 5. *Будем говорить, что случайная величина* $\xi = \xi_1 + \xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k$*, принимающая значения во множестве кватернионов* $\mathbb{H}$*, называется* α*-устойчивой, если для любого* $n\in\mathbb{N}$ *существует* $q_n\in\mathbb{H}$ *такой, что*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{m=1}^{n}\xi_m \overset{d}{=} \xi + q_n, \tag{30}$$

где $\xi_1,\dots,\xi_n$ *— независимые копии случайной величины* ξ.

В работе доказывается, что любой двумерный комплекснозначный α-устойчивый вектор обратимым линейными преобразованиями переходит в $\tilde{\alpha}$-устойчивую случайную величину, принимающую значения в $\mathbb{H}$, что позволяет описать класс всех кватернионно-устойчивых случайных величин.

В **четвертой главе** оператор типа Римана-Лиувилля $\mathcal{L}$, определенный в первой и второй главах будет обобщен на случай $\varrho\in\bigcup_{k=1}^{\infty}(4k,4k+1)\cup(4k+1,4k+2)$. Также будет построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u, \quad u(0,x)=\varphi(x),$$

где $\varphi(x)\in W_2^{[\varrho]+l+1}$, $l\geqslant 0$.

Для удобства читателя, в **приложении** приведены основные результаты об операторно-устойчивых случаайных векторах, необходимых для данной диссертации.

Литература

[1] Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, ГИТТЛ, Москва, Ленинград, 1949.

[2] В.М. Золотарев *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва, 1983.

[3] И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, Москва, 1965.

[4] Дж. Кингман *Пуассоновские процессы*, Издательство МЦНМО, Москва, 2007.

[5] М.В. Платонова *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы*, Записки научных семинаров ПОМИ, **442**(2015), 101-117.

[6] Г.Н. Сакович *Многомерные устойчивые распределения. Диссертация*, 1965.

[7] Н.В. Смородина, М.М. Фаддеев *Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер.*, Записки научных семинаров ПОМИ, **361**(2008), 145-166.

[8] Н.В. Смородина, М.М. Фаддеев *Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений*, Записки научных семинаров ПОМИ, **368**(2009), 201-228.

[9] E. Feldheim *Étude de la stabilité des lois de probabilité*, Thèses de l'entre-deux-guerres, **187**(1937).

[10] *D. Kremer, H-P. Scheffler* Multi operator-stable random measures and fields, Stochastic Models, 2019, V. 35(4), P. 429-468.

[11] P. Lévy *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Scuola normale superiore, 2e série, **3**(1934) 337-366.

[12] Mark M. Meerschaert, Hans-Peter Scheffler *Limit distributions for sums of independent random vectors : heavy tails in theory and practice*, Wiley, New York, 2001.

[13] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[14] M. Sharpe *Operator-Stable probability distributions on vector groups*, Transactions of the American Mathematical Society, **136**(1969), 51-65.

[15] N.V. Smorodina, M.M. Faddeev *The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications*, Acta applicandae mathematicae, **110**(2010), 1289-1308.

Работы автора по теме диссертации

[A1] И.А. Алексеев *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости, I.*, Теория вероятностей и ее применения, **67**(2022), выпуск 3, 421–439.

[A2] И.А. Алексеев *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости. Случай* $|\alpha - 1/2| < 1/2$., Записки научных семинаров ПОМИ, **505**(2021), 17–37.

[A3] И.А. Алексеев *Об устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости*, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, **501**(2021), № 1, 5–10.