На правах рукописи

ГЛАДКАЯ Анна Владимировна

# Экстремальные задачи теории приближения целыми функциями конечной степени и сплайнами

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2016

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель:

ВИНОГРАДОВ Олег Леонидович
доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математического анализа математико-механического факультета ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

БУДАЕВ Виктор Дмитриевич
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, декан факультета математики ФГБОУ ВО «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

КЕЛЬЗОН Андрей Анатольевич
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент ФГБОУ ВО «Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»
Защита состоится «____» ________ 2016 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» (ПОМИ РАН): 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН ПОМИ РАН, http://www.pdmi.ras.ru

Автореферат разослан «____» ________ 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

# Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Работа посвящена обобщению классических результатов П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля с весом, на целые функции экспоненциального типа и установлению некоторых неравенств типа Ахиезера–Крейна–Фавара и типа Джексона теории приближения сплайнами. Экстремальные задачи играют важную роль как в самой теории аппроксимации, так и в ее приложениях.

**Цель и результаты работы.** Целью диссертации является распространение некоторых точных неравенств теории приближений, связанных с периодического на непериодический случай. Таким образом, в равномерной метрике результаты для периодических функций становятся частными случаями задач на оси.

В диссертации получены аналоги классических результатов П. Л. Чебышева и С. Н. Бернштейна о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля с весом, для целых функций экспоненциального типа, а именно: построение целых функций конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля в классе Картрайт в равномерной и интегральной метриках с весом. Следующий результат работы состоит в построении линейных операторов со значениями в пространстве непериодических сплайнов минимального дефекта — аналогов сумм Ахиезера–Крейна–Фавара. С помощью построенных операторов устанавливается возможность реализации верхних граней в неравенстве типа Ахиезера–Крейна–Фавара линейными методами приближения, ранее остававшаяся неизвестной. Кроме того, получены неравенства типа Джексона с явными константами для первого модуля непрерывности производной и старших модулей непрерывности самой функции.

**Методы исследования.** В диссертации использованы методы вещественного, комплексного и функционального анализа, теории приближения функций и теории экстремальных задач.

**Научная новизна.** Все основные результаты работы являются новыми. К наиболее существенным положениям диссертационной работы можно отнести следующие:

· построены целые функции конечной степени, наименее уклоняющиеся от нуля в классе Картрайт в равномерной и интегральной метриках с весом;

· построены сплайновые аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара и с их помощью получены точные неравенства типа Джексона для приближений непериодическими сплайнами.

**Теоретическая и практическая ценность.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны при решении родственных задач теории приближений.

**Апробация результатов.** Результаты работы докладывались на международных конференциях «Comlex analysis & related topics» (Санкт-Петербург, 2014 г.), «Wavelets and Applications» (Санкт-Петербург, 2015 г.), на городском семинаре по конструктивной теории функций под руководством проф. М. А. Скопиной.

**Публикации по теме диссертации.** Основные результаты диссертации изложены в пяти печатных изданиях: в трех статьях, опубликованных в журналах, входящих в список ВАК ([1], [2], [3]), в двух сборниках тезисов докладов ([4], [5]).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 95 страниц. Список литературы содержит 47 наименований.

# Основное содержание диссертации.

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, изложены известные результаты по рассматриваемым задачам, сформулированы основные результаты.

**Глава 1. Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной метриках с весом.** Первая глава посвящена приближениям целыми функциями конечной степени из класса Картрайт. Результаты этой главы опубликованы в [1] и [2].

Сначала напомним классические результаты для тригонометрических полиномов. П. Л. Чебышевым была решена задача о нахождении полинома степени $n$ с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющегося от нуля в равномерной метрике, в том числе, в некоторых весовых пространствах.

Возьмем весовую функцию $\omega(x) = 1/\rho_m(x)$, где $\rho_m$ — алгебраический полином степени $m$, положительный на $[-1, 1]$, с единичным старшим коэффициентом. Пусть $n > m$. Положим $z = e^{i\varphi},\ x = \cos\varphi$,

$$T_n(x) = \operatorname{Re}\left\{z^{-n} g_m^2(z)\right\},$$

где $g_m$ — полином степени $m$ с корнями вне круга $|z| \leqslant 1$, такой что $|g_m(e^{i\varphi})|^2 = \rho_m(\cos\varphi)$ при $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда $T_n$ является экстремальным в задаче нахождения

$$\min_{a_i} \max_{x\in[-1,1]} |(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)\omega(x)|.$$

В случае $\omega(x) \equiv 1$ решением поставленной задачи будут многочлены Чебышева первого рода $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$. Этот результат и его аналоги в интегральной метрике вошли в книгу Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации», там же описана история вопроса.

В первой главе получены аналоги этих результатов для целых функций экспоненциального типа. Построены функции, наименее уклоняющиеся от нуля в весовых пространствах на вещественной оси. Эти функции обобщают многочлены Чебышева первого и второго рода.

В §3 рассмотрена задача в равномерной метрике.

**Определение.** Целыми функциями класса Картрайт (класс $\mathcal{C}$) будем называть целые функции экспоненциального типа, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2} dt < \infty.$$

Пусть даны функция $\rho_m$ класса $\mathcal{C}$, степени $m$ ($m \in \mathbb{N}$), положительная на вещественной оси, и число $\sigma \geqslant m$. Найдем целые функции степени $\sigma$, строго наименее уклоняющиеся от нуля в классе $\mathcal{C}$ с весами $1/\rho_m$ и $|\cdot|/\rho_m$ в равномерной метрике. Наименьшее уклонение понимается в следующем смысле.

**Определение.** Пусть $f$ — целая функция степени $\sigma > 0$. Будем говорить, что функция $f$ строго наименее уклоняется от нуля в классе $\mathcal{C}$ с весом $\omega$ в равномерной метрике, если не существует целой функции $Q$ класса $\mathcal{C}$ степени меньше $\sigma$, не равной нулю тождественно, такой что

$$\sup_{\mathbb{R}} |(f-Q)\,\omega| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,.$$

Другими словами, это значит, что для функции $f$ элементом наилучшего приближения среди функций степени меньше $\sigma$, принадлежащих классу $\mathcal{C}$, является тождественный ноль:

$$\inf_{Q\in\mathcal{C}\cap\mathbf{E}_{\sigma-0}} \sup_{\mathbb{R}} \big|(f-Q)\,\omega\big| = \sup_{\mathbb{R}} |f\omega|\,,$$

где $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ — пространство целых функций степени меньше $\sigma$. Более того, элемент наилучшего приближения единственен.

Для четного веса $1/\rho_m$ эта задача решена в [1]. Остальные результаты были получены в [2].

Для решения задачи построены две целые функции $f_\sigma$ и $F_\sigma$

$$f_\sigma(z) = \frac{1}{2}\left(G^*(z)+G(z)\right), \qquad F_\sigma(z) = \frac{1}{2iz}\left(G^*(z)-G(z)\right),$$

где функция $g_m(z)$ такая, что $\rho_m(x) = |g_m(x)|^2$, $G(z) = e^{-i\sigma z} g_m^2(z)$, а операция $^*$ определяется равенством $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

Основными результатами в §3 являются следующие теоремы.

**Теорема 1.2.** *Для любой целой функции $Q$ класса $\mathcal{C}$, отличной от тождественного нуля, степени меньшей $\sigma$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{f_\sigma - Q}{\rho_m}\right| > \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{f_\sigma}{\rho_m}\right|.$$

Таким образом, построенная функция $f_\sigma$ строго наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $1/\rho_m$.

**Теорема 1.3.** *Для любой целой функции $Q$ класса $\mathcal{C}$, отличной от тождественного нуля, степени меньшей $\sigma$ выполняется неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\left(F_\sigma(x) - Q(x)\right)\frac{x}{\rho_m(x)}\right| > \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|F_\sigma(x)\frac{x}{\rho_m(x)}\right|.$$

Следовательно, построенная функция $F_\sigma$ строго наименее уклоняется от нуля в равномерной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

В §4 рассмотрена задача в интегральной метрике. Наименьшее уклонение понимается в следующем смысле.

**Определение.** Пусть $f$ — целая функция степени $\sigma > 0$. Говорят, что функция $f$ наименее уклоняется от нуля с весом $\omega$ в интегральной метрике, если не существует целой функции $Q$ степени меньше $\sigma$, суммируемой на оси с весом $\omega$, такой что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|f - Q| - |f|)\, \omega < 0.$$

**Замечание 1.6.** Суммируемость функции $f$ с весом $\omega$ при этом не обязательна в силу очевидного неравенства

$$\big||f - Q| - |f|\big| \leqslant |Q|,$$

однако в случае суммируемости это определение совпадает с классическим.

Основными результатами в §4 являются следующие теоремы.

**Теорема 1.6.** *Для любой целой функции $k_\alpha$ степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на оси с весом $1/\rho_m$, выполняется неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f_\sigma - k_\alpha| - |f_\sigma|}{\rho_m} \geqslant 0.$$

*Если $m < \sigma$ или $\alpha < \sigma$, то для ненулевой функции $k_\alpha$ неравенство строгое.*

Таким образом, функция $f_\sigma$ наименее уклоняется от нуля в интегральной метрике с весом $1/\rho_m$.

**Теорема 1.7.** *Для любой целой функции $l_\alpha$ степени $\alpha \leqslant \sigma$, суммируемой на вещественной оси с весом $|\cdot|/\rho_m$, выполнено равенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} F_\sigma(x) l_\alpha(x) \frac{|x|\, dx}{\rho_m(x)} = 0.$$

Таким образом, функция $F_\sigma$ наименее уклоняется от нуля в интегральной метрике с весом $|\cdot|/\rho_m$.

**Глава 2. Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера–Крейна–Фавара.** Вторая глава посвящена приближениям непериодическими сплайнами и содержит результаты, опубликованные в [3]. Всюду далее $n, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$; $C$, $L_p$, $W_p^{(r)}$ — пространства $2\pi$-периодических функций; $L_p(\mathbb{R})$, $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ — пространства функций, заданных на оси. Через $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ ($m \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$) будем обозначать пространство сплайнов порядка $m$ минимального дефекта с узлами $\frac{j\pi}{\sigma}$ ($j \in \mathbb{Z}$); через $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ ($n \in \mathbb{N}$) — пространство $2\pi$-периодических сплайнов из $\mathbf{S}_{n,m}$. Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции $f$ пространством тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$ в пространстве $L_p$; через $E_{n,m}(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f$ множеством $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ в пространстве $L_p$; через $A_{\sigma,m}(f)_p$ обозначим наилучшее приближение $f$ множеством $\mathbf{S}_{\sigma,m}$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$.

В §1 приведены известные результаты о полиномах, целых функциях и периодических и непериодических сплайнах.

В 1937 году Ж. Фавар, а также Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн построили линейный метод приближения $\mathcal{X}_{n,r}$ со значениями в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, такой что для любой $f \in W_\infty^{(r)}$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\|f^{(r)}\|_\infty, \tag{1}$$

где $\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$) — константы Фавара, и доказали, что константу $\mathcal{K}_r$ уменьшить нельзя, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение, то есть

$$\sup_{f\in W_\infty^{(r)}} \frac{E_n(f)_\infty}{\|f^{(r)}\|_\infty} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{2}$$

Операторы $\mathcal{X}_{n,r}$ называют операторами или суммами Ахиезера–Крейна–Фавара, а неравенства, в которых приближение функции оценивается через норму (полунорму) производной, производной сопряженной функции и т.п., будем называть неравенствами типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Впоследствии аналоги соотношений (1) и (2) были установлены для многих классов сверток периодических и непериодических функций. С. М. Никольский распространил (1) и (2) на случай нормы в пространстве $L_1$.

М. Г. Крейн получил аналоги соотношения (2) для приближения целыми функциями конечной степени классов функций из $W_\infty^{(r)}(\mathbb{R})$, определяемых дифференциальными операторами, а Б. Надь построил линейный оператор $\mathcal{X}_{\sigma,r}$ со значениями в пространстве целых функций степени не выше $\sigma$, для отклонения которого справедлива такая же оценка

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r}(f)\|_\infty \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_\infty. \tag{3}$$

При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ операторы из формул (1) и (3) совпадают на $2\pi$-периодических функциях и потому обозначаются одинаково. Эти результаты вошли в книгу «Лекции по теории аппроксимации» Н. И. Ахиезера, где оценки сверху распространены на пространства $L_p(\mathbb{R})$ и $L_p$.

Для приближения периодических функций сплайнами минимального дефекта известны следующие точные соотношения типа Ахиезера–Крейна–Фавара. Пусть $m \geqslant r-1$, $p = 1, \infty$. Тогда

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}} \frac{E_{n,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{4}$$

Полагаем

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 0, & m \text{ нечетно}, \\ \frac{\pi}{2\sigma}, & m \text{ четно}. \end{cases}$$

Пусть $\gamma \geqslant 0$, функция $f$ задана на $\mathbb{R}$ и $f(x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. Обозначим через $\xi_{\sigma,m}(f)$ сплайн из $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, интерполирующий $f$ в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_m$ ($k \in \mathbb{Z}$) и такой, что $\xi_{\sigma,m}(f,x) = O(|x|^\gamma)$ при $x \to \infty$. При $m = r-1$ константа в (4) реализуется линейным проектором, а именно, с помощью интерполяционного сплайна:

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}} \frac{\|f - \xi_{n,r-1}(f)\|_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}. \tag{5}$$

А. А. Лигун доказал существование линейного оператора из $C$ в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$, реализующего константу в соотношении (4) при $m \geqslant r$, $p = \infty$ (явный вид этого оператора в его работе отсутствует). О. Л. Виноградов построил при $m \geqslant r$ линейные операторы $\mathcal{X}_{n,r,m}$ со значениями в $\widetilde{\mathbf{S}}_{n,m}$ (аналоги сумм Ахиезера–Крейна–Фавара), реализующие константу в соотношении (4) для всех $p \in [1, \infty]$ и $f \in W_p^{(r)}$.

Для приближений непериодическими сплайнами функций из $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ Сунь Юншен и Ли Чунь и независимо Г. Г. Магарил-Ильяев установили аналог соотношения (4) в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ при $m \geqslant r-1$, $p \in \{1, \infty\}$

$$\sup_{f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{A_{\sigma,m}(f)_p}{\|f^{(r)}\|_p} = \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r}. \tag{6}$$

Как и в периодическом случае, при $m = r-1$ соотношение (6) реализуется интерполяционными сплайнами, что было ранее доказано И. Шенбергом и К. де Бором.

В §3 при $m \geqslant r$ строятся линейные операторы $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ со значениями в $\mathbf{S}_{\sigma,m}$, с помощью которых устанавливается возможность реализации верхних граней в (6) линейными методами приближения, ранее остававшаяся неизвестной. При $\sigma = n \in \mathbb{N}$ построенный оператор совпадает на $2\pi$-периодических функциях с периодическим предшественником, и потому их можно обозначить одинаково.

Главным результатом этой главы является неравенство типа Ахиезера–Крейна–Фавара.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $p \in [1, \infty]$, $f \in W_{1,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$, $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r,m}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} \|f^{(r)}\|_p.$$

*При $p = 1, \infty$ неравенство точное, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение.*

**Следствие 2.1.** *В условиях теоремы 2.1*

$$A_{\sigma,m}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} A_{\sigma,m-r}(f^{(r)})_p.$$

В периодическом случае аналог следствия 2.1 для приближений тригонометрическими многочленами установил Сунь Юншен, для приближений сплайнами — Н. П. Корнейчук.

**Глава 3. Неравенства типа Джексона для приближений сплайнами.** В третьей главе получены неравенства типа Джексона. Неравенствами типа Джексона в теории приближений принято называть неравенства, в которых приближение функции оценивается посредством модуля непрерывности (самой функции, ее производной и т.п.). Будем обозначать через $\omega_r\left(f, h\right)_p$

модуль непрерывности порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции $f$ с шагом $h$ относительно нормы в $L_p$:

$$\omega_r\left(f, h\right)_p = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} \|\delta_t^r(f)\|_p,$$

где $\delta_t^r$ означает центральную разность порядка $r$ с шагом $t$.

Первым такое неравенство

$$E_n(f)_\infty \leqslant C(\gamma)\omega_1\left(f, \frac{\gamma}{n}\right)_\infty$$

для приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими многочленами и модуля непрерывности первого порядка получил Д. Джексон в 1911 году.

Первое точное неравенство типа Джексона установил Н. П. Корнейчук, который доказал, что для любых вещественнозначных функций $f$ из $C$ и $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(f)_\infty \leqslant 1 \cdot \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_\infty,$$

причем константа 1 точная при всех $n$ в совокупности, то есть

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{f\in C} \frac{E_n(f)_\infty}{\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_\infty} = 1.$$

Для нечетных $r$ В. В. Жуком ($r = 1$) и А. А. Лигуном ($r > 1$) было установлено неравенство типа Джексона в пространствах $L_p$

$$\|f - \mathcal{X}_{n,r}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_p$$

для любой $f \in C^{(r)}$, точное при $p = 1, \infty$. Позже В. В. Жук установил усиление этого неравенства, а также аналогичные неравенства для ряда полунорм. А. Ю. Громов доказал для нечетных $r$ неравенство

$$\|f - \mathcal{X}_{\sigma,r}(f)\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p$$

для приближений целыми функциями конечной степени, точное при $p = 1, \infty$.

В §2 по схеме В. В. Жука и А. А. Лигуна получено усиление неравенства Ахиезера–Крейна–Фавара. Здесь и далее $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ при $m \geqslant r$ суть построенные во второй главе операторы, а при $m = r - 1$ это сплайн, интерполирующий $f$ в точках $\frac{k\pi}{\sigma} + \varepsilon_m$.

Далее через $S_h^r(f)$ обозначена функция Стеклова порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции $f$:

$$S_h^0(f) = f, \quad S_h^1(f, x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)dt, \quad S_h^r(f) = S_h^1(S_h^{r-1}(f));$$

через $\mathsf{B}_r(\cdot)$ — многочлены Бернулли, определяемые равенством

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mathsf{B}_r(x)}{r!}, \quad |z| < 2\pi.$$

**Теорема 3.1.** *Пусть $\sigma > 0$, $m, r \in \mathbb{N}$, $m \geqslant r$, $h > 0$, $f \in W_p^{(r)}(\mathbb{R})$, $p \in [1, \infty]$. Построим оператор*

$$U_{\sigma,r,h}f = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l}}{(2l)!}\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\mathcal{X}_{\sigma,r+1-2l,m}S_h^1 f^{(2l)}.$$

*Тогда*

$$\|f - U_{\sigma,r,h}f\|_p \leqslant \left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \frac{h^{2l-1}}{(2l)!}\Big|\mathsf{B}_{2l}\left(\frac{1}{2}\right)\Big| \cdot \frac{\mathcal{K}_{r+1-2l}}{\sigma^{r+1-2l}}\right)\omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p +$$

$$+ \frac{2h^r}{r!}\int\limits_0^{1/2}\Big|\mathsf{B}_r(\tau) - \mathsf{B}_r(1/2)\Big|d\tau \cdot \|f^{(r)}\|_p.$$

*Кроме того, при нечетном $r$ верно*

$$\|f - U_{\sigma,r,h}f\|_p \leqslant h^r\left(\frac{A_{r,0}}{2} + \sum_{l=0}^{r-1}|\gamma_l|\frac{\mathcal{K}_{r+1-l}}{(\sigma h)^{r+1-l}}\right)\omega_1\left(f^{(r)}, h\right)_p,$$

*где*

$$A_{r,0} = \frac{2}{r!}\int\limits_0^{1/2}\left|\mathsf{B}_r(t) - \mathsf{B}_r\left(\frac{1}{2}\right)\right|dt, \qquad \gamma_k = \frac{\mathsf{B}_k\left(\frac{1}{2}\right)}{k!}.$$

*При $h = \frac{\pi}{\sigma}$, $p = 1, \infty$ неравенство точное, а при $m \geqslant r + 1$ операторы $U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}}$ и $\mathcal{X}_{\sigma,r,m}$ совпадают.*

**Замечание 3.2.** Таким образом, при $h = \frac{\pi}{\sigma}$ и $p = 1, \infty$ получается точное неравенство

$$\|f - U_{\sigma,r,\frac{\pi}{\sigma}} f\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{2\sigma^r}\omega_1\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right)_p.$$

§3 посвящен неравенствам для старших модулей непрерывности. Задача о константах в неравенствах типа Джексона для старших модулей непрерывности труднее, чем для первого модуля непрерывности. В 2009 году С. Фукар, Ю. Крякин и А. Шадрин предложили новый способ получения неравенств типа Джексона, позволяющий улучшить константы. Этот способ был развит и улучшен О. Л. Виноградовым и В. В. Жуком. В этом параграфе, следуя предложенной ими схеме, получены некоторые оценки через старшие модули непрерывности.

Рассмотрим линейные комбинации средних Стеклова

$$U_{h,k} = \frac{2}{C_{2k}^k}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}C_{2k}^{k-j}S_{jh}^2,$$

отметим, что $U_{h,1} = S_h^2$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $\sigma > 0$, $r, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2r - 1$, $p \in [1, \infty]$,*

$$Y_{\sigma,r,m,h} = \sum_{k=1}^{r-1}\mathcal{X}_{\sigma,2k,m}U_{h,r}^k(I - U_{h,r}) + \mathcal{X}_{\sigma,2r,m}U_{h,r}^r.$$

*Тогда для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$*

$$\|f - Y_{\sigma,r,m,h} f\|_p \leqslant \left\{\frac{1}{C_{2m}^m}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\mathcal{K}_{2k}}{(\sigma h)^{2k}}\nu_r^k + \frac{\mathcal{K}_{2r}}{(\sigma h)^{2r}}\frac{\nu_r^r}{2^{2r}}\right\}\omega_{2r}(f, h)_p.$$

Здесь

$$\nu_r = \frac{8}{C_{2m}^m}\sum_{l=0}^{\lfloor (r-1)/2\rfloor}\frac{C_{2r}^{r-2l-1}}{(2l+1)^2}.$$

Отметим, что $\nu_k$ не зависит от $h$, что и отражено в обозначении.

Тем самым, получены явные константы в неравенствах типа Джексона для сплайнового приближения на прямой. Константы совпадают с константами в периодическом случае.

**Замечание 3.6.** Неравенство для второго модуля непрерывности при шаге равном $\frac{\pi}{2\sigma}$ принимает следующий вид:

$$\|f - Y_{\sigma,1,m,\frac{\pi}{2\sigma}} S^2_{\frac{\pi}{2\sigma}} f\|_p \leqslant 1 \cdot \omega_2 \left(f, \frac{\pi}{2\sigma}\right)_p .$$

При $p = \infty$ константу 1 нельзя уменьшить для всех $\sigma$ одновременно, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение пространством $\mathbf{S}_{\sigma,m}$. Точность неравенства на классе периодических функций известна.

# Публикации автора по теме диссертации


[1] А. В. Гладкая. *Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной метрике с весом.* Зап. научн. сем. ПОМИ 416 (2013), 98–107.

[2] О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая. *Целые функции, наименее уклоняющиеся от нуля в равномерной и интегральной метриках с весом.* Алгебра и анализ 26:6 (2014), 10–28.

[3] О. Л. Виноградов, А. В. Гладкая. *Непериодический сплайновый аналог операторов Ахиезера–Крейна–Фавара.* Зап. научн. сем. ПОМИ 440 (2015), 8–35.

[4] A. V. Gladkaya, O. L. Vinogradov. *Entire functions of exponential type deviating least from zero with a weight.* Abstracts of the international conference «Comlex analysis & related topics», April 14–18, 2014, St. Petersburg, 13, С.-Петербург (2014).

[5] A. V. Gladkaya, O. L. Vinogradov. *The analogue of the Akhiezer–Krein–Favard operators for non-periodic splines.* Abstracts of the international conference «Wavelets and Applications», June 18–23, 2015, St. Petersburg, 26–27, изд. ВВМ, С.-Петербург (2015).