Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.
Тел./факс (347) 272-59-36, 273-33-42; e-mail: im@matem.anrb.ru

14. 11. 2018, № 17145-6215-160

На №

УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора
Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
д.ф.-м.н. Мусин И.Х.
Мусин 14 ноября 2018 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу Ю.М. Мешковой
"Операторные оценки погрешности в задачах усреднения
дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.03 – математическая физика

Диссертационная работа Ю.М. Мешковой посвящена исследованию вопросов усреднения дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. А именно, рассматривается самосопряженный матричный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, действующий в ограниченной области. Старшая часть оператора задана в факторизованной ("дивергентной") форме, включены члены первого и нулевого порядков. Коэффициенты операторов периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$; при малом ε они быстро осциллируют. Для указанного класса операторов рассматриваются эллиптические и параболические системы. Цель работы — получение аппроксимаций для обобщенной резольвенты и полугруппы описанного оператора в различных операторных нормах. Оценки погрешности в подобных задачах получили название "операторных оценок погрешности" в теории усреднения. Операторные оценки погрешности активно изучались многими авторами (Бирман, Суслина, Жиков, Пастухова, Гризо, Борисов, Кениг, Лин, Шен и др.) в течение последних пятнадцати лет. Использовались различные методы и подходы. В то же время остается много актуальных открытых вопросов в данной области. Так, операторные оценки погрешности при усреднении параболических систем в ограниченной области не были исследованы до появления работ диссертанта.

Диссертация содержит три главы. Для изучения эллиптической задачи в ограниченной области нужно предварительно изучить такую задачу во всем пространстве $\mathbb{R}^d$. Задаче усреднения эллиптических систем во всем пространстве посвящена первая глава. Показано, что обобщенная резольвента самосопряженного матричного оператора второго порядка B_ε с быстро осциллирующими коэффициентами сходится по операторной норме в L_2 к обобщенной резольвенте эффективного оператора B^0 с постоянными коэффициентами. Найдена также аппроксимация с корректором для обобщенной резольвенты оператора B_ε по „энергетической" норме. Установленные оценки погрешности — двухпараметрические: зависят от малого периода и спектрального параметра. При фиксированном значении спектрального параметра оценки имеют точный порядок $O(\varepsilon)$. Ранее подобные оценки для рассматриваемых операторов были известны только в фиксированной регулярной точке. Рассматривается применение общих результатов в операторных терминах к конкретным операторам математической физики: оператору акустики и магнитному оператору Шрёдингера с сильно сингулярным электрическим потенциалом.

Во второй главе изучается задача усреднения для матричного эллиптического оператора $B_{D,\varepsilon}$, заданного прежним дифференциальным выражением и действующего в ограниченной области при условии Дирихле на границе. Показано, что обобщенная резольвента оператора $B_{D,\varepsilon}$ сходится по операторной норме в L_2 к обобщенной резольвенте эффективного оператора. Получена аппроксимация с корректором для обобщенной резольвенты оператора $B_{D,\varepsilon}$ в "энергетической" норме. Установлены двухпараметрические оценки погрешности этих приближений. Оценка по операторной норме в L_2 имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки по „энергетической" норме — $O(\sqrt{\varepsilon})$. Порядок хуже, чем во всем пространстве, что вызвано влиянием погранслоя. Рассматривается применение к операторам акустики и магнитному оператору Шрёдингера. Ранее аналоги результатов главы 2 были известны только для операторов без младших членов.

В третьей главе с помощью операторного аналога формулы Коши для экспоненты из результатов главы 2 выводятся аппроксимации полугруппы, порожденной оператором $B_{D,\varepsilon}$. Показано, что при фиксированном времени t экспонента $\exp(-B_{D,\varepsilon}t)$ сходится по операторной норме в L_2 к экспоненте от эффективного оператора. Получена аппроксимация с корректором для оператора $\exp(-B_{D,\varepsilon}t)$ в "энергетической" норме. Установлены двухпараметрические оценки погрешности в зависимости от ε и времени t. Результаты в операторных терминах применяются к усреднению первой начально-краевой задачи для параболического уравнения. Рассмотрено применение к конкретным операторам математической физики. Ранее операторных оценок погрешности для параболических систем в ограниченной области известно не было. Получение таких оценок можно считать главным достижением диссертации. Подчеркнем, что доказательство результатов главы 3 опирается на результаты первых двух глав.

К диссертации имеется ряд замечаний. Первая серия замечаний относится к оформлению работы.

1. Параграф "Формулировка основных результатов" диссертации, начинающийся на стр. 11, следовало бы писать более детально, как это сделано, например, в автореферате. В предлагаемой версии отсутствуют точные формулировки соответствующих теорем и при отсутствии автореферата читатель вынужден читать весь текст, чтобы найти формулировки основных теорем, расположенные достаточно глубоко внутри каждой из глав.

2. В разделе 1.1.4 на стр. 22 вводятся операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$. Разумеется, обозначения не влияют на содержание математического результата, однако удачные обозначения облегчают его понимание. В связи с чем вопрос: к чему относится индекс $_2$ во втором обозначении? Почему нельзя было заменить его на $_1$ или не обозначить данные операторы через $\mathcal{Y}_0$ и $\mathcal{Y}_1$?

3. На стр. 126, после задачи (3.1), делается ссылка на (1.43), после чего идет представление для функции $\mathbf{s}_\varepsilon$. Совершенно непонятно при чтении, какое отношение имеют условия на матрицу Q_0 из (1.43) к данному представлению. Ясность наступает, если вспомнить о формуле (1.118), которая одновременно определяет функцию f. Считаю, что здесь следовало бы как минимум дополнительно вставить ссылку на (1.118).

Следующая серия замечаний – по существу диссертации.

4. В формулировке теоремы 1 на стр. 10 автореферата, оценки (16), (17) описывают скорость сходимости обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$. При этом последнее слагаемое в определении оператора B_ε – это умножение на матрицу вида λQ_0^ε. Разделение числовой константы $\lambda - \zeta$ при слагаемом Q_0^ε поясняется лишь на стр. 4 автореферата требованием положительной определенности оператора B_ε. Это условие не определяет константу λ однозначно. Поэтому правило выбора константы λ в автореферате следовало бы пояснить более детально.

5. В утверждении теоремы 1 автореферата и аналогичных теорем из раздела 1.4.1 диссертации используется константа $c(\phi)$. Из определения этой константы следует, что она стремится к бесконечности при $\phi \to +0$ и при $\phi \to 2\pi - 0$. Фактически, это ухудшает предъявляемые оценки скорости сходимости в окрестности положительной полуоси. Стоило явно пояснить, с чем связана данная сингулярность этой константы. Судя по всему, ухудшение скорости сходимости вызвано близостью параметра ζ к существенному спектру оператора. Но в тексте

автореферата и диссертации никаких пояснений по этому поводу не дается – считаю, что такое пояснение было бы полезным для понимания полученных результатов. Аналогичное замечание касается и утверждения теоремы 2 в автореферата, где особенность константы в оценке ещё сильнее.

6. В оценках в теореме 4 автореферата и аналогичных теоремах второй главы диссертации вновь присутствует константа $c(\phi)$, которая вновь имеет особенность на положительной полуоси. Здесь уже рассматриваются операторы в ограниченных областях, спектр которых дискретен. С чем теперь связано ухудшение скорости сходимости вблизи положительной полуоси?

7. В связи с приведёнными выше вопросами об особенности констант в основных оценках – если особенность действительно по существу, то является ли её порядок оптимальным (точным)? Или имеются шансы как-то её ослабить?

Отмеченные недостатки не носят принципиального характера и не влияют на общую положительную оценку работы. Представленная диссертация является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием и соответствует специальности 01.01.03 – математическая физика. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. Все выносимые на защиту результаты диссертации являются новыми. Результаты диссертации опубликованы в одном препринте и пяти печатных работах. Из них три статьи в реферируемых журналах, входящих в "Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук", утвержденный ВАК РФ. Все пять статей индексируются в базах данных Web of Science и Scopus. Результаты диссертации докладывались на крупных международных конференциях и ряде научных семинаров. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Содержащиеся в диссертации результаты могут быть использованы специалистами по дифференциальным уравнениям, теории усреднения, математической физике, работающими в Санкт-Петербугском государственном университете, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ УФИЦ РАН.

Диссертация обсуждена на Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики 13 ноября 2018 г. и на заседании отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН 13 ноября 2018 г. Принято решение – одобрить положительный отзыв. Присутствовало на заседании 7 чел. Результаты голосования: "за" – 7 чел., "против" – 0 чел., "воздержалось"

– 0 чел.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация Ю.М. Мешковой соответствует требованиям “Положения о порядке присуждения ученых степеней”, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

И.о. заведующего отделом
дифференциальных уравнений,
ведущий научный сотрудник,
д.ф.-м.н., профессор РАН

Д.И. Борисов

Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Почтовый адрес: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112
Телефоны: 8 (347) 272-59-36, 8 (347) 273-33-42
Email: im@matem.anrb.ru

Подпись Борисова Д.И.
заверяю
Л.Ф. Сабирова

Отдел кадров