Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Алексеев Иван Алексеевич

Устойчивые случайные величины и векторы с комплексным индексом устойчивости

Специальность 01.01.05 —
Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., Смородина Н. В.

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

Введение

Целью настоящей работы является определение устойчивых случайных величин и векторов с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим условию $|\alpha-1| < 1$, и исследование их свойств.

Напомним, что в вещественном случае случайная величина ξ называется устойчивой, если для всех b_1, $b_2 > 0$ существуют константы $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что $b_1\xi_1 + b_2\xi_2 \overset{d}{=} b\xi + a$ (знаком $\overset{d}{=}$ мы всегда будем обозначать равенство по распределению), где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ. Распределения устойчивых случайных величин также называются устойчивыми. Если для всех b_1, b_2 константа $a = 0$, то такую случайную величину называют строго устойчивой. Известно (см. напр., [7]), что для всякой устойчивой случайной величины найдется параметр $\alpha \in (0, 2]$ такой, что константы b_1, b_2 и b связаны соотношением

$$b_1^\alpha + b_2^\alpha = b^\alpha.$$

Одномерные устойчивые распределения хорошо изучены (см. [5], [7], [8], [11], [24], [27]). В частности, Полем Леви (см. [24]) было доказано, что устойчивые распределения и только они являются пределами по распределению для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с вещественными центрированием и нормированием. В настоящей работе (см. §2.6) результат П. Леви будет почти дословно обобщен на комплексный случай, именно, будет доказано, что построенные устойчивые случайные величины и только они будут пределами по распределению для сумм независимых одинаково распределенных комплекснозначных случайных величин с комплексным центрированием и нормированием.

Известно, что характеристическая функция одномерного устойчивого распределения имеет следующий вид

$$\mathbb{E}e^{ip\xi} = \exp\Big\{ipa - C|p|^\alpha\big(1 - i\beta\,\mathrm{sgn}(p)\omega(p,\alpha)\big)\Big\}, \quad p \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $C \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\operatorname{sgn}(p) = \begin{cases} \frac{p}{|p|}, & p \neq 0; \\ 0, & p = 0 \end{cases}$, $\omega(p, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1; \\ -\frac{2}{\pi} \log |p|, & \alpha = 1. \end{cases}$

При $\alpha \neq 1$ в случае строгой устойчивости $a = 0$.

Классические α-устойчивые распределения определены только для значений $\alpha \in (0, 2]$ и зависят от двух параметров $C > 0$ и $\beta \in [-1, 1]$ (в случае $\alpha = 2$ параметр $\beta = 0$). При других значениях α можно рассматривать устойчивость только для мер, причем невероятностных. В частности, А.М. Вершиком с соавторами и М.А. Лифшицем (см. [2], [12]) были построены α-устойчивые распределения для $\alpha = 0$. В работах [18], [29] были построены невероятностные аналоги α-устойчивых распределений для случаев $\alpha \in (2, 4) \cup (4, 6)$. Затем в работе [14] М.В. Платоновой этот метод был обобщен на случай $\alpha > 2$. При помощи построенных α-устойчивых распределений были получены вероятностные представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувиля.

Аналогичным образом определяются α-устойчивые вектора. Случайный вектор ξ называется устойчивым, если для всех b_1, $b_2 > 0$ существуют константы $b > 0$ и $a \in \mathbb{R}^l$ такие, что $b_1\xi_1 + b_2\xi_2 \stackrel{d}{=} b\xi + a$, где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ. Многомерные устойчивые распределения также хорошо изучены (см. [22], [27]). В частности, известна полная характеризация α-устойчивых векторов. В случае, когда $\alpha \in (0, 2)$ случайные векторы являются безгранично делимыми и их мера Леви Λ равна

$$\Lambda(B) = \int\limits_{S^l} \int\limits_0^\infty \mathbb{I}_B(r \cdot s) \frac{dr}{r^{1+\alpha}} \lambda(ds),$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^l$, S^l — единичная сфера в $\mathbb{R}^l$, $\lambda(ds)$ — некоторая конечная мера на S^l.

При $\alpha = 2$ векторы являются гауссовскими и, соответственно, однозначно определяются вектором математических ожиданий m и матрицей ковариации Q.

В многомерном пространстве, в отличие от одномерного, класс устойчивых законов гораздо шире чем класс α-устойчивых законов. Так, например, в [15] вводится понятие устойчивости относительно некоторой группы матриц $\mathcal{M}$. Более точно, случайный вектор ξ, со значениями в $\mathbb{R}^l$, называется устойчивым, если для любых M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$ существует $M \in \mathcal{M}$ и $m \in \mathbb{R}^l$ такие, что

$$M_1\xi_1 + M_2\xi_2 \stackrel{d}{=} M\xi + m,$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии случайного вектора ξ.

В [28] вводится равносильное понятие операторно-устойчивых законов, которые являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных векторов с матричной нормировкой и векторным центрированием. В [25] было доказано, что для всех таких законов существует экспонента, то есть существует вещественная матрица $E \in \mathbb{R}^{l\times l}$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется $m_n \in \mathbb{R}^l$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi^{(k)} \stackrel{d}{=} n^E \xi + m_n, \tag{2}$$

где $\xi^{(k)}$ — независимые копии вектора ξ. Матрица $n^E \in \mathbb{R}^{d\times d}$ определяется как

$$n^E = e^{\ln n\cdot E} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{k!} E^k. \tag{3}$$

Класс построенных в настоящей работе α-устойчивых случайных величин оказывается значительно шире, чем класс двумерных α-устойчивых случайных векторов и, одновременно, является подклассом операторно-устойчивых двумерных векторов, но с ним не совпадает. В §2.2 мы явно выпишем их экспоненту, которая однозначно определяется числом α.

Поясним здесь основную идею построения устойчивых случайных величин, соответствующих комплексным α. Для простоты ограничимся здесь аналогами односторонних устойчивых величин и случаем

$$|\alpha - 1/2| < 1/2. \tag{4}$$

Хорошо известно, что устойчивые величины могут быть заданы стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере (см. напр., [27]). Напомним, что если Y — пуассоновское случайное поле с некоторой мерой интенсивности $\Pi(dy)$ (см. напр., [10]), то ему отвечает пуассоновская случайная мера, задаваемая формулой $\nu(A) = \mathrm{card}(X \cap A)$. При этом,

$$\mathbb{E}\nu(A) = \Pi(A).$$

Для задания односторонних устойчивых случайных величин обычно используется пуассоновское случайное поле Y и отвечающая ему пуассоновская случайная мера $\nu_1(dy)$ на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности $\Pi_1(dy) = \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$. Известно, что α-устойчивая случайная величина с параметрами $C = \cos(\pi\alpha/2)\Gamma(-\alpha)$, $a = 0$, и $\beta = 1$ (параметры определены (1)) задается следующим стохастическим интегралом (см. напр., [27])

$$\xi_1 = \int_0^\infty y\nu_1(dy) = \sum_{y\in Y} y. \tag{5}$$

Рассмотрим отображение $y = x^{-1/\alpha}$. По теореме об отображении (см. [10], стр. 33), множество $X = \{y^{-\alpha} : y \in Y\}$ является пуассоновским полем с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = \frac{1}{\alpha}dx$, где ν — отвечающая полю X, пуассоновская случайная мера. Делая замену переменной, получаем

$$\int_0^\infty y\nu_1(dy) \stackrel{d}{=} \int_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx).$$

Так как устойчивые случайные величины при умножении на вещественную константу остаются устойчивыми, то одностороннюю α-устойчивую случайную величину можно задавать следующим стохастическим интегралом

$$\xi = \int_0^\infty x^{-1/\alpha}\nu(dx) = \sum_{x\in X} x^{-1/\alpha}, \tag{6}$$

где X — пуассоновское поле на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = dx$. Здесь ν — отвечающая полю X, пуассоновская случайная мера.

Рассмотрим теперь комплексное число α, удовлетворяющее (4). В этом случае α-устойчивую случайную величину будем определять как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для определения устойчивой случайной величины формула (5) не подходит (мера интенсивности не может быть комплексной), поэтому вместо нее мы будем использовать формулу (6). При этом, с точностью до мультипликативной константы случайная величина, определенная (6) по распределению совпадает со следующим стохастическим интегралом

$$\xi_1 = \int_0^\infty xe^{i\gamma\ln x}\nu(dx) = \sum_{x\in X_1} xe^{i\gamma\ln x}, \tag{7}$$

где $\alpha^{-1} = a + bi$, $\gamma = b/a$, X_1 — пуассоновское поле на $(0,\infty)$ с мерой интенсивности

$$\Pi(dx) = \tfrac{dx}{x^{1+1/a}}.$$

В случае $|\alpha - 1/2| < 1/2$ представление (7) задает комплексную случайную величину, которую будем одновременно интерпретировать и как двумерный случайный вектор. Такая случайная величина является комплексным аналогом односторонней случайной величины. Распределение α-устойчивых случайных величин будет двумерным безгранично делимым, с мерой Леви, сосредоточенной на кривой

$$\Gamma_0 = \left\{x^{1+i\gamma} : x > 0\right\} = \left\{xe^{i\gamma\ln x} : x > 0\right\}.$$

Отметим, что Γ_0 — логарифмическая спираль, определяемая в полярных координатах следующим уравнением

$$\gamma \ln r = \varphi.$$

Кривая Γ_0 обладает свойством замкнутости относительно умножения на элементы Γ_0. Кроме того, важную роль играет следующее соотношение

$$dS_x = \sqrt{1+\gamma^2}\, dx,$$

где dS — дифференциал дуги кривой. То есть, с точностью до мультипликативной константы, x является натуральным параметром.

В вещественном случае ($\gamma = 0$) эта кривая вырождаются в положительную полуось.

Введенные комплекснозначные случайные величины обладают обычным условием устойчивости, но с заменой положительной полуоси на логарифмическую спираль Γ_0. Именно, если ξ_1, ξ_2 — независимые копии α-устойчивой случайной величины ξ (определенной (7)) с комплексным α, то для всех A, $B \in \Gamma_0$ существует $C \in \Gamma_0$ такое, что

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi. \tag{8}$$

Комплексные числа A, B, C при этом связаны соотношением $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$.

Результаты диссертации.

Глава 1 посвящена изучению свойств α-устойчивой случайной величины, задаваемой (7), и ее двусторонних аналогов, зависящих, как и в вещественном случае (см. напр., [8]), от параметров $c_+ \geqslant 0$, $c_- \geqslant 0$, $c_+ + c_- > 0$. В §1.1 будет показано, что для α, удовлетворяющих (4), ряд (7) сходится абсолютно с вероятностью единица. Также в §1.1 выводятся формулы для характеристической функции устойчивого распределения, в §1.2 исследуется свойство устойчивости, в §1.3 доказывается теорема о сходимости сумм независимых случайных величин. В §1.4 строятся аналоги устойчивых процессов Леви, а также находится генератор соответствующей полугруппы операторов.

Глава 2 посвящена построению случайных величин, удовлетворяющих условию (8), но, возможно, с комплексным сдвигом. Распределения построенных случайных величин будем называть α-устойчивыми с комплексным параметром α. Множество значений параметра α будет расширено до области

$$|\alpha - 1| < 1. \tag{9}$$

Отметим, что при α, удовлетворяющих (4), введенный в Главе 2 класс распределений будет шире, чем класс, рассматриваемый в Главе 1. Случайные величины будут зависеть не от параметров c_+, c_-, а от некоторой конечной меры на единичной окружности и параметра сдвига. При $\gamma = 0$ (то есть при $\alpha \in \mathbb{R}$) введенный класс распределений будет совпадать с классом всех двумерных α-устойчивых законов.

Для вещественных α в качестве определения устойчивости берется соотношение (8). Хорошо известно (см. напр., [27]), что всякую негауссовскую ($\alpha < 2$) случайную величину можно задать как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере. Для комплексных α нам будет удобнее сразу (как и в главе 1) определять устойчивую случайную величину как интеграл по пуассоновской случайной мере, а уже потом доказывать, что для построенных случайных величин справедливо (8).

В §2.1 определяются комплекснозначные α-устойчивые случайные величины для α, удовлетворяющих (9), находятся представления для их характеристических функций, и показывается, что построенные распределения являются безгранично делимыми. В §2.2 исследуется свойство устойчивости и показывается, что построенные случайные величины удовлетворяют (8), но, возможно, с комплексным сдвигом q. Также условие устойчивости переписывается в матричных терминах и доказывается, что распределения, рассматриваемые как двумерные, являются операторно-устойчивыми и находится их экспонента (в смысле работы [25]). Далее, в §2.3, показывается, что свойство устойчивости (8) является характеризационным для построенного класса случайных величин. В §2.4 формулируются и доказываются достаточные условия для принадлежности к области притяжения комплекснозначных α-устойчивых случайных величин. Далее, в §2.5 вводятся α-устойчивые процессы Леви, строятся соответствующие полугруппы операторов и находятся их генераторы. Параграф 2.6 посвящен описанию множества предельных распределений в схеме суммирования комплексных н.о.р. случайных величин с комплексными нормировкой и центрированием. Для вещественных случайных величин соответствующий результат был получен Полем Леви в начале 1930-х годов [24]. Леви была доказана теорема, о том, что если частичные суммы последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин после соответствующей нормировки имеют слабый предел, то этот предел обязательно является устойчивым с некоторым индексом устойчивости $\alpha \in (0, 2]$, причем это условие является необходимым и достаточным.

Для случая суммирования комплексных случайных величин было известно только достаточное условие принадлежности к классу предельных законов. Действительно, всякую комплексную случайную величину можно рассматривать как двумерную, и, значит, при использовании только вещественной нормировки мы заведомо получим в качестве пределов класс всех двумерных устойчивых случайных векторов (см. напр., [22]). Индекс устойчивости α двумерных случайных векторов, как и в одномерном случае, может принимать значения только из интервала $(0,2]$. В §2.6 мы покажем, что необходимым и достаточным условием принадлежности к классу предельных распределений в комплексном случае является α-устойчивость с некоторым комплексным α. При этом, число α или равно 2 (двумерный гауссовский вектор), или удовлетворяет (9), что означает, что результат П. Леви почти дословно переносится на комплексный случай. В частности это означает, что класс предельных комплексных случайных величин значительно шире, чем класс двумерных α-устойчивых векторов с вещественным α.

В главе 3 мы обобщим понятие комплексной устойчивости на случай случайных векторов со значениями в $\mathbb{C}^l$.

В §3.1 определяются комплекснозначные α-устойчивые случайные векторы для α, удовлетворяющих (9), показывается, что построенные распределения являются безгранично делимыми и находится их мера Леви. В §3.2 формулируются и доказываются достаточные условия для принадлежности к области притяжения комплекснозначных α-устойчивых случайных векторов. Далее, в §3.3 вводятся α-устойчивые процессы Леви, строятся соответствующие полугруппы операторов, и находятся их генераторы. Параграф 3.4 посвящен описанию множества предельных распределений в схеме суммирования комплексных н.о.р. случайных векторов с комплексными нормировкой и центрированием. В §3.5 рассматривается еще одно обобщение с комплекснозначных случайных величин на кватернионно-значные случайные величины. Для них также вводится понятие устойчивости и показывается, что всякая кватернионно-устойчивая случайная величина получается линейным преобразованием из двумерного α-устойчивого комплексного вектора с некоторым параметром α.

В Главе 4 вводится оператор типа Римана-Лиувилля для случаев $\varrho \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$, который является обобщением введенных в Главах 1 и 2 генераторов полугрупп.

Более точно, будет рассматриваться оператор

$$\big(\mathcal{L}f\big)(x_1, x_2) \;\; = \;\; |\alpha| \int\limits_{\Gamma_0} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j}{j!} D^j f(x_1, x_2)[y_1 \, y_2] \Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}},$$

где $y = (y_1, y_2)$,

$$D^n f(x_1, x_2)[y_1 \, y_2] = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 \Big)^n f(y_1, y_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}} \cdot y_1^k y_2^{j-k}.$$

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть оператором типа Римана-Лиувилля. В случае, когда $\varrho \in (0,1) \cup (1,2)$, то такой оператор является генератором полугрупп, рассматриваемых в главах 1 и 2. В случае, когда $\gamma = 0$ (т.е. кривая Γ_0 вырождается в положительную полуось) с точностью до константы оператор $\mathcal{L}$ является оператором дробной производной.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{10}$$

где функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.

В работе [14] строятся вероятностные приближения для задачи Коши (10) в случае $\gamma = 0$. Аналогично вещественному случаю в §4.1 будут построены вероятностные приближения задачи Коши (10) в случае, когда $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\varrho \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2)$. В §4.2 вводится симметричный оператор типа Римана-Лиувилля $\mathcal{L}_s$ для параметров $\varrho \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и также будет получено вероятностное приближение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_s u, \quad u(0, x) = \varphi(x), \tag{11}$$

где функция $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Для удобства читателя, в приложении приведены основные результаты об операторно-устойчивых случаайных векторах, необходимых для данной диссертации.

Результаты по теме диссертации докладывались автором на международной конференции «New Trends in Mathematical Stochastic» (Санкт-Петербург, сентябрь 2021), на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистики под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, сентябрь 2021 г., март 2022 г.), на конференции «XXXII Крымская Осенняя Математическая Школа» (Алушта, сентябрь, 2021 г.), на семинаре «Вероятность и математическая статистика» (Санкт-Петербург, Москва, Новосибирск, октябрь 2021, май 2022), на Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ

(Москва, ноябрь 2021), на международной конференции «St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physic» (Санкт-Петербург, декабрь 2021), на семинаре «Вероятность и аппроксимация » (Смоленск, апрель 2022), на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (Санкт-Петербург, май 2022), на XXIII Международной научной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, май 2022), на международной конференции «Branching processes, random walks and probability on discrete structures» (Москва, июнь 2022).

Эти результаты содержатся в 3 работах [30]–[32], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и приложения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Общий объем диссертации составляет 98 страницы. Список литературы содержит 37 наименований.

Благодарности.

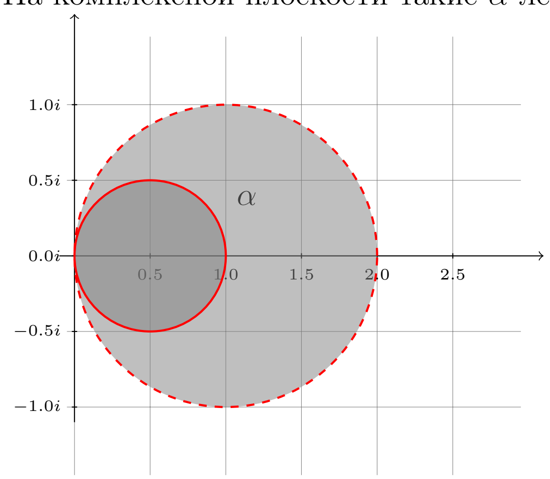
Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Наталии Васильевне Смородиной, за постановку интересных задач, постоянное внимание и поддержку, полезные обсуждения и ценные советы, замечания и комментарии.

Основные обозначения и определения

В рамках настоящей работы рассматриваются значения α, удовлетворяющие условию

$$|\alpha - 1| < 1. \tag{12}$$

На комплексной плоскости такие α лежат в круге, изображенном на рисунке



Вместо комплексного параметра α оказалось удобнее использовать пару вещественных параметров (ϱ, γ), определяемых по α следующим образом

$$a = \operatorname{Re}\alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im}\alpha^{-1}; \quad \varrho = 1/a; \quad \gamma = b/a. \tag{13}$$

Параметр ϱ будем называть *параметром устойчивости*, параметр γ — *параметром комплексности*. Для вещественных α параметр $\varrho = \alpha$, а $\gamma = 0$.

Параметры ϱ, γ однозначно определяют параметр α. Именно, верно следующее равенство

$$\alpha = \frac{\varrho}{1 + i\gamma}. \tag{14}$$

Аналогично вещественному случаю выделим 3 различных случая: $\varrho \in (0,1)$, $\varrho = 1$ и $\varrho \in (1,2)$.

На комплексной плоскости данные условия переписываются в следующем виде

$$\begin{cases} \varrho \in (0,1) & \text{тогда и только тогда, когда } |\alpha - 1/2| < 1/2; \\ \varrho = 1 & \text{тогда и только тогда, когда } |\alpha - 1/2| = 1/2,\ \alpha \neq 0; \\ \varrho \in (1,2) & \text{тогда и только тогда, когда } |\alpha - 1| < 1,\ |\alpha - 1/2| > 1/2. \end{cases}$$

Отметим, что все условия на α формулируются только в терминах параметра ϱ, а параметр γ является любым вещественным.

Зафиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ и введем семейство Γ_ψ логарифмических спиралей на комплексной плоскости, зависящее от параметра $\psi \in [0, 2\pi)$, полагая

$$\Gamma_\psi = \{x^{1+i\gamma} e^{i\psi} :\ x > 0\}. \tag{15}$$

Приведем несколько простых свойств кривых Γ_ψ. Для начала отметим, что кривые Γ_ψ получаются поворотом Γ_0 на угол ψ. Именно,

$$\Gamma_\psi = e^{i\psi} \cdot \Gamma_0.$$

Кривая Γ_0 в полярных координатах задается уравнением

$$\gamma \ln r = \varphi,$$

где r — полярный радиус, φ — полярный угол.

Рассмотрим биективное отображение $\mathcal{J} : (0, \infty) \to \Gamma_0$ вида

$$\mathcal{J} :\ x \mapsto x^{1+i\gamma}, \quad x > 0.$$

Заметим, что для всех x_1, $x_2 > 0$ выполнено

$$\mathcal{J}(x_1 \cdot x_2) = \mathcal{J}(x_1) \cdot \mathcal{J}(x_2). \tag{16}$$

В дальнейшем мы часто будем отождествлять комплексные числа с двумерными векторами. При таком отождествлении умножение на комплексное число будет соответствовать умножению вектора на матрицу. В частности, для любого $d > 0$ умножение комплексного числа $y_1 + iy_2$ на комплексное число $d^{1+i\gamma}$ соответствует умножению вектора $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ на матрицу

$$M_\gamma(d) = d \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln d) & -\sin(\gamma \ln d) \\ \sin(\gamma \ln d) & \cos(\gamma \ln d) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Более точно,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = M_\gamma(d) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ тогда и только тогда, когда } y_1 + iy_2 = d^{1+i\gamma}(x_1 + ix_2). \tag{18}$$

Введем множество матриц 2×2

$$\mathcal{M}_\gamma = \{M_\gamma(d): \ d > 0\}. \tag{19}$$

Отображение $d \mapsto M_\gamma(d)$ есть гомоморфизм групп. Значит $\mathcal{M}_\gamma$ — группа по умножению, изоморфная группе положительных чисел по умножению.

Отметим, что для любого $d > 0$ матрица $M_\gamma(d)$ постоянным множителем отличается от унитарной матрицы и значит для нее корректно определено возведение в степень (см. напр., [3, Теорема. 2, стр. 117]). Для унитарных матриц возведение в вещественную степень означает возведение собственных чисел в данную степень. Воспользуемся этим соображением и получим, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ соответсвует умножению на комплексное число

$$\left(d^{1+i\gamma}\right)^\alpha = d^{\varrho(a+ib)\alpha} = d^\varrho,$$

что означает, что матрица $M_\gamma^\alpha(d)$ есть диагональная матрица вида

$$M_\gamma^\alpha(d) = \begin{pmatrix} d^\varrho & 0 \\ 0 & d^\varrho \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Из (16) следует несколько важных свойств логарифмических спиралей — свойства замкнутости и самоподобия. Именно, для любых $\psi \in [0, 2\pi)$ и $d > 0$ выполнено

$$\mathcal{J}(d) \cdot \Gamma_\psi = \Gamma_\psi \tag{21}$$

и

$$\{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}: \ x > d\} = \mathcal{J}(d) \cdot \{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}: \ x > 1\}. \tag{22}$$

Для любого $\psi \in [0, 2\pi)$ и для любых $0 \leqslant c < d \leqslant \infty$ естественным образом определяется понятие открытого интервала $(c, d)_{\gamma,\psi}$ на кривой Γ_ψ как

$$(c, d)_{\gamma,\psi} = \{x^{1+i\gamma}e^{i\psi}: \ c < x < d\}. \tag{23}$$

Из (22) следует, что для любых $0 < c < d \leqslant \infty$ выполнено

$$(c, d)_{\gamma,\psi} = \mathcal{J}(c) \cdot (1, d/c)_{\gamma,\psi}.$$

Важную роль играет следующее соотношение

$$dS_x = \sqrt{1+\gamma^2}\,dx, \tag{24}$$

где dS_x — дифференциал дуги кривой Γ_0. Это означает, что с точностью до мультипликативной константы, x является натуральным параметром кривой Γ_0. Отметим также, что dS_x является образом меры Лебега при отображении $\mathcal{J}$.

Доказательство равенства (24) производится прямым вычислением модуля градиента замены $y_1 = x\cos(\gamma \ln x)$, $y_2 = x\sin(\gamma\ln x)$, где $x > 0$. Несложно видеть, что

$$\left|\left(\tfrac{dy_1}{dx}, \tfrac{dy_2}{dx}\right)\right|^2 = \big(\cos(\gamma\ln x) - \gamma\sin(\gamma\ln x)\big)^2 + \big(\sin(\gamma\ln x) + \gamma\cos(\gamma\ln x)\big)^2 = 1+\gamma^2.$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ множество $\Gamma_0 \times [0, 2\pi)$ изоморфно $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

Доказательство Покажем, что любое комплексное число $z \neq 0$ можно единственным образом представить в виде $d^{1+i\gamma}e^{i\psi}$, где $d > 0$, $\psi \in [0, 2\pi)$.

Так как $z \neq 0$, то существуют единственные числа $r > 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ такие, что $z = re^{i\varphi}$. Рассмотрим $d = r$ и $\psi = (\varphi - \gamma\ln r)\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$. Тогда

$$d^{1+i\gamma}e^{i\psi} = r\cdot e^{i\gamma\ln r + i(\varphi-\gamma\ln r)} = re^{i\varphi} = z.$$

Осталось показать единственность. Пусть

$$z = d_1^{1+i\gamma}e^{i\psi_1} = d_2^{1+i\gamma}e^{i\psi_2}. \tag{25}$$

В (25) рассмотрим модуль. Тогда имеем $d_1 = d_2$. Отсюда следует, что

$$(\gamma\ln d_1 + \psi_1)\,(\mathrm{mod}\,2\pi) = (\gamma\ln d_2 + \psi_2)\,(\mathrm{mod}\,2\pi).$$

Так как ψ_1, $\psi_2 \in [0, 2\pi)$, то $\psi_1 = \psi_2$. $\square$

Разложение комплексного числа из утверждения 1 назовем *квази-полярным разложением.* Так как при $\gamma = 0$ спираль Γ_0 вырождается в положительную полуось, то такое разложение действительно обобщает классическое полярное разложение.

Докажем одно свойство квази-полярного разложения.

Утверждение 2. *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} r \cdot f\big(r\cos(\gamma \ln r + \psi), r\sin(\gamma \ln r + \psi)\big)drd\psi.$$

Доказательство. Сделаем квази-полярную замену переменной $x + iy = r^{1+i\gamma}e^{i\psi}$. Вычислим якобиан замены.

$$\begin{aligned}
\det J &= \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\frac{\partial x}{\partial \psi} \\
&= \frac{\partial\big(r\cos(\gamma\ln r+\psi)\big)}{\partial r}\cdot\frac{\partial\big(r\sin(\gamma\ln r+\psi)\big)}{\partial \psi} - \frac{\partial\big(r\sin(\gamma\ln r+\psi)\big)}{\partial r}\cdot\frac{\partial\big(r\cos(\gamma\ln r+\psi)\big)}{\partial \psi} \\
&= r\big(\cos(\gamma\ln r+\psi) - \gamma\sin(\gamma\ln r+\psi)\big)\cos(\gamma\ln r+\psi) \\
&+ r\big(\sin(\gamma\ln r+\psi) + \gamma\cos(\gamma\ln r+\psi)\big)\sin(\gamma\ln r+\psi) = r. \quad \square
\end{aligned}$$

Сформулируем одно полезное следствие утверждения 2.

Следствие 1. *Пусть $\frac{f(x)}{\|x\|} \in L_1(\mathbb{R}^2)$. Тогда для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} f\big(h\cos(\gamma\ln h+\psi), h\sin(\gamma\ln h+\psi)\big)dhd\psi. \tag{26}$$

Обобщим квази-полярное разложение на случай многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^l$, $l \in \mathbb{N}$. В пространстве $\mathbb{C}^l$ мы используем норму

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{l} |z_k|^2, \text{ где } z = (z_1, \ldots, z_l)^T.$$

Зафиксируем $\gamma \in \mathbb{R}$ и введем семейство Γ_s кривых в l-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^l$, зависящее от параметра $s \in S^l_{\mathbb{C}}$, полагая

$$\Gamma_s = \{x^{1+i\gamma}s:\; x > 0\}. \tag{27}$$

Здесь и далее, $S^l_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^l:\; \|z\| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^l$. Несложно видеть, что $S^l_{\mathbb{C}}$ изоморфна единичной сфере в $\mathbb{R}^{2l}$.

Отметим, что кривые Γ_s получаются умножением друг друга на элемент из $S^l_{\mathbb{C}}$. Именно,

$$\Gamma_s = s \cdot \Gamma_0,$$

где $\Gamma_0 \subset \mathbb{C}$ определяется (15).

Для любого $s \in S^l_{\mathbb{C}}$ и для любых $0 < c < d \leqslant \infty$ введем обозначение

$$(c, d)_{\gamma,s} = \{x^{1+i\gamma} s : \, c < x < d\}. \tag{28}$$

Тогда из (22) следует, что

$$(c, d)_{\gamma,s} = \mathcal{J}(c) \cdot \Gamma_s(1, d/c).$$

Как и в одномерном случае, верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Для любого* $\gamma \in \mathbb{R}$ *множество* $\Gamma_0 \times S^l_{\mathbb{C}}$ *изоморфно* $\mathbb{C}^l \setminus \{0\}$.

Аналогично предыдущему случаю назовем такое разложение *квази-сферическое разложением.*

В главе 3 мы будем отождествлять l-мерный комплексный вектор с $(2l)$-мерным вещественным вектором. Такое отождествление не единственно. Нам будет удобно выбрать отображение $\mathcal{K} \colon \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}^{2l}$, определяемое следующим образом

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{K}(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} z_1 \\ \operatorname{Im} z_1 \\ \vdots \\ \operatorname{Re} z_l \\ \operatorname{Im} z_l \end{pmatrix}. \tag{29}$$

В главе 4 мы будем использовать преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p_1, p_2) = (L_2) \lim_{M \to \infty} \int\limits_{\|x\| < M} \varphi(x_1, x_2) e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} dx_1 dx_2, \tag{30}$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x_1, x_2) = (L_2) \lim_{M \to \infty} \int\limits_{\|p\| < M} \frac{1}{4\pi^2} \widehat{\varphi}(p_1, p_2) e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2)} dp_1 dp_2.$$

Через $W^k_2(\mathbb{R}^2)$ будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbb{R}^2$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно (см. [20], стр. 146). В пространстве $W^k_2(\mathbb{R}^2)$ выберем норму (эквивалентную стандартной (см. [20], стр. 190))

$$\|\psi\|^2_{W^k_2(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (1 + \|p\|^{2k}) |\widehat{\psi}(p_1, p_2)|^2 dp_1 dp_2.$$

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbb{R}^2) \to W_2^l(\mathbb{R}^2)$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l} = \sup_{x \in W_2^k \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_{W_2^l}}{\|x\|_{W_2^k}}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Через $C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Глава 1.

Простейшие устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости.

1.1. Определение α-устойчивой случайной величины.

Рассмотрим комплексный параметр α. Будем рассматривать α, удовлетворяющий условию (4). Покажем, что в этом случае ряд (6) сходится абсолютно с вероятностью единица. Пусть $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}$. Случайный вектор $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ тоже является стохастическим интегралом по пуассоновскому полю X на $(0, \infty)$ с мерой интенсивности $\mu(dx) = dx$ от вектор-функции (напомним, что $a = \operatorname{Re} \alpha^{-1}$.)

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^{-a} \cos(b \ln x) \\ -x^{-a} \sin(b \ln x) \end{pmatrix}.$$

По теореме Кэмпбелла (см. напр., [10], стр. 44,45) получаем, что данный стохастический интеграл сходится абсолютно с вероятностью единица тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^\infty \min\bigl(|f(x)|, 1\bigr)\mu(dx) = \int\limits_0^\infty \min\bigl(x^{-a}, 1\bigr)\mu(dx) < \infty,$$

Это условие равносильно тому, что $a > 1$. Это в точности будут α для которых выполнено условие (4).

Случайную величину, задаваемую (6) оказалось сложно обобщать на случай неодносторонних распределений. Чтобы справиться с этой проблемой немного модифицируем наше определение.

Рассмотрим случайный вектор $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \int\limits_0^\infty \begin{pmatrix} x^{-a}\cos(b\ln x) \\ -x^{-a}\sin(b\ln x) \end{pmatrix} \nu(dx). \tag{1.1}$$

В стохастическом интеграле (1.1) сделаем замену переменной $y = x^{-a}$. Пуассоновское поле X с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = dx$ перейдет в пуассоновское поле Y с мерой интенсивности

$$\mathbb{E}\tilde{\nu}(dy) = \tfrac{dy}{ay^{1+1/a}} = \tfrac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Получим

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \int\limits_0^\infty y \begin{pmatrix} \cos(b/a\ln y) \\ \sin(b/a\ln y) \end{pmatrix} \tilde{\nu}(dy) = \int\limits_0^\infty y \begin{pmatrix} \cos(\gamma\ln y) \\ \sin(\gamma\ln y) \end{pmatrix} \tilde{\nu}(dy).$$

Последняя формула есть мотивация для введения следующего определения.

Определение 1. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим* (4) *и параметрами $c_- \geqslant 0$, $c_+ \geqslant 0$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi)$ с интенсивностью $\Pi(dx)$*

$$\xi = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xe^{i\gamma\ln|x|}\nu(dx), \tag{1.2}$$

где

$$\Pi(dx) = \begin{cases} \frac{\varrho c_- dx}{|x|^{1+\varrho}}, & x < 0; \\ \frac{\varrho c_+ dx}{x^{1+\varrho}}, & x > 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Параметры γ, ϱ определены (13).

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x \begin{pmatrix} \cos(\gamma\ln|x|) \\ \sin(\gamma\ln|x|) \end{pmatrix} \nu(dx). \tag{1.4}$$

Как и в вещественном случае назовем устойчивую величину *симметричной* если $c_- = c_+$. Если $c_- = 0$ или $c_+ = 0$, то будем говорить, что устойчивая величина называется *односторонней*.

Найдем два полезных представления характеристической функции $H(p_1, p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

Теорема 1. *1. Справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1\xi_1 + p_2\xi_2)} = r^{\varrho}\Phi(\varphi + \gamma \ln r), \tag{1.5}$$

где $(p_1, p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, Ln *— логарифм, определенный по непрерывности с условием* $\operatorname{Ln} H(0,0) = 0$ *и*

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big(e^{i\cos\big(\theta - \gamma\ln|y|\big)y} - 1\Big)\Pi(dy) \\ &= \int\limits_{-\infty}^{0} \Big(e^{i\cos(\theta-\gamma\ln|y|)y} - 1\Big)\tfrac{\varrho c_- dy}{|y|^{1+\varrho}} + \int\limits_{0}^{\infty} \Big(e^{i\cos(\theta-\gamma\ln y)y} - 1\Big)\tfrac{\varrho c_+ dy}{y^{1+\varrho}}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

2. Справедлива формула

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = |\alpha|\Big[\int\limits_{\Gamma_0} \Big(e^{i(p_1y_1+p_2y_2)} - 1\Big)\tfrac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\varrho}} + \int\limits_{\Gamma_\pi} \Big(e^{i(p_1y_1+p_2y_2)} - 1\Big)\tfrac{c_- dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\Big], \tag{1.7}$$

где $y = (y_1, y_2)$, dS_y *— длина дуги, а кривые* Γ_0, Γ_π *определяются* (15).

Доказательство. Докажем (1.5). Используя теорему Кэмпбелла (см. напр., [10], стр. 44), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big(e^{i\big(p_1\cos(\gamma\ln|y|) + p_2\sin(\gamma\ln|y|)\big)y} - 1\Big)\Pi(dy) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln|y|)y} - 1\Big)\Pi(dy). \end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем линейную замену $w = ry$ и получим

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = r^{\varrho} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \Big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r - \gamma\ln|w|)w} - 1\Big)\Pi(dy) = r^{\varrho}\Phi(\varphi + \gamma\ln r).$$

Докажем (1.7). Рассмотрим сначала интеграл по положительной полуоси. Обозначим его через I_1. Тогда

$$I_1 = \int\limits_0^{\infty} \Big(e^{i\big(p_1\cos(\gamma\ln w) + p_2\sin(\gamma\ln w)\big)w} - 1\Big)\tfrac{\varrho c_+ dw}{w^{1+\varrho}}.$$

Из (24) следует, что

$$I_1 = \left(1+\gamma^2\right)^{-1/2} \int\limits_{\Gamma_0} \left(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\right) \tfrac{\varrho c_+ dS_y}{|y|^{1+\varrho}},$$

где $y = (y_1, y_2) \in \Gamma_0$, dS_y — длина дуги, заданная на кривой Γ_0. Отметим, что

$$1+\gamma^2 = 1 + (b/a)^2 = \tfrac{1}{a^2}(a^2+b^2) = \tfrac{1}{a^2|\alpha|^2}.$$

Таким образом,

$$\left(1+\gamma^2\right)^{-1/2} = a|\alpha|.$$

Аналогично рассмотрим интеграл по отрицательной полуоси. Обозначим его через I_2.

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(e^{i\left(p_1 \cos(\gamma \ln |w|) + p_2 \sin(\gamma \ln |w|)\right) w} - 1\right) \tfrac{\varrho c_- dw}{|w|^{1+\varrho}}.$$

Из (24) следует, что

$$I_2 = a|\alpha| \int\limits_{\Gamma_1} \left(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\right) \tfrac{\varrho c_- dS_y}{|y|^{1+\varrho}},$$

где $y = (y_1, y_2) \in \Gamma_\pi$, dS_y — длина дуги, заданная на кривой Γ_π.

Так как $a = 1/\varrho$, то получаем, что логарифм характеристической функции принимает вид

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = |\alpha| \Big[\int\limits_{\Gamma_0} \left(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\right) \tfrac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\varrho}} + \int\limits_{\Gamma_\pi} \left(e^{i(p_1 y_1 + p_2 y_2)} - 1\right) \tfrac{c_- dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \Big]. \quad \square$$

Из (1.7) немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого α, удовлетворяющего (4), α-устойчивое распределение является двумерным безгранично делимым с мерой Леви Λ равной*

$$\Lambda(B) = |\alpha| \int\limits_{\Gamma_0} \mathbb{I}_B(y) \frac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\varrho}} + |\alpha| \int\limits_{\Gamma_\pi} \mathbb{I}_B(y) \frac{c_- dS_y}{|y|^{1+\varrho}}, \tag{1.8}$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^2$, S_y — длина дуги на логарифмических спиралях Γ_0, Γ_π.

Заметим еще, что если $c_- = c_+$, то $\operatorname{Im} \operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = 0$. Таким образом, соответствующее распределение действительно является симметричным.

Получим еще одно представление логарифма характеристической функции.

Лемма 1. *Рассмотрим квази-полярное разложение числа* $p_1 + ip_2 = d^{1-i\gamma}e^{i\theta}$. *Тогда*

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = d^{\varrho} \cdot \Phi(\theta),$$

где функция $\Phi(\theta)$ *определена* (1.6).

Доказательство. Так как

$$d^{1-i\gamma}e^{i\theta} = d \exp\{i\big(-\gamma \ln d + \theta\big)\},$$

то $r = d$, $\varphi = -\gamma \ln d + \theta$. Подставим в (1.5) и получим

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = d^{\varrho}\Phi(-\gamma \ln d + \theta + \gamma \ln d) = d^{\varrho}\Phi(\theta). \quad \square$$

Лемма 1 показывает, что в некотором смысле логарифм характеристической функции является возведением в степень ϱ, что соответствует вещественному случаю.

1.2. Свойство алгебраической устойчивости.

Докажем, что для полученных α-устойчивых случайных величин также выполнено условие алгебраической устойчивости.

Теорема 3. *Пусть* ξ *—* α*-устойчивая случайная величина,* ξ_1, ξ_2 *— независимые копии* ξ. *Тогда для всех* d_1, d_2, $d > 0$ *следующие два условия равносильны*

1. $d_1^{1+i\gamma}\xi_1 + d_2^{1+i\gamma}\xi_2 \stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi$
2. $d_1^{\varrho} + d_2^{\varrho} = d^{\varrho}$.

Доказательство. Для начала рассмотрим $d_1 > 0$ и пуассоновское поле X на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\nu(dx) = \Pi(dx)$, где, $\Pi(dx)$ определяется (1.3). Далее рассмотрим отображение $x \mapsto d_1 x$, где $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда пуассоновское поле X перейдет в пуассоновское поле $\tilde{X}$ с мерой интенсивности $\mathbb{E}\tilde{\nu}(dx) = d_1^{\varrho} \cdot \Pi(dx)$. Рассмотрим стохастический интеграл от функции $xe^{i\gamma \ln |x|}$ по мере $\tilde{\nu}$. Обозначим его через $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_1 + i\tilde{\xi}_2$. Получим

$$\tilde{\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xe^{i\gamma \ln |x|}\tilde{\nu}(dx) \stackrel{d}{=} d_1^{1+i\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} xe^{i\gamma \ln |x|}\nu(dx).$$

Отсюда следует, что случайная величина $d_1^{1+i\gamma}\xi_1$ является стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере $\nu_1(dx)$ такой, что

$$\mathbb{E}\nu_1(dx) = d_1^{\varrho}\Pi(dx).$$

Аналогично получаем, что случайная величина $d_2^{1+i\gamma}\xi_2$ является стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере $\nu_2(dx)$ такой, что

$$\mathbb{E}\nu_2(dx) = d_2^{\varrho}\Pi(dx).$$

Из независимости случайных величин ξ_1, ξ_2 следует, что случайная величина $d_1^{1+i\gamma}\xi_1+d_2^{1+i\gamma}\xi_2$ также является стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере $\nu(dx)$ такой, что

$$\mathbb{E}\nu(dx) = \left(d_1^{\varrho} + d_2^{\varrho}\right)\Pi(dx).$$

Это означает, что условие 1 равносильно следующему

$$d = \left(d_1^{\varrho} + d_2^{\varrho}\right)^{1/\varrho},$$

что и требовалось доказать. □

Следующее утверждение показывает, что условия устойчивости 1-2 из теоремы 3 могут быть переписаны в естественном для вещественного случая виде (8).

Теорема 4. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина с параметром α, удовлетворяющим (4), ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ и пусть комплексные числа A, B лежат на логарифмической спирали Γ_0, определенной* (15)*. Тогда существует $C \in \Gamma_0$ такое, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi, \tag{1.9}$$

причем

$$A^{\alpha} + B^{\alpha} = C^{\alpha}.$$

Доказательство. Так как A, $B \in \Gamma_0$, то существуют d_1, $d_2 > 0$ такие, что

$$A = d_1^{1+i\gamma}; \quad B = d_2^{1+i\gamma}.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi,$$

где $d_1^\varrho + d_2^\varrho = d^\varrho$.

Пусть $C = d^{1+i\gamma}$. Тогда осталось показать, что $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$. Для этого заметим, что

$$d_1 = A^{1/(1+i\gamma)}; \quad d_2 = B^{1/(1+i\gamma)}; \quad d = C^{1/(1+i\gamma)}.$$

Тогда имеем

$$A^{\varrho/(1+i\gamma)} + B^{\varrho/(1+i\gamma)} = C^{\varrho/(1+i\gamma)}.$$

Воспользуемся (13) и получим

$$\frac{\varrho}{(1+i\gamma)} = \frac{1-i\gamma}{a(1+\gamma^2)} = \frac{a^2}{a(a^2+b^2)} - i\frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \alpha. \quad \square$$

Перепишем теперь утверждение теоремы 4 в матричных терминах.

Следствие 2. *Пусть ξ — α-устойчивый двумерный случайный вектор, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ — независимые копии ξ и пусть матрицы M_1, $M_2 \in \mathcal{M}_\gamma$ (множество $\mathcal{M}_\gamma$ определено* (19)*). Тогда существует $M \in \mathcal{M}_\gamma$ такая, что*

$$M_1\xi^{(1)} + M_2\xi^{(2)} \stackrel{d}{=} M\xi,$$

причем

$$M_1^\alpha + M_2^\alpha = M^\alpha.$$

Это утверждение легко следует из теоремы 4 и (20).

Следующая теорема дает еще одну форму условия устойчивости.

Теорема 5. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого α, удовлетворяющего* (4)*, выполнено*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi, \tag{1.10}$$

где ξ_k — независимые копии комплексной случайной величины ξ.

Доказательство. Докажем (1.10) по индукции. При $n = 2$ утверждение следует из теоремы 3. Покажем теперь индукционный переход.

Определим числа d_1, d_2, полагая

$$d_1 = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{1/\varrho}, \quad d_2 = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/\varrho}.$$

Пусть ξ_0 — независимая копия ξ, не зависящая от ξ_n. Тогда из теоремы 3 следует, что

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/\alpha}\xi_0+\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha}\xi_n \stackrel{d}{=} \xi.$$

Возьмем в качестве ξ_0 величину

$$\xi_0 = \frac{1}{(n-1)^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k.$$

Несложно видеть, что ξ_0 не зависит от ξ и ξ_n, и по индукционному предположению $\xi_0 \stackrel{d}{=} \xi$. Тогда

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k + \frac{1}{n^{1/\alpha}}\xi_n \stackrel{d}{=} \xi. \quad \square$$

1.3. Предельные теоремы.

Пусть $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределенных одномерных случайных величин.Через $\mathcal{P}$ обозначим распределение случайной величины X_1, а через $F(x)$ — соответствующую функцию распределения. Предположим, что для некоторого $\varrho \in (0,1)$ распределение случайной величины X_1 удовлетворяет следующим двум условиям

(i) $F(x) = \frac{c_- + o(1)}{|x|^\varrho}h(x)$, $x < 0$;

(ii) $1 - F(x) = \frac{c_+ + o(1)}{x^\varrho}h(x)$, $x > 0$;

причем $h(x)$ является медленно меняющейся на бесконечности функцией, то есть

$$\lim_{x\to\infty}\frac{h(cx)}{h(x)} = 1 \quad \text{для всех}\, c > 0.$$

Хорошо известно (см. напр., [8]), что тогда распределение $\mathcal{P}$ принадлежит области притяжения одномерной устойчивой случайной величины с параметрами c_1, c_2, то есть существует последовательность $B_n \to \infty$ такая, что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}X_k$$

сходится по распределению к одномерной ϱ-устойчивой случайной величине с параметрами c_1, c_2.

Выберем параметр $\gamma \in \mathbb{R}$. Для каждого натурального n определим случайную величину ζ_n, полагая

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n^{1+i\gamma}} \sum_{k=1}^{n} X_k e^{i\gamma \ln|X_k|}. \tag{1.11}$$

В векторной форме мы имеем

$$\zeta_n = M_\gamma(B_n^{-1}) \sum_{k=1}^{n} X_k \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln|X_k|) \\ \sin(\gamma \ln|X_k|) \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Теорема 6. *Пусть распределение (X_k) удовлетворяет условиям (i)–(ii) и случайная величина ζ_n определена равенством* (1.11). *Тогда ζ_n сходится по распределению к ξ, где ξ — α-устойчивая случайная величина с параметрами ϱ, γ, c_-, c_+ (см. определение 1).*

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется проверить выполнение следующих двух условий (см. напр., [25, теорема 3.3.8], [26], теорема 41)

I $n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|} \in B_n^{1+i\gamma}U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U)$, где Λ — мера Леви, определяемая (1.8), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U) = 0$.

II Для всех t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} n \left[\int\limits_{|x|<\varepsilon} (t_1x_1 + t_2x_2)^2 \mathcal{P}(M_n dx) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} (t_1x_1 + t_2x_2) \mathcal{P}(M_n dx) \Big)^2 \right] = 0,$$

где $\mathcal{P}$ — распределение случайной величины $Xe^{i\gamma\ln|X|}$, рассматриваемой как двумерной, а матрица M_n определяется как

$$M_n = M_\gamma(B_n) = B_n \begin{pmatrix} \cos(\gamma\ln B_n) & -\sin(\gamma\ln B_n) \\ \sin(\gamma\ln B_n) & \cos(\gamma\ln B_n) \end{pmatrix}.$$

Покажем сначала I. Рассмотрим

$$U = U_k(d) = \{(-1)^k \cdot x^{1+i\gamma} :\ x > d\}.$$

Из (22) получаем, что

$$n\mathbb{P}\big(Xe^{i\gamma\ln|X|} \in B_n^{1+i\gamma}U_k(d)\big) = n\mathbb{P}\big((-1)^k \cdot X > B_n d\big) = \begin{cases} n(1 - F(B_n d)), & k = 0 \\ nF(-B_n d), & k = 1. \end{cases}$$

Из теорем 1.7.3 и 2.2.1 в [8] следует, что

$$n\mathbb{P}\big(Xe^{i\gamma\ln|X|}\in B_n^{1+i\gamma}U\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}c_+d^{-\varrho}, & k=0\\ c_-d^{-\varrho}, & k=1.\end{cases}$$

Вычислим $\Lambda(U)$. Из (24) следует, что

$$\Lambda(U)=c_k\int\limits_d^\infty\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}=c_kd^{-\varrho},$$

где $c_k=c_+$, если $k=0$ и c_- иначе.

Отсюда следует, что условие I выполнено для всех множеств из семейства

$$\mathcal{U}=\{U_{c,d}(k)\colon\ 0<c<d\leqslant\infty,\,k\in\{0,1\}\},$$

где $U_{c,d}(k)=U_d(k)\setminus U_c(k)$.

Из [1, следствие 1, стр. 26] следует, что семейство множеств $\mathcal{U}$ определяет сходимость и, соотвественно, I справедливо для всех борелевских множеств U, удовлетворяющих $\Lambda(\partial U)=0$.

Покажем теперь справедливость II. Из условий $(i)-(ii)$ следует, что случайная величина $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. В [8, теорема 2.6.1] было показано, что в этом случае выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to0}\limsup_{n\to\infty}n\int\limits_0^\varepsilon|x|^2d\tilde F(B_nx)=0, \tag{1.13}$$

где $\tilde F(x)$ — функция распределения случайной величины $|X|$.

Воспользуемся простой оценкой

$$\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)^2\mathcal{P}(M_ndx)-\Big(\int_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)\mathcal{P}(M_ndx)\Big)^2\right|\leqslant2|t|^2\int\limits_0^\varepsilon x^2d\tilde F(B_nx).$$

Тогда из (1.13) следует справедливость условия II и, соответственно, утверждение теоремы. □

1.4. Устойчивые процессы Леви и отвечающие им полугруппы операторов.

Аналогично вещественному случаю можно определить α-устойчивый процесс Леви. Рассмотрим пуассоновскую случайную меру $\nu(ds,dx)$ на $[0,\infty)\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ с интенсивностью

$$\mathbb{E}\nu(ds,dx)=ds\cdot\Pi(dx), \tag{1.14}$$

где мера $\Pi(dx)$ определена в (1.3).

Аналогично вещественному случаю, процесс Леви, отвечающий α-устойчивому распределению с комплексным α зададим стохастическим интегралом.

$$\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x e^{i\gamma \ln|x|} \nu(ds, dx). \tag{1.15}$$

В векторном виде данное определение перепишется как

$$\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln|x|) \\ \sin(\gamma \ln|x|) \end{pmatrix} \nu(ds, dx). \tag{1.16}$$

Покажем, что определенные таким образом случайные процессы обладают свойством самоподобия. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $\xi(t)$ — комплекснозначный случайный процесс, определенный* (1.15)*. Тогда для любого $t \geqslant 0$ и $d > 0$ выполнено*

$$\xi(d \cdot t) \stackrel{d}{=} d^{1/\alpha} \xi(t). \tag{1.17}$$

Доказательство. Достаточно показать (1.17) для $t = 1$. Из общей теории процессов Леви хорошо известно, что $\xi(d)$ также является безгранично делимой случайной величиной с мерой Леви $d \cdot \Lambda(dx)$, что в данном случае соответствует умножению параметров c_+, c_- на d. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3, получаем

$$\xi(d) \stackrel{d}{=} d^{(1+i\gamma)/\varrho} \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x e^{i\gamma \ln x} \nu(ds, dx) = d^{1/\alpha} \xi(1). \quad \square$$

По процессу $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$ построим полугруппу операторов P^t, $t \geqslant 0$. Для каждого $t > 0$ оператор P^t действует на функцию $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ как

$$\big(P^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\varphi\big(x_1 - \xi_1(t), x_2 - \xi_2(t)\big). \tag{1.18}$$

Для $\varrho \in (0,1)$ и неотрицательных чисел $c_+ \geqslant 0$, $c_- \geqslant 0$, $c_+ + c_- > 0$ определим оператор $\mathcal{L}\colon W_2^1(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) = |\alpha| \int\limits_{\Gamma_0} \Big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\Big) \frac{c_+ dS_y}{|y|^{1+\varrho}} + |\alpha| \int\limits_{\Gamma_\pi} \Big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\Big) \frac{c_- dS_y}{|y|^{1+\varrho}},$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dS_y — дифференциал длины дуги на кривых Γ_0, Γ_π.

Несложно видеть, что $\mathcal{L}$ является псевдодифференциальным оператором с символом $h(p_1,p_2) = \operatorname{Ln} H(p_1,p_2)$, где $H(p_1,p_2)$ — характеристическая функция α-устойчивой случайной величины с параметрами ϱ, γ и c_+, c_-.

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *оператором типа Римана-Лиувилля порядка* α.

Из общей теории процессов Леви следует, что $\mathcal{L}$ является генератором полугруппы P^t. (см. напр., [27, теорема 31.5]) Это эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 8. *Функция*

$$u(t,x_1,x_2) = \big(P^t\varphi\big)(x_1,x_2)$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u \tag{1.19}$$

с начальным условием

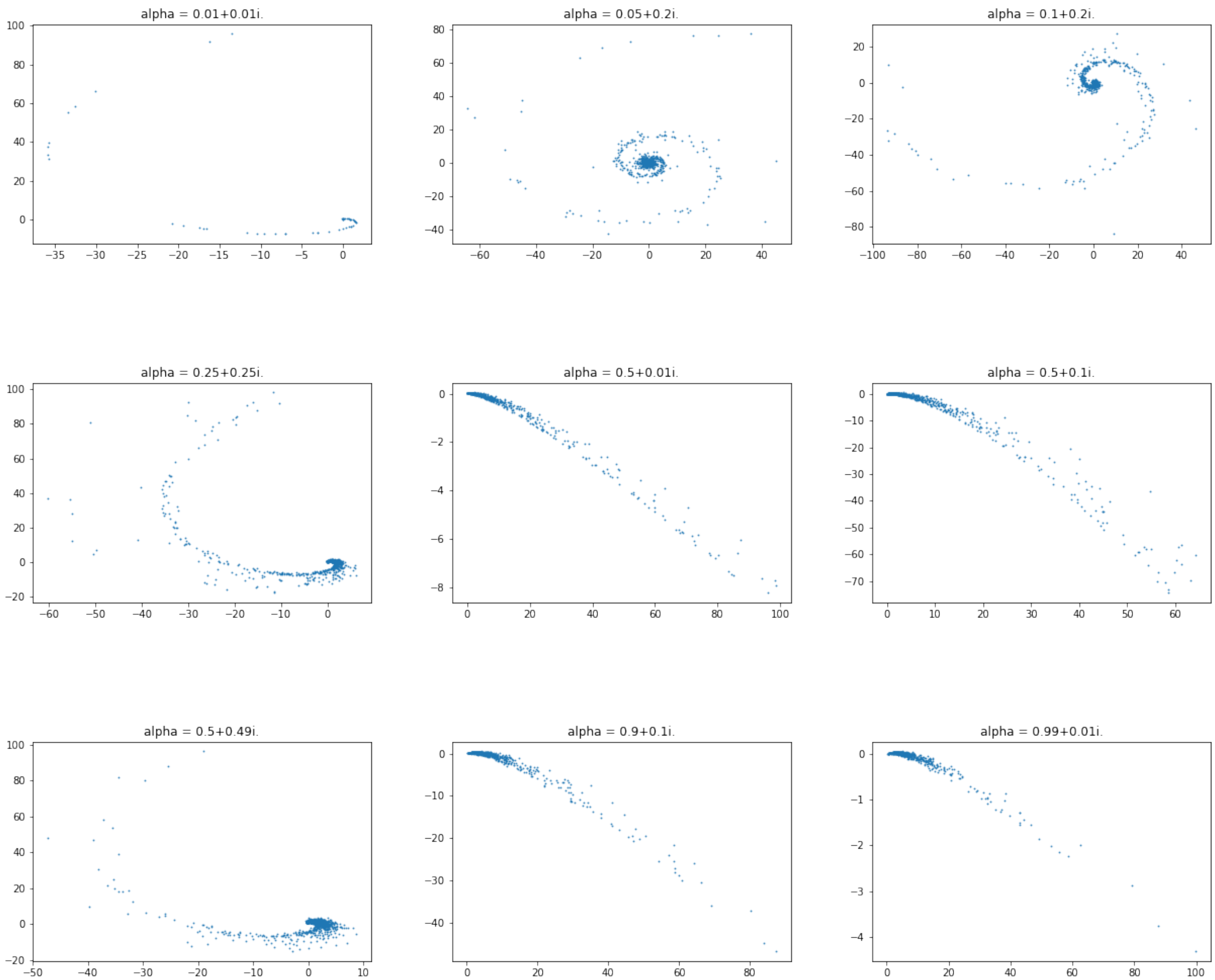
$$u(0,x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2). \tag{1.20}$$

Отметим, что в случае $\gamma = 0$ мы имеем $\mathcal{L}$ — оператор Римана-Лиувиля.

1.5. Моделирование.

На следующих рисунках представлены результаты моделирования случайной величины $\tilde{\xi} = \int\limits_{0.01}^{\infty} x^{1+i\gamma}\nu(dx)$, где $\nu(dx)$ — пуассоновская случайная мера с интенсивностью $\Pi(dx)$, при условии, что модуль случайной величины ограничен числом 100 при различных значениях α.

Отметим, что случаи $\alpha = 0.01 + 0.01i$, $0.25 + 0.25i$ и $0.5 + 0.49i$ внешне являются похожими. Это может быть связано с тем, что в этих случаях параметр комплексности близок или равен -1. Также несложно видеть, что похожими являются картинки при $\alpha = 0.05 + 0.2i$ и $0.1 + 0.2i$. В этих случаях $\gamma = -4$ и -2 соответственно. В остальных случаях, параметр комплексности ближе к нулю.



Глава 2.

Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости. Общий случай.

2.1. Определение α-устойчивой случайной величины.

Перейдем к определению α-устойчивой случайной величины. Рассмотрим сначала случай

$$|\alpha - 1/2| < 1/2. \tag{2.1}$$

Напомним, что по комплексному параметру α мы определяли два вещественных параметра ϱ, γ формулой (13). При этом, условие (2.1) равносильно условию $\varrho \in (0, 1)$.

Пусть $\lambda(d\psi)$ — некоторая конечная мера на $[0, 2\pi)$. Рассмотрим пуассоновскую случайную меру $\nu(d\psi, dx)$ на $[0, 2\pi) \times (0, \infty)$ с интенсивностью

$$\Pi(d\psi, dx) = \lambda(d\psi) \frac{\varrho dx}{x^{1+\varrho}}. \tag{2.2}$$

Введем следующее определение.

Определение 2. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим (2.1), конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$, и сдвигом $z \in \mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi, dx)$ с интенсивностью (2.2)*

$$\xi = z + \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \nu(d\psi, dx). \tag{2.3}$$

Стохастический интеграл в правой части (2.3) при таких α сходится с вероятностью единица, доказательство практически дословно совпадает с соответствующим доказательством для вещественных $\alpha \in (0,1)$, в силу очевидного равенства

$$|x^{1+i\gamma}e^{i\psi}| = x, \tag{2.4}$$

справедливого для всех $x > 0$.

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix} + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} x \begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln x+\psi)\\ \sin(\gamma\ln x+\psi)\end{pmatrix}\nu(d\psi, dx), \tag{2.5}$$

где $z = z_1 + iz_2$.

Найдем характеристическую функцию $H(p_1, p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть случай, когда в определении 1 параметр сдвига $z = 0$.

Теорема 9. *Справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \operatorname{Ln}\mathbb{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} = r^{\varrho}\Phi(\varphi+\gamma\ln r), \tag{2.6}$$

где $(p_1,p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, Ln *— логарифм, определенный по непрерывности с условием* $\operatorname{Ln} H(0,0) = 0$, *а функция* $\Phi(\theta)$ *для всех* $\theta \in [0, 2\pi)$ *определяется формулой*

$$\Phi(\theta) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\cos\left(\theta+\psi-\gamma\ln y\right)y} - 1\right)\Pi(d\psi, dy). \tag{2.7}$$

Доказательство. Используя теорему Кэмпбелла (см. напр., [10], стр. 44), получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \operatorname{Ln}\mathbb{E}e^{i(p_1\xi_1+p_2\xi_2)} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\left(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\right)y} - 1\right)\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)\\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y} - 1\right)\tfrac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем линейную замену $w = ry$ и получим

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = r^{\varrho}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\left(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r+\psi-\gamma\ln w)w} - 1\right)\tfrac{\varrho dw}{w^{1+\varrho}}\lambda(d\psi) = r^{\varrho}\Phi(\varphi+\gamma\ln r). \quad \square$$

Перейдем к определнию случайных величин с параметром α, удовлетворяющим условиям

$$|\alpha - 1| < 1, \quad |\alpha - 1/2| > 1/2. \tag{2.8}$$

Напомним, что условие (2.8) равносильно условию $\varrho \in (1,2)$.

Определение 3. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим условию (2.8), конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$, и сдвигом $z \in \mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi, dx)$ с интенсивностью (2.2)*

$$\xi = z + \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \tilde{\nu}(d\psi, dx). \tag{2.9}$$

Здесь и далее, $\tilde{\nu}(d\psi, dx) = \nu(d\psi, dx) - \Pi(d\psi, dx)$ — центрированная пуассоновская случайная мера.

Стохастический интеграл в правой части (2.9) понимается как

$$(L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} \xi_\varepsilon + \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \tilde{\nu}(d\psi, dx), \tag{2.10}$$

где

$$\xi_\varepsilon = \xi_{\varepsilon,1} + i\xi_{\varepsilon,2} = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{1} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \tilde{\nu}(d\psi, dx). \tag{2.11}$$

Как и выше, в силу (2.4), доказательство существования L_2-предела в (2.10) полностью аналогично случаю вещественных α (см. напр., [16], стр. 85).

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} x \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln x + \psi) \\ \sin(\gamma \ln x + \psi) \end{pmatrix} \tilde{\nu}(d\psi, dx).$$

Найдем характеристическую функцию $H(p_1, p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Как и выше, рассмотрим только случай, когда в определении 2 параметр сдвига $z = 0$.

Теорема 10. *Справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1\xi_1 + p_2\xi_2)} = r^{\varrho} \Phi(\varphi + \gamma \ln r), \tag{2.12}$$

где $(p_1, p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, а функция $\Phi(\theta)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$ определяется формулой

$$\Phi(\theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left(e^{i\cos(\theta - \gamma \ln y + \psi)y} - 1 - i\cos(\theta - \gamma \ln y + \psi)y\right) \Pi(d\psi, dy). \tag{2.13}$$

Доказательство. Обозначим через $H_\varepsilon(p_1,p_2)$ характеристическую функцию случайной величины

$$\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\tilde{\nu}(d\psi,dx).$$

Тогда

$$H(p_1,p_2) = \lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon(p_1,p_2).$$

По теореме Кэмпбелла получаем, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1,p_2) &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{\infty}\Big(e^{i\big(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\big)y} - 1 \\
&- i\big(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi)\big)y\Big)\Pi(d\psi,dy) \\
&= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_\varepsilon^{\infty}\big(e^{iry\cos(\varphi+\psi-\gamma\ln y)} - 1 - iry\cos(\varphi+\psi-\gamma\ln y)\big)\Pi(d\psi,dy). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Во внутреннем интеграле сделаем линейную замену $w = ry$. Получим

$$\operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1,p_2) = r^{\varrho}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty}\big(e^{iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)} - 1 - iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)\Pi(d\psi,dw).$$

Для доказательства осталось заметить, что

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon}\big(e^{iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)} - 1 - iw\cos(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)\Pi(d\psi,dw)\Big| \leqslant \int\limits_0^{r\varepsilon} w^{1-\varrho}dw \to 0. \quad \square$$

Рассмотрим теперь случай

$$|\alpha - 1/2| = 1/2, \quad \alpha \neq 0. \qquad (2.15)$$

Напомним, что условие (2.15) равносильно условию $\varrho = 1$.

Определение 4. *Устойчивой случайной величиной с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим (2.15), конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0,2\pi)$, и сдвигом $z\in\mathbb{C}$ будем называть комплексную случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$, задаваемую как стохастический интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(d\psi,dx)$ с интенсивностью* (2.2)

$$\xi = z + (L_2)\lim_{\varepsilon\to 0}\xi_\varepsilon + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{\infty} x^{1+i\gamma}e^{i\psi}\nu(d\psi,dx), \qquad (2.16)$$

где ξ_ε определено в (2.11).

Как уже отмечалось ранее, в силу (2.4), доказательство существования L_2-предела почти дословно совпадает с соответствующим доказательством для случая $\alpha = 1$.

В векторном виде определение может быть переписано так

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + (L_2) \lim_{\varepsilon \to 0} \begin{pmatrix} \xi_{\varepsilon,1} \\ \xi_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} + \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} x \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln x + \psi) \\ \sin(\gamma \ln x + \psi) \end{pmatrix} \nu(d\psi, dx).$$

Найдем характеристическую функцию $H(p_1, p_2)$ двумерного случайного вектора $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Аналогично двум предыдущим случаям, рассмотрим только случай, когда в определении 3 параметр сдвига $z = 0$. Кроме того, мы ограничимся случаем $\gamma \neq 0$ (случай $\gamma = 0$ соответствует хорошо изученным 1-устойчивым случайным величинам).

Теорема 11. *Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда справедлива формула*

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1\xi_1 + p_2\xi_2)} = r\Phi(\varphi + \gamma \ln r) + ir \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\gamma} \lambda(d\psi), \tag{2.17}$$

где $(p_1, p_2) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, а функция $\Phi(\theta)$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \Big(e^{i\cos(\theta - \gamma \ln y + \psi) y} - 1 - i\cos(\theta - \gamma \ln y + \psi) y \mathbb{I}_{|y|<1}\Big) \Pi(d\psi, dy) \\ &- i \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta + \psi)}{\gamma} \lambda(d\psi). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Доказательство. Обозначим через $H_\varepsilon(p_1, p_2)$ характеристическую функцию случайной величины

$$\xi_\varepsilon + \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} x^{1+i\gamma} e^{i\psi} \nu(d\psi, dx).$$

Тогда

$$H(p_1, p_2) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(p_1, p_2).$$

По теореме Кэмпбелла получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1, p_2) &= \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{\infty} \Big(e^{i\big(p_1 \cos(\gamma \ln y + \psi) + p_2 \sin(\gamma \ln y + \psi)\big) y} - 1 \\ &- i\big(p_1 \cos(\gamma \ln y + \psi) + p_2 \sin(\gamma \ln y + \psi)\big) y \mathbb{I}_{|y|<1}\Big) \Pi(d\psi, dy) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^{\infty} \Big(e^{ir\cos(\varphi - \gamma \ln y + \psi) y} - 1 - ir\cos(\varphi - \gamma \ln y + \psi) y \mathbb{I}_{|y|<1}\Big) \frac{dy}{y^2} \lambda(d\psi). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Сначала вычислим внутренний интеграл. Обозначим его через $I = I(\psi)$.

$$I = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \Big(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y} - 1\Big)\frac{dy}{y^2} - ir\int\limits_{\varepsilon}^{1} \cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)\Big)\frac{dy}{y}. \qquad (2.20)$$

Сделаем линейную замену $w = ry$ в первом интеграле в (2.20) и получим

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \Big(e^{ir\cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)y} - 1\Big)\frac{dy}{y^2} = r\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty} \Big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w} - 1\Big)\frac{dw}{w^2}.$$

При $\varepsilon < 1/r$ имеем

$$\begin{aligned} I &= r\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty} \Big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w} - 1 - i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\Big)\frac{dw}{w^2} \\ &- ir\Big[\int\limits_{\varepsilon}^{1} \cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)\Big)\frac{dy}{y} - \int\limits_{r\varepsilon}^{1} \cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y+\psi)\Big)\frac{dy}{y}\Big] = rJ_1 - irJ_2. \quad (2.21) \end{aligned}$$

Вычислим J_2. Для этого в каждом интеграле сделаем замену $z = \ln y$.

$$\begin{aligned} J_2 &= \int\limits_{\varepsilon}^{1} \cos(\varphi-\gamma\ln y+\psi)\frac{dy}{y} - \int\limits_{r\varepsilon}^{1} \cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y+\psi)\frac{dy}{y} \\ &= \Big[\int\limits_{\ln\varepsilon}^{0} \cos(\varphi-\gamma z+\psi)dz - \int\limits_{\ln r+\ln\varepsilon}^{0} \cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma z+\psi)dz\Big] \\ &= \frac{\sin(\varphi+\psi-\gamma\ln\varepsilon) - \sin(\varphi+\psi) - \big(\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r-\gamma\ln\varepsilon-\gamma\ln r) - \sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r)\big)}{\gamma} \\ &= \frac{\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r) - \sin(\varphi+\psi)}{\gamma}. \qquad (2.22) \end{aligned}$$

Подставляя (2.22) в (2.21), получаем

$$\begin{aligned} I &= r\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty} \Big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w} - 1 - i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\Big)\frac{dw}{w^2} \\ &- ir\frac{\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r) - \sin(\varphi+\psi)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H_\varepsilon(p_1,p_2) &= r\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{r\varepsilon}^{\infty} \Big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w} - 1 - i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\Big)\frac{dw}{w^2}\lambda(d\psi) \\ &- ir\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin(\varphi+\psi+\gamma\ln r) - \sin(\varphi+\psi)}{\gamma}\lambda(d\psi). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством $|e^{iy}-1-iy| \leqslant \frac{1}{2}y^2$ и получим

$$\Big|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon}\big(e^{i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w}-1-i\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w+\psi)w\mathbb{I}_{|w|<1}\big)\frac{dw}{w^2}\lambda(d\psi)\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{w<r\varepsilon} w^2\frac{dw}{w^2}\to 0. \ \Box$$

Как и в вещественном случае назовем устойчивую величину *симметричной* если

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i\psi}\lambda(d\psi)=0. \tag{2.23}$$

Из полученных представлений для характеристической функции следует, что если выполнено (2.23), то распределение является симметричным.

Из полученных представлений для характеристических функций также вытекает утверждение.

Теорема 12. *Для любого α, удовлетворяющего* (12), *α-устойчивое распределение является двумерным абсолютно непрерывным. Более того, существует $c_1>0$ такое, что*

$$\big|H(p_1,p_2)\big| \leqslant e^{-c_1|p|^\varrho}.$$

Доказательство. Из теорем 9, 10, 11 следует, что

$$|H(p_1,p_2)| = \exp\{r^\varrho \operatorname{Re}\Phi(\varphi+\gamma\ln r)\},$$

где $p_1=r\cos\varphi$, $p_2=r\sin\varphi$, а функция $\Phi(\theta)$ задается формулами (2.7), (2.13), и (2.18).

Для всех $\varrho\in(0,2)$ справедливо

$$\operatorname{Re}\Phi(\theta)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\big(\cos\big(\cos\big(\theta+\psi-\gamma\ln y\big)y\big)-1\big)\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)\leqslant 0.$$

Несложно видеть, что функция $\operatorname{Re}\Phi(\theta)<0$ для всех $\theta\in[0,2\pi]$ и является непрерывной на $[0,2\pi]$. Соответственно, существует $c_1>0$ такое, что для любого $\theta\in[0,2\pi]$ справедливо $\operatorname{Re}\Phi(\theta)\leqslant -c_1$. $\Box$

Покажем, что полученные случайные вектора являются безгранично делимыми и найдем соответствующую меру Леви.

Теорема 13. *Для любого α, удовлетворяющего* (12), *α-устойчивое распределение является двумерным безгранично делимым с мерой Леви Λ равной*

$$\Lambda(B)=|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0}\mathbb{I}_B(\Psi y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi)=|\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\mathbb{I}_B(u)\frac{dS_u}{|u|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi), \tag{2.24}$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^2$, dS_y — дифференциал длины дуги на логарифмической спирали Γ_ψ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} - \textit{матрица поворота на угол } \psi. \tag{2.25}$$

Доказательство. Для простоты ограничимся только случаями $\varrho \in (0,1)$ и $z = 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Из теоремы 9 следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \Big(e^{y(p_1\cos(\gamma\ln y+\psi)+p_2\sin(\gamma\ln y+\psi))} - 1\Big)\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).$$

Сделаем замену переменной $w_1 = y\cos(\gamma\ln y)$, $w_2 = y\sin(\gamma\ln y)$ во внутреннем интеграле. Тогда от интегрирования по полупрямой мы перейдем к интегрированию по логарифмической спирали. Из (24) следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = (1+\gamma^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma_0}\Big(e^{(p,\Psi w)} - 1\Big)\frac{\varrho dS_w}{|w|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).$$

где $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Сделаем линейную замену $u = \Psi w$ и получим

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = \varrho(1+\gamma^2)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\int_{\Gamma_\psi}\Big(e^{(p,u)} - 1\Big)\frac{dS_u}{|u|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi).$$

Для доказательства осталось заметить, что

$$1+\gamma^2 = \tfrac{1}{a^2}(a^2+b^2) = \tfrac{1}{a^2|\alpha|^2}. \quad \square$$

Приведем один пример α-устойчивой случайной величины с ненулевым параметром комплексности.

Лемма 2. *Пусть $\lambda(d\psi)$ — равномерная мера на $[0,2\pi)$. Тогда для любого $\gamma \in \mathbb{R}$ характеристическая функция $H(p_1,p_2) = e^{-c|p|^\varrho}$ для некоторого $c > 0$.*

Доказательство. Так как для равномерного распределения выполнено (2.23), то характеристическая функция является симметричной и, соответственно, для любого $\varrho \in (0,2)$ выполнено

$$\operatorname{Ln} H(p_1,p_2) = C\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\big(\cos\big(\cos(\varphi+\psi-\gamma\ln y)yr\big) - 1\big)\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}d\psi,$$

где $p_1 = r\cos\varphi$, $p_2 = r\sin\varphi$.

Из (26) следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = C \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\infty} \big(\cos\big(\cos\big(\varphi + \psi_1\big) r y_1\big) - 1\big) \frac{\varrho dy_1}{y_1^{1+\varrho}} d\psi_1.$$

Таким образом, характеристическая функция не зависит от γ и можно считать $\gamma = 0$. Хорошо известно, что в случае $\lambda(d\psi) = C d\psi$ распределение имеет характеристическую функцию $H(p_1, p_2) = e^{-c|p|^{\varrho}}$. $\square$

2.2. Свойство алгебраической устойчивости.

Докажем, что при α, удовлетворяющих (12), для построенных α-устойчивых случайных величин выполнено условие алгебраической устойчивости.

Далее во всем параграфе будем считать, что $\gamma \neq 0$ (то есть $\alpha \notin \mathbb{R}$). Случай $\gamma = 0$ соответствует хорошо изученным двумерным α-устойчивым распределениям (см. напр., [27]).

Теорема 14. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина, ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ. Тогда для всех d_1, d_2, $d > 0$, $q \in \mathbb{C}$ следующие два условия равносильны*

1. $d_1^{1+i\gamma}\xi_1 + d_2^{1+i\gamma}\xi_2 \stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi + q$
2. $d_1^{\varrho} + d_2^{\varrho} = d^{\varrho}$, $\quad q = \tilde{z}\Big[d^{1+i\gamma} - d_1^{1+i\gamma} - d_2^{1+i\gamma}\Big]$,

где

$$\tilde{z} = \begin{cases} z, & \varrho \neq 1; \\ z - i\frac{1}{\gamma}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\psi}\lambda(d\psi), & \varrho = 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\xi - \tilde{z}$. Тогда из теорем 9, 10, 11 следует, что

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = r^{\varrho}\Phi(\varphi + \gamma \ln r),$$

где $\Phi(\theta)$ из (2.7), (2.13), и (2.18).

Рассмотрим квази-полярное разложение комплексного числа $p_1 + ip_2 = v^{1-i\gamma}e^{i\theta}$. Тогда $r = v$, $\varphi = -\gamma \ln v + \theta$ и, соответственно,

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = v^{\varrho}\Phi(-\gamma\ln v + \theta + \gamma \ln v) = v^{\varrho}\Phi(\theta).$$

Тогда условие 1 равносильно тому, что для всех $v > 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$ выполнено

$$d_1^\varrho v^\varrho \Phi(\theta) + d_2^\varrho v^\varrho \Phi(\theta) = d^\varrho v^\varrho \Phi(\theta) + iv(\cos(-\gamma \ln v + \theta) q_1 + \sin(-\gamma \ln v + \theta) q_2), \tag{2.27}$$

где $q = q_1 + iq_2$.

Условие (2.27) равносильно тому, что равны вещественная и мнимая части левой и правой частей (2.27). Рассмотрим сначала вещественную часть.

$$v^\varrho \mathrm{Re}\, \Phi(\theta) \Big(d_1^\varrho + d_2^\varrho - d^\varrho \Big) = 0.$$

Отсюда следует, что $d_1^\varrho + d_2^\varrho = d^\varrho$. Тогда условие (2.27) переписывается в виде

$$iv(\cos(-\gamma \ln v + \theta) q_1 + \sin(-\gamma \ln v + \theta) q_2) = 0.$$

Подставляя различные значения v и θ получаем, что $q_1 = q_2 = 0$. $\square$

Следующее утверждение показывает, что условия устойчивости 1-2 из теоремы 14 могут быть переписаны в естественном для вещественного случая виде (8).

Теорема 15. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина с параметром α, удовлетворяющим* (12), *ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ и пусть комплексные числа A, B лежат на логарифмической спирали Γ_0, определенной* (15). *Тогда существуют $C \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{2.28}$$

причем

$$A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha, \quad q = \tilde{z}\big(C - A - B\big).$$

(число $\tilde{z}$ определено в (2.26)*)*

Доказательство. Так как A, $B \in \Gamma_0$, то существуют d_1, d_2 такие, что

$$A = d_1^{1+i\gamma}; \quad B = d_2^{1+i\gamma}.$$

Из теоремы 14 следует, что

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi + q,$$

где

$$d_1^\varrho + d_2^\varrho = d^\varrho, \quad q = \tilde{z}\Big[d^{1+i\gamma} - d_1^{1+i\gamma} - d_2^{1+i\gamma}\Big].$$

Пусть $C = d^{1+i\gamma}$. Тогда осталось показать, что $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$. Для этого заметим, что

$$d_1 = A^{1/(1+i\gamma)}; \quad d_2 = B^{1/(1+i\gamma)}; \quad d = C^{1/(1+i\gamma)}.$$

Тогда имеем

$$A^{\varrho/(1+i\gamma)} + B^{\varrho/(1+i\gamma)} = C^{\varrho/(1+i\gamma)}.$$

Воспользуемся (13) и получим

$$\frac{\varrho}{(1+i\gamma)} = \frac{1-i\gamma}{a(1+\gamma^2)} = \frac{a^2}{a(a^2+b^2)} - i\frac{ba^2}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \alpha. \quad \square$$

Как и выше, случайную величину $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ мы отождествляем с двумерным случайным вектором $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$. При таком отождествлении умножению на комплексное число соответствует умножение вектора на матрицу размера 2×2. Посмотрим во что перейдет условие устойчивости (2.28) с точки зрения матричной алгебры.

Перепишем утверждение теоремы 15 в матричных терминах.

Следствие 3. *Пусть ξ — α-устойчивый двумерный случайный вектор, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ — независимые копии ξ и пусть матрицы M_1, $M_2 \in \mathcal{M}_\gamma$ (множество $\mathcal{M}_\gamma$ определено* (19)*). Тогда существуют $M \in \mathcal{M}_\gamma$, $m \in \mathbb{R}^2$ такие, что*

$$M_1\xi^{(1)} + M_2\xi^{(2)} \stackrel{d}{=} M\xi + m,$$

причем

$$M_1^\alpha + M_2^\alpha = M^\alpha, \quad m = (M - M_1 - M_2)\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\tilde{z}\\ \operatorname{Im}\tilde{z}\end{pmatrix}.$$

Это утверждение легко следует из теоремы 15 и (20).

Следующая теорема дает еще одну форму условия устойчивости. Для простоты ограничимся случаем когда параметр $\tilde{z}$ случайной величины ξ в формуле (2.26) равен нулю.

Теорема 16. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого α, удовлетворяющего* (12)*, выполнено*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \stackrel{d}{=} \xi, \tag{2.29}$$

где ξ_k — независимые копии комплексной случайной величины ξ.

Доказательство. Докажем (2.29) по индукции. При $n = 2$ утверждение следует из теоремы 14. Покажем теперь индукционный переход.

Определим числа d_1, d_2, полагая

$$d_1 = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/\varrho}, \quad d_2 = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\varrho}.$$

Пусть ξ_0 — независимая копия ξ, не зависящая от ξ_n. Тогда из теоремы 14 следует, что

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/\alpha}\xi_0 + \left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha}\xi_n \stackrel{d}{=} \xi.$$

Возьмем в качестве ξ_0 величину

$$\xi_0 = \frac{1}{(n-1)^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k.$$

Несложно видеть, что ξ_0 не зависит от ξ и ξ_n, и по индукционному предположению $\xi_0 \stackrel{d}{=} \xi$. Тогда

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k + \frac{1}{n^{1/\alpha}}\xi_n \stackrel{d}{=} \xi. \quad \square$$

Из [28, теорема 1] следует, что данные распределения являются пределами для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с некоторой матричной нормировкой и векторным центрированием. Таким образом, они являются операторно-устойчивыми. В частности, отсюда следует (см. напр., [25, теорема 7.2.7], теорема 40), что распределения имеют плотность.

В данном случае можно найти экспоненту распределения (см. напр., [25]). Обозначим ее через E. Из теоремы 16 и формулы (2) следует, что умножение вектора на матрицу n^E должно соответствовать умножению комплексного числа на комплексное число $n^{1/\alpha}$. Тогда умножение вектора на матрицу E должно соответствовать умножению на комплексное число $\alpha^{-1} = a + bi$. Таким образом,

$$E = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Заметим, что из общей теории операторно-устойчивых законов (см. напр., [25, следствие 7.1.21], теорема 39) можно вывести следующее утверждение.

Теорема 17. *Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина. Тогда для всех $s < \varrho$ существует $\mathbb{E}|\xi|^s < \infty$. Если $s > \varrho$, то $\mathbb{E}|\xi|^s = \infty$.*

2.3. Характеризационное свойство

В этом параграфе мы покажем, что для α, удовлетворяющих (12), утверждение теоремы 15 является характеризационным для введенного класса устойчивых случайных величин.

Теорема 18. *Для любого фиксированного α, удовлетворяющего (12), следующие два условия равносильны*

1. *Для всех комплексных чисел A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$ и $q \in \mathbb{C}$ такие, что справедливо*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{2.31}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ, а число $C \in \Gamma_0$ в (2.31) однозначно определяется из уравнения $A^\alpha + B^\alpha = C^\alpha$.

2. *Распределение случайной величины ξ (рассматриваемой как двумерный вектор) является безгранично делимым с нулевой гуассовской компонентой и мерой Леви Λ, равной*

$$\Lambda(B) = |\alpha| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Gamma_0} \mathbb{I}_B(\Psi y) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi), \tag{2.32}$$

где B — борелевское множество на $\mathbb{R}^2$, $\lambda(d\psi)$ — некоторая конечная мера на $[0, 2\pi)$, dS_y — длина дуги на логарифмической кривой Γ_0, Ψ — матрица поворота на угол ψ, определенная (2.25).

Доказательство Покажем, что из условия 1 следует 2. Из доказательства теоремы 16 и условия 1 вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi + q_n, \tag{2.33}$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые копии ξ, $q_n = q_{n,1} + iq_{n,2} \in \mathbb{C}$.

Из (2.33) следует, что распределение случайной величины ξ является безгранично делимым, соответственно, оно однозначно определяется своим характеристическим триплетом $(\Delta, Q, \tilde{\Lambda})$ (см. напр., [25, теорема 3.1.14]):

$$\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} \mathbb{E} e^{i(p_1 \operatorname{Re}\xi + p_2 \operatorname{Im}\xi)} = i(p, \Delta) - p^T Q p + \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \left(e^{i(p,x)} - 1 - i(p,x)\mathbb{I}_{|x|<1}\right) \tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2).$$

Из (2.33) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) &= n\operatorname{Ln} H(N^T p) = ni(p, N\Delta_n) - np^T\big(NQN^T\big)p \\
&+ n\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(e^{i(p,Nx)} - 1 - i(p,Nx)\mathbb{I}_{|x|<1}\big)\tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2),
\end{aligned}$$

где

$$N = n^{-a}\begin{pmatrix} \cos(b\ln n) & \sin(b\ln n) \\ -\sin(b\ln n) & \cos(b\ln n) \end{pmatrix},$$

и

$$\Delta_n = \Delta + \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \end{pmatrix}.$$

Из единственности характеристического триплета следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ матрица $Q = nNQN^T$. Так как $\varrho \in (0,2)$, то

$$\|Q\| = n\big\|NQN^T\big\| \leqslant C\tfrac{1}{n^{2/\varrho - 1}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что Q — нулевая матрица.

Далее, пользуясь (2.33), получаем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) &= i(p, \Delta) + \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(e^{i(p,x)} - 1 - i(p,x)\mathbb{I}_{|x|<1}\big)\tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2) \\
&= ni(p, N\Delta_n) + n\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(e^{i(p,Nx)} - 1 - i(p,Nx)\mathbb{I}_{|x|<1}\big)\tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2). \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

Рассмотрим вещественную часть в (2.34).

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(\cos((p,x)) - 1\big)\tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2) = n\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(\cos((p,Nx)) - 1\big)\tilde{\Lambda}(dx_1, dx_2).$$

Сделаем в последнем интеграле замену $Nx = y$. Получим

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} H(p_1, p_2) = n\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \big(\cos((p,y)) - 1\big)\tilde{\Lambda}(d(N^{-1}y)).$$

Отметим, что левая и правая части являются логарифмами характеристических функций. Тогда по теореме единственности для представления Леви получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\tilde{\Lambda}(dy) = n\tilde{\Lambda}(d(N^{-1}y)) \qquad (2.35)$$

Пусть I — борелевское подмножество $[0,2\pi)$. Для любого $d>0$ рассмотрим множество

$$S_d = \{(d^{1/\varrho},\infty)_{\gamma,\psi} : \psi\in I\}, \tag{2.36}$$

где интервалы вида $(c_1,c_2)_{\gamma,\psi} \subset \Gamma_\psi$ определены формулой (23).

Из (22) следует, что при $n\in\mathbb{N}$ множество $(n^{1/\varrho},\infty)_{\gamma,\psi} = N^{-1}(1,\infty)_{\gamma,\psi}$. Тогда

$$\tilde\Lambda(S_n) = \int\limits_{S_n}\tilde\Lambda(dx) = \int\limits_{N^{-1}S_1}\tilde\Lambda(dx) = \int\limits_{S_1}\tilde\Lambda(d(N^{-1}x)) = \frac{1}{n}\tilde\Lambda(S_1).$$

Аналогично получаем, что для всех k, $n\in\mathbb{N}$ выполнено

$$\tilde\Lambda(S_{k/n}) = \frac{1}{k}\tilde\Lambda(S_{1/n}).$$

Подставим $n=k$ и получим

$$\tilde\Lambda(S_1) = \frac{1}{n}\tilde\Lambda(S_{1/n}), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда имеем

$$\tilde\Lambda(S_{k/n}) = \frac{1}{k}\tilde\Lambda(S_{1/n}) = \frac{n}{k}\tilde\Lambda(S_1),$$

что означает, что для любого рационального $q>0$:

$$\tilde\Lambda(S_q) = q^{-1}\tilde\Lambda(S_1).$$

Введем меру

$$\lambda(I) = \varrho\tilde\Lambda(S_1). \tag{2.37}$$

Отметим, что так как $\tilde\Lambda$ — мера Леви, то $\lambda(d\psi)$ — конечная мера на $[0,2\pi)$.

Из (2.37) следует, что

$$\tilde\Lambda(S_{c,d}) = \tilde\Lambda(S_d) - \tilde\Lambda(S_c) = \frac{1}{\varrho}\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\Big)\lambda(I),$$

где $0<c<d$ — положительные рациональные числа,

$$S_{c,d} = \{(c^{1/\varrho},d^{1/\varrho})_{\gamma,\psi} : \psi\in I\}.$$

Вычислим величину $\Lambda(S_{c,d})$.

$$\Lambda(S_{c,d}) = |\alpha|\int\limits_I\int\limits_{(c^{1/\varrho},d^{1/\varrho})_{\gamma,\psi}}\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi) = \lambda(I)\int\limits_{c^{1/\varrho}}^{d^{1/\varrho}}\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} = \Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\Big)\lambda(I).$$

По единственности продолжения меры (см. напр., [21, теорема 1, стр. 59]) получаем, что для всех борелевских множеств $B \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ выполнено равенство

$$\Lambda(B) = \tilde{\Lambda}(B).$$

Импликация из 2 в 1 следует из теорем 13 и 14. □

2.4. Предельные теоремы.

Будем говорить, что комплекснозначная случайная величина X принадлежит области притяжения комплекснозначной случайной величины ξ, если существуют две последовательности комплексных чисел $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - q_n \tag{2.38}$$

сходится по распределению к ξ.

При вещественных $\alpha \in (0,2)$ (в наших обозначениях $\gamma = 0$, $\varrho = \alpha$) известно (см. напр., [26]), что X принадлежит области притяжения ϱ-устойчивого закона, если для некоторой вероятностной меры $\sigma(d\psi)$ на $[0,2\pi)$ выполнено следующее условие

$$\frac{\mathbb{P}(|X| > d\cdot x, \arg X \in G)}{\mathbb{P}(|X| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(G), \tag{2.39}$$

где G — произвольное борелевское множество на $[0,2\pi)$, удовлетворяющее условию $\sigma(\partial G) = 0$.

При этом последовательность положительных нормирующих множителей $\{B_n\}$ выбирается из условия

$$n\mathbb{P}(|X| > B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{2.40}$$

Пусть для случайной величины X выполнено (2.39), а последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет (2.40). Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n^{1+i\gamma}}\sum_{k=1}^{n} X_k e^{i\gamma\ln|X_k|}, \tag{2.41}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — произвольный фиксированный параметр комплексности.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 19. *Существует последовательность комплексных чисел $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что последовательность случайных величин $\zeta_n - q_n$ слабо сходится к α-устойчивой случайной величине с параметрами α, $\sigma(d\psi)$ (они определяются* (14) *и* (2.39)*) и некоторым сдвигом $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется проверить выполнение следующих двух условий (см. напр., [25, теорема 3.3.8], [26], теорема 41)

I $n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|} \in B_n^{1+i\gamma}U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U)$, где Λ — мера Леви, определяемая (2.24), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U) = 0$.

II Для всех t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} n\left[\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)^2\mathcal{P}(M_ndx) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon}(t_1x_1+t_2x_2)\mathcal{P}(M_ndx)\Big)^2\right] = 0,$$

где $\mathcal{P}$ — распределение случайной величины $Xe^{i\gamma\ln|X|}$, рассматриваемой как двумерной, а матрица M_n определяется как

$$M_n = M_\gamma(B_n) = B_n\begin{pmatrix}\cos(\gamma\ln B_n) & -\sin(\gamma\ln B_n)\\ \sin(\gamma\ln B_n) & \cos(\gamma\ln B_n)\end{pmatrix}.$$

Покажем сначала I. Для любого $d > 0$ и G — борелевского на $[0, 2\pi)$ такого, что $\sigma(\partial G) = 0$ введем множество U, полагая

$$U = U_d(G) = \{(d,\infty)_{\gamma,\psi},\ \psi \in G\},$$

где $(c, d)_{\gamma,\psi}$ определяется (23).

Имеем

$$n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|} \in B_n^{1+i\gamma}U) = n\mathbb{P}(|X| > d\cdot B_n,\ \arg X \in G) = \frac{\mathbb{P}(|X| > d\cdot B_n,\ \arg X\in G)}{\mathbb{P}(|X| > B_n)}\cdot\big(n\mathbb{P}(|X| > B_n)\big).$$

Тогда из (2.39) и (2.40) следует, что для $U = U_d(G)$ выполнено

$$n\mathbb{P}(Xe^{i\gamma\ln|X|} \in B_n^{1+i\gamma}U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(G).$$

Вычислим $\Lambda(U)$ в случае, когда $\lambda(d\psi) = \sigma(d\psi)$. Из (24) следует, что

$$\Lambda(U) = |\alpha|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\psi}\mathbb{I}_U(y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(d\psi) = \int\limits_G\int\limits_d^\infty\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}\sigma(d\psi) = \sigma(G)d^{-\varrho}.$$

Отсюда следует, что условие I выполнено для всех множеств из семейства

$$\mathcal{U} = \{U_{c,d}(G)\colon\ 0 < c < d \leqslant \infty,\ E - \text{борелевское на } [0, 2\pi) \text{ такое, что } \sigma(\partial G) = 0\},$$

где $U_{c,d}(G) = U_d(G) \setminus U_c(G)$.

Из [1, следствие 1, стр. 26] следует, что семейство множеств $\mathcal{U}$ определяет сходимость и, соотвественно, условие I справедливо для всех борелевских множеств U, удовлетворяющих $\Lambda(\partial U) = 0$.

Покажем теперь справедливость II. Из условия (2.39) следует, что случайная величина $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. В [8, теорема 2.6.1] было показано, что в этом случае выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} n\int\limits_0^\varepsilon |x|^2 dF(B_n x) = 0, \tag{2.42}$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины $|X|$.

Воспользуемся простой оценкой

$$\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon} (t_1x_1 + t_2x_2)^2\mathcal{P}(M_n dx) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} (t_1x_1 + t_2x_2)\mathcal{P}(M_n dx)\Big)^2\right| \leqslant 2|t|^2\int\limits_0^\varepsilon x^2 dF(B_n x).$$

Тогда из (2.42) следует справедливость условия II и, соответственно, утверждение теоремы. □

Из теоремы 19 непосредственно вытекают следующие два утверждения.

Следствие 4. *Если при некотором $\varrho \in (0,2)$ известно, что X принадлежит области притяжения ϱ-устойчивого закона с вещественной нормировкой, то $Xe^{i\gamma\ln|X|}$ принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ формулой* (14).

Следствие 5. *Пусть для некоторых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varrho \in (0,2)$ распределение комплексной случайной величины X удовлетворяет условию*

$$\frac{\mathbb{P}(|X| > d\cdot x, (\arg X - \gamma\ln|X|) \pmod{2\pi} \in G)}{\mathbb{P}(|X| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(G), \tag{2.43}$$

где $\sigma(d\psi)$ — некоторая вероятностная мера на $[0, 2\pi)$, а G — произвольное борелевское множество на $[0, 2\pi)$ такое, что $\sigma(\partial G) = 0$. Тогда X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ формулой (14).

Приведем еще и необходимое условие принадлежности к области притяжения α-устойчивого закона.

Теорема 20. *Если X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, то $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона.*

Доказательство. Так как X принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, то для некоторых последовательностей $\{r_n\}$, $r_n > 0$ и $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ выполнено (см. напр., [25], [26], теорема 41)

$$n\mathbb{P}(X \in r_n e^{i\varphi_n} U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U), \tag{2.44}$$

где Λ — мера Леви, определенная (2.24), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U) = 0$.

Положим в (2.44) $U = U_d = \{x \in \mathbb{C} : |x| > d\}$ и получим

$$n\mathbb{P}(X \in r_n e^{i\varphi_n} U_d) = n\mathbb{P}(|X| > r_n \cdot d) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U_d).$$

Вычислим $\Lambda(U_d)$. В силу (24) имеем

$$\Lambda(U_d) = |\alpha| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Gamma_0} \mathbb{I}_{U_d}(\Psi y) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_d^{\infty} \frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} \lambda(d\psi) = \lambda\bigl([0, 2\pi)\bigr) d^{-\varrho}.$$

Из [8, теорема 2.6.1] следует, что случайная величина $|X|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. $\square$

2.5. Устойчивые процессы Леви и отвечающие им полугруппы операторов.

Введем комплекснозначный процесс Леви, соответствующий α-устойчивым распределениям с комплексным α, удовлетворяющим (12). Рассмотрим комплексную случайную величину ξ как двумерный вектор $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$. Как было показано в теореме 13 этот вектор является безгранично делимым, соответственно, по нему можно построить процесс Леви $\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$, $t \geqslant 0$ (см. напр., [4, теорема 3, стр. 367]) с условиями

$$\begin{pmatrix} \xi_1(1) \\ \xi_2(1) \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_1(0) \\ \xi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.45}$$

Процесс $\xi(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ назовем *комплекснозначным α-устойчивым процессом Леви.*

Для комплекснозначных α-устойчивых процессов справедлива следующая характеризационная теорема.

Теорема 21. *Пусть $\xi(t)$ — комплекснозначный случайный процесс Леви. Для любого фиксированного α следующие два условия равносильны*

1. *Для любого $t > 0$ и $d > 0$ существует $z = z(t, d) \in \mathbb{C}$ такое, что*

$$\xi(d \cdot t) \stackrel{d}{=} d^{1/\alpha}\xi(t) + z. \tag{2.46}$$

2. *Случайная величина $\xi(1)$ является α-устойчивой с некоторым сдвигом $z \in \mathbb{C}$ и конечной мерой $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$.*

Доказательство Покажем, что из условия 1 следует 2. Так как $\xi(t)$ — процесс Леви, то

$$\xi(n) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \tag{2.47}$$

где ξ_k — независимые копии $\xi(1)$. Тогда из (2.46) и (2.47) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $q_n = z(1, n) \in \mathbb{C}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha}\xi(1) + q_n.$$

Из теоремы 18 следует, что $\xi(1)$ — α-устойчивая случайная величина. Таким образом, $\xi(t)$ — α-устойчивый процесс Леви.

Импликация из 2 в 1 вытекает из общей теории операторно-устойчивых случайных векторов. Известно (см. напр., [25], [28], теорема 38), что

$$\begin{pmatrix} \xi_1(d \cdot t) \\ \xi_2(d \cdot t) \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} d^E \cdot \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}.$$

Из (2.30) вытекает

$$\begin{pmatrix} \xi_1(d \cdot t) \\ \xi_2(d \cdot t) \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} M_\gamma(d^{1/\varrho}) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

Используя (17) и (2.48) получаем (2.46) и, соответственно, утверждение теоремы. □

По процессу $\xi(t)$, $\xi(0) = 0$ построим полугруппу операторов P^t, $t \geqslant 0$. Для каждого $t > 0$ оператор P^t действует на функцию $\varphi \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как

$$\big(P^t\varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\varphi\big(x_1 - \xi_1(t), x_2 - \xi_2(t)\big). \tag{2.49}$$

Для $\varrho \in (0, 1)$ и конечной меры $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$ определим оператор $\mathcal{L}\colon W_2^1(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) = |\alpha| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\psi} \Big(\varphi(x - y) - \varphi(x)\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi),$$

где $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, dS_y — дифференциал длины дуги на кривой Γ_ψ.

Для $\varrho \in (1, 2)$ и конечной меры $\lambda(d\psi)$ на $[0, 2\pi)$ определим оператор $\mathcal{L}\colon W_2^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) = |\alpha| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\psi} \Big(\varphi(x - y) - \varphi(x) + \big(\nabla\varphi(x), y\big)\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(d\psi),$$

где $\nabla\varphi$ — градиент функции φ, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$.

Для случая $\varrho = 1$ (комплексный аналог процесса Коши) введем оператор $\mathcal{L}$ только при выполнении дополнительного условия. Именно, пусть для меры $\lambda(d\psi)$ выполнено

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i\psi} \lambda(d\psi) = 0. \tag{2.50}$$

В этом случае определим оператор $\mathcal{L} : W_2^2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x_1, x_2) \;\; = \;\; \text{v.p.}\, a|\alpha| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\psi} \Big(\varphi(x - y) - \varphi(x)\Big) \frac{dS_y}{|y|^2} \lambda(d\psi),$$

Несложно видеть, что $\mathcal{L}$ является псевдодифференциальным оператором с символом $h(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} H(p_1, p_2)$, где $H(p_1, p_2)$ — характеристическая функция α-устойчивой случайной величины с параметрами ϱ, γ, и $\lambda(d\psi)$.

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *оператором типа Римана-Лиувилля порядка* α.

Из общей теории процессов Леви следует, что $\mathcal{L}$ является генератором полугруппы P^t. (см. напр., [27, теорема 31.5]) Это эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 22. *Функция*

$$u(t, x_1, x_2) = \big(P^t \varphi\big)(x_1, x_2)$$

является решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u \qquad (2.51)$$

с начальным условием

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2). \qquad (2.52)$$

2.6. Комплексно-устойчивые случайные величины.

Введем следующее определение. Будем говорить, что случайная величина ξ называется *комплексно-устойчивой*, если ξ является пределом по распределению для последовательности случайных величин

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - z_n,$$

где $\{B_n\}$, $\{z_n\}$ — некоторые последовательности комплексных чисел, $\{X_k\}$ — последовательность комплекнозначных н.о.р. случайных величин. Иными словами, случайная величина ξ комплексно-устойчива, если ее область притяжения не пуста.

В настоящем параграфе покажем, что любая комплексно-устойчивая случайная величина является или вырожденной, или гауссовской, или α-устойчивой случайной величиной с α, удовлетворяющим (12).

Отметим также, что комплексно-устойчивые случайные величины являются подклассом двумерных операторно-устойчивых векторов (в смысле работы [25]).

Сформулируем и докажем критерий принадлежности к классу комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 23. *Комплекснозначная случайная величина ξ является комплексно-устойчивой тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют w_m, $a_m \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k \overset{d}{=} w_m \xi + a_m, \qquad (2.53)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m$ — независимые копии ξ.

Доказательство. Пусть ξ — комплексно-устойчивая случайная величина. Тогда для некоторой последовательности комплексных случайных величин $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ существуют две последовательности комплексных чисел $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - z_n \xrightarrow{d} \xi.$$

Для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим сумму

$$\zeta_{m,n} = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - m\cdot z_n = \Big(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - z_n\Big) + \dots \Big(\frac{1}{B_n}\sum_{k=(m-1)n+1}^{mn} X_k - z_n\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi_1 + \dots + \xi_m.$$

С другой стороны,

$$\zeta_{m,n} = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - m\cdot z_n = \frac{B_{m\cdot n}}{B_n}\cdot\Big(\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - z_{m\cdot n}\Big) + \Big(\frac{B_{m\cdot n}}{B_n} q_{m\cdot n} - m\cdot z_n\Big). \tag{2.54}$$

Известно, что левая часть (2.54) имеет слабый предел. Также известно, что

$$\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - z_{m\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi.$$

Возьмем $\{X'_k\}$ — независимую копию последовательности $\{X_k\}$. Используя (2.54), по последовательности $\{X'_k\}$ построим случайную величину $\zeta'_{m,n}$ — независимую копию $\zeta_{m,n}$. Тогда

$$\zeta_{m,n} - \zeta'_{m,n} = \frac{B_{m\cdot n}}{B_n}\cdot\Big(\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X_k - z_{m\cdot n}\Big) - \frac{B_{m\cdot n}}{B_n}\cdot\Big(\frac{1}{B_{m\cdot n}}\sum_{k=1}^{m\cdot n} X'_k - z_{m\cdot n}\Big). \tag{2.55}$$

Пусть $\frac{B_{m\cdot n}}{B_n}$ не имеет предела. Тогда в (2.55) левая часть имеет предел, а правая не имеет. Таким образом, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B_{m\cdot n}}{B_n} = w_m \in \mathbb{C}$.

Отсюда и из (2.54) следует, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{B_{m\cdot n}}{B_n} z_{m\cdot n} - m\cdot z_n\Big) = a_m \in \mathbb{C}.$$

Теперь переходя к пределу в (2.54) при $n\to\infty$, получаем справедливость (2.53). Таким образом, мы показали, что условие (2.53) является необходимым для комплексной устойчивости.

Достаточность условия (2.53) следует из тривиального соотношения

$$\frac{1}{w_m}\sum_{k=1}^{m} \xi_k - \frac{a_m}{w_m} \stackrel{d}{=} \xi \xrightarrow[m\to\infty]{d} \xi. \quad \square$$

Следующая теорема дает полное описание класса комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 24. *Пусть ξ — комплексно-устойчивая случайная величина. Тогда ξ или вырожденная или гауссовская, или α-устойчивая случайная величина.*

Доказательство. Так как комплексно-устойчивые случайные величины это подкласс двумерных операторно-устойчивых векторов, то из [25, теорема 7.2.1] (см. теорема 38 в приложении) следует, что распределение случайной величины ξ, рассмотренной как двумерный вектор, имеет экспоненту. То есть, существует матрица $E \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{m} \vec{\xi}^{(k)} \stackrel{d}{=} m^E \vec{\xi} + \vec{a}_m, \tag{2.56}$$

где $\vec{\xi}$ — двумерный вектор соответствующий ξ, $\vec{\xi}^{(k)}$ — его независимые копии.

Из теоремы 23 следует, что умножение случаного вектора $\vec{\xi}$ на матрицу m^E соответствует умножению случайной величины $\xi_1 + i\xi_2$ на некоторое комплексное число. Таким образом, умножение на матрицу E также соответствует умножению на некоторое комплексное число $\alpha^{-1} = a + bi$. Отсюда следует, что (2.56) переписывается в следующем виде

$$\frac{1}{m^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{m} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi + \tilde{q}_m.$$

В случае когда $a > 1/2$ из теоремы 18 следует, что случайная величина ξ является α-устойчивой с параметром $|\alpha - 1| < 1$, где $\alpha^{-1} = a + bi$.

Случай $a \leqslant 1/2$ реализуется только при $a = 1/2$, $b = 0$ (см. напр., [25, теорема 7.2.1], теорема 38), что соответствует гауссовскому случаю. □

Сформулируем и докажем еще один критерий α-устойчивости случайных величин.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \neq 0$ (случай $\gamma = 0$ является хорошо изученным (см. напр, [27]), ему соответствуют двумерные α-устойчивые векторы). Пусть Γ_0 — соответствующая γ, логарифмическая спираль, определенная (15).

Теорема 25. *Пусть для любых A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$, $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$A\xi_1 + B\xi_2 \stackrel{d}{=} C\xi + q, \tag{2.57}$$

где ξ_1, ξ_2 — независимые копии ξ.

Тогда или существует $\varrho \in (0, 2)$ такое, что ξ — α-устойчивая случайная величина, где $\alpha = \varrho(1 + i\gamma)^{-1}$; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что ξ — комплекснозначная гауссовская случайная величина с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица.

Доказательство. По индукции можно показать, что из (2.57) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $z_n \in \Gamma_0$, $q_n \in \mathbb{C}$ такие, что

$$z_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k + q_n \stackrel{d}{=} \xi, \tag{2.58}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии ξ.

Из теоремы 24 следует, что ξ или вырожденная, или гауссовская, или α-устойчивая случайная величина. Пусть ξ — α-устойчивая случайная величина. Покажем, что α соответствует γ. Подставим в (2.57) $A = B = 1$. Тогда существует $d > 0$ такое, что

$$\xi_1 + \xi_2 \stackrel{d}{=} d^{1+i\gamma}\xi + q. \tag{2.59}$$

Если α соответствует другому значению γ', то также выполнено

$$\xi_1 + \xi_2 \stackrel{d}{=} c^{1+i\gamma'}\xi + q', \tag{2.60}$$

где $c = 2^{1/\varrho} > 0$ при некотором $\varrho \in (0, 2)$.

Из (2.59) и (2.60) следует, что

$$\Big(d^{1+i\gamma} - c^{1+i\gamma'}\Big)\xi \stackrel{d}{=} q - q'.$$

Так как ξ — невырожденная случайная величина, то получаем, что $d^{1+i\gamma} = c^{1+i\gamma'}$. Отсюда тривиально следует, что $c^{i(\gamma'-\gamma)} = 1$. Так как $c = 2^{1/\varrho} \neq 1$, то

$$\gamma' = \gamma + \frac{2\varrho\pi k}{\ln 2} \tag{2.61}$$

для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что $k = 0$. Пусть не так. Подставим в (2.57) $A = 1$, $B = 2^{(1+i\gamma)/\varrho}$. Тогда существует $d_1 > 0$ такое, что

$$\xi_1 + 2^{(1+i\gamma)/\varrho}\xi_2 \stackrel{d}{=} d_1^{1+i\gamma}\xi + q.$$

Из (2.61) следует, что $B = 2^{1+i\gamma'}$. Тогда

$$\xi_1 + 2^{(1+i\gamma)/\varrho}\xi_2 \stackrel{d}{=} c_1^{1+i\gamma'}\xi + q',$$

где $c_1 = 3^{1/\varrho} > 0$.

Как и выше получаем, что $d_1^{1+i\gamma} = c_1^{1+i\gamma'}$. Отсюда тривиально следует, что $c_1^{i(\gamma'-\gamma)} = 1$. Так как $c_1 = 3^{1/\varrho} \neq 1$, то

$$\gamma' = \gamma + \frac{2\varrho\pi l}{\ln 3} \tag{2.62}$$

для некоторого $l \in \mathbb{Z}$.

Так как $k \neq 0$, то из (2.61) и (2.62) следует, что $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \frac{l}{k} \in \mathbb{Q}$. Полученное противоречие показывает, что $k = 0$, то есть γ соответствует α.

Пусть теперь ξ — комплекснозначная гауссовская случайная величина. Покажем, что матрица ковариации $Q = \sigma^2 I$ для некоторого $\sigma \geqslant 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\mathbb{E}\xi = 0$. Тогда $q = 0$ для всех A, $B \in \Gamma_0$.

Из (2.58) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $d_n > 0$ такое, что

$$d_n^{1+i\gamma} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{d}{=} \xi.$$

Посчитаем матрицы ковариации левой и правой частей. Для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$M_\gamma^T(d_n) n Q M_\gamma(d_n) = Q.$$

С точностью до положительной константы матрицы $M_\gamma(d_n)$ являются унитарными. Поэтому

$$n d_n^2 \|Q\|_2 = \|Q\|_2.$$

Если $\|Q\|_2 \neq 0$ (невырожденный случай), то $d_n = n^{-1/2}$. Отсюда следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$V_n Q = Q V_n, \tag{2.63}$$

где

$$V_n = \begin{pmatrix} \cos(\gamma \ln \sqrt{n}) & \sin(\gamma \ln \sqrt{n}) \\ -\sin(\gamma \ln \sqrt{n}) & \cos(\gamma \ln \sqrt{n}) \end{pmatrix}.$$

Из (2.63) следует, что Q коммутирует с унитарной матрицей, не равной тождественной. Таким образом, с точностью до мультипликативной константы Q является унитарной матрицей. Так как Q — матрица ковариации (симметричная и неотрицательно определенная), то существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что $Q = \sigma^2 I$. $\square$

Сформулируем и докажем аналог теоремы 25 для процессов Леви. Как и ранее, зафиксируем $\gamma \neq 0$.

Следствие 6. *Пусть $\xi(t)$ — комплекснозначный процесс Леви такой, что для любых $t > 0$ и $d > 0$ существуют $z(d) \in \Gamma_0$ и $q \in \mathbb{C}$ такие, что*

$$\xi(d \cdot t) \stackrel{d}{=} z(d)\xi(t) + q.$$

Тогда или существует $\varrho \in (0, 2)$ такое, что $\xi(1)$ — α-устойчивая случайная величина, где α однозначно определяется по ϱ и γ; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что $\xi(1)$ — комплекснозначная гауссовская случайная величина с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица.

Доказательство. Подставим $d = n$ и получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $z_n \in \Gamma_0$, $q_n \in \mathbb{C}$ такие, что

$$z_n \sum_{k=1}^{n} \xi_k + q_n \stackrel{d}{=} \xi(1),$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии $\xi(1)$.

Тогда для $\xi(1)$ выполнено (2.58). Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 25, получаем утверждение следствия. □

Глава 3.

Устойчивые случайные векторы с комплексным индексом устойчивости.

3.1. Определение α-устойчивого вектора

Зафиксируем α, удовлетворяющее условию (12). Перейдем к определению α-устойчивого случайного вектора для α, удовлетворяющих (12).

Определение 5. *Случайный вектор $\vec{\xi}$ со значениями в $\mathbb{C}^l$ будем называть устойчивым случайным вектором с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим* (12)*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\vec{q}_n = \vec{q}_{n,1} + i\vec{q}_{n,2} \in \mathbb{C}^l$ такой, что*

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k \stackrel{d}{=} \vec{\xi} + \vec{q}_n, \tag{3.1}$$

где $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n$ — независимые копии $\vec{\xi}$.

Сформулируем и докажем критерий α-устойчивости случайных векторов.

Теорема 26. *Для любого фиксированного α, удовлетворяющего* (12)*, случайный вектор $\vec{\xi}$ является устойчивым тогда и только тогда, когда распределение случайного вектора $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ (отображение $\mathcal{K}$ определяется* (29)*) является безгранично делимым с нулевой гуассовской компонентой и мерой Леви Λ, равной*

$$\Lambda(B) = |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{\Gamma_s} \mathbb{I}_B(y) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(ds), \tag{3.2}$$

где B — борелевское множество в $\mathbb{R}^{2l}$, $\lambda(ds)$ — некоторая конечная мера на $S^l_{\mathbb{C}}$, dS_y — длина дуги на кривой Γ_s.

Доказательство. Необходимость. Из определения α-устойчивого случайного вектора следует, что распределение случайного вектора $\vec{\xi}$ является безгранично делимым, соответственно, оно однозначно определяется своим характеристическим триплетом $(\Delta, Q, \tilde{\Lambda})$ (см. напр., [25, теорема 3.1.14]):

$$\operatorname{Ln} H(p) = \mathbb{E} e^{i\left(p, \mathcal{K}(\vec{\xi})\right)} = i(p,\Delta) - p^T Q p + \int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \left(e^{i(p,x)} - 1 - i(p,x)\mathbb{I}_{\|x\|<1}\right)\tilde{\Lambda}(dx).$$

Из (3.1) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H(p) &= n\operatorname{Ln} H(N^T p) = ni(p, N\Delta_n) - np^T\left(NQN^T\right)p \\ &+ n \int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \left(e^{i(p,Nx)} - 1 - i(p,Nx)\mathbb{I}_{\|x\|<1}\right)\tilde{\Lambda}(dx), \end{aligned}$$

где $N = diag(\tilde{N}, \ldots, \tilde{N}) \in \mathbb{R}^{(2l)\times(2l)}$ — блочно-диагональная матрица с элементом $\tilde{N}$ на диагонали, где $\tilde{N} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ определяется следующим образом

$$\tilde{N} = M_\gamma\left(n^{-a}\right) = n^{-a}\begin{pmatrix} \cos(b\ln n) & \sin(b\ln n) \\ -\sin(b\ln n) & \cos(b\ln n) \end{pmatrix},$$

и

$$\Delta_n = \Delta + \mathcal{K}(\vec{q}_n) \in \mathbb{R}^{2l}.$$

Из единственности характеристического триплета следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ матрица $Q = nNQN^T$. Так как $\varrho \in (0,2)$, то

$$\|Q\| = n\left\|NQN^T\right\| \leqslant C\tfrac{1}{n^{2/\varrho-1}} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Отсюда следует, что Q — нулевая матрица.

Далее, пользуясь (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} H(p) &= i(p,\Delta) + \int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \left(e^{i(p,x)} - 1 - i(p,x)\mathbb{I}_{\|x\|<1}\right)\tilde{\Lambda}(dx) \\ &= ni(p, N\Delta_n) + n\int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \left(e^{i(p,Nx)} - 1 - i(p,Nx)\mathbb{I}_{\|x\|<1}\right)\tilde{\Lambda}(dx). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Рассмотрим вещественную часть в (3.3).

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} H(p) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \big(\cos((p,x)) - 1\big)\tilde\Lambda(dx) = n \int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \big(\cos((p,Nx)) - 1\big)\tilde\Lambda(dx).$$

Сделаем в последнем интеграле замену $Nx = y$. Получим

$$\operatorname{Re}\operatorname{Ln} H(p) = n \int\limits_{\mathbb{R}^{2l}\setminus\{0\}} \big(\cos((p,y)) - 1\big)\tilde\Lambda(d(N^{-1}y)).$$

Отметим, что левая и правая части являются логарифмами характеристических функций. Тогда по теореме единственности для представления Леви получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\tilde\Lambda(dy) = n\tilde\Lambda(d(N^{-1}y)) \tag{3.4}$$

Пусть I — борелевское подмножество $S^l_{\mathbb{C}}$. Для любого $d > 0$ рассмотрим множество

$$S_d = \{(d^{1/\varrho}, \infty)_{\gamma,s} : \, s \in I\}, \tag{3.5}$$

где интервалы вида $(c_1, c_2)_{\gamma,s} \subset \Gamma_s$ определены формулой (28).

Из (22) следует, что при $n \in \mathbb{N}$ множество $(n^{1/\varrho}, \infty)_{\gamma,s} = N^{-1}(1,\infty)_{\gamma,s}$. Тогда

$$\tilde\Lambda(S_n) = \int\limits_{S_n} \tilde\Lambda(dx) = \int\limits_{N^{-1}S_1} \tilde\Lambda(dx) = \int\limits_{S_1} \tilde\Lambda(d(N^{-1}x)) = \frac{1}{n}\tilde\Lambda(S_1).$$

Аналогично получаем, что для всех k, $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\tilde\Lambda(S_{k/n}) = \frac{1}{k}\tilde\Lambda(S_{1/n}).$$

Подставим $n = k$ и получим

$$\tilde\Lambda(S_1) = \frac{1}{n}\tilde\Lambda(S_{1/n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеем

$$\tilde\Lambda(S_{k/n}) = \frac{1}{k}\tilde\Lambda(S_{1/n}) = \frac{n}{k}\tilde\Lambda(S_1),$$

что означает, что для любого рационального $q > 0$:

$$\tilde\Lambda(S_q) = q^{-1}\tilde\Lambda(S_1).$$

Введем меру

$$\lambda(I) = \tilde{\Lambda}(S_1). \tag{3.6}$$

Отметим, что так как $\tilde{\Lambda}$ — мера Леви, то $\lambda(ds)$ — конечная мера на $S^l_{\mathbb{C}}$.

Из (3.6) следует, что

$$\tilde{\Lambda}(S_{c,d}) = \tilde{\Lambda}(S_d) - \tilde{\Lambda}(S_c) = \frac{1}{\varrho}\big(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\big)\lambda(I),$$

где $0 < c < d$ — положительные рациональные числа,

$$S_{c,d} = \{(c^{1/\varrho}, d^{1/\varrho})_{\gamma,s} : s \in I\}.$$

Посчитаем $\Lambda(S_{c,d})$.

$$\Lambda(S_{c,d}) = |\alpha| \int\limits_I \int\limits_{(c^{1/\varrho}, d^{1/\varrho})_{\gamma,s}} \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\lambda(ds) = \frac{1}{a}\lambda(I) \int\limits_{c^{1/\varrho}}^{d^{1/\varrho}} \frac{dy}{y^{1+\varrho}} = \big(\frac{1}{c} - \frac{1}{d}\big)\lambda(I). \tag{3.7}$$

По единственности продолжения меры (см. напр., [21, теорема 1, стр. 59]) получаем, что для всех борелевских множеств $B \in \mathbb{R}^{2l} \setminus \{0\}$ выполнено равенство

$$\Lambda(B) = \tilde{\Lambda}(B).$$

Достаточность. Сначала покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\Lambda(dy) = n\Lambda(d(N^{-1}y)). \tag{3.8}$$

Рассмотрим множество S_d, определенное (3.5). Тогда из (3.7) следует, что

$$\Lambda(S_d) = \frac{1}{d}\lambda(I) = n\Lambda(N^{-1}S_d).$$

Так как множества вида S_d определяют меру, то выполнено (3.8).

Покажем, что (3.8) влечет α-устойчивость вектора. Достаточно показать выполнение (3.3) для некоторых векторов Δ, Δ_n (гауссовскую компоненту можно сразу считать нулевой матрицей).

Несложно видеть, что если

$$\Delta_n = \frac{1}{n}\Big(\Delta + \int\limits_{n^{-a} < \|x\| < 1} (p, x)\Lambda(dx)\Big), \tag{3.9}$$

то из (3.8) следует (3.3). Так как $\Lambda(dx)$ — мера Леви, то интеграл в (3.9) сходится и, соответственно, выполнена достаточность. $\square$.

Отметим, что для любого α, удовлетворяющего (12), α-устойчивый случайный вектор $\vec{\xi}$ (рассматриваемый как случайный вектор $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ в $\mathbb{R}^{2l}$) является операторно-устойчивым (см. напр., [28], [25]). Отсюда следует (см. напр., [25, теорема 7.2.7], теорема 40), что распределения имеют плотность. Также можно найти экспоненту распределения E (см. напр., [25]). Тогда

$$E = diag(\tilde{E}, \ldots, \tilde{E}) \in \mathbb{R}^{(2l)\times(2l)}, \tag{3.10}$$

где матрица $\tilde{E} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ определяется следующим образом

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

3.2. Предельные теоремы.

Будем говорить, что комплекснозначный случайный вектор $\vec{X}$ принадлежит области притяжения комплекснозначного случайного вектора $\vec{\xi}$, если существуют последовательности $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n \in \mathbb{C}$ и $\{\vec{q_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\vec{q_n} \in \mathbb{C}^l$ такие, что последовательность случайных векторов

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} \vec{X}_k - \vec{q_n}$$

сходится по распределению к $\vec{\xi}$.

При вещественных $\alpha \in (0, 2)$ (в наших обозначениях $\gamma = 0$, $\varrho = \alpha$) известно (см. напр., [26]), что $\vec{X}$ принадлежит области притяжения ϱ-устойчивого закона, если для некоторой вероятностной меры $\sigma(ds)$ на $S^l_{\mathbb{C}}$ выполнено следующее условие

$$\frac{\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > d\cdot x, \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|} \in G)}{\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(G), \tag{3.11}$$

где G — произвольное борелевское множество на $S^l_{\mathbb{C}}$, удовлетворяющее условию $\sigma(\partial G) = 0$.

При этом последовательность положительных нормирующих множителей $\{B_n\}$ выбирается из условия

$$n\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{3.12}$$

Пусть для случайного вектора $\vec{X}$ выполнено (3.11), а последовательность $\{B_n\}$ удовлетворяет (3.12). Рассмотрим последовательность случайных векторов

$$\vec{\zeta}_n = \frac{1}{B_n^{1+i\gamma}} \sum_{k=1}^{n} \vec{X}_k e^{i\gamma \ln \|\vec{X}_k\|}, \tag{3.13}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$ — произвольный фиксированный параметр комплексности.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 27. *Существует последовательность комплексных векторов $\{\vec{q}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что последовательность случайных векторов $\vec{\zeta}_n - \vec{q}_n$ слабо сходится к α-устойчивому случайному вектору с параметрами α, $\sigma(ds)$ (они определяются* (14) *и* (3.11)*).*

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется проверить выполнение следующих двух условий (см. напр., [25, теорема 3.3.8], [26], теорема 41)

I $n\mathbb{P}(\vec{X}e^{i\gamma \ln \|\vec{X}\|} \in B_n^{1+i\gamma}U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U)$, где Λ — мера Леви, определяемая (3.2), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}^l$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U) = 0$.

II Для всех $t \in \mathbb{R}^{2l}$ выполнено

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} n\left[\int\limits_{|x|<\varepsilon} (t,x)^2 \mathcal{P}(M_n dx) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon} (t,x)\mathcal{P}(M_n dx)\Big)^2\right] = 0,$$

где $\mathcal{P}$ — распределение случайного вектора $\mathcal{K}\Big(\vec{X}e^{i\gamma \ln \|\vec{X}\|}\Big)$ (отображение $\mathcal{K}$ определяется (29)), а матрица $M_n = diag(M_\gamma(B_n), \ldots, M_\gamma(B_n))$ (матрица $M_\gamma(x)$ определяется (17)).

Покажем сначала I. Для любого $d > 0$ и G — борелевского на $S^l_{\mathbb{C}}$ такого, что $\sigma(\partial G) = 0$ введем множество U, полагая

$$U = U_d(G) = \{(d,\infty)_{\gamma,s},\ s \in G\},$$

где $(c,d)_{\gamma,s}$ определяется (28).

Имеем

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}(\vec{X}e^{i\gamma \ln \|\vec{X}\|} \in B_n^{1+i\gamma}U) &= n\mathbb{P}(|\vec{X}|^{1+i\gamma} \cdot \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|} \in B_n^{1+i\gamma}U) = n\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > d\cdot B_n,\ \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|} \in G) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > d\cdot B_n,\ \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|} \in G)}{\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > d\cdot B_n)} \cdot \big(n\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > B_n)\big). \end{aligned}$$

Тогда из (3.11) и (3.12) следует, что для $U = U_d(G)$ выполнено

$$n\mathbb{P}(\vec{X}e^{i\gamma\ln\|\vec{X}\|} \in B_n^{1+i\gamma}U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(G).$$

Вычислим $\Lambda(U)$ в случае, когда $\lambda(ds) = \sigma(ds)$. Из (24) следует, что

$$\Lambda(U) = |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{\Gamma_s} \mathbb{I}_U(y)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}\sigma(ds) = \int\limits_G \int\limits_d^{\infty} \frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}}\sigma(ds) = \sigma(G)d^{-\varrho}.$$

Отсюда следует, что условие I выполнено для всех множеств из семейства

$$\mathcal{U} = \{U_{c,d}(G)\colon\ 0 < c < d \leqslant \infty,\, G - \text{борелевское на } S^l_{\mathbb{C}}\, \text{такое, что}\, \sigma(\partial G) = 0\},$$

где $U_{c,d}(G) = U_d(G) \setminus U_c(G)$.

Из [1, следствие 1, стр. 26] следует, что семейство множеств $\mathcal{U}$ определяет сходимость и, соотвественно, I справедливо для всех борелевских множеств U, удовлетворяющих $\Lambda(\partial U) = 0$.

Покажем теперь справедливость II. Из условия (3.11) следует, что случайная величина $\|\vec{X}\|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. В [8, теорема 2.6.1] было показано, что в этом случае выполняется

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty} n\int\limits_0^{\varepsilon} |x|^2 dF(B_n x) = 0, \tag{3.14}$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины $\|\vec{X}\|$.

Воспользуемся простой оценкой

$$\left|\int\limits_{|x|<\varepsilon}(t,x)^2\tilde{\mathcal{P}}(M_n dx) - \Big(\int_{|x|<\varepsilon}(t,x)\tilde{\mathcal{P}}(M_n dx)\Big)^2\right| \leqslant 2|t|^2\int\limits_0^{\varepsilon} x^2 dF(B_n x).$$

Тогда из (3.14) следует справедливость условия II и, соответственно, утверждение теоремы. □

Из теоремы 27 непосредственно вытекают следующие два утверждения.

Следствие 7. *Если при некотором $\varrho \in (0,2)$ известно, что $\vec{X}$ принадлежит области притяжения ϱ-устойчивого вектора с вещественной нормировкой, то $\vec{X}e^{i\gamma\ln\|\vec{X}\|}$ принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ формулой* (14).

Следствие 8. *Пусть для некоторых $\gamma \in \mathbb{R}$, $\varrho \in (0,2)$ распределение комплексного случайного вектора $\vec{X}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > d \cdot x, \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|} \cdot e^{-i\gamma \ln \|\vec{X}\|} \in G)}{\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} d^{-\varrho}\sigma(G), \tag{3.15}$$

где $\sigma(ds)$ — некоторая вероятностная мера на $S^l_{\mathbb{C}}$, а G — произвольное борелевское множество на $S^l_{\mathbb{C}}$ такое, что $\sigma(\partial G) = 0$. Тогда $\vec{X}$ принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, где α однозначно определяется по параметрам ϱ и γ формулой (14).

Приведем еще и необходимое условие принадлежности к области притяжения α-устойчивого закона.

Теорема 28. *Если $\vec{X}$ принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, то $\|\vec{X}\|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона.*

Доказательство. Так как $\vec{X}$ принадлежит области притяжения α-устойчивого закона, то для некоторых последовательностей $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $r_n > 0$ и $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n \in [0, 2\pi)$ выполнено (см. напр., [25], [26], теорема 41)

$$n\mathbb{P}(X \in r_n e^{i\varphi_n} U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U), \tag{3.16}$$

где Λ — мера Леви, определенная (3.2), U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{C}^l$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U) = 0$.

Положим в (3.16) $U = U_d = \{x \in \mathbb{C}^l : \|x\| > d\}$ и получим

$$n\mathbb{P}(\vec{X} \in r_n e^{i\varphi_n} U_d) = n\mathbb{P}(\|\vec{X}\| > r_n \cdot d) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U_d).$$

Вычислим $\Lambda(U_d)$. В силу (24) имеем

$$\Lambda(U_d) = |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{\Gamma_s} \mathbb{I}_{U_d}(y) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(ds) = \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{d}^{\infty} \frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} \lambda(ds) = \lambda\big(S^l_{\mathbb{C}}\big) \frac{1}{d^{\varrho}}.$$

Из [8, теорема 2.6.1] следует, что случайная величина $\|\vec{X}\|$ принадлежит области притяжения одномерного ϱ-устойчивого закона. □

3.3. Устойчивые процессы Леви и отвечающие им полугруппы операторов.

Введем комплекснозначный процесс Леви, соответствующий α-устойчивым векторам с комплексным α, удовлетворяющим (12). Рассмотрим комплексный случайный вектор $\vec{\xi}$ как случайный вектор $\mathcal{K}(\xi)$ в $\mathbb{R}^{2l}$. Из теоремы 26 следует, что вектор $\mathcal{K}(\xi)$ является безгранично делимым, соответственно, по нему можно построить процесс Леви $\tilde{\xi}(t)$, $t \geqslant 0$ (см. напр., [4, теорема 3, стр. 367]) с условиями

$$\tilde{\xi}(1) \stackrel{d}{=} \mathcal{K}(\xi), \quad \tilde{\xi}(0) = 0. \tag{3.17}$$

Процесс $\vec{\xi}(t) = \mathcal{K}^{-1}(\tilde{\xi}(t))$ назовем *комплекснозначным α-устойчивым процессом Леви.*

Для комплекснозначных α-устойчивых процессов справедлива следующая характеризационная теорема.

Теорема 29. *Пусть $\vec{\xi}(t)$ — комплекснозначный случайный процесс Леви. Для любого фиксированного α следующие два условия равносильны*

1. *Для любого $t > 0$ и $d > 0$ существует $z = z(t, d) \in \mathbb{C}^l$ такое, что*

$$\vec{\xi}(d \cdot t) \stackrel{d}{=} d^{1/\alpha}\vec{\xi}(t) + z. \tag{3.18}$$

2. *Случайный вектор $\vec{\xi}(1)$ является α-устойчивым.*

Доказательство Покажем, что из условия 1 следует 2. Так как $\vec{\xi}(t)$ — процесс Леви, то

$$\vec{\xi}(n) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k, \tag{3.19}$$

где $\vec{\xi}_k$ — независимые копии $\vec{\xi}(1)$. Тогда из (3.18) и (3.19) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $q_n = z(1, n) \in \mathbb{C}^l$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha}\vec{\xi}(1) + q_n.$$

Отсюда следует, что $\xi(1)$ — α-устойчивый случайный вектор. Таким образом, $\xi(t)$ — α-устойчивый процесс Леви.

Импликация из 2 в 1 вытекает из общей теории операторно-устойчивых случайных векторов. Известно (см. напр., [25], [28], теорема 38), что

$$\mathcal{K}(\xi(t)) \stackrel{d}{=} d^E \cdot \mathcal{K}(\xi(1)) + \mathcal{K}(z).$$

Из (3.10) следует (3.19) и, соответственно, утверждение теоремы. □

По процессу $\vec{\xi}(t)$, $\vec{\xi}(0) = 0$ построим полугруппу операторов P^t, $t \geqslant 0$. Для каждого $t > 0$ оператор P^t действует на функцию $\varphi \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^{2l})$ как

$$\big(P^t\varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\varphi\big(x - \mathcal{K}(\vec{\xi}(t))\big). \tag{3.20}$$

Для $\varrho \in (0,1)$ и конечной меры $\lambda(ds)$ на $S^l_{\mathbb{C}}$ определим оператор $\mathcal{L}$: $W_2^1(\mathbb{R}^{2l}) \to L_2(\mathbb{R}^{2l})$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) = |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{\Gamma_s} \Big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(ds),$$

где $x \in \mathbb{R}^{2l}$, $y \in \mathbb{R}^{2l}$, dS_y — дифференциал длины дуги на кривой $\Gamma_s \subset \mathbb{R}^{2l}$.

Для $\varrho \in (1,2)$ и конечной меры $\lambda(ds)$ на $S^l_{\mathbb{C}}$ определим оператор $\mathcal{L}$: $W_2^2(\mathbb{R}^{2l}) \to L_2(\mathbb{R}^{2l})$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) = |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{\Gamma_s} \Big(\varphi(x-y) - \varphi(x) + \big(\nabla\varphi(x), y\big)\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}} \lambda(ds),$$

где $\nabla\varphi$ — градиент функции φ, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2l}$.

Для случая $\varrho = 1$ (комплексный аналог многомерного процесса Коши) введем оператор $\mathcal{L}$ только при выполнении дополнительного условия. Именно, пусть для меры $\lambda(d\psi)$ выполнено

$$\int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} s\lambda(ds) = 0. \tag{3.21}$$

В этом случае определим оператор $\mathcal{L}: W_2^2(\mathbb{R}^{2l}) \to L_2(\mathbb{R}^{2l})$, полагая

$$\big(\mathcal{L}\varphi\big)(x) \quad = \quad \text{v.p.}\, |\alpha| \int\limits_{S^l_{\mathbb{C}}} \int\limits_{\Gamma_s} \Big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\Big) \frac{dS_y}{|y|^2} \lambda(ds),$$

Несложно видеть, что $\mathcal{L}$ является псевдодифференциальным оператором с символом $h(p_1, p_2) = \operatorname{Ln} H(p_1, p_2)$, где $H(p_1, p_2)$ — характеристическая функция α-устойчивого случайного вектора с параметрами ϱ, γ, и $\lambda(ds)$.

Оператор $\mathcal{L}$ будем называть *оператором типа Римана-Лиувилля порядка α*.

Из общей теории процессов Леви следует, что $\mathcal{L}$ является генератором полугруппы P^t. (см. напр., [27, теорема 31.5]) Это эквивалентно следующему утверждению.

Теорема 30. *Функция*

$$u(t,x) = \big(P^t \varphi\big)(x)$$

является слабым решением задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u \tag{3.22}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2l}. \tag{3.23}$$

3.4. Комплексно-устойчивые случайные векторы.

Введем следующее определение. Будем говорить, что случайный вектор $\vec{\xi}$ называется *комплексно-устойчивым*, если $\vec{\xi}$ является пределом по распределению для последовательности случайных векторов

$$\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} \vec{X}_k - \vec{z}_n,$$

где $\{B_n\}$, $B_n \in \mathbb{C}$, $\{\vec{z}_n\}$, $\vec{z}_n \in \mathbb{C}^l$ — некоторые последовательности, $\{\vec{X}_k\}$ — последовательность комплекнозначных н.о.р. случайных векторов. Иными словами, случайный вектор $\vec{\xi}$ комплексно-устойчив, если его область притяжения не пуста.

В настоящем параграфе покажем, что любой комплексно-устойчивый случайный вектор является или вырожденным, или гауссовским, или α-устойчивым случайным вектором с α, удовлетворяющим (12).

Отметим также, что комплексно-устойчивые случайные векторы являются подклассом операторно-устойчивых векторов в $\mathbb{R}^{2l}$ (в смысле работы [25]).

Сформулируем и докажем критерий принадлежности к классу комплексно-устойчивых случайных векторов.

Теорема 31. *Комплекснозначный случайный вектор $\vec{\xi}$ является комплексно-устойчивым тогда и только тогда, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ существуют $w_m \in \mathbb{C}$, $\vec{a}_m \in \mathbb{C}^l$ такие, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \vec{\xi}_k \overset{d}{=} w_m \vec{\xi} + \vec{a}_m, \tag{3.24}$$

где $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_m$ — независимые копии $\vec{\xi}$.

Доказательство теоремы 31 аналогично доказательству теоремы 23.

Следующая теорема дает полное описание класса комплексно-устойчивых случайных величин.

Теорема 32. *Пусть $\vec{\xi}$ — комплексно-устойчивый случайный вектор. Тогда $\vec{\xi}$ или вырожденный или гауссовский, или α-устойчивый случайный вектор.*

Доказательство. Так как комплексно-устойчивые случайные векторы это подкласс операторно-устойчивых векторов в $\mathbb{R}^{2l}$, то из [25, теорема 7.2.1] (см. теорема 38 в приложении) следует, что распределение случайного вектора $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ имеет экспоненту. То есть, существует матрица $E \in \mathbb{R}^{(2l)\times(2l)}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{m} \mathcal{K}(\vec{\xi}_k) \stackrel{d}{=} m^E \mathcal{K}(\vec{\xi}) + \vec{a}_m, \tag{3.25}$$

где $\vec{\xi}_k$ — независимые копии вектора $\vec{\xi}$.

Из теоремы 31 следует, что умножение случайного вектора $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ на матрицу m^E соответствует умножению комплекснозначного случайного вектора $\vec{\xi}$ на некоторое комплексное число. Таким образом, m^E является блочно-диагональной матрицей с одинаковыми элементами на диагонали $m^{\tilde{E}}$. В свою очередь, матрица $\tilde{E}$ соответствуют умножению на некоторое комплексное число $\alpha^{-1} = a + bi$. Отсюда следует, что (3.25) переписывается в следующем виде

$$\frac{1}{m^{1/\alpha}} \sum_{k=1}^{m} \vec{\xi}_k \stackrel{d}{=} \vec{\xi} + \vec{q}_m.$$

В случае когда $a > 1/2$ следует, что случайный вектор $\vec{\xi}$ является α-устойчивым с параметром $|\alpha - 1| < 1$, где $\alpha^{-1} = a + bi$.

Случай $a \leqslant 1/2$ реализуется только при $a = 1/2$, $b = 0$ (см. напр., [25, теорема 7.2.1], теорема 38), что соответствует гауссовскому случаю. □

Сформулируем и докажем еще один критерий α-устойчивости случайных векторов.

Зафиксируем параметр комплексности $\gamma \neq 0$ (Случай $\gamma = 0$ является хорошо изученным (см. напр, [27]), ему соответствуют α-устойчивые векторы в $\mathbb{R}^{2l}$). Пусть Γ_0 — соответствующая γ, логарифмическая спираль, определенная (15).

Теорема 33. *Пусть для любых A, $B \in \Gamma_0$ существуют $C \in \Gamma_0$, $\vec{q} \in \mathbb{C}^l$ такие, что*

$$A\vec{\xi}_1 + B\vec{\xi}_2 \stackrel{d}{=} C\vec{\xi} + \vec{q}, \tag{3.26}$$

где $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ — независимые копии $\vec{\xi}$.

Тогда или существует $\varrho \in (0,2)$ такое, что $\vec{\xi}$ — α-устойчивый случайный вектор, где $\alpha = \varrho(1+i\gamma)^{-1}$; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ — гауссовский случайный вектор с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I_{(2l)\times(2l)}$, где $I_{(2l)\times(2l)} \in \mathbb{R}^{(2l)\times(2l)}$ — единичная матрица .

Доказательство теоремы 33 аналогично доказательству теоремы 25.

Также, как и в одномерном случае, можно получить аналог теоремы 33 для процессов Леви. Как и ранее, зафиксируем $\gamma \neq 0$.

Следствие 9. *Пусть $\vec{\xi}(t)$ — комплекснозначный процесс Леви такой, что для любых $t > 0$ и $d > 0$ существуют $z(d) \in \Gamma_0$ и $\vec{q} \in \mathbb{C}^l$ такие, что*

$$\vec{\xi}(d \cdot t) \stackrel{d}{=} z(d)\vec{\xi}(t) + \vec{q}.$$

Тогда или существует $\varrho \in (0,2)$ такое, что $\vec{\xi}(1)$ — α-устойчивая случайная величина, где α однозначно определяется по ϱ и γ; или существует $\sigma \geqslant 0$ такое, что $\mathcal{K}(\vec{\xi})$ — гауссовский случайный вектор с матрицей ковариации $Q = \sigma^2 I_{(2l)\times(2l)}$, где $I_{(2l)\times(2l)} \in \mathbb{R}^{(2l)\times(2l)}$ — единичная матрица .

3.5. Устойчивость относительно кватернионов.

Рассмотрим кватернион (подробнее про кватерионы см. [19, гл. XV, § 2])

$$\alpha^{-1} = a + bi + cj + dk. \tag{3.27}$$

Напомним, что умножение кватерниона справа на кватернион α^{-1} соответствует умножению вектора на матрицу

$$M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Введем определение устойчивости относительно кватернионов.

Определение 6. *Будем говорить, что случайная величина $\xi = \xi_1 + \xi_2 i + \xi_3 j + \xi_4 k$, принимающая значения во множестве кватернионов $\mathbb{H}$, называется α-устойчивой, если для любого*

$n \in \mathbb{N}$ существует $q_n \in \mathbb{H}$ такой, что

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{m=1}^{n} \xi_m \stackrel{d}{=} \xi + q_n, \tag{3.29}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые копии случайной величины ξ.

При отождествлении кватернионов с векторами из $\mathbb{R}^4$ формула (3.29) переписывается в следующем виде

$$n^{-M(a,b,c,d)} \sum_{m=1}^{n} \begin{pmatrix} \xi_{1,m} \\ \xi_{2,m} \\ \xi_{3,m} \\ \xi_{4,m} \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ q_{n,3} \\ q_{n,4} \end{pmatrix}, \tag{3.30}$$

где $\xi_m = \xi_{1,m} + \xi_{2,m} i + \xi_{3,m} j + \xi_{4.m} k$, $q_n = q_{n,1} + q_{n,2} i + q_{3,n} j + q_{4,n} k$.

Непосредственным вычислением показывается, что для любых $a > 0$, $b, c, d \in \mathbb{R}$ существует обратимая матрица $S = S(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ такая, что

$$M = S^{-1} J S = S^{-1} \begin{pmatrix} a & -u & 0 & 0 \\ u & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -u \\ 0 & 0 & u & a \end{pmatrix} S, \tag{3.31}$$

где $u = \pm\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$. В случае, когда $c^2 + d^2 = 0$, то в качестве S можно взять единичную матрицу, в противном случае можно выбрать матрицу S следующим образом

$$S = S(a,b,c,d) = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & u & 0 \\ -c & -d & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Из (3.31) следует, что J — жорданова форма матрицы M. Тогда имеем

$$n^M = S^{-1} \cdot n^J \cdot S. \tag{3.32}$$

Формула (3.30) переписывается в следующем виде

$$n^{-J} \sum_{m=1}^{n} S \begin{pmatrix} \xi_{1,m} \\ \xi_{2,m} \\ \xi_{3,m} \\ \xi_{4,m} \end{pmatrix} \stackrel{d}{=} S \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} + S \begin{pmatrix} q_{n,1} \\ q_{n,2} \\ q_{n,3} \\ q_{n,4} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Сделаем следующие замены переменной

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix}; \quad \vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ \eta_3 + i\eta_4 \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Из (3.33) и (3.34) следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\vec{a}_n \in \mathbb{C}^2$ такой, что

$$\frac{1}{n^{1/\alpha_1}} \sum_{m=1}^{n} \vec{\zeta}_m \stackrel{d}{=} \vec{\zeta} + \vec{a}_n,$$

где $\alpha_1^{-1} = a + iu$.

Таким образом, комплекснозначный случайный вектор $\vec{\zeta}$ является α_1-устойчивым. Аналогично получаем, что любой двумерный комплекснозначный α-устойчивый вектор линейными преобразованиями переходит в $\tilde{\alpha}$-устойчивую случайную величину, принимающую значения в $\mathbb{H}$.

Глава 4.

Вероятностное приближение оператора типа Римана-Лиувилля с индексом устойчивости больше двух

В главах 1,2 вводился оператор типа Римана-Лиувилля порядка α, удовлетворяющих $\varrho \in (0,2)$. Данное определение можно обобщить на случай $\varrho > 2$ и $\varrho \notin \mathbb{N}$. Именно, введем следующее определение.

Определение 7. *Оператором типа Римана-Лиувилля порядка α называется оператор $\mathcal{L}\colon\ W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2) \to L_2$, действующий на $f \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как*

$$\big(\mathcal{L}f\big)(x_1,x_2) \;\;=\;\; |\alpha| \int\limits_{\Gamma_0} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j}{j!} D^j f(x_1,x_2)[y_1\, y_2] \Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}, \tag{4.1}$$

где $y = (y_1, y_2)$,

$$D^n f(x_1,x_2)[y_1\, y_2] = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2 \Big)^n f(y_1,y_2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}} \cdot y_1^k y_2^{j-k}. \tag{4.2}$$

В случае $\varrho \in (0,1) \cup (1,2)$ было получено вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором $\mathcal{L}$ (см. (2.49)). В случае $\varrho > 2$ можно построить только вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши.

Введем также симметричный аналог оператора типа Римана-Лиувилля (аналогично тому, как было сделано в случае $\varrho = 1$ в главе 2).

Определение 8. *Симметричным оператором типа Римана-Лиувилля порядка α называется оператор $\mathcal{L}_s\colon\ W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2) \to L_2$, действующий на $f \in W_2^{[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ как*

$$\big(\mathcal{L}_s f\big)(x_1, x_2) \;\; = \;\; |\alpha| \int\limits_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]} \frac{1}{(2j)!} D^{2j} f(x_1, x_2)[y_1\, y_2]\Big) \frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}}. \tag{4.3}$$

4.1. Несимметричный случай

Далее в течение всего параграфа будем рассматривать только α, удовлетворяющие условию

$$\varrho = \varrho(\alpha) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+1) \cup (4k+1, 4k+2). \tag{4.4}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L} u, \tag{4.5}$$

где оператор $\mathcal{L}$ – оператор типа Римана-Лиувилля (4.1). Для уравнения (4.5) рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \tag{4.6}$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Через $P^t = e^{t\mathcal{L}}$ обозначим полугруппу операторов, переводящих начальную функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ в решение $u(t, \cdot) = P^t \varphi$ задачи Коши (4.5).

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим еще полугруппу операторов.

$$\big(P_\varepsilon^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \omega_\varepsilon^t\big)\big(x_1 - \xi_1^\varepsilon(t), x_2 - \xi_2^\varepsilon(t)\big)\Big], \tag{4.7}$$

где

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_1^\varepsilon(t) + i\xi_2^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\varepsilon^\infty x^{1+i\gamma} \nu(ds, dx),$$

а $\nu(ds, dx)$ — пуассоновская случайная мера на $(0, \infty)^2$ с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}\nu(ds, dx) = \Pi(ds, dx) = ds \tfrac{dx}{x^{1+\varrho}}.$$

Функция $\omega_\varepsilon^t(x_1, x_2)$ (в (4.7)) определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p_1, p_2) = \exp\Big(-t \int\limits_\varepsilon^{+\infty} \Big(\sum_{j=1}^{[\varrho]} \frac{i^j y^j}{j!} \big(p_1 \cos(\gamma \ln y) + p_2 \sin(\gamma \ln y)\big)^j\Big) \frac{dy}{y^{1+\varrho}}\Big). \tag{4.8}$$

Нетрудно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ семейство P_ε^t образуем полугруппу. Далее мы покажем, что для любого $t > 0$ имеет место сильная операторная сходимость $P_\varepsilon^t \to P^t$ при $\varepsilon \to 0$.

Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi^\varepsilon(t)$ является сложными пуассоновским процессом, но при таком выборе α у семейства случайных величин $\xi^\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее, процесс $\xi^\varepsilon(t)$ может быть использованы для представления решения задачи Коши (4.5) – (4.6).

Отметим еще, что при α, удовлетворяющих (4.4), функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p_1, p_2)$ является быстро убывающей. Действительно, при $\varrho \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+1)$ коэффициент при старшей степени $|p|$ в показателе экспоненты отрицателен. При $\varrho \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(4k+1, 4k+2)$ коэффициент при старшей степени $|p|$ чисто мнимый, но зато предыдущий коэффициент (при $|p|^{4k}$) – отрицательный.

Теорема 34. *Пусть $\varphi \in W_2^{[\varrho]+l+1}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. Тогда*

$$\|P^t\varphi - P_\varepsilon^t\varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon^{1-\{\varrho\}}\|\varphi\|_{W_2^{l+1+[\varrho]}},$$

где P^t, P_ε^t — полугруппы операторов, определенные (4.7), $\{\varrho\} = \varrho - [\varrho]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. напр., [9, гл. IX, §2, п.1, стр. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}d\tau. \tag{4.9}$$

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \mathcal{L} - A_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$A_\varepsilon\psi(x) \;=\; |\alpha| \int\limits_{(\varepsilon,\infty)_{\gamma,0}} \Big(\psi(x-y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j}{j!} D^j\psi(x_1, x_2)[y_1\, y_2]\Big)\frac{dS_y}{|y|^{1+\varrho}},$$

где интервал $(c,d)_{\gamma,\psi}$ определяется (23).

В этих обозначениях

$$A+B=\mathcal{L}.$$

Заметим, что для любого положительного k справедливы неравенства для операторных норм

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1, \tag{4.10}$$

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \tag{4.11}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\varrho]+1}\to W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg(\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\varphi(x_1-y\cos(\gamma\ln y),x_2-y\sin(\gamma\ln y))\\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{(-1)^jy^j}{j!}D^j\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y)\ \sin(\gamma\ln y)]\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\Bigg)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Фубини и поменяем пределы интегрирования. Получим

$$\begin{aligned}\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) &= \int\limits_0^{\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\varphi(x_1-y\cos(\gamma\ln y),x_2-y\sin(\gamma\ln y))\\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{(-1)^jy^j}{j!}D^j\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y)\ \sin(\gamma\ln y)]\Big)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2\Bigg)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.\end{aligned}$$

Из формул для преобразования Фурье сдвига и производной следует, что

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)=h_\varepsilon(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2),$$

где

$$h_\varepsilon(p_1,p_2)=\int_0^{\varepsilon}\Big(e^{iy\big(p_1\cos(\gamma\ln y)+p_2\sin(\gamma\ln y)\big)}-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{y^j}{j!}\sum_{k=0}^{j}C_j^k(ip_1)^k(ip_2)^{j-k}\cos^k(\gamma\ln y)\sin^{j-k}(\gamma\ln y)\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Пусть $p_1=r\cos\varphi$, $p_2=r\sin\varphi$, $r\geqslant 0$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Имеем

$$h_\varepsilon(p_1,p_2)=\int_0^{\varepsilon}\Big(e^{iry\cos(\varphi-\gamma\ln y)}-\sum_{j=0}^{[\varrho]}\frac{r^jy^j}{j!}\cos^j(\varphi-\gamma\ln y)\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Сделаем в последней формуле замену переменной $w = ry$.

$$h_\varepsilon(p_1,p_2) = r^\varrho \int_0^{r\varepsilon} \Big(e^{iw\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y)} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{w^j}{j!}\cos^j(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y) \Big) \frac{dw}{w^{1+\varrho}}.$$

Если $r < \frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$r^\varrho \Big| \int\limits_0^{r\varepsilon} \Big(\exp(i\cos(\theta-\gamma\ln y)y) - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(i\cos(\theta-\gamma\ln y)y)^j}{j!} \Big) \frac{dy}{y^{1+\varrho}} \Big| \leqslant Cr^{[\varrho]+1}\varepsilon^{1-\{\varrho\}} = C|p|^{[\varrho]+1}\varepsilon^{1-\{\varrho\}}.$$

В случае $r > \frac{1}{\varepsilon}$ имеем

$$\begin{aligned} \big| h_\varepsilon(p_1,p_2) \big| &\leqslant |p|^\varrho \cdot \int_0^\infty \Big| e^{iw\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y)} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{w^j}{j!}\cos^j(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln y) \Big| \frac{dw}{w^{1+\varrho}} \\ &\leqslant C|p|^\varrho \Big(\int_0^1 \frac{dw}{w^{\{\varrho\}}} + \int_1^\infty \frac{dw}{w^{1+\{\varrho\}}} \Big) \leqslant C(\varrho)|p|^\varrho. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Big\| \widehat{B\varphi} \Big\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Big(1+|p|^{2l}\Big) |\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2 dp_1 dp_2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})} \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} \Big(1+|p|^{2l}\Big) |\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2 |p|^{2([\varrho]+1)} dp_1 dp_2 + C \int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} \Big(1+|p|^{2l}\Big) |\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2 |p|^{2\varrho} dp_1 dp_2. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Big\| \widehat{B\varphi} \Big\|^2_{W_2^l} &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})} \int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2(l+[\varrho]+1)}) |\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2 dp_1 dp_2 \\ &+ C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})} \int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}} (1+|p|^{2l}) |\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2 |p|^{2\varrho+2(1-\{\varrho\})} dp_1 dp_2 \leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\varrho\})} \left\| \varphi \right\|^2_{W_2^{l+[\varrho]+1}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (4.10), (4.11) и (4.12). □

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x_1,x_2)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbb{R}^2)$ приближает решение $u(t,x_1,x_2)$ задачи Коши (4.5) – (4.6). Таким образом, для решения задачи Коши (4.5) – (4.6) мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to0} \mathbb{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)\big(x_1-\xi_1^\varepsilon(t), x_2-\xi_2^\varepsilon(t)\big)]. \tag{4.13}$$

Далее мы покажем, что в формуле (4.13) случайный процесс $\xi^\varepsilon(t)$ можно заменить случайным блужданием достаточно общего вида.

Пусть $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины X_1, через $F(x)$ — функцию распределения. Предположим, что распределение случайной величины X_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$1 - F(x) = \frac{1}{x^\varrho}(1 + h(x)), \tag{4.14}$$

причем функция

$$|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^\delta},$$

где

$$\delta > 1 - \{\varrho\}. \tag{4.15}$$

Для $k < \varrho$, $j \leqslant k$ через μ_k^j обозначим величину

$$\mu_k^j = \mathbb{E} X_1^k \cos^j(\gamma \ln X_1) \sin^{k-j}(\gamma \ln X_1). \tag{4.16}$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0, \infty)$ – независимый от последовательности $\{X_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0, T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \zeta_{1,n}(t) + i\zeta_{2,n}(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=0}^{\eta(nt)} X_j^{1+i\gamma}. \tag{4.17}$$

Заметим, что при $\varrho > 2$ процесс $\zeta_n(t)$ не имеет слабого предела при $n \to \infty$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов P_n^t, полагая

$$\big(P_n^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \varkappa_n^t\big)\big(x_1 - \zeta_n^1(t), x_2 - \zeta_n^2(t)\big)\Big], \tag{4.18}$$

где функция $\varkappa_n^t(x_1, x_2)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2) = \exp\Big\{ - nt \sum_{k=1}^{[\varrho]} \frac{i^k}{n^{k/\varrho}} \sum_{j=0}^{k} \mu_k^j \big(p_1 \cos(b \ln n) + p_2 \sin(b \ln n)\big)^j \big(- p_1 \cos(b \ln n) + p_2 \sin(b \ln n)\big)^{k-j} \Big\}.$$

Также как и в (4.8), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2)$ — это быстро убывающая функция.

Теорема 35. *Пусть $\varphi \in W_2^{[\varrho]+l+1}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. Тогда*

$$\|P^t \varphi - P_n^t \varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct \frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\varrho]+1}(\mathbb{R}^2)}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}},$$

где P^t, P_n^t — полугруппы операторов, определенные (4.18), *как и ранее* $\{\varrho\} = \varrho - [\varrho]$.

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Именно, обозначим $A = A_n$, $B = \mathcal{L} - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$\begin{aligned} A_n\psi(x) &= n\int_0^\infty \Big(\psi\big(x_1 - \tfrac{y\cos(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}, x_2 - \tfrac{y\sin(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}\big) \\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-y)^j}{n^{aj}j!} D^j\psi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y - b\ln n)\ \sin(\gamma\ln y - b\ln n)]\Big)dF(y). \end{aligned}$$

Тогда

$$A + B = \mathcal{L}.$$

Для оценки нормы воспользуемся (4.9). Заметим, прежде всего, что для любого положительного k справедливы неравенства

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{4.19}$$

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{4.20}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\varrho]+1} \to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{B\varphi}(p_1,p_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dp_1dp_2\Bigg(\int\limits_0^\infty \Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma\ln y), x_2 - y\sin(\gamma\ln y)) \\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-1)^j y^j}{j!} D^j\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y)\ \sin(\gamma\ln y)]\Big)\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} \\ &- n\int_0^\infty \Big(\varphi\big(x_1 - \tfrac{y\cos(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}, x_2 - \tfrac{y\sin(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}\big) \\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(-y)^j}{n^{aj}j!} D^j\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y - b\ln n)\ \sin(\gamma\ln y - b\ln n)]\Big)dF(y)\Bigg). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Воспользуемся теоремой Фубини для замены пределов интегрирования и получим, что $\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = h_n(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2)$, где

$$h_n(p_1,p_2) = \int\limits_0^\infty \Big[e^{ig(y)} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(ig(y))^j}{j!}\Big]\frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} - n\int_0^\infty \Big[e^{ig(yn^{-a})} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{(ig(yn^{-a}))^j}{j!}\Big]dF(y), \tag{4.22}$$

где

$$g(y) = g(y,p_1,p_2) = y\big(p_1\cos(\gamma\ln y) + p_2\sin(\gamma\ln y)\big). \tag{4.23}$$

Обозначим
$$S(y) = e^{iy} - \sum_{j=0}^{[\varrho]} \frac{i^j y^j}{j!}.$$
Тогда получаем, что
$$h_n(p_1,p_2) = \int\limits_0^\infty S(g(y)) \frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} - n\int_0^\infty S(g(yn^{-a}))dF(y). \tag{4.24}$$
Далее мы будем использовать следующие неравенства
$$\begin{aligned} |g(y)| &\leqslant |p|\cdot|y|,\, y\in\mathbb{R}; \quad |g'(y)| \leqslant C(\gamma)|p|,\, y\in\mathbb{R}; \\ |S(y)| &\leqslant C(\varrho)|y|^{[\varrho]+1},\, |y|\leqslant 1; \quad |S'(y)| \leqslant C(\varrho)|y|^{[\varrho]},\, |y|\leqslant 1. \end{aligned} \tag{4.25}$$
Вернемся к оценке $h_n(p_1,p_2)$. Имеем
$$\begin{aligned} h(p_1,p_2) &= \int\limits_0^\infty S(g(y))d\big(\frac{1}{y^\varrho}\big) - n\int_0^1 S(g(yn^{-a}))dF(y) + n\int_1^\infty S(g(yn^{-a}))d\big(1-F(y)\big) \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varrho y^\varrho} S'(g(y))g'(y)dy - nS(g(n^{-a}))F(1) \\ &+ n\int_0^1 F(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy - n(1-F(1))S(g(n^{-a})) \\ &- n\int_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\varrho y^\varrho} S'(g(y))g'(y)dy + n\int_0^1 F(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy \\ &- n\int_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy - nS(g(n^{-a})) = I + I_1 + I_2 + I_4. \end{aligned}$$
Сначала оценим I_4. Из (4.25) следует, что
$$|I_4| \leqslant C(\alpha)n|p|^{[\varrho]+1}n^{-([\varrho]+1)a} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$
Для оценки I_1 также воспользуемся неравенствами (4.25).
$$|I_1| \leqslant C(\alpha)n|p|n^{-a}|p|^{[\varrho]}n^{-a[\varrho]} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$
Осталось оценить I_2. Для этого воспользуемся условием на $1-F(y)$.
$$\begin{aligned} I_2 &= -n\int_1^\infty (1-F(y))S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy \\ &= -n\int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho} S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy - n\int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho}h(y)S'(g(yn^{-a}))g'(yn^{-a})n^{-a}dy = I_2^1 + I_2^2. \end{aligned}$$

В интеграле I_2^1 сделаем замену переменной $w = yn^{-a}$ и получим

$$I_2^1 = -\int\limits_{n^{-a}}^{\infty} \frac{1}{y^{\varrho}} S'(g(y))g'(y)dy = -I + \int\limits_{0}^{n^{-a}} \frac{1}{y^{\varrho}} S'(g(y))g'(y)dy. \tag{4.26}$$

Оценим интеграл в правой части (4.26).

$$\Big|\int\limits_{0}^{n^{-a}} \frac{1}{y^{\varrho}} S'(g(y))g'(y)dy\Big| \leqslant C(\alpha)|p|^{[\varrho]+1} \int\limits_{0}^{n^{-a}} \frac{dy}{y^{1-\{\varrho\}}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$

Осталось оценить I_2^2.

$$|I_2^2| \leqslant C(\alpha)n|p|^{[\varrho]+1}n^{-a([\varrho]+1)} \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dy}{y^{\{\varrho\}+\delta}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$

В итоге получаем, что справедлива оценка

$$|h_n(p_1,p_2)| \leqslant C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2 dp_1 dp_2 \\ &\leqslant C(\alpha)\frac{1}{n^{(1-\{\varrho\})/\varrho}} \int\limits_{\mathbb{R}} (1+|p|^{2(l+[\varrho]+1)})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2 dp_1 dp_2 \leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\varrho\})/\varrho}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\varrho]+1}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (4.19)–(4.20) и (4.27). □

4.2. Симметричный случай.

В данном параграфе будем рассматривать только α, удовлетворяющие условию

$$\varrho = \varrho(\alpha) \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k, 4k+2). \tag{4.28}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_s u, \tag{4.29}$$

где оператор $\mathcal{L}_s$ – симметричный оператор типа Римана-Лиувилля (4.3). Для уравнения (4.29) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2), \tag{4.30}$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Введем следующие полугруппы операторов

$$P_s^t = e^{t\mathcal{L}_s}; \quad \big(P_\varepsilon^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \omega_\varepsilon^t\big)\big(x_1 - \xi_1^\varepsilon(t), x_2 - \xi_2^\varepsilon(t)\big)\Big], \tag{4.31}$$

где

$$\xi^\varepsilon(t) = \xi_1^\varepsilon(t) + i\xi_2^\varepsilon(t) = \int_0^t \int_{|x|>\varepsilon} x e^{i\gamma \ln|x|} \nu(ds, dx),$$

а $\nu(ds, dx)$ — пуассоновская случайная мера на $(0, \infty) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ с интенсивностью вида

$$\mathbb{E}\nu(ds, dx) = \Pi(ds, dx) = ds \tfrac{dx}{|x|^{1+\varrho}}.$$

Функция $\omega_\varepsilon^t(x_1, x_2)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p_1, p_2) = \exp\Big(- t \int_{|y|>\varepsilon} \Big(\sum_{j=1}^{[\varrho/2]} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!} \big(p_1 \cos(\gamma \ln y) + p_2 \sin(\gamma \ln y)\big)^{2j} \Big) \frac{dy}{|y|^{1+\varrho}} \Big). \tag{4.32}$$

Как и выше, у семейства случайных величин $\xi^\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$ и $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p_1, p_2)$ — быстро убывающая функция.

Теорема 36. *Пусть $\varphi \in W_2^{4k+l+2}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. Тогда*

$$\|P_s^t \varphi - P_\varepsilon^t \varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon^{4k+2-\varrho} \|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}},$$

где P_s^t, P_ε^t — полугруппы операторов, определенные (4.31), *$k = [\varrho/4]$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся формулой (4.9).

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \mathcal{L}_s - \mathrm{A}_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$\begin{aligned} A_\varepsilon \psi(x) \;\; = & \int_{|y|>\varepsilon} \Big(\psi(x_1 - y\cos(\gamma \ln|y|), x_2 - y\sin(\gamma \ln|y|)) \\ & - \sum_{j=0}^{[\varrho/2]} \frac{y^{2j}}{(2j)!} D^{2j}\psi(x_1, x_2)[\cos(\gamma \ln|y|)\ \sin(\gamma \ln|y|)] \Big) \frac{\varrho dy}{|y|^{1+\varrho}}. \end{aligned}$$

В этих обозначениях

$$A + B = \mathcal{L}_s.$$

Заметим, что для любого положительного k справедливы неравенства для операторных норм

$$\big\| e^{t(A+B)} \big\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1, \tag{4.33}$$

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1. \tag{4.34}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\varrho]+2}\to W_2^l}$.

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi(x)$

$$\begin{aligned}\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg(2\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\varphi(x_1-y\cos(\gamma\ln y),x_2-y\sin(\gamma\ln y))\\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{y^{2j}}{(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}\Bigg)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2.\end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Фубини и поменяем пределы интегрирования. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) &= 2\int\limits_0^{\varepsilon}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(\varphi(x_1-y\cos(\gamma\ln y),x_2-y\sin(\gamma\ln y))\\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{y^{2j}}{(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big)e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dx_1dx_2\Bigg)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.\end{aligned}$$

Из формул для преобразования Фурье сдвига и производной следует, что

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)=h_\varepsilon(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2),$$

где

$$\begin{aligned}h_\varepsilon(p_1,p_2) &= 2\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\cos\big(y(p_1\cos(\gamma\ln y)+p_2\sin(\gamma\ln y))\big)\\ &- \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{y^{2j}}{(2j)!}\sum_{q=0}^{j}C_{2j}^{2q}(ip_1)^{2q}(ip_2)^{2j-2q}\cos^{2q}(\gamma\ln y)\sin^{2j-2q}(\gamma\ln y)\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.\end{aligned}$$

Пусть $p_1=r\cos\varphi$, $p_2=r\sin\varphi$, $r\geqslant 0$, $\varphi\in[0,2\pi)$. Имеем

$$h_\varepsilon(p_1,p_2)=2\int\limits_0^{r\varepsilon}\Big(\cos\big(ry\cos(\varphi-\gamma\ln y)\big)-\sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^jr^{2j}y^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi-\gamma\ln y)\Big)\frac{dy}{y^{1+\varrho}}.$$

Сделаем в последней формуле замену переменной $w=ry$.

$$h_\varepsilon(p_1,p_2)=2r^{\varrho}\int\limits_0^{\varepsilon}\Big(\cos\big(w\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)-\sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^jw^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\Big)\frac{dw}{w^{1+\varrho}}.$$

Если $r < \frac{1}{\varepsilon}$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} r^{\varrho}\Big|\int\limits_0^{r\varepsilon}\Big(\cos\big(w\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big) &- \sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^j w^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\Big)\frac{dw}{w^{1+\varrho}}\Big| \\ &\leqslant r^{\varrho}\int\limits_0^{r\varepsilon} w^{2+4k}\frac{dw}{w^{1+\varrho}} \leqslant Cr^{\varrho+2+4k-\varrho}\varepsilon^{2+4k-\varrho} = C|p|^{4k+2}\varepsilon^{4k+2-\varrho}. \end{aligned}$$

В случае $r > \frac{1}{\varepsilon}$ имеем

$$\begin{aligned} \big|h_\varepsilon(p_1,p_2)\big| &\leqslant 2|p|^{\varrho}\cdot\int_0^\infty\Big|\cos\big(w\cos(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\big)-\sum_{j=0}^{[\varrho/2]}\frac{(-1)^j w^{2j}}{(2j)!}\cos^{2j}(\varphi+\gamma\ln r-\gamma\ln w)\Big|\frac{dw}{w^{1+\varrho}} \\ &\leqslant C|p|^{\varrho}\Big(\int_0^1 w^{1-2\{\varrho/2\}}dw+\int_1^\infty\frac{dw}{w^{1+2\{\varrho/2\}}}\Big) = C(\varrho)|p|^{\varrho}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Big\|\widehat{B\varphi}\Big\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2dp_1dp_2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2(4k+2)}dp_1dp_2 + C\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}}\Big(1+|p|^{2l}\Big)|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2\varrho}dp_1dp_2. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \Big\|\widehat{B\varphi}\Big\|^2_{W_2^l} &\leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)}\int\limits_{|p|<\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2(l+4k+2)})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2dp_1dp_2 \\ &+ C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)}\int\limits_{|p|>\frac{1}{\varepsilon}}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2|p|^{2\varrho+2(4k+2-\varrho)}dp_1dp_2 \leqslant C\varepsilon^{2(4k+2-\varrho)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (4.33) – (4.35). □

Мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+4k+2}(\mathbb{R}^2)$ при некотором $l > 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x_1,x_2)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbb{R}^2)$ приближает решение задачи Коши (4.29) – (4.30). Таким образом, мы получаем вероятностное представление решения задачи Коши (4.29) – (4.30)

$$u(t,x_1,x_2) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\Big[\big(\varphi*\omega_\varepsilon^t\big)\big(x_1-\xi_1^\varepsilon(t),x_2-\xi_2^\varepsilon(t)\big)\Big]. \tag{4.36}$$

Далее мы покажем, что в формуле (4.36) случайный процесс $\xi^\varepsilon(t)$ можно заменить случайным блужданием достаточно общего вида.

Пусть $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины X_1, через $F(x)$ — функцию распределения. Предположим, что распределение случайной величины X_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$F(-x) = 1 - F(x) = \frac{1}{x^{\varrho}}(1 + h(x)), \tag{4.37}$$

причем функция

$$|h(x)| \leqslant \frac{C}{x^{\delta}},$$

где

$$\delta > 1 - \{\varrho\}. \tag{4.38}$$

Для $m < 2k$, $j \leqslant m$ через μ_m^j обозначим следующее матожидание

$$\mu_m^j = \mathbb{E}X_1^{2m} \cos^{2j}(\gamma \ln |X_1|) \sin^{2m-2j}(\gamma \ln |X_1|). \tag{4.39}$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0, \infty)$ – независимый от последовательности $\{X_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t > 0$, полагая

$$\zeta_n(t) = \zeta_{1,n}(t) + i\zeta_{2,n}(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=0}^{\eta(nt)} X_j e^{i\gamma \ln |X_j|}. \tag{4.40}$$

Заметим, что при $k > 2$ процесс $\zeta_n(t)$ не имеет слабого предела при $n \to \infty$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим полугруппу операторов

$$\big(P_n^t \varphi\big)(x_1, x_2) = \mathbb{E}\Big[\big(\varphi * \varkappa_n^t\big)\big(x_1 - \zeta_n^1(t), x_2 - \zeta_n^2(t)\big)\Big], \tag{4.41}$$

где функция $\varkappa_n^t(x_1, x_2)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2) = \exp\Big(-nt \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m}{n^{2m/\varrho}} \sum_{j=0}^{m} \mu_m^j \big(p_1 \cos(b \ln n) + p_2 \sin(b \ln n)\big)^{2j} \big(p_1 \cos(b \ln n) - p_2 \sin(b \ln n)\big)^{2m-2j}\Big).$$

Также как и в (4.8), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p_1, p_2)$ — это быстро убывающая функция.

Теорема 37. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbb{R}^2)$, $l \geqslant 0$. Тогда*

$$\|P_s^t \varphi - P_n^t \varphi\|_{W_2^l} \leqslant Ct \frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}(\mathbb{R})}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}},$$

где P_s^t, P_n^t — полугруппы операторов, определенные в (4.31), (4.41), как и ранее $k = [\varrho/4]$.

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Именно, обозначим $A = A_n$, $B = \mathcal{L}_s - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$ как

$$\begin{aligned} A_n\psi(x) &= n\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\psi\big(x_1 - \tfrac{y\cos(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}, x_2 - \tfrac{y\sin(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}\big) \\ &- \sum_{j=0}^{2k}\frac{y^{2j}}{n^{2ja}(2j)!}D^{2j}\psi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln|y| - b\ln n)\ \sin(\gamma\ln|y| - b\ln n)]\Big)dF(y). \end{aligned}$$

Тогда

$$A + B = \mathcal{L}_s.$$

Для оценки нормы воспользуемся (4.9). Заметим, прежде всего, что для любого положительного k справедливы неравенства

$$\left\|e^{tA}\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1, \tag{4.42}$$

$$\left\|e^{t(A+B)}\right\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{4.43}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+4k+2}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{B\varphi}(p_1,p_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(p_1x_1+p_2x_2)}dp_1dp_2\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big(\varphi(x_1 - y\cos(\gamma\ln|y|), x_2 - y\sin(\gamma\ln|y|)) \\ &- \sum_{j=0}^{2k}\frac{y^{2j}}{(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln|y|)\ \sin(\gamma\ln|y|)]\Big)\frac{\varrho dy}{|y|^{1+\varrho}} \\ &- n\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\varphi\big(x_1 - \tfrac{y\cos(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}, x_2 - \tfrac{y\sin(\gamma\ln y - b\ln n)}{n^a}\big) \\ &- \sum_{j=0}^{2k}\frac{y^{2j}}{n^{2ja}(2j)!}D^{2j}\varphi(x_1,x_2)[\cos(\gamma\ln y - b\ln n)\ \sin(\gamma\ln y - b\ln n)]\Big)dF(y)\Bigg). \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой Фубини для замены пределов интегрирования и получим, что

$$\widehat{B\varphi}(p_1,p_2) = h_n(p_1,p_2)\widehat{\varphi}(p_1,p_2),$$

где

$$h_n(p_1,p_2) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big[\cos\big(g(y)\big) - \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^j(g(y))^{2j}}{(2j)!}\Big]\frac{\varrho dy}{|y|^{1+\varrho}} - n\int\limits_0^\infty\Big[\cos\big(g(yn^{-a})\big) - \sum_{j=0}^{2k}\frac{(-1)^j(g(yn^{-a}))^{2j}}{(2j)!}\Big]dF(y),$$

где функция g определяется (4.23).

Обозначим

$$S(y) = \cos y - \sum_{j=0}^{2k} \frac{(-1)^j y^{2j}}{(2j)!}.$$

Тогда получаем, что в силу симметрии

$$h_n(p_1, p_2) = 2 \int\limits_0^\infty S(g(y)) \frac{\varrho dy}{y^{1+\varrho}} - 2n \int\limits_0^\infty S(g(yn^{-a})) dF(y). \tag{4.44}$$

Далее мы будем использовать следующие неравенства

$$\begin{aligned} |g(y)| &\leqslant |p| \cdot |y|,\ y \in \mathbb{R}; \quad |g'(y)| \leqslant C(\gamma)|p|,\ y \in \mathbb{R}; \\ |S(y)| &\leqslant C(\varrho)|y|^{4k+2},\ |y| \leqslant 1; \quad |S'(y)| \leqslant C(\varrho)|y|^{4k+1},\ |y| \leqslant 1. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Вернемся к оценке $h_n(p_1, p_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_n(p_1, p_2) &= \int\limits_0^\infty S(g(y)) d\Big(\frac{1}{y^\varrho}\Big) - n \int_0^1 S(g(yn^{-a})) dF(y) + n \int_1^\infty S(g(yn^{-a})) d\big(1 - F(y)\big) \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{1}{y^\varrho} S'(g(y)) g'(y) dy - nS(g(n^{-a}))F(1) \\ &+ n \int_0^1 F(y) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy - n(1 - F(1)) S(g(n^{-a})) \\ &- n \int_1^\infty (1 - F(y)) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy \\ &= \int\limits_0^\infty \frac{1}{y^\varrho} S'(g(y)) g'(y) dy + n \int_0^1 F(y) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy \\ &- n \int_1^\infty (1 - F(y)) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy - nS(g(n^{-a})) = I + I_1 + I_2 + I_4. \end{aligned}$$

Сначала оценим I_4. Из (4.45) следует, что

$$|I_4| \leqslant C(\alpha) n |p|^{4k+2} n^{-(4k+2)a} = C(\alpha) \frac{|p|^{4k+2}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Для оценки I_1 также воспользуемся неравенствами (4.45).

$$|I_1| \leqslant C(\alpha) n |p| n^{-a} |p|^{4k+1} n^{-(4k+1)a} = C(\alpha) \frac{|p|^{4k+2}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Осталось оценить I_2. Из (4.37) следует, что

$$\begin{aligned} I_2 &= -n \int_1^\infty (1 - F(y)) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy \\ &= -n \int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho} S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy - n \int_1^\infty \frac{1}{y^\varrho} h(y) S'(g(yn^{-a})) g'(yn^{-a}) n^{-a} dy = I_2^1 + I_2^2. \end{aligned}$$

В интеграле I_2^1 сделаем замену переменной $w = yn^{-a}$ и получим

$$I_2^1 = -\int\limits_{n^{-a}}^{\infty} \frac{1}{y^{\varrho}} S'(g(y))g'(y)dy = -I + \int\limits_{0}^{n^{-a}} \frac{1}{y^{\varrho}} S'(g(y))g'(y)dy. \tag{4.46}$$

Оценим интеграл в правой части (4.46).

$$\Big|\int\limits_{0}^{n^{-a}} \frac{1}{y^{\varrho}} S'(g(y))g'(y)dy\Big| \leqslant C(\alpha)|p|^{4k+2} \int\limits_{0}^{n^{-a}} \frac{dy}{y^{\varrho-4k-1}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Осталось оценить I_2^2.

$$|I_2^2| \leqslant C(\alpha)n|p|^{4k+2}n^{-a(4k+2)} \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dy}{y^{\varrho-4k-1+\delta}} = C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

В итоге получаем, что справедлива оценка

$$|h_n(p_1,p_2)| \leqslant C(\alpha)\frac{|p|^{[\varrho]+1}}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p_1,p_2)|^2 dp_1 dp_2 \\
&\leqslant C(\alpha)\frac{1}{n^{(4k+2-\varrho)/\varrho}} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+|p|^{2(l+4k+2)})|\widehat{\varphi}(p_1,p_2)|^2 dp_1 dp_2 \\
&\leqslant \frac{C}{n^{2(4k+2-\varrho)/\varrho}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+4k+2}}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (4.42)–(4.43) и (4.47). □

Заключение

В диссертации рассмотрены вопросы устойчивости случайных величин и векторов относительно умножения на комплексное число. Основные результаты состоят в следующем:

1. Построены α-устойчивые случайные величины и векторы с комплексным индексом устойчивости α, удовлетворяющим $|\alpha - 1| < 1$.

2. Полностью описано множество предельных распределений в схеме суммирования комплексных н.о.р. случайных величин и векторов с комплексными нормировкой и центрированием.

3. Построены соответствующие α-устойчивым векторам процессы Леви и найдены их генераторы.

4. Построен аналог оператора Римана-Лиувилля в случае комплексного индекса α и найдена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для соответствующего эволюционного уравнения.

Приложение. Операторно-устойчивые случайные векторы.

Сформулируем основные теоремы, используемые в тексте диссертации.

Напомним определение операторно-устойчвого случайного вектора, введенное в [28].

Определение 9. *Случайный вектор $\vec{\xi}$ со значениями в $\mathbb{R}^l$ называется операторно-устойчивым, если существует последовательность независимых одинаково распределенных векторов $\{\vec{X}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и последовательности $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^l$ такие, что последовательность случайных векторов*

$$B_n \sum_{k=1}^{n} \vec{X}_k - a_n$$

сходится по распределению к $\vec{\xi}$.

Сформулируем следующий критерий операторной устойчивости

Теорема 38. *Случайный вектор $\vec{\xi}$ со значениями в $\mathbb{R}^l$ является операторно-устойчивым тогда и только тогда, когда он является безгранично делимым и существует вещественная матрица $E \in \mathbb{R}^{l\times l}$ такая, что для любого $t > 0$ существует $a_t \in \mathbb{R}^l$ и*

$$\vec{\xi}(t) \stackrel{d}{=} t^E \vec{\xi}(1) + a_t,$$

где $\vec{\xi}(t)$ – процесс Леви, соответствующий случайному вектору ξ. Матрица $t^E \in \mathbb{R}^{l\times l}$ определяется как

$$t^E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln t)^k}{k!} E^k.$$

Корни минимального многочлена матрицы E лежат в полуплоскости $\{\operatorname{Re} z \geqslant 1/2\}$ и все корни на прямой $\{\operatorname{Re} z = 1/2\}$ являются простыми. Более того, случайный вектор $\vec{\xi}$ единственным образом может быть представлен как $\vec{\xi} \stackrel{d}{=} \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2$, где векторы $\vec{\xi}_1$, $\vec{\xi}_2$ независимы и принимают значения в E-инвариантных подпространствах V_1, V_2 соответственно *и* $\mathbb{R}^l = V_1 \oplus V_2$. *Случайный вектор* $\vec{\xi}_1$ *является безгранично делимым вектором с нулевой гауссовской компонентой, а* $\vec{\xi}_2$ *– гауссовский вектор. Спектр матрицы* $E\big|_{V_1}$ *содержится в множестве* $\{\operatorname{Re} z > 1/2\}$, *а собственные числа матрицы* $E\big|_{V_2}$ *лежат на прямой* $\{\operatorname{Re} z = 1/2\}$.

Доказательство теоремы см. в [25, теорема 7.2.1].

Сформулируем еще две теоремы об операторно-устойчивых случайных векторах.

Теорема 39. *Пусть случайный вектор* $\vec{\xi}$ *является операторно-устойчивым с экспонентой* E *и пусть* $a_1 < \ldots < a_p$ *– вещественные части собственных чисел* E. *Тогда* $\mathbb{E}\|\vec{\xi}\|^s$ *существует для любого* $0 \leqslant s < \frac{1}{a_p}$, *и если* $a_p > 1/2$, *то* $\mathbb{E}\|\vec{\xi}\|^s = \infty$ *для всех* $s > \frac{1}{a_p}$.

Теорема 40. *Распределение операторно-устойчивого вектора является абсолютно непрерывным.*

Доказательство теорем 39, 40 см. в [25, следствие 7.1.21, теорема 7.2.7].

Введем определение обобщенной области частичного притяжения.

Определение 10. *Случайный вектор* $\vec{X}$ *со значениями в* $\mathbb{R}^l$ *принадлежит обобщенной области частичного притяжения случайного вектора* $\vec{\xi}$ *со значениями в* $\mathbb{R}^l$, *если существуют последовательности* $\{k_n\}$, $k_n < k_{n+1}$, $k_n \in \mathbb{N}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^l$ *такие, что последовательность случайных векторов*

$$B_n \sum_{k=1}^{k_n} \vec{X}_k - a_n \tag{4.48}$$

сходится по распределению к $\vec{\xi}$.

Следующая теорема является необходимым и достаточным условием сходимости сумм независимых одинаково распределенных случайных векторов.

Теорема 41. *Пусть случайный вектор* $\vec{X}$ *со значениями в* $\mathbb{R}^l$ *принадлежит обобщенной области частичного притяжения случайного вектора* $\vec{\xi}$. *Тогда* $\vec{\xi}$ *является безгранично делимым. Более того, если* (Δ, Q, Λ) *— характеристический триплет, то* (4.48) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$k_n \mathbb{P}(B_n \vec{X} \in U) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(U),$$

где U — произвольное борелевское подмножество $\mathbb{R}^l$, удовлетворяющее $\Lambda(\partial U) = 0$ и

$$\begin{aligned} t^T Q t &= \limsup_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} k_n \Big[\int\limits_{\|x\|<\varepsilon} \langle t, x\rangle^2 dF_n(x) - \Big(\int\limits_{\|x\|<\varepsilon} \langle t, x\rangle dF_n(x) \Big)^2 \Big] \\ &= \liminf_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} k_n \Big[\int\limits_{\|x\|<\varepsilon} \langle t, x\rangle^2 dF_n(x) - \Big(\int\limits_{\|x\|<\varepsilon} \langle t, x\rangle dF_n(x) \Big)^2 \Big] \end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbb{R}^l$. Здесь $F_n(x)$ – функция распределения случайного вектора $B_n\vec{X}$, $\langle x, y\rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^l$.

Сдвиг a_n можно выбрать равным

$$a_n = -k_n \int\limits_{\|x\|<R} x dF_n(x),$$

где $R > 0$ выбирается таким, что $\Lambda\big(\{x\colon\ \|x\| = R\}\big) = 0$.

Доказательство теоремы см. в [25, теорема 3.3.8].

Литература

[1] П. Биллингсли *Сходимость вероятностных мер*, Наука, Москва, 1977.

[2] А.М.Вершик, И.М. Гельфанд, М.И. Граев *Коммутативная модель представления группы токов $SL(2,\mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой* , Функциональный анализ и его приложения, **17**(1983), 70–72.

[3] Ф.Р. Гантмахер *Теория матриц*, Наука, Москва, 1966.

[4] И.И. Гихман, А.В. Скороход *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, Москва, 1977.

[5] Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, ГИТТЛ, Москва, Ленинград, 1949.

[6] М.А. Евграфов *Аналитические функции*, Наука, Москва, 1991.

[7] В.М. Золотарев *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, Москва, 1983.

[8] И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, Москва, 1965.

[9] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972.

[10] Дж. Кингман *Пуассоновские процессы*, Издательство МЦНМО, Москва, 2007.

[11] Дж. Ламперти *Вероятность*, Наука, Москва, 1973.

[12] М.А. Лишфиц *Инвариантные меры, порождаемые случайными полями с независимыми значениями*, Функциональный анализ и его приложения, **19**(1985), 92–93.

[13] Е. Лукач *Характеристические функции*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 1979.

[14] М.В. Платонова *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы*, Записки научных семинаров ПОМИ, **442**(2015), 101–117.

[15] Г.Н. Сакович *Многомерные устойчивые распределения. Диссертация*, 1965.

[16] А.В. Скороход *Случайные процессы с независимыми приращениями*, Наука, Москва, 1964.

[17] Н.В. Смородина, М.М. Фаддеев *Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер.*, Записки научных семинаров ПОМИ, **361**(2008), 145–166.

[18] Н.В. Смородина, М.М. Фаддеев *Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений*, Записки научных семинаров ПОМИ, **368**(2009), 201–228.

[19] Д.К. Фаддеев *Лекции по алгебре*, Наука, Москва, 1984.

[20] Д.К. Фаддеев, Б.З. Вулих, Н.Н. Уральцева *Избранные главы анализа и высшей алгебры*, Изд–во Ленингр. ун–та, Ленинград, 1981.

[21] П. Халмош *Теория меры*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1953.

[22] E. Feldheim *Étude de la stabilité des lois de probabilité*, Thèses de l'entre-deux-guerres, **187**(1937).

[23] D. Kremer, H-P. Scheffler *Multi operator-stable random measures and fields*, Stochastic Models, 2019, V. 35(4), P. 429–468.

[24] P. Lévy *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Scuola normale superiore, 2e série, **3**(1934) 337–366.

[25] Mark M. Meerschaert, Hans-Peter Scheffler *Limit distributions for sums of independent random vectors : heavy tails in theory and practice*, Wiley, New York, 2001.

[26] E. Rvaceva *On domains of attraction of multidimensional distributions*, Select. Transl. Math. Stat. Prob., American Math. Soc., Providence, Rhode Island, **2**(1962), 183–205.

[27] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[28] M. Sharpe *Operator-Stable probability distributions on vector groups*, Transactions of the American Mathematical Society, **136**(1969), 51–65.

[29] N.V. Smorodina, M.M. Faddeev *The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications*, Acta applicandae mathematicae, **110**(2010), 1289–1308.

Работы автора по теме диссертации

[30] И.А. Алексеев *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости, I.*, Теория вероятностей и ее применения, **67**(2022), выпуск 3, 421–439.

[31] И.А. Алексеев *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости. Случай* $|\alpha - 1/2| < 1/2$., Записки научных семинаров ПОМИ, **505**(2021), 17–37.

[32] И.А. Алексеев *Об устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости*, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления, **501**(2021), № 1, 5–10.