САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Ихсанов Лев Назарович

Равномерные оценки приближений через второй модуль непрерывности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт–Петербург – 2021

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: **Виноградов Олег Леонидович**
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты: **Платонов Сергей Сергеевич**
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»

Петров Андрей Николаевич
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общенаучных и общетехнических дисциплин ФГКВОУ ВО «Военная академия материально-технического обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулёва» Министерства обороны РФ

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Защита состоится «____» __________________ в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук К. С. Рядовкин

Общая характеристика работы

Цели и задачи диссертационной работы

Диссертация посвящена вопросам приближения в пространствах ограниченных числовых функций, снабжённых sup–нормой.

Получена равномерная оценка приближения положительными полиномиальными операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности. Эта оценка является точной и обобщает аналогичный результат, известный для операторов Бернштейна.

Улучшена известная ранее оценка нормы функции, ортогональной кусочно постоянным, через второй модуль непрерывности. Кроме того, доказано, что искомая точная константа также является точной в одном неравенстве типа Джексона.

Актуальность темы исследования

Период становления теории приближений приходится на вторую половину XIX-го – начало XX-го века и связан с деятельностью многих выдающихся учёных, среди которых Чебышёв, Вейерштрасс, Лебег, Джексон, Бернштейн и др. Изначально математики интересовались возможностью приближения функций различных классов алгебраическими и тригонометрическими полиномами при ограничении на степень полинома, а также оценкой такого приближения через различные характеристики приближаемой функции. К стандартным характеристикам, хорошо отражающим порядок погрешности, относятся модули непрерывности, в частности, второй модуль непрерывности $\omega_2(f,\, h)$, точное определение которого в интересующих нас случаях будет дано ниже.

Поиск точных констант в таких оценках часто встречает серьёзные трудности, и, пусть в приложениях обычно не требуется знание точной константы, преодоление этих трудностей требует развития инструментария теории приближения, и хотя бы поэтому этот поиск оправдан.

Наши исследования связаны с одной из важнейших приближающих конструкций – полиномами Бернштейна

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right),$$

предложенными им в [1] для простого конструктивного доказательства теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими полиномами на отрезке $[0,\, 1]$. Полиномы Бернштейна обладают рядом важных свойств и хорошо поддаются исследованию, по причине чего не перестают привлекать интерес математиков и сегодня. В первой главе даётся точная оценка приближения конструкцией, существенным образом обобщающей операторы B_n.

Величина

$$E_n(f) = \inf_P \|f - P\|,$$

где P пробегает множество алгебраических (тригонометрических) полиномов степени не выше n, называется наилучшим приближением функции f алгебраическими (тригонометрическими) полиномами. В своей диссертации Джексон [3] рассмотрел наилучшее приближение на различных классах функций и получил асимптотические оценки величины $E_n(f)$. Кроме того, им были получены неравенства вида

$$E_n(f) \le C\omega(f,\, h).$$

Аналогичные неравенства с модулями непрерывности произвольной степени в различных задачах аппроксимации принято называть неравенствами типа Джексона. Сегодня результаты такого типа получены для многих пространств функций и приближающих классов, но точные константы в них известны далеко не всегда.

Тема второй главы связана с хорошо известным результатом для периодических функций, а именно, оценкой

$$E_n(f) \le \frac{1}{2}\omega_2(f,\, 1),$$

где f – 1-периодическая функция.

Нас интересует точная константа в аналогичном неравенстве для более широкого класса функций, а именно, функций, имеющих одинаковые средние значения между целыми точками.

Научная новизна

Получено обобщение результата, известного только для операторов Бернштейна, на широкий класс операторов, обобщающих эту конструкцию. Известная оценка следует из полученной при достаточно больших n.

Разработан новый метод оценки константы, связывающей норму функции, ортогональной кусочно–постоянным, с её вторым модулем непрерывности. С его помощью получено уточнение известного ранее результата.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер.

Изучение положительных полиномиальных операторов является важной частью теории приближения. Результаты первой главы существенно обобщают известную оценку приближения полиномами Бернштейна для широкого класса положительных полиномиальных операторов, по сути сводя все сложности к проверке нескольких ясных условий. С одной стороны, продолжение исследований в этом направлении может привести к упрощению такой проверки, требующей в данный момент знания коэффициентов разложения в специальном базисе. С другой стороны, абстрактный характер основных утверждений наводит на мысль, что аналогичные результаты могут быть получены в других пространствах, например, в пространствах Лебега.

Неравенства типа Джексона занимают одно из центральных мест в теории приближения. Неравенства, которым посвящена вторая глава, относятся к приближению константами, и пока что непонятно, для какого из приближающих классов удастся развить найденный подход. Значительную трудность здесь представляет недостаток ограничений на приближаемые функции, однако поэтому полученные результаты могут подсказать верхние оценки для многих подобных задач в будущем, представляющих в том числе и практическую значимость. Кроме того, разработанные методы, основанные на более глубоком исследовании свойств рассматриваемых функций, позволили улучшить известные ранее результаты, что говорит о возможности получения новых асимптотических оценок в некоторых классических задачах.

Методы исследования

Центральной темой доказательства результатов первой главы является получение оценок абсолютной величины функционалов специального вида. Используемый метод сводится к разложению рассматриваемого функционала на составные части, оценка которых представляется относительно простой задачей и при этом не портит точность константы в интересующем нас неравенстве. Существенная трудность заключается в доказательстве возможности такого разложения, что и составляет основной объём работы.

Во второй главе рассматривается задача минимизации второго модуля непрерывности на множестве функций, в определении которого участвуют средние значения его элементов. Для этого мы переходим от обычных неравенств, связывающих второй модуль со значениями функции, к неравенствам, в которых участвуют некоторые её средние значения. Благодаря этому удаётся вывести систему неравенств, которая может быть решена методами линейной оптимизации. Полученные результаты указывают на то, что такой подход может оказаться полезным инструментом в будущем.

Встречающиеся в доказательствах системы уравнений решены при помощи программного пакета Maple.

Положения, выносимые на защиту:

1. Равномерная оценка приближения положительными полиномиальными операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности. Полученная оценка является точной и обобщает аналогичный результат, известный для операторов Бернштейна.

2. Оценка нормы функции, ортогональной кусочно постоянным, через второй модуль непрерывности. Доказательство того, что искомая точная константа также является точной в оценке наилучшего приближения постоянными функции, обладающей одинаковыми средними значениями между произвольными соседними целыми числами через второй модуль непрерывности.

Степень достоверности и апробация результатов

Все материалы, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. были опубликованы в рецензируемых журналах, а также докладывались на семинарах и конференциях, а именно International Conference on Wavelets and Applications (Санкт-Петербург, 2015), Harmonic Analysis and Approximations, VII (Цахкадзор, 2018), на городском семинаре по конструктивной теории функции под руководством проф. М. А. Скопиной (Санкт-Петербург).

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в статьях [13], [14] и [15], опубликованных в журналах, переводные версии которых входят в международную реферативную базу данных Scopus. Статьи написаны без соавторов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, из двух глав, разбитых на параграфы, а также заключения и библиографии. Введение содержит обзоры обеих глав. Помимо основных результатов, в этих обзорах приводятся исторические справки, основные определения и необходимые обозначения. Каждая из глав также содержит перечень используемых в ней определений и обозначений.

Формулы и утверждения имеют двойную нумерацию, где первая цифра – номер главы. Теоремы, не принадлежащие автору, имеют буквенную нумерацию.

Общий объём диссертации составляет 73 страницы. Библиография насчитывает 20 наименований.

Личный вклад автора

Все новые результаты доказаны автором лично.

Содержание работы.

Обзор первой главы

Определения и обозначения. Через $B[0,\,1]$ мы будем обозначать пространство ограниченных вещественнозначных функций, определённых на отрезке $[0,\,1]$.

Важную роль будут играть функции

$$e_0(t) = 1, \quad e_1(t) = t, \quad p_{n,\,j}(t) = C_n^j t^j (1-t)^{n-j}.$$

Первым и вторым модулями непрерывности в пространстве $B[0,\,1]$ называются соответственно величины

$$\omega(f,\,h) = \sup_{|t|\le h,\, x\pm t\in[0,\,1]} |f(x+t) - f(x)|,$$
$$\omega_2(f,\,h) = \sup_{|t|\le h,\, x\pm t\in[0,\,1]} \left| f(x-t) - 2f(x) + f(x+t) \right|.$$

Обращаем внимание, что функции считаются определёнными в каждой точке.

Под $\operatorname{supp} F$ – носителем функционала F – мы будем понимать наименьшее по включению замкнутое множество со свойством

$$\operatorname{supp} F \cap \operatorname{supp} f = \emptyset \Rightarrow F(f) = 0 \quad \forall f \in B[0,\,1].$$

Через $r(F)$ обозначим наименьшее число r, такое что

$$\operatorname{supp}(F) \subset [F(e_1) - r,\, F(e_1) + r].$$

Определим оператор $S_\sigma : B[0,\,1] \to B[0,\,1]$ формулой

$$S_\sigma f(x) = \begin{cases} f(2\sigma - x), & 2\sigma - x \in [0,\,1], \\ 0, & 2\sigma - x \notin [0,\,1] \end{cases}$$

Оператор S_σ осуществляет симметрию графика функции f относительно точки σ.

Через $\mathcal{F}$ будем обозначать множество линейных непрерывных положительных функционалов над $B[0,\,1]$ со свойствами

$$F(e_0) = 1,$$
$$F(f) = F(S_{F(e_1)} f).$$

Историческая справка. Предложенные Бернштейном в 1912 году полиномиальные операторы, названные впоследствии его именем, имеют вид

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Бернштейн интерпретировал свою конструкцию с точки зрения теории вероятностей, а именно, $B_n f(x)$ представляет из себя математическое ожидание выигрыша в игре из n партий с вероятностью победы, равной x, при условии, что награда за k побед составляет $f\left(\frac{k}{n}\right)$. Вероятностный подход также использовался им для доказательства равномерной сходимости полиномов $B_n f$ к функции f.

В двадцатом веке были получены разнообразные оценки скорости этой сходимости, в частности, через модули непрерывности. Так, в [6] Сиккема показал, что для $f \in C[0,\, 1]$ имеет место неравенство

$$\|f - B_n f\| \le \frac{4306 + 837\sqrt{6}}{5832} \omega\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Константа в этом неравенстве достигается при $n = 6$.

В серии статей, собранных в книге [5], Палтаня доказал следующую теорему.

Теорема A. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\, 1]$ и оператор B_n определён формулой

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Тогда

$$\|B_n f - f\| \le \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

причём это неравенство является точным для каждого n.

Заметим, что в теории приближения установлено, что порядок шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$ является оптимальным при оценке приближения операторами Бернштейна через второй модуль непрерывности. В качестве примера функции, у которой совпадают порядки убывания величин $\|f - B_n f\|$ и $\omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, можно привести $f(x) = |2x - 1|$. Легко видеть, что $\omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{n}}$, при этом, как установлено в [19],

$$\|f - B_n f\| = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Иными словами, порядок шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$ не может быть сделан меньше. Более того, он не может быть сделан меньше, даже если ограничиться сколь угодно гладкими функциями. Это следует из теоремы Вороновской (см., например, [18, гл. X, §2]):

Теорема B. Пусть $x \in (0,\,1)$, $f \in B[0,\,1]$ и $\exists f''(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n\left(B_n f(x) - f(x)\right) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x),$$

причём если $f \in C^2[0,\,1]$, то сходимость равномерна.

Таким образом, порядок приближения полиномами Бернштейна не может быть лучше $\frac{1}{n}$ даже для очень хороших функций. При этом, порядок $\omega_2(f,\,h)$ для таких функций может быть равен h^2, из чего следует невозможность улучшения порядка шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Нас будет интересовать конструкция, предложенная Канторовичем [16]:

$$K_n = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j} F_{n,\,j},$$

где $F_{n,\,j}$ – положительные операторы. Обращаем внимание, что функции $p_{n,\,j}$ образуют базис в пространстве полиномов степени не выше n. По этой причине к такому виду могут быть приведены различные положительные полиномиальные операторы. В частности, при

$$F_{n,\,j}(f) = f\left(\frac{j}{n}\right)$$

получаются полиномы Бернштейна, а при

$$F_{n,\,j}(f) = (n+1)\int\limits_{\frac{j}{n+1}}^{\frac{j+1}{n+1}} f(t)\,dt$$

получаются классические операторы Канторовича, которые также могут применяться для приближения в $L[0,\,1]$. Историю вопроса можно посмотреть в [10].

Основной результат. Получен аналог теоремы A для операторов Канторовича, не требующий явного выражения функционалов $F_{n,\,j}$.

Теорема 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B[0,\, 1]$ и оператор B_n задан формулой

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_{n,\,j}(x) F_{n,\,j}(f),$$

где $F_{n,\,j} \in \mathcal{F}$, $F_{n,\,j}(e_1) = \frac{j}{n}$, а кроме того, если $n > 10$, то

$$R = \max_{0 \le j \le n} r(F_{n,\,j}) < \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}.$$

Тогда

$$\|B_n f - f\| \le \omega_2\left(f,\, \frac{1}{\sqrt{n}} + h_n\right),$$

где

$$h_n = \begin{cases} 0, & n < 5, \\ \frac{n-2\sqrt{n}}{2n}, & 5 \le n \le 10, \\ \frac{2}{n} + \frac{3}{2}R, & 11 \le n < 60, \\ \frac{5}{2}R, & 60 \le n, \end{cases}$$

причём это неравенство является точным для каждого n.

В качестве примера допустимого набора функционалов (в случае измеримой функции f) можно привести следующую конструкцию, рассмотренную в [14].

$$F_{n,\,j}(f) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m_j} c_k \left(f\left(\frac{j}{n} - t_k\right) + f\left(\frac{j}{n} + t_k\right)\right) + \int_0^{t_0} \varphi_j(t) \left(f\left(\frac{j}{n} - t\right) + f\left(\frac{j}{n} + t\right)\right) dt,$$

где

$$m_j \in \mathbb{N},\, c_1, \ldots, c_{m_j} \ge 0,\, t_1,\, \ldots,\, t_{m_j},\, t_0 \in \left[0,\, \min\left\{\frac{1}{n},\, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}\right),$$
$$\varphi_j \in L[0,\, 1],\, \varphi_j \ge 0,$$
$$\sum_{k=1}^{m_j} c_k + \int_0^{t_0} \varphi_j(t)\, dt = \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что $F_{n,\,j} \in \mathcal{F}$, и, кроме того, $F_{n,\,j}(e_1) = \frac{j}{n}$.

Операторы Бернштейна являются частным случаем рассматриваемой конструкции, причём в этом случае $R = 0$, то есть теорема A следует из теоремы 1.1 для всех $n \in \mathbb{N} \setminus \{5, \ldots, 59\}$.

К сожалению, коэффициенты классических операторов Канторовича не обладают приведёнными выше свойствами, и аналогичной оценки для этих операторов пока не установлено. Однако, в случае измеримой функции f, вместо них можно рассмотреть похожую конструкцию с коэффициентами из приведённого выше семейства и удовлетворяющую условиям теоремы:

$$\widetilde{K}_n f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{n-1} p_{n,j}(x)\, \frac{1}{2t_j} \int\limits_{\frac{j}{n}-t_j}^{\frac{j}{n}+t_j} f(t)\, dt + f(1),$$

где $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \left(0, \min\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{4\sqrt{n}}\right\}\right)$.

Обзор второй главы

Определения и обозначения. Обозначим через F пространство ограниченных измеримых вещественнозначных функций на множестве $\mathbb{R}$, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(x)\, dx \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

а через F^0 – подпространство F, состоящее из функций, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\, dx = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Иными словами, пространство F^0 состоит из ограниченных измеримых функций, ортогональных кусочно-постоянным с узлами в целых точках.

Под C мы будем понимать пространство непрерывных 1-периодических функций с такой же нормой.

Первый модуль непрерывности функции f с шагом h в пространстве F определяется формулой

$$\omega(f,\, h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, |t|\le h} \left| f(x+t) - f(x) \right|,$$

а модули непрерывности чётного порядка – формулой

$$\omega_{2r}(f,\, h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, |t|\le h} \left| \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k f\left(x - (r-k)\,t\right) \right|.$$

В частности,

$$\omega_2(f,\, h) = \sup_{x\in\mathbb{R},\, |t|\le h} \left| f(x-t) - 2f(x) + f(x+t) \right|.$$

Для формулировки результатов нам понадобятся множества

$$F_b = \left\{ f\in F^0 \middle| f\left(\frac{1+b}{2}\right) = \|f\| = 1 \right\}, \quad F^* = \bigcup_{b\in[0,1]} F_b,$$

а также функция

$$q(b) = \begin{cases} \frac{96}{27b^3-27b^2+9b+55}, & b \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{8(11b^2+66b-13)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, & b \in \left(\frac{1}{3},\, 1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что функция $q(b)$ непрерывна на отрезке $[0,\, 1]$, имеет на этом отрезке ровно два интервала монотонности и достигает минимума между точками 0.43 и 0.44, причём

$$q(b) > 1.6721.$$

Наконец, через $E_0(f)$ обозначается наилучшее приближение f постоянными, то есть

$$E_0(f) = \inf_{c\in\mathbb{R}} \|f - c\|.$$

Нас будут интересовать величины

$$J_2^* = \sup_{f\in F} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)}, \quad W_2^* = \sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)},$$

с соглашением $\frac{0}{0} = 0$. Это оправдано, поскольку для случая прямой из $\omega_2(f,\, h) = 0$ следует $f = 0$.

Историческая справка. В своей диссертации [3] Джексон рассмотрел наилучшее приближение на различных классах функций и получил асимптотические оценки величины $E_n(f)$. Кроме того им были получены неравенства вида

$$E_n(f) \le C\omega(f,\, h_n).$$

Аналогичные неравенства с модулями непрерывности произвольного порядка в различных задачах аппроксимации принято называть неравенствами типа Джексона. Сегодня результаты такого типа получены для многих пространств функций и приближающих классов, но точные константы в них известны далеко не всегда. С историей и современным состоянием теории неравенств типа Джексона можно ознакомиться в обзорных статьях [9, 12].

Тема второй главы связана с одной стороны с вопросом о точном значении константы в неравенстве

$$E_n(f) \le C_r(\gamma)\ \omega_{2r}\left(f,\, \frac{\gamma\pi}{n}\right),$$

где $f \in C$. Результаты в этом направлении, полученные в [2], позже были улучшены в [9].

С другой стороны, в теории приближения известен следующий результат для старших модулей непрерывности:

$$\sup_{f\in C} \frac{\left\| f - \int\limits_0^1 f(t)\, dt \right\|}{\omega_{2r}(f,\, 1)} = \frac{1}{C_{2r}^r},$$

где точность верхней грани была доказана в [7].

Если рассматривать вместо C пространство F, то, поскольку

$$f - \int\limits_0^1 f(x)\, dx \in F^0,$$

получается, что

$$\sup_{f\in F} \frac{\left\| f - \int\limits_0^1 f(x)\, dx \right\|}{\omega_{2r}(f,\, 1)} = \sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_{2r}(f,\, 1)},$$

то есть соответствующая константа так же является точной для оценки нормы функции из F^0 через её модуль непрерывности степени $2r$. Таким образом, константы J_2^* и W_2^* являются точными в соответствующих классических неравенствах для пространства F в случае $r = 1$.

В [4] Ю. Крякин установил, что

$$\sup_{f \in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_{2r}(f,\,1)} \leq \frac{1 + H_r}{C_{2r}^r},$$

где H_r – гармоническое число, и предположил возможную связь этой задачи с вопросом о порядке величины $C_r(\gamma)$. Так же он связывал эту тематику с константами Уитни [8, 17].

Его оценка была улучшена в [11].

Кроме того, Крякиным было показано, что

$$0.5058 \leq W_2^* \leq 0.6244,$$

и к тому же, что для определения величины W_2^* можно ограничиться рассмотрением функций f, для которых

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f| = \sup_{x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |f|.$$

Аналогичный вопрос касательно $\omega(f,\,1)$ не представляет большого интереса, а именно, легко показать, что

$$\sup_{f \in F^0} \frac{\|f\|}{\omega(f,\,1)} = \frac{1}{2}.$$

Основные результаты. Установлено, что $J_2^* = W_2^*$. При этом удалось значительно сузить область для поиска супремума и улучшить оценку для константы W_2^*, точное значение которой пока остаётся неизвестным. Сужение области поиска осуществляется в несколько этапов. Сперва мы установим, что вместо пространства F можно ограничиться множеством F^*, более того, верна

Теорема 2.1.

$$J_2^* = W_2^* = \sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\,1)} = \frac{1}{\inf\limits_{f \in F^*} \omega_2(f,\,1)}.$$

Заметим, что в периодическом случае $W_2^* = J_2^* = \frac{1}{2}$. Этот результат можно найти в [7, замечание 5].

Следовательно, задача вычисления J_2^* сводится к исследованию поведения величины $\inf\limits_{f\in F_b} \omega_2(f,\,1)$ при $b\ \in\ [0,\,1]$. Нижнюю оценку этой величины даёт

Теорема 2.2. Пусть $f \in F_b$. Тогда

$$q(b) \leq \omega_2(f,\,1).$$

Для верхней оценки мы строим функцию f^* из множества F^* со вторым модулем непрерывности равным $\frac{32}{19}$. Таким образом,

$$1.6721 \leq q(b) \leq \inf_{f\in F^*} \omega_2(f^*,\,1) \leq \frac{32}{19},$$

откуда, согласно теореме 2.1 и замечанию относительно свойств $q(b)$, следует

Теорема 2.3.

$$\frac{19}{32} = 0.59375 \leq J_2^* \leq 0.5981,$$

причём

$$J_2^* = \sup_{b\in[b_0,\,b_1]} \frac{1}{\inf\limits_{f\in F_b} \omega_2(f,\,1)},$$

где точки $\frac{1}{3} < b_0 < b_1 < 1$ являются корнями уравнения

$$q(b) = \frac{32}{19}.$$

Для доказательств разработан метод, заключающийся в последовательном получении неравенств, связывающих средние значения функции с её вторым модулем непрерывности, при помощи методов линейного программирования. Функция f^*, используемая для нижней оценки, строится так, чтобы обратить некоторые из этих неравенств в равенства.

Литература

[1] *Bernstein S.* Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur la calcul des probabilites // Сообщения Харьков. мат. о-ва. сер. 2. 1912. т. 13. № 1. с. 1–2.

[2] *Foucart S., Kryakin Y., Shadrin A.* On the exact constant in Jackson–Stechkin Inequality for the uniform metric // Constructive Approximation. 2009. vol. 29. p. 157–179.

[3] *Jackson D.* Uber die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische summen gegebener Ordnung. Dissertation. Göttingen. 1911.

[4] *Kryakin Yu.* Whitney's theorem for oscillating on $\mathbb{R}$ functions // arXiv:math/0612442v1. 2006.

[5] *Paltanea R.* Approximation theory using positive linear operators. Boston: Birkhäuser. 2004.

[6] *Sikkema P.* Der Wert einer Konstanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein Polynomen // Numerische Mathematik. 1961. vol. 3. p. 107–116.

[7] *Vinogradov O. L., Zhuk V. V.* Sharp estimates for the deviation of the mean value of a periodic function in terms of moduli of continuity of higher order // J. Math. Sci. 2001. vol. 106. p. 2901—2918.

[8] *Whitney H.* On functions with bounded nth differences // J. Mat. Pureet Appl. 1957. vol. 36. p. 67–95.

[9] *Виноградов О. Л., Жук В. В.* Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности и поведение констант в неравенствах типа Джексона // Алгебра и анализ. 2012. т. 24. вып. 5. с. 1–43.

[10] *Виденский В. С.* Работы Л. В. Канторовича о полиномах С. Н. Бернштейна // Вестник СПбГУ. сер. 1. 2013. вып. 2. с. 50–53.

[11] *Виноградов О. Л., Ихсанов Л. Н.* Оценки нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через модули непрерывности высоких порядков // Вестник СПбГУ. сер. 1. 2016. т. 3. вып. 1. с. 8–12.

[12] *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С. Б. Стечкина и их развитие // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. т. 16. № 4. с. 5–17.

[13] *Ихсанов Л. Н.* Оценка нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через второй модуль непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017. т. 456. с. 96–106.

[14] *Ихсанов Л. Н.* Оценка приближения операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2019. т. 480. с. 122–147.

[15] *Ихсанов Л. Н.* Точная оценка приближения абстрактными операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности // Записки научных семинаров ПОМИ. 2020. т. 491. с. 66–93.

[16] *Канторович Л. В.* О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна // ДАН. 1930. №22. с. 595–600.

[17] *Крякин Ю. В.* О точных константах в теореме Уитни // Матем. заметки. 1993. т. 54. вып. 1. с. 34–51.

[18] *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций // — М.–Л. : Гос. изд.-во техн.-теорет. лит. 1949.

[19] *Тихонов И. В., Шерстюков В. Б.* Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестник ЧелГУ. 2012. вып. 15. с. 6–40.

Тезисы конференций

[20] *Ikhsanov L. N.* Estimate of a function orthogonal to piecewise constant ones by the second modulus of continuity // Book of abstracts of the international conference «International Conference on Wavelets and Applications». Saint-Petersburg. 2015.

[21] *Ikhsanov L. N.* On estimation of functions orthogonal to piecewise constant functions by the second modulus of continuity // Book of abstracts of the international conference «Harmonic Analysis and Approximations, VII». Tsaghkadzor. 2018. p. 49.