Отзыв официального оппонента
о диссертации Волкова Владислава Владимировича
«ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ В
АРИФМЕТИКЕ И АДДИТИВНОЙ КОМБИНАТОРИКЕ»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертационной работе В. В. Волкова исследуются вопросы арифметической геометрии и аддитивной комбинаторики. Первая часть работы посвящена построению явных формул символа Гильберта для класса многочленных формальных групп.

В диссертации рассматривается случай многомерного разнохарактеристического поля K, то есть локального поля нулевой характеристики, такого, что его поле вычетов является локальным полем конечной характеристики. Над его кольцом целых задана некоторая многочленная формальная группа F. Хорошо известно, что любая подобная группа может быть представлена в виде $F(X, Y) = X + Y + cXY$, для некоторого элемента c из K. Для данной формальной группы, с помощью отображения взаимности Паршина-Като (аналогичного отображению взаимности Артина для одномерных локальных полей) можно задать символ Гильберта, спаривающий мультипликативную группу поля с формальным модулем относительно группы F над максимальным идеалом кольца целых. Данный символ, и его построение, находятся в прямом соответствии с классическим символом Гильберта для мультипликативной группы поля. В работе для данного символа дается явная формула типа Востокова. При доказательстве формулы в явном виде проверяются основные свойства символа и, фактически, проводится его независимое от теории полей классов построение. Ранее подобные формулы были получены в широком классе случаев: мультипликативном, групп Любина-Тейта, относительных групп Любина-Тейта, групп Хонды, включая многомерные. Отличительной особенностью случая, рассмотренного в работе, является наличие ветвления в коэффициентах формальной группы.

Вторая часть работы посвящена вопросам обобщений и приложений комбинаторной теоремы о нулях или, другими словами, полиномиального метода в комбинаторике. Данное направление является относительно молодым — первые работы, в которых были заложены его основы, были опубликованы в середине 1990х годов. Тем не менее полиномиальный метод уже нашел свое применение в широком классе задач и продолжает активно развиваться. Ключевым используемым утверждением является комбинаторная теорема о нулях, которая, в своей классической формулировке, гласит, что полином от n переменных P над полем L, степени не выше $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ не может обнуляться на декартовом произведении $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ размера $d_1 \times d_2 \times \ldots \times d_n$, если его коэффициент при мономе $x_1^{d_1 - 1} \ldots x_n^{d_n - 1}$ не равен нулю. Суть метода заключается в переформулировке комбинаторной задачи таким образом, чтобы ее решение соответствовало ненулевому значению некоторого полинома от нескольких переменных и нахождении подобного значения с помощью вышеописанного утверждения. Известно также уточнение данного результата, выражающее коэффициент при мономе $x_1^{d_1-1} \ldots x_n^{d_n-1}$ в виде линейной комбинации значений многочлена P на точках произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

В работе построено два интересных обобщения описанных результатов. Сам метод (включая обобщения) затем применен для решения ряда новых задач и получения нового подхода к уже известным задачам о размерах множеств сумм с ограничениями, получения новой формы неравенства Коши-Дэвенпорта и нового подхода к ряду тождеств, связанных с интегралом Сельберга, включая получение положительного ответа на гипотезу, поставленную Бейкером и Форрестером в 1998 году.

Диссертация В. В. Волкова состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приводятся история рассматриваемых задач, ряд ранее известных результатов, описание структуры дисссертации и формулировки полученных результатов.

В первой главе даются основные определения, приводятся используемые обозначения и перечисляются вспомогательные результаты.

Во второй главе проводится построение явной формулы символа Гильберта относительно многочленной формальной группы F.

В третьей главе доказываются два обобщения комбинаторной теоремы о нулях и рассматриваются ее приложения к вопросам комбинаторики. Первое обобщает комбинаторную теорему о нулях на случай, когда A_i являются мультимножествами (то есть допускают кратности). Данная форма комбинаторной теоремы о нулях находит свое применение в четвертой главе работы. Второе обобщение касается перехода от одномерных множеств A_i к многомерным, при этом размер множества теперь измеряется не количеством точек в нем, а минимальной степенью аффинной гиперплоскости накрывающей данной множество, называемой автором алгебраической сложностью. С помощью данного обобщения на алгебраическую сложность доказывается неравенство, аналогичное неравенству Коши-Дэвенпорта. Отмечено также, что понятие алгебраической сложности активно изучалось другими авторами в случае поля характеристики два, где носило название алгебраической иммунности. В конце главы рассматривается ряд задач оценки размера множества $\hat{}_S A_i = \{a_1 + a_2 + \ldots + a_n \mid a_i$ из A_i , $a_i - a_j$ не из $S_{ij}\}$. С помощью полиномиального метода, в едином стиле, подтверждаются известные результаты данного направления и приводится один новый результат.

В четвертой главе полиномиальный метод применяется к задачам о нахождении свободных членов некоторых полиномов Лорана, тесно связанных с интегральной формулой Сельберга. Данные задачи были поставлены в связи с вопросами теоретической физики и теории случайных матриц, как одна из возможных формулировок вопроса о нахождении некоего нормирующего фактора. Полиномиальный метод успешно применяется в данной главе для доказательства известных соотношений Дайсона, Морриса, Аомото и их qверсий, а также для получения положительного ответа на гипотезу Бейкера и Форрестера и её q-версию. Более того, соотношение Форрестера удается объединить с соотношением Аомото и именно в этой, более общей форме, проводится доказательство.

В заключении приводится обзор полученных результатов и ставится ряд вопросов, описывающих возможные направления для дальнейших исследований.

К диссертации В. В. Волкова имеются следующие замечания:

Работа содержит довольно много опечаток, список литературы оформлен несколько бессистемно. Это, однако, не мешает пониманию содержания, и не умаляет значения полученных результатов.

Диссертация носит теоретический характер. Она посвящена актуальным вопросам, и полученные в ней результаты представляют несомненный интерес для специалистов. Они могут быть использованы в МИАН, НИУ ВШЭ и включены в спецкурсы, читаемые в МГУ и ННГУ им. Лобачевского.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они снабжены подробными доказательствами, и их достоверность не вызывает сомнений.

Результаты диссертации опубликованы в пяти работах в изданиях, входящих в список ВАК (российских и зарубежных). Все работы написаны в соавторстве, но везде четко описана роль каждого из соавторов. Результаты диссертации докладывались на ведущих семинарах и конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Содержание диссертационного исследования соответствует специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел и полностью соответствует требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Волков Владислав Владимирович, безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

В. н. с. Института информационных технологий НИЦ «Курчатовский институт» (123182, Москва, пл. Академика Курчатова, 1),

д. ф. м. н., специальность 01,01,06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, Кузьмин Кузьмин Леонид Викторович,

e-mail: lvrkuzmin@mail.ru, тел. (499) 196-77-36, 8-917-533-25-76.

Подпись Л.В. Кузьмина заверяю
Главный ученый секретарь НИЦ
«Курчатовский институт», к. ф. м. н. С.Ю. Стремоухов

17.02.17