

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук



На правах рукописи

Иванов Александр Валентинович

**Коэффициенты Сили—деВитта: диаграммная техника,
нерекурсивная формула, интеграл по путям и теорема
Атьи—Зингера—Патоди для многообразия с доменными
стенками**

Специальность 01.01.03 — «Математическая физика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Деркачёв Сергей Эдуардович

Санкт-Петербург — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Нековариантное разложение теплового ядра	19
1.1 Постановка задачи	19
1.2 Коэффициенты Сили—деВитта	20
1.3 Упорядоченная экспонента и ее свойства	21
1.4 Система интегральных уравнений	22
1.5 Формулы дифференцирования упорядоченной экспоненты	24
1.6 Диаграмматика теплового ядра	25
1.6.1 Мотивировка	25
1.6.2 Определения базовых элементов	25
1.6.3 Пример использования диаграммной техники	27
1.6.4 Теорема о дифференцировании диаграммы	29
1.6.5 Дополнительные примеры	33
1.7 Алгебраический подход	34
1.7.1 Мотивировка	34
1.7.2 Определения операторов	35
1.7.3 Свойства операторов	37
1.7.4 Нерекурсивная формула для коэффициентов	39
1.7.5 Пример: третий диагональный элемент	41
1.8 Обратная упорядоченная экспонента	42
Глава 2. Ковариантное разложение теплового ядра	45
2.1 Определение	45
2.2 Калибровка Фока—Швингера	46
2.3 Рекуррентная система в калибровке Фока—Швингера	47
2.4 Вторая нерекурсивная формула	48
2.5 Примеры вычислений	52
2.6 Обобщение второй нерекурсивной формулы	53
2.6.1 Формулировка результата и доказательство	53
2.6.2 Случай римановой метрики	56

	Стр.	
2.7	Связь с континуальным представлением	58
2.7.1	Задача Штурма—Лиувилля	59
2.7.2	Основные обозначения	59
2.7.3	Экспоненциальная формула	60
2.7.4	Интеграл по путям	64
2.8	Зависимость от калибровочного условия	67
Глава 3. Теорема Атьи—Зингера—Патоли для доменных стенок		69
3.1	Постановка задачи и формулировка результата	69
3.2	Случай прямого произведения около Σ	75
3.3	Случай общего положения около Σ	81
3.4	Инвариантность индекса в случае прямого произведения	84
3.4.1	Общие соображения	84
3.4.2	Формулировка леммы и доказательство	85
3.4.3	Следствие инвариантности индекса	89
3.5	Инвариантность индекса в общем случае	90
3.5.1	Мотивировка	90
3.5.2	Формулировка результата и доказательство	91
3.6	Альтернативный подход в случае прямого произведения	95
3.7	Обобщение теоремы об индексе	97
3.7.1	Мотивировка	97
3.7.2	Формулировка результатов	98
3.7.3	Вспомогательная лемма	102
Заключение		104
Список литературы		106
Публикации автора по теме диссертации		114
Список рисунков		115

Введение

Метод собственного времени развивается на протяжении более чем восьмидесяти лет и на сегодняшний день является широко используемым инструментом в теоретической и математической физике. Основную идею метода можно сформулировать следующим образом. Пусть \mathcal{B} — некоторый дифференциальный оператор. Предположим, что нам необходимо найти обратный к нему оператор \mathcal{G} , который является решением уравнения $\mathcal{B}\mathcal{G} = \mathbf{1}$. В этом случае можно перейти к рассмотрению вспомогательной задачи вида

$$(\partial_\tau + \mathcal{B})\mathcal{K}(\tau) = 0, \quad \mathcal{K}(0) = \mathbf{1}, \quad (1)$$

где переменная τ называется собственным временем. Тогда обратный оператор \mathcal{G} получается из $\mathcal{K}(\tau)$ простым интегрированием по переменной τ . Возникает естественный вопрос: зачем усложнять задачу и переходить к уравнению (1)? Дело в том, что функцию $\mathcal{K}(\tau)$ можно раскладывать около некоторого вспомогательного решения и искать ответ в виде ряда по степеням собственного времени. Такая процедура позволяет находить асимптотическое разложение для обратного оператора \mathcal{G} .

Впервые данный подход был предложен В. А. Фоком в работе [1] (или см. сборник трудов [2]) в 1937 году. В этой статье автор предложил введение собственного времени в уравнение Дирака с последующим его интегрированием. Такая процедура давала возможность найти приближенное решение и, по сути, являлась обобщением и упрощением результата Паули [3], полученного после применения метода Вентцеля—Бриллуэна. Лишь спустя 15 лет, после формулировки квантовой теории поля в ковариантном виде, метод собственного времени появился в работах Намбу, при построении функции Грина для уравнения Дирака [4], и Швингера, при исследовании калибровочной инвариантности и поляризации вакуума [5]. С тех пор подход стал активно использоваться в теоретической физике.

Следующим важным этапом в развитии метода стали работы деВитта [6—10], в которых были рассмотрены квантовые поправки в искривленном пространстве-времени, а также работы Сили [11—13], по исследованию краевых задач, и Гилки [14], по спектральной геометрии. Эти работы перевели метод на

качественно новый уровень, поскольку в них появилось математическое описание в терминах теории расслоений и спектральной геометрии. В частности, авторы изучали асимптотическое разложение фундаментального решения \mathcal{G} для оператора второго порядка. В этом случае задача (1) редуцируется к уравнению теплопроводности, а решение $\mathcal{K}(\tau)$ называется тепловым ядром.

Другими примерами использования подхода в теоретической физике могут послужить изучение эффекта Казимира (см. [15–18]), исследование аномалий киральных калибровочных теорий [19], вывод аномальных киральных тождеств Уорда—Такахаша [20], анализ квантовой электродинамики и низкоэнергетической хромодинамики [21; 22], подсчет первой поправки [23] для энтропии черной дыры, нахождение фермионного определителя в “мешке” [24], перенормировка квантовой теории Янга—Миллса в формализме фонового поля в двух и трех петлях [25; 26], а также многие другие эффекты квантовых и квази-классических теорий.

Благодаря появлению в теоретической физике функционального интегрирования [27] и понятия диаграмм Фейнмана [28] многие математические объекты приобрели ясный физический смысл. В частности, данный подход нашел свое применение в теории теплового ядра [29–31]. Как известно, работа с континуальным интегралом требует определения детерминанта оператора, однако в большинстве примеров такие величины расходятся. В этом случае придать ясность математическим объектам можно при помощи определения квази-интеграла на бесконечномерном пространстве [32; A1], или же путем введения регуляризации посредством аналитического продолжения дзета-функции [33; 34].

Основной интерес математиков к тепловому ядру появился благодаря теореме об индексе [35], которая впервые была доказана в работе Атьи и Зингера [36] в 1963 году. Она позволила связать спектральные характеристики дифференциального оператора с топологическими характеристиками многообразия. Спустя несколько лет в статье Атьи и Ботта (см. [37; 38]) был предложен аналитический подход к доказательству, который основывался на том факте, что индекс может быть представлен разностью двух дзета-функций. Такие функции, имеющие прямое отношение к тепловому ядру, впервые появились при работе с оператором Лапласа—Бельтрами [39], а затем обобщены Сили [13]. После выхода статьи Патоди [40], в которой были показаны некоторые сокращения, связь теоремы об индексе и асимптотического разложения теплового

ядра стала активно использоваться при доказательствах [41], что имеет тенденцию и по сей день.

Теорема Атьи—Зингера—Патоуди об индексе [42] устанавливает равенство между индексом оператора Дирака на многообразии с границей, интегралом от плотности Понтрягина по внутренности многообразия и η -инвариантом для вспомогательного оператора Дирака на границе. Такое соотношение весьма примечательно с точки зрения теоретической физики, поскольку плотность Понтрягина является локальной аксиальной аномалией (см. [43; 44]) и выражается через коэффициенты асимптотического разложения теплового ядра, в то время как η -инвариант можно использовать для определения аномалии четности [45—47].

Соотношения между аномалиями на границе и внутри объема активно изучаются в настоящее время в контексте механизма “аномальных токов” [48]. Также теорема об индексе была использована в рамках квантовой теории поля [49] при обсуждении топологических фаз в фермионном интеграле по траекториям.

Несмотря на то, что теорема об индексе стала применяться в контексте квантовой теории поля вскоре после выхода оригинальной статьи (см. [50]), использование ее было ограничено нелокальной природой граничных условий. Однако, в более поздних работах использование нелокальных граничных условий стало ненужным. Так, в статье [48] изучалась теорема об индексе с локальными условиями на границе. Граничные же вклады в аномалию четности были посчитаны в работах [51; 52] также и для локальных условий.

В качестве дополнительных примеров использования теплового ядра в математике можно привести изучение спектральной плотности оператора Клейна—Гордона [14], а также задачу с доменными стенками [53]. Однако применение в математической физике не исчерпывается вышеупомянутыми случаями и может быть дополнено такими приложениями, как вывод асимптотических формул для спектральной геометрии [54], исследование сингулярного потенциала [55; 56], который ранее возникал в работе [57], вывод спектрального действия [58] и вычисление асимптотики теплового ядра при больших временах [59; 60]. Некоторые дополнительные характеристики теплового ядра, связанные со спектральными свойствами или оценками решений, могут быть найдены в [61].

При обсуждении построения теплового ядра важно различать два случая: многообразие без границы и с границей. Во втором случае постановка задачи (1)

дополняется граничными условиями, которым должно удовлетворять тепловое ядро $\mathcal{K}(\tau)$. Впервые такой случай был рассмотрен в работе Маккина и Зингера [62]. Далее, в статьях Макавити и Осборна [63–65] были рассмотрены случаи с различными граничными условиями, в том числе и обобщенными. В качестве примеров можно привести исследование задач в шаре [66], ВКБ-аппроксимацию в различных областях [67], изучение граничных условий переноса [68; 69], а также многие другие случаи, ссылки на которые могут быть найдены в работе [70] и в достаточно подробном обзоре [71].

Как известно, точное решение уравнения теплопроводности удается получить лишь в специальных случаях [72], поэтому отдельной важной задачей является вычисление коэффициентов разложения теплового ядра в асимптотический ряд при малых значениях собственного времени τ . К примеру, при рассмотрении оператора Лапласа, как правило, анзац выбирается в следующем виде

$$\mathcal{K}(x, y; \tau) = (4\pi\tau)^{-d/2} e^{-(x-y)^2/4\tau} \sum_{2k=0}^{\infty} \tau^k \mathbf{a}_k(x, y), \quad (2)$$

где d — размерность пространства, а функции \mathbf{a}_k носят название коэффициентов Сили—деВитта (иногда также содержат фамилии Хамидью и Гилки). Помимо давно известных результатов для первых трех коэффициентов (см. [62]), которые могут быть найдены в стандартных монографиях, важно вспомнить подсчет четвертого [73–75] и пятого [76] коэффициентов в самой общей постановке на многообразиях без границы, а также коэффициентов более высокого порядка при некоторых ограничениях на калибровочную связность [77].

Имеющиеся на данный момент методы вычисления коэффициентов Сили—деВитта при отсутствии границы можно разделить на два класса: нерекурсивные подходы [78; A2; A3], которые дают замкнутую формулу для отдельного коэффициента, а также рекурсивные ковариантные разложения. Описание последних можно найти в [79–82], где прием базируется на разложении операторной экспоненты, в работе [83], посвященной разложению единицы, а также в статьях [A2; A4], результат которых основан на формуле дифференцирования линии Вильсона вдоль геодезического отрезка. Более полный список работ по операторному подходу может быть найден в [84] и соответствующем списке литературы.

При добавлении границы и граничных условий задача приобретает более затейливый вид, ввиду этого методика подсчета несколько усложняется. Как

правило, в этом случае поиск разложения происходит в виде суммы

$$\mathcal{K}(\tau) + \mathcal{N}(\tau), \quad (3)$$

где первая часть дает решение внутри области и ищется в виде (2), а вторая часть $\mathcal{N}(\tau)$ — сумма “поверхностных” слагаемых для удовлетворения условий на границе. Наиболее исчерпывающая информация о вычислении первых членов асимптотики и их математическом смысле может быть найдена в работах [85–90], а также в монографии [91].

Из краткой исторической справки следует, что помимо точного математического описания свойств теплового ядра существует и более физический подход, который заключается в формальном построении асимптотики. В этой связи первые две главы диссертации посвящены изучению модельной задачи в области без границы с евклидовой метрикой и произвольными гладкими компонентами калибровочной связности и потенциалом. В них строятся различные новые методы анализа коэффициентов Сили—деВитта. Также производится обобщение на случай римановой метрики [A3] и доказываем эквивалентность с континуальным представлением [A1; A4].

Другая недавняя и довольно плодотворная идея заключается в применении теоремы об индексе для случая конфигураций типа доменных стенок. В статье [92] доменные стенки были определены как поверхности, на которых потенциал оператора Дирака теряет непрерывность. Однако, в дальнейшем мы будем придерживаться подхода из работы [53], в которой доменные стенки определены как подмногообразия, на которых компоненты связности испытывают скачок. Именно это и происходит на доменных стенках в ферромагнетике. Для доказательства теоремы об индексе в работе [53] использовались явные вычисления с применением разложения теплового ядра для всех аномалий в четырехмерном пространстве с некоторыми ограничениями на геометрию вблизи доменных стенок. В настоящей диссертации приводится расширение результата [53] на наиболее общий случай без ограничений на размерность и геометрию многообразия. Кроме того, мы используем более утонченные методы для доказательства, которые не затрагивают явные вычисления всех слагаемых [A5; A6].

Цель и задачи диссертационной работы

Основной **целью** данной диссертации является изучение методов построения коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра при малых

значениях собственного времени, а также расширение теоремы Атьи—Зингера—Патоли об индексе на случай многообразия с доменными стенками.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать свойства упорядоченной экспоненты при многократном ее ковариантном дифференцировании и интегрировании вдоль геодезического отрезка. В частности, найти закономерность в возникающих после дифференцирования или интегрирования конструкциях, а также выделить необходимые параметры для восстановления формулы.
2. Построить диаграммную технику для дифференцирования и интегрирования упорядоченной экспоненты путем определения конечного числа вершин и линий, а также переформулировать полученные в первом пункте свойства на диаграммный язык. В частности, вывести формулу для ковариантного дифференцирования произвольной диаграммы.
3. Применить полученную диаграммную технику в задаче о нахождении коэффициентов Сили—деВитта вне диагонали для оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала.
4. Исследовать диаграммную технику для поиска коэффициентов Сили—деВитта на диагонали. Переформулировать полученный частный случай на алгебраический язык и вывести нерекурсивную формулу для диагональных частей коэффициентов.
5. Вывести нерекурсивную формулу для коэффициентов Сили—деВитта оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом на основе ковариантного разложения путем перехода в калибровку Фока—Швингера.
6. Обобщить нерекурсивную формулу для диагональных частей коэффициентов на случай римановых многообразий.
7. Вывести континуальное представление для теплового ядра путем анализа коэффициентов при степенях собственного времени, а также показать, что эти коэффициенты удовлетворяют системе рекуррентных соотношений Сили—деВитта.
8. Исследовать следовые части коэффициентов Сили—деВитта в цилиндре и найти главный член асимптотики, когда длина цилиндра стремится к бесконечности.

9. Вывести формулу для индекса оператора Дирака на многообразии при наличии ограничений на геометрию в виде прямого произведения в окрестности доменных стенок путем дополнения области цилиндром и сглаживания компонент связности.
10. Доказать, что индекс оператора Дирака на многообразии с ограничением на геометрию инвариантен относительно сглаживания компонент калибровочного поля.
11. Вывести формулу для индекса оператора Дирака на многообразии без условия прямого произведения, а также доказать инвариантность индекса для регуляризации специального типа.
12. Расширить формулу для индекса на случай, когда не только компоненты связности Янга—Миллса, но и компоненты римановой связности испытывают скачок. При этом метрический тензор остается непрерывным.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Разработана диаграммная техника и построен матричный формализм для нахождения коэффициентов Сили—деВитта оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала как вне диагонали, так и на ней.
2. Выведена новая нерекурсивная формула для следовых частей коэффициентов Сили—деВитта оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом. Также дано обобщение на случай риманового многообразия.
3. Получено новое доказательство (без предельного перехода) связи асимптотического разложения теплового ядра и интеграла по путям.
4. Получены и доказаны новые формулы для индекса оператора Дирака на многообразии с доменными стенками. Рассмотрен случай общего положения, когда 1-формы римановой связности и связности Янга—Миллса имеют скачок, а метрический тензор остается непрерывным.
5. Доказана инвариантность индекса оператора Дирака на римановом многообразии с доменными стенками относительно регуляризаций специального вида.

Научная новизна

Все положения диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Практическая значимость

В работе строится диаграммная техника для вычисления коэффициентов Сили—деВитта и алгебраический ее аналог, а также выводятся нерекурсивные формулы, которые могут быть осуществлены в программах Maple или Mathematica при помощи простейших операций разбиения множества на части.

Результаты, изложенные в первых двух главах, могут быть использованы для работы с более сложными случаями (кривая метрика, многообразие с границей). В качестве основных приложений нерекурсивной формулы и новых свойств упорядоченных экспонент можно отметить теорию перенормировки и теорию континуального интеграла. Например, полученные результаты могут быть использованы при работе с квантовыми моделями для нахождения расходимостей в условиях регуляризации с импульсом обрезания.

В частности, результаты третьей главы основаны на анализе коэффициентов Сили—деВитта, поэтому их также можно считать приложением первых двух глав.

Теорема об индексе в свою очередь устанавливает важное соотношение между аномалиями киральности и четности и, таким образом, доставляет новую физическую информацию, которая может найти приложения в теоретической и математической физике.

Методология и методы исследования

В диссертации используется обширный набор методов и подходов, включающий асимптотическое разложение теплового ядра, спектральную теорию дифференциальных операторов, теорию расслоений и характеристических полиномов. При этом в диссертации упоминаются лишь необходимые для доказательств свойства используемых объектов. Более подробное и полное описание можно найти в монографиях [41; 91; 93—96].

Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием примеров, приведенных в каждом разделе. Так, в случае диаграммной техники и нерекурсивных формул рассмотрены первые три коэффициента Сили—деВитта

и показано, что полученные результаты полностью совпадают с ранее известными. Справедливость же формулы для индекса оператора Дирака проверяется путем рассмотрения частных случаев, которые также совпадают с ранее полученными результатами.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция “Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems”, Дубна, Россия, 24–29 июля, 2017;
2. Седьмая международная конференция по математическому моделированию в физических науках “IC-MSQUARE 2018”, Москва, Россия, 27–31 августа, 2018;
3. Городской семинар по вопросам теории распространения волн, ПОМИ РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 14 мая, 2019;
4. Международная конференция “Days on Diffraction”, Санкт-Петербург, Россия, 3–7 июня, 2019;
5. Петербургский семинар по квантовой теории поля, ПОМИ РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 13 июня, 2019;
6. Международная конференция “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ”, г. Долгопрудный, Московская обл., 17–21 июня, 2019;
7. Семинар лаборатории математических проблем физики, ПОМИ РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 1 февраля, 2021.

Личный вклад

Все результаты диссертационной работы были получены либо лично автором, либо при непосредственном его участии. В последнем случае определяющий вклад принадлежит диссертанту.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных работах, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Все статьи опубликованы в периодических научных журналах, индексируемых Web

of Science и/или Scopus.

Объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 115 страниц, включая 24 рисунка. Список литературы содержит 113 наименований.

Структура работы

Во **введении** обсуждается актуальность темы, формулируются цель и задачи диссертации, а также основные положения, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена асимптотическому разложению теплового ядра для оператора Лапласа с гладким калибровочным полем и без потенциала. Она включает описание необходимого математического аппарата, диаграммной техники для разложения в асимптотический ряд, а также вывод новой нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов разложения. Глава состоит из разделов **1.1—1.8**.

В **разделе 1.1** дается постановка задачи, включающая определения таких базовых математических объектов, как калибровочное поле, оператор Лапласа и теплового ядро.

Раздел 1.2 содержит анзац для поиска асимптотического разложения при малых значениях собственного времени. Дается определение коэффициентов Сили—деВитта, а также выписывается система дифференциальных уравнений, которым последние должны удовлетворять.

В **разделе 1.3** обсуждается упорядоченная операторная экспонента, ее определение, основные свойства и уравнения, дифференциальное и интегральное, решением которых она является. Некоторые свойства идут совместно с доказательствами.

В **разделе 1.4** рассматривается система дифференциальных уравнений для коэффициентов Сили—деВитта. Доказывается, что такая система имеет итерационное решение в виде набора интегральных соотношений.

В **разделе 1.5** описываются формулы дифференцирования упорядоченных экспонент, основанные на усреднении напряженности калибровочного поля вдоль геодезической, а также приводятся их доказательства.

В разделе 1.6 излагается диаграммная техника для дифференцирования и интегрирования упорядоченных экспонент, а также для итерационного вывода коэффициентов Сили—деВитта для оператора Лапласа с гладким калибровочным полем и без потенциала. Раздел 1.6 включает в себя четыре части.

Раздел 1.6.1 посвящен мотивировке. В частности, в нем акцентируется внимание на том факте, что формулу дифференцирования упорядоченной экспоненты можно разбить на блоки, которые позволяют анализировать многократное ковариантное дифференцирование.

В разделах 1.6.2 и 1.6.4 приводятся определения базовых элементов (линии и вершины) диаграммной техники, примеры их применения, а также формулируется и доказывается теорема о ковариантном дифференцировании диаграммы, включающая также несколько вспомогательных утверждений.

Разделы 1.6.3 и 1.6.5 содержат дополнительные примеры использования диаграммной техники. В частности, дается вывод диагональных частей первых двух коэффициентов Сили—деВитта, в результате которого получены решения, совпадающие с ранее известными.

Раздел 1.7 посвящен описанию алгебраического подхода и является дополнением к диаграммной технике из предыдущей части диссертации. Основным результатом данного раздела является вывод нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта. В данный раздел входят несколько подразделов.

В разделе 1.7.1 дается мотивировка к поставленной задаче, а также обсуждаются некоторые эвристические соображения о переходе от диаграмм к матрицам.

Раздел 1.7.2 содержит определения операторов интегрирования и добавления столбца/индекса. Также формулируются правила, по которым тензорно-значные функции сопоставляются матрицам.

В разделе 1.7.3 формулируются и доказываются такие свойства операторов, как коммутационные соотношения и отображение в множество тензоров.

Раздел 1.7.4 посвящен формулированию и доказательству нерекурсивной формулы для следовой части коэффициента Сили—деВитта оператора Лапласа с произвольным гладким полем Янга—Миллса и без потенциала, а также выводу некоторых вспомогательных утверждений.

Раздел 1.7.5 содержит описание применения нерекурсивной формулы к вычислению третьего коэффициента на диагонали, результат для которого полностью совпадает с ранее известным.

В **разделе 1.8** дается доказательство формулы для обратной упорядоченной экспоненты, которое было вынесено из основной части и носит характер приложения.

Глава 2 посвящена описанию вывода нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта для оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом. Вывод основан на использовании ковариантного разложения, или же, переводя на язык теоретической физики, на применении перехода в калибровку Фока—Швингера. Также глава содержит обобщение нерекурсивной формулы на случай римановой метрики и новый вывод континуального представления, коэффициенты при степенях собственного времени которого совпадают с коэффициентами Сили—деВитта.

В **разделе 2.1** вводится понятие ковариантного разложения, а также доказывается утверждение о разложении гладкой функции в ряд по ковариантным производным.

В **разделе 2.2** дается определение калибровочного условия Фока—Швингера, формулируется и доказывается ряд утверждений касательно коммутационных соотношений упорядоченной экспоненты и ковариантной производной (левой или правой). Также обсуждается смысл упорядоченной экспоненты с точки зрения перехода в другую калибровку.

Раздел 2.3 содержит описание оператора Лапласа и системы рекуррентных соотношений на коэффициенты Сили—деВитта в выбранной калибровке Фока—Швингера.

Раздел 2.4 посвящен нерекурсивной формуле. В частности, раздел содержит необходимые определения используемого формализма и его свойства. В нем формулируется и доказывается основная теорема о замкнутой формуле для следовой части произвольного коэффициента Сили—деВитта для оператора Лапласа с произвольными гладкими потенциалом и полем Янга—Миллса. Параллельно доказывается набор вспомогательных утверждений.

В разделе 2.5 обсуждается использование полученной формулы на примере вычисления первых трех диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта, результаты для которых полностью согласуются с известными.

В разделе 2.6 описывается обобщение нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта на случай произвольного оператора второго порядка с гладкими коэффициентами. Данный раздел содержит две части.

В разделе 2.6.1 приводятся формулировка обобщающей теоремы и ее доказательство, которое повторяет основные шаги раздела 2.4 с учетом некоторых фундаментальных изменений.

В разделе 2.6.2 приводится пример использования последней обобщенной нерекурсивной формулы в случае римановой метрики. В частности, дается вывод первых двух коэффициентов Сили—деВитта, которые совпадают с известными ранее.

Раздел 2.7 посвящен описанию континуального представления для теплового ядра и содержит несколько частей.

В разделах 2.7.1 и 2.7.2 напоминаются основные свойства задачи Штурма—Лиувилля на отрезке, вид ее функции Грина, а также вводятся необходимые обозначения.

В разделе 2.7.3 доказывается экспоненциальная формула, коэффициенты разложения которой удовлетворяют рекуррентным соотношениям Сили—деВитта.

Раздел 2.7.4 содержит вывод континуального представления, основанного на экспоненциальной формуле. В частности, обсуждаются способы регуляризации интеграла по путям, а также связь последнего со спектром вспомогательной задачи Штурма—Лиувилля.

В разделе 2.8 обсуждается зависимость континуального представления от калибровочного условия, а также формулы перехода из одной калибровки в другую.

Глава 3 посвящена формулировке и доказательству теоремы Атьи—Зингера—Патоди об индексе в случае многообразия с доменными стенками. Процесс доказательства производится в несколько этапов и основан на использовании метода теплового ядра, теории инвариантных полиномов и спектральной теории операторов. Ввиду этого глава разделена на несколько частей 3.1—3.7.

В разделе 3.1 излагается базовый математический аппарат, а также формулируется основная теорема об индексе. В частности, даются необходимые сведения о многообразии (связность Янга—Миллса, связность Леви-Чивиты, внешняя кривизна, структура Клиффорда, координаты Гаусса) и его свойствах, вводится оператор Дирака, обсуждаются условия на границе (доменная стенка) и ставится спектральная задача для оператора Лапласа с сингулярным потенциалом. Затем дается определение индекса оператора Дирака и его связь с тепловым ядром и плотностью Понтрягина. Далее вводится понятие спектральной асимметрии и формулируется основной результат в виде теоремы 3.1.

В разделе 3.2 приводится доказательство для частного случая, когда в некоторой окрестности доменной стенки присутствует структура прямого произведения, то есть компоненты метрического тензора и калибровочного поля не зависят от “нормальной” координаты. Доказательство также включает в себя несколько этапов: деформация многообразия в виде дополнения его цилиндром, анализ уравнений на коэффициенты Сили—деВитта и поиск их асимптотик, а также доказательство сходимости.

В разделе 3.3 предлагается убрать ограничение, связанное со структурой прямого произведения. При этом вывод формулы основан на введении регуляризации специального вида, позволяющей использовать результат для частного случая со структурой прямого произведения. Также даются определения и важные свойства характеристических полиномов (\widehat{A} -вид и характер Черна), через которые выражается плотность Понтрягина.

Раздел 3.4 является дополнением к разделу 3.2 и посвящен доказательству инвариантности индекса относительно сглаживания компонент калибровочного потенциала при переходе через доменную стенку в случае наличия структуры прямого произведения. Процесс доказательства разбит на несколько частей и содержит формулировку общих эвристических соображений 3.4.1, введение вспомогательной регуляризации и доказательство леммы о сходимости 3.4.2, а также обсуждение следствия 3.4.3.

Раздел 3.5 также носит характер дополнения и относится к разделу 3.3. В нем излагается лемма об инвариантности индекса оператора Дирака с условиями на границе типа доменных стенок в случае общего положения, то есть без предположения о структуре произведения. Доказательство основано на использовании регуляризации специального вида, оставляющей первую производную компонент ограниченной (при снятии регуляризации). Раздел включает в себя

несколько частей: мотивировка 3.5.1, описание регуляризации и доказательство леммы о сходимости 3.5.2.

В разделе 3.7 рассматривается и доказывается обобщение теоремы об индексе на случай, когда не только компоненты связности Янга—Миллса, но и компоненты римановой связности испытывают скачок на поверхности коразмерности один. При этом можно выделить три основные части: мотивировка к рассмотрению задачи 3.7.1, затем формулировка и доказательство результата 3.7.2, а также доказательство вспомогательной леммы 3.7.3.

В заключении диссертации приводятся основные результаты, а также обсуждаются дальнейшие планы по развитию темы. Кроме того, данная часть содержит благодарности автора.

Глава 1. Нековариантное разложение теплового ядра

1.1 Постановка задачи

Пусть G — компактная полупростая группа Ли, а M — гладкая односвязная область в \mathbb{R}^d (возможно, равная \mathbb{R}^d), где размерность пространства $d \in \mathbb{N}$. Далее, пусть также $E = P_G \times_{\triangleright} \mathfrak{g}$ является расслоением, ассоциированным к главному расслоению $\pi : P_G(M) \rightarrow M$, где \mathfrak{g} обозначает соответствующую алгебру Ли, и действие \triangleright группы G слева осуществляется присоединенным представлением. Также при помощи символа tr мы будем обозначать след по групповым индексам.

Элементы множества \mathbb{R}^d будем обозначать символами x, y, z, \dots , при этом при помощи греческих символом ν, μ, \dots будут нумероваться их компоненты. Также введем “правило суммирования Эйнштейна”, согласно которому дважды повторяющийся (сверху и снизу) индекс суммируется по всем возможным значениям, то есть $x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = \sum_{\mu=1}^d x^\mu y_\mu$.

Следует сразу отметить, что везде ниже мы будем стараться соблюдать наличие верхних и нижних индексов, хотя в данной части диссертации метрика является плоской, то есть метрический тензор равен символу Кронекера $\delta_{\nu\mu}$, поэтому положение индексов не играет существенной роли.

Далее формулой $V(x) = V_\mu(x) dx^\mu$ определим 1-форму калибровочного потенциала в некоторой открытой выпуклой окрестности $U \subset M$. При этом компоненты V_μ калибровочного поля являются элементами множества $C^\infty(U, \mathfrak{g})$, и, согласно представлению, действуют на гладкие сечения $s \in \Gamma(\pi^{-1}(U))$ посредством коммутатора

$$(V_\mu \triangleright s)(x) = [V_\mu, s](x), \quad x \in U, \quad \mu \in \{1, \dots, d\}. \quad (1.1)$$

Аналогичным образом определим потенциал v как элемент $C^\infty(U, \mathfrak{g})$, действующий на сечения слева. Тогда мы можем ввести в рассмотрение оператор Лапласа с ковариантной производной и произвольным гладким потенциалом v как дифференциальный оператор второго порядка, который в локальных координатах имеет вид

$$A(x) = -(\partial_{x^\mu} + V_\mu(x))(\partial_{x_\mu} + V^\mu(x)) - v(x), \quad x \in U.$$

Определение 1.1. *Тепловым ядром для оператора Лапласа A в области U называется решение задачи*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + A(x) \right) K(x, y; \tau) = 0, \quad K(x, y; 0) = \delta(x - y), \quad (1.2)$$

где $x, y \in U$ и $\tau \in \mathbb{R}_+$.

В дальнейшем основной целью является построение диаграммной техники для анализа коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра $K(x, y; \tau)$ при малых значениях собственного времени, то есть при $\tau \rightarrow +0$, а также вывод нерекурсивной формулы для их следовых частей.

1.2 Коэффициенты Сили—деВитта

Согласно стандартной теории асимптотического анализа мы будем искать решение задачи (1.2) в виде асимптотического ряда по степеням собственного времени τ , то есть

$$K(x, y; \tau) = K_0(x, y; \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n a_n(x, y), \quad (1.3)$$

где тепловое ядро для обычного оператора Лапласа $A_0 = -\partial^\mu \partial_\mu$ выписывается в явном виде

$$K_0(x, y; \tau) = (4\pi\tau)^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4\tau}\right). \quad (1.4)$$

Обратим внимание, что ряд из формулы (1.3) содержит только целые степени собственного времени.

Определение 1.2. *Функции $a_n(x, y)$, $n \geq 0$, называются коэффициентами Сили—деВитта.*

Данные коэффициенты подчиняются системе рекуррентных соотношений, которая может быть найдена прямой подстановкой ряда (1.3) в определение 1.1.

Лемма 1.1. *Пусть $x, y \in U$, тогда для коэффициентов Сили—деВитта верны соотношения*

$$\begin{aligned} (x-y)^\mu D_{x^\mu} a_0(x, y) &= 0, \\ ((n+1) + (x-y)^\mu D_{x^\mu}) a_{n+1}(x, y) &= -A(x) a_n(x, y), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где было введено обозначение для ковариантной производной

$$D_{x^\mu} = \partial_{x^\mu} + B_\mu(x). \quad (1.6)$$

Под решением последней системы мы будем подразумевать классическое, то есть разложимое в ряд Тейлора во всех точках области U . Следует также отметить, что функция (1.3) является формальным решением, и ее свойства гладкости в общем случае вовсе не следуют из свойств гладкости отдельных коэффициентов разложения. Это требует отдельного рассмотрения и не входит в поставленную задачу.

1.3 Упорядоченная экспонента и ее свойства

Компоненты связности $B_\mu(x)$ являются элементами алгебры Ли \mathfrak{g} и действуют на сечения слева при помощи операции \triangleright (см. формулу (1.1)) и носят операторный характер. Все выкладки далее следует воспринимать как операторные равенства. Для удобства введем два новых объекта.

Определение 1.3. Пусть $\gamma : [0,1] \rightarrow U$ — гладкая кривая и B_μ — компоненты связности (1.1), тогда упорядоченной вдоль пути γ экспонентой называется ряд вида

$$g_B^\gamma(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n B_{\mu_1}(\gamma(t_1)) \dot{\gamma}^{\mu_1}(t_1) \dots B_{\mu_n}(\gamma(t_n)) \dot{\gamma}^{\mu_n}(t_n),$$

где $t \in [0,1]$, и точкой обозначается производная $\dot{\gamma}(t) = \partial_t \gamma(t)$.

Аргументы множителей в последней формуле упорядочены по возрастанию справа налево. Для дальнейшего анализа нам потребуется частный случай такой функции.

Определение 1.4. Пусть $x, y \in U$ и $\gamma(t) = (1-t)y + tx$, тогда

$$\Phi(x, y) = g_B^\gamma(1).$$

Ясно, что благодаря выпуклости U образ $\gamma([0,1])$ лежит целиком внутри области. Из определения мгновенно следуют два очевидных равенства:

$$\Phi(x, x) = 1, \quad \Phi(x, y) = 1 - \int_0^1 dt \dot{\gamma}^\nu(t) B_\nu(\gamma(t)) \Phi(\gamma(t), y), \quad x, y \in U. \quad (1.7)$$

Остальные важные свойства удобно сформулировать в виде леммы. В частности, из них следует решение первого уравнения системы (1.5).

Лемма 1.2. Пусть $x, y, z \in U$ и $\exists t \in \mathbb{R} : z = (1 - t)y + tx$, тогда

$$\Phi^{-1}(x, y) = \Phi(y, x), \quad (1.8)$$

$$(x - y)^\mu D_{x^\mu} \Phi(x, y) = 0, \quad (1.9)$$

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, z)\Phi(z, y). \quad (1.10)$$

Доказательство: Вывод первого свойства достаточно громоздкий и приведен отдельно в разделе 1.8. Для доказательства второго свойства достаточно заметить, что благодаря параметризации $\gamma^\mu(t) = (1 - t)y^\mu + tx^\mu$ после взятия производной и интегрирования по частям мы имеем

$$\partial_{x^\mu} \Phi(x, y) = -B_\mu(x)\Phi(x, y) - \int_0^1 dt t \dot{\gamma}^\nu(t) H_{\mu\nu}(\gamma(t), y), \quad (1.11)$$

где антисимметричный по индексам оператор $H_{\mu\nu}$ равен

$$H_{\mu\nu}(z, y) = \partial_{z^\mu}(B_\nu(z)\Phi(z, y)) - \partial_{z^\nu}(B_\mu(z)\Phi(z, y)). \quad (1.12)$$

Тогда формула (1.9) вытекает из равенств (1.6), (1.11) и $(x - y)^\mu \dot{\gamma}^\nu H_{\mu\nu} = 0$.

Третье свойство следует из того факта, что левая и правая части соотношения (1.10), с учетом коллинеарности векторов $(x - z)^\mu = (1 - t) \cdot (x - y)^\mu$ и равенств (1.8) и (1.9), являются решениями задачи

$$(x - y)^\mu D_{x^\mu} \Psi(x, y) = 0, \quad \Psi(y, y) = 1.$$

Тогда их равенство следует из единственности классического решения. ■

1.4 Система интегральных уравнений

Для решения остальных дифференциальных уравнений из системы (1.5) достаточно разобраться с решением модельной задачи. Введем для удобства обозначение

$$(x - y)_{\nu_1 \dots \nu_n} = (x - y)_{\nu_1} \cdot \dots \cdot (x - y)_{\nu_n} \quad (1.13)$$

и предположим, что V — гладкая матричнозначная функция двух переменных в области $U \times U$, ряд Тейлора для которой в окрестности точки y имеет вид

$$V(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^{\nu_1 \dots \nu_k}}{k!} V_k^{\nu_1 \dots \nu_k}(y).$$

Лемма 1.3. Пусть $x, y \in U$ и $\gamma(t) = (1-t)y + tx$, $t \in [0, 1]$. Тогда классическим решением W_{n+1} дифференциального уравнения

$$((n+1) + (x-y)^\mu D_{x^\mu}) W_{n+1}(x, y) = V(x, y) \quad (1.14)$$

в области $U \times U$ является функция вида

$$W_{n+1}(x, y) = \int_0^1 dt t^n \Phi(x, \gamma(t)) V(\gamma(t), y). \quad (1.15)$$

Доказательство 1: Достаточно сделать замену вида

$$W_{n+1}(x, y) = e^{-(n+1)\pi_\mu \ln(x-y)^\mu} \Phi(x, y) \widetilde{W}_{n+1}(x, y),$$

где $\pi \in \mathbb{R}^d$ такое, что $\sum_{i=1}^d \pi_i = 1$. Тогда решение для \widetilde{W}_{n+1} записывается в виде

$$\widetilde{W}_{n+1}(x, y) = f(x, y) + \int_0^1 dt t^{-1} e^{(n+1)\pi_\mu \ln(\gamma(t)-y)^\mu} \Phi^{-1}(\gamma(t), y) V(\gamma(t), y),$$

где $f(x, y)$ принадлежит ядру оператора $(x-y)^\mu \partial_{x^\mu}$. Утверждение следует из ограниченности решения, соотношения

$$e^{(n+1)\pi_\mu \ln(\gamma(t)-y)^\mu} = t^{n+1} e^{(n+1)\pi_\mu \ln(x-y)^\mu},$$

а также свойств (1.8) и (1.10). ■

Доказательство 2: Можно сделать более короткую замену вида

$$W_{n+1}(x, y) = \Phi(x, y) \widetilde{W}_{n+1}(x, y)$$

и заметить следующий факт. Поскольку мы ищем решение, разложимое в ряд Тейлора, то обе части равенства представимы в виде суммы мономов по степеням $(x-y)$. Однако на множестве таких функций верно операторное равенство

$$[n+1 + (x-y)^\mu \partial_{x^\mu}]^{-1} = \int_0^1 dt t^n \Big|_{x=\gamma(t)},$$

поскольку оператор $(x-y)^\mu \partial_{x^\mu}$ считает степень монома. Утверждение леммы следует из последнего факта и соотношений (1.8) и (1.10). ■

Следствие 1.3.1. Пусть $x, y \in U$ и $\gamma(t) = (1 - t)y + tx$. Тогда система интегральных соотношений для коэффициентов Сили–деВитта имеет вид

$$\begin{aligned} a_0(x, y) &= \Phi(x, y), \\ a_{n+1}(x, y) &= - \int_0^1 dt t^n \Phi(x, \gamma(t)) [A(x) a_n(x, y)] \Big|_{x=\gamma(t)}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

1.5 Формулы дифференцирования упорядоченной экспоненты

Определение 1.5. Пусть $f \in C^\infty(U, \mathfrak{g})$ – операторнозначная функция, тогда “правая” и “левая” ковариантные производные определяются равенствами

$$\vec{D}_{x^\mu} f(x) = \partial_{x^\mu} f(x) + B_\mu(x) f(x), \quad f(x) \overleftarrow{D}_{x^\mu} = \partial_{x^\mu} f(x) - f(x) B_\mu(x). \quad (1.17)$$

Определение 1.6. Напряженностью калибровочного поля с компонентами (1.1) будем называть элемент алгебры Ли \mathfrak{g} вида

$$\begin{aligned} F_{\nu\mu}(x) &= [\vec{D}_{x^\nu}, \vec{D}_{x^\mu}] \\ &= \partial_{x^\nu} B_\mu(x) - \partial_{x^\mu} B_\nu(x) + [B_\nu(x), B_\mu(x)]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Лемма 1.4. Пусть $x, y \in U$ и $\gamma(t) = (1 - t)y + tx$. Тогда, с учетом (1.18), верно соотношение

$$\vec{D}_{x^\mu} \Phi(x, y) = \int_0^1 dt t \dot{\gamma}^\nu(t) \Phi(x, \gamma(t)) F_{\nu\mu}(\gamma(t)) \Phi(\gamma(t), y). \quad (1.19)$$

Утверждение леммы является следствием формул (1.11) и (1.12), и его доказательство приведено в приложении работы [97], поэтому мы не будем его повторять.

Следствие 1.4.1. Пусть $x, y \in U$ и $\gamma(t) = (1 - t)y + tx$, тогда, с учетом (1.18), верно соотношение

$$\Phi(x, y) \overleftarrow{D}_{y^\mu} = \int_0^1 dt (1 - t) \dot{\gamma}^\nu(t) \Phi(x, \gamma(t)) F_{\nu\mu}(\gamma(t)) \Phi(\gamma(t), y). \quad (1.20)$$

Доказательство: После дифференцирования равенства $\Phi^{-1}(x, y) \Phi(x, y) = 1$ по переменной x^μ и использования лемм 1.2 и 1.4 получаем соотношение

$$\Phi(y, x) \overleftarrow{D}_{x^\mu} = - \int_0^1 dt t \dot{\tilde{\gamma}}^\nu(t) \Phi(y, \tilde{\gamma}(t)) F_{\nu\mu}(\tilde{\gamma}(t)) \Phi(\tilde{\gamma}(t), x),$$

где параметризация имеет вид $\tilde{\gamma}(t) = (1 - t)x + ty$. Тогда утверждение леммы следует из замены переменной $t \leftrightarrow 1 - t$ и переобозначения $x \leftrightarrow y$. ■

1.6 Диаграмматика теплового ядра

1.6.1 Мотивировка

Как уже упоминалось, ключевую роль при построении диаграмматики играют лемма 1.4 и следствие 1.4.1. Действительно, можно заметить, что после ковариантного дифференцирования упорядоченная экспонента $\Phi(x, y)$ переходит в интеграл от произведения упорядоченных экспонент и напряженности $F_{\mu\nu}$ калибровочного поля V_μ . Следовательно, продолжая процедуру дифференцирования, будут появляться лишь упорядоченные экспоненты и производные от напряженности. Более детальный анализ показывает справедливость этого предположения и позволяет получить способ контроля за коэффициентами, возникающими при действии ковариантными производными.

Следует отметить, что данная диаграммная техника не связана с диаграммами Фейнмана. Она используется исключительно для компактной записи, удобства проведения вычислений и анализа свойств. Физические свойства таких диаграмм на данный момент неизвестны.

Стоит также обратить внимание, что процесс контроля за коэффициентами не является единственным и зависит от упорядочивания симплексов. Аналогичный подход, основанный на ковариантном разложении и использовании калибровочного условия Фока—Швингера, приведен в главе 2.

1.6.2 Определения базовых элементов

Диаграммная техника для оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала основана на использовании трех базовых элементов, линия

и два вида вершин. Добавление потенциала приводит к появлению третьей вершины.

Определение 1.7. Упорядоченной экспоненте $\Phi(x, y)$ соответствует линия с двумя аргументами x и y , как это изображено на рис. 1.1.

$$\Phi(x, y) = x \text{ ————— } y$$

Рисунок 1.1 — Первый элемент диаграмматики.

Пусть далее $x, y \in U$, $\gamma(t) = (1 - t)y + tx$ и $F_{\mu\nu}$ — напряженность калибровочного поля B_μ . Определим операторную производную специального вида

$$\nabla_{x^\mu} f(x) = \partial_{x^\mu} f(x) + [B_\mu(x), f(x)], \quad \forall f \in C^\infty(U, \mathfrak{g}). \quad (1.21)$$

Тогда мы можем ввести семейство интегральных операторов, ядра которых принимают значения в алгебре Ли \mathfrak{g} . Они имеют вид

$$\int_0^1 dt t^k \nabla_{\gamma^{\mu_1}} \dots \nabla_{\gamma^{\mu_{n-1}}} [\dot{\gamma}^\rho(t) F_{\rho\mu_n}(\gamma(t))], \quad (1.22)$$

где $k, n \in \mathbb{N}$ и μ_1, \dots, μ_n — элементы множества $\{1, \dots, d\}$. При этом оператор может действовать как слева, так и справа.

Определение 1.8. Интегральный оператор (1.22) соответствует окружности с тремя видами индексов:

1. $\mu_1 \dots \mu_n$ — набор греческих индексов;
2. t^k — степень параметра параметризации;
3. $(y \rightarrow x)$ — начальная и конечная точки прямой γ .

В действительности, после доказательства дополнительных свойств диаграммной техники от второго и третьего индексов можно будет отказаться. В качестве примера использования базовых элементов покажем запись формулы (1.19). На рис. 1.2 две линии соответствуют функциям $\Phi(x, \gamma)$ и $\Phi(\gamma, y)$, а окружность сопоставляется оператору (1.22) с греческим индексом μ и интегрированием вдоль прямой γ от точки y до точки x с весом t^1 . Для наглядности можно представлять, что в процессе интегрирования окружность пробегает по линии от начальной точки до конечной.

$$\int_0^1 dt \frac{d\gamma^\nu}{dt} t \Phi(x, \gamma) F_{\nu\mu}(\gamma) \Phi(\gamma, y) = x \overset{\mu t^1(y \rightarrow x)}{\circ} y$$

Рисунок 1.2 — Диаграммная запись формулы (1.19).

Определение 1.9. Пусть $x, y \in U$, $\gamma(t) = (1-t)y + tx$ и $n > 0$. Тогда определение второй вершины следует из равенства конструкции, изображенной на рис. 1.3, и диаграммы на рис. 1.4.

$$\int_0^1 dt t^n x \text{ — } \gamma(t) \text{ — } \gamma(t) \text{ — } (\forall \text{ diagram})$$

Рисунок 1.3 — Произведение двух диаграмм.

$$x \overset{t^{n+1}(y \rightarrow x)}{\times} y \text{ — } (\forall \text{ diagram})$$

Рисунок 1.4 — Обозначение для диаграммы на рис. 1.3.

Таким образом, третий элемент диаграммной техники (крестик) отвечает оператору интегрирования вдоль прямой $\gamma(t)$ от точки y до точки x с весом t^n .

1.6.3 Пример использования диаграммной техники

Для того чтобы убедиться в необходимости диаграммной техники, следует посмотреть на более содержательный пример. Давайте произведем подсчет первого коэффициента Сили—деВитта.

Согласно формуле (1.9), в нулевом порядке решением уравнения (1.5) является упорядоченная экспонента, то есть $a_0(x, y) = \Phi(x, y)$. Далее, в соответствии с утверждением следствия (1.3.1), мы должны применить оператор Лапласа и оператор интегрирования вдоль прямой от точки y до точки x . Будем действовать последовательно.

Во-первых, формула (1.19) дает выражение для первой ковариантной производной упорядоченной экспоненты $\Phi(x, y)$. Ее диаграммная запись показана на рис. 1.5.

$$D_{x^\mu} x \text{ --- } y = x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y$$

$\mu t_1^1(y \rightarrow x)$

Рисунок 1.5 — Первая ковариантная производная.

Во-вторых, после применения леммы 1.4 и следствия 1.4.1, вторая ковариантная производная упорядоченной экспоненты принимает вид

$$\begin{aligned}
D_{x^\mu} D_{x_\mu} \Phi(x, y) &= \\
&= \int_0^1 dt_1 \dot{\gamma}^\nu(t_1) t_1 \int_0^1 dt_2 \dot{z}^\rho(t_2) t_2 \Phi(x, z) F_{\rho\mu}(z) \Phi(z, \gamma) F_{\nu\mu}(\gamma) \Phi(\gamma, y) \\
&+ \int_0^1 dt_1 \dot{\gamma}^\nu(t_1) t_1^2 \int_0^1 dt_2 \dot{z}^\rho(t_2) (1-t_2) \Phi(x, z) F_{\rho\mu}(z) \Phi(z, \gamma) F_{\nu\mu}(\gamma) \Phi(\gamma, y) \\
&+ \int_0^1 dt_1 \dot{\gamma}^\nu(t_1) t_1^2 \Phi(x, \gamma) F_{\nu\mu}(\gamma) \int_0^1 dt_2 \dot{z}'^\rho(t_2) t_2 \Phi(\gamma, z') F_{\rho\mu}(z') \Phi(z', y) \\
&+ \int_0^1 dt_1 t_1 \Phi(x, \gamma) [t_1 \partial_{\gamma^\mu} (\dot{\gamma}^\nu(t_1) F_{\nu\mu}(\gamma))] \Phi(\gamma, y) \\
&+ \int_0^1 dt_1 \dot{\gamma}^\nu(t_1) t_1^2 \Phi(x, \gamma) B^\mu(\gamma) F_{\nu\mu}(\gamma) \Phi(\gamma, y) \\
&- \int_0^1 dt_1 \dot{\gamma}^\nu(t_1) t_1^2 \Phi(x, \gamma) F_{\nu\mu}(\gamma) B^\mu(\gamma) \Phi(\gamma, y),
\end{aligned} \tag{1.23}$$

где $z(t_2) = (1-t_2)\gamma + t_2x$ и $z'(t_2) = (1-t_2)y + t_2\gamma$. На языке диаграмм формула эквивалентна картинке, изображенной на рис. 1.6.

$$\begin{array}{c}
D_{x^\mu} x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y = x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y + \\
\mu t_1^1(y \rightarrow x) \qquad \qquad \qquad \mu t_2^1(\gamma \rightarrow x) \\
+ x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y + x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y + \\
\mu(1-t_2)^1(\gamma \rightarrow x) \qquad \mu t_1^2(y \rightarrow x) \qquad \mu t_1^1(y \rightarrow x) \\
\qquad \qquad \qquad \mu t_1^2(y \rightarrow x) \qquad \qquad \mu t_2^1(y \rightarrow \gamma) \\
\qquad \qquad \qquad \mu \mu t_1^2(y \rightarrow x) \\
+ x \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } y
\end{array}$$

Рисунок 1.6 — Вторая ковариантная производная.

На рис. 1.6 четвертая диаграмма в правой части равенства соответствует последним трем слагаемым формулы (1.23). Это произошло за счет возникновения оператора ∇_μ .

В-третьих, после интегрирования вдоль прямой мы воспользуемся третьим элементом диаграммной техники и получим рис. 1.7, где были использованы параметризация $\gamma'_\mu(t) = (1-t)y_\mu + tx_\mu$ и определение 1.9.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dt \, x \text{---} \gamma'(t) (D_{x^\mu} D_{x_\mu} x \text{---} y)|_{x=\gamma'(t)} = \\
& = x \text{---} \begin{array}{c} \times \\ t^1(y \rightarrow x) \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu t_2^1(\gamma \rightarrow \gamma') \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu t_1^1(y \rightarrow \gamma') \end{array} \text{---} y + \\
& + x \text{---} \begin{array}{c} \times \\ t^1(y \rightarrow x) \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu(1-t_2)^1(\gamma \rightarrow \gamma') \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu t_1^2(y \rightarrow \gamma') \end{array} \text{---} y + \\
& + x \text{---} \begin{array}{c} \times \\ t^1(y \rightarrow x) \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu t_1^2(y \rightarrow \gamma') \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu t_2^1(y \rightarrow \gamma) \end{array} \text{---} y + \\
& + x \text{---} \begin{array}{c} \times \\ t^1(y \rightarrow x) \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \mu \mu t_1^2(y \rightarrow \gamma') \end{array} \text{---} y
\end{aligned}$$

Рисунок 1.7 — Первый коэффициент Сили—деВитта.

Из приведенного примера следует, что даже на данном, неадаптированном, этапе диаграммная техника позволяет компактно записывать достаточно громоздкие формулы без потери информации.

1.6.4 Теорема о дифференцировании диаграммы

В данной секции мы получим правило, согласно которому ковариантная производная действует на диаграмму произвольного вида. Мы сформулируем аналог “правила Лейбница” и покажем, что при построении коэффициентов теплового ядра часть параметров может быть исключена. Таким образом, диаграммы приобретут более простой вид.

Лемма 1.5. Пусть $y, y' \in U$, $f, g \in C^\infty(U, \mathfrak{g})$ и заданы параметризации вида

$$z_\mu(s) = (1-s)y_\mu + sy'_\mu, \quad x_\mu(t) = (1-t)z_\mu + ty'_\mu.$$

Тогда справедлива теорема Тонелли—Фубини в следующей формулировке

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 ds \dot{z}_\rho(s) \int_0^1 dt \dot{x}_\nu(t) s^n t^p f(z(s)) g(x(t)) \\
& = \int_0^1 dt' \dot{x}'_\nu(t') \int_0^1 ds' \dot{z}'_\rho(s') [s']^n [t']^{n+p} \left[\frac{1-s'}{1-s't'} \right]^p f(z'(s')) g(x'(t')),
\end{aligned}$$

где

$$x'_\mu(t') = (1-t')y_\mu + t'y'_\mu, \quad z'_\mu(s') = (1-s')y_\mu + s'x'_\mu.$$

Доказательство: Для того чтобы убедиться в справедливости утверждения, достаточно сделать замену переменных вида $t \rightarrow t' = (1 - s)t + s$, использовать стандартную теорему Тонелли—Фубини для двойного интеграла

$$(s, t') \in [0, 1] \times [s, 1] \longrightarrow (s, t') \in [0, t'] \times [0, 1],$$

а затем сделать еще одну замену переменных вида $s \rightarrow s' = s/t'$. ■

Лемма 1.5 носит вспомогательный характер и может быть переформулирована. Действительно, давайте приведем набор утверждений на языке диаграммной техники. При этом мы дадим подробное доказательство первого из них. Остальные доказываются по аналогии.

Лемма 1.6. Пусть $x, y \in U$, $k, n \in \mathbb{N}$ и параметризации слева направо обозначаются символами z_1 , z_2 и z_3 . Тогда справедливы диаграммные равенства, изображенные на рисунках 1.8, 1.9 и 1.10.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y + \\
 \nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x) \quad \rho t_2^1(z_3 \rightarrow z_1) \quad \mu t_3^n(y \rightarrow z_1) \\
 + x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y = \\
 \nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x) \quad \rho(1 - t_2)(z_3 \rightarrow z_1) \quad \mu t_3^{n+1}(y \rightarrow z_1) \\
 = x \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y \\
 \nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x) \quad \rho t_2^{n+1}(y \rightarrow z_1) \quad \mu t_3^n(y \rightarrow z_2)
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 1.8 — Первое диаграммное равенство.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 x \text{---} \times \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y + \\
 t_1^{k+1}(y \rightarrow x) \quad \rho t_2^1(z_3 \rightarrow z_1) \quad \mu t_3^n(y \rightarrow z_1) \\
 + x \text{---} \times \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y = \\
 t_1^{k+1}(y \rightarrow x) \quad \rho(1 - t_2)(z_3 \rightarrow z_1) \quad \mu t_3^{n+1}(y \rightarrow z_1) \\
 = x \text{---} \times \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} y \\
 t_1^{k+1}(y \rightarrow x) \quad \rho t_2^{n+1}(y \rightarrow z_1) \quad \mu t_3^n(y \rightarrow z_2)
 \end{array}
 \end{array}$$

Рисунок 1.9 — Второе диаграммное равенство.

Доказательство: Обратимся к рисунку 1.8. После применения леммы 1.5 к первой диаграмме из левой части получаем новую диаграмму согласно равенству на рис. 1.11. Аналогично, после применения леммы 1.5 ко второй

$$\begin{array}{c}
x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \text{X} \text{---} y + \\
 \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \text{X} \text{---} y = \\
+ x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \text{X} \text{---} y = \\
= x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \text{X} \text{---} y
\end{array}$$

$\rho t_2^1(z_3 \rightarrow z_1)$ $t_3^n(y \rightarrow z_1)$ $\nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x)$ $t_3^{n+1}(y \rightarrow z_1)$
 $\rho(1-t_2)(z_3 \rightarrow z_1)$ $\rho t_2^{n+1}(y \rightarrow z_1)$ $\nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x)$ $t_3^n(y \rightarrow z_2)$

Рисунок 1.10 — Третье диаграммное равенство.

диаграмме, следует соотношение, изображенное на рис. 1.12. Далее полученные результаты следует сложить с учетом равенства

$$t_2^{n+1}t_3^n \left(\frac{1-t_3}{1-t_2t_3} \right) + t_2^{n+1}t_3^{n+1} - t_2^{n+2}t_3^{n+1} \left(\frac{1-t_3}{1-t_2t_3} \right) = t_2^{n+1}t_3^n, \quad (1.24)$$

откуда и вытекает доказательство первого утверждения леммы. ■

$$\begin{array}{c}
x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} y = \\
= x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} y \\
 \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \left[\mu t_3^n \left(\frac{1-t_3}{1-t_2t_3} \right) (y \rightarrow z_2) \right]
\end{array}$$

$\nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x)$ $\mu t_3^n(y \rightarrow z_1)$ $\rho t_2^1(z_3 \rightarrow z_1)$ $\rho t_2^{n+1}(y \rightarrow z_1)$

Рисунок 1.11 — Теорема Тонелли–Фубини для первой диаграммы.

$$\begin{array}{c}
x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} y = \\
= x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} y - \\
- x \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} y \\
 \text{---} \textcircled{\hspace{1cm}} \text{---} \left[\mu t_3^{n+1} \left(\frac{1-t_3}{1-t_2t_3} \right) (y \rightarrow z_2) \right]
\end{array}$$

$\rho(1-t_2)(z_3 \rightarrow z_1)$ $\mu t_3^{n+1}(y \rightarrow z_1)$ $\nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x)$ $\mu t_3^{n+1}(y \rightarrow z_2)$
 $\nu t_1^{k+1}(y \rightarrow x)$ $\rho t_2^{n+1}(y \rightarrow z_1)$ $\rho t_2^{n+2}(y \rightarrow z_1)$

Рисунок 1.12 — Теорема Тонелли–Фубини для второй диаграммы.

Следствие 1.6.1. Из леммы 1.6 следует, что мы можем исключить из определения 1.8 третий пункт. Действительно, после применения ковариантных производных или оператора интегрирования вдоль прямой все параметризации устроены так: прямая, соединяющая точку y со значением следующей параметризации, лежащей слева.

Замечание 1.7. В утверждениях леммы 1.6 любой греческий индекс можно заменить на произвольный набор вида $\mu_1 \dots \mu_k$, где $k \in \mathbb{N}$.

Следствие 1.7.1. Пусть $x, y \in U$. Тогда на рис. 1.13 изображена диаграммная формула для первого коэффициента Сили—деВитта $a_1(x, y)$.

$$\int_0^1 dt x \text{---} \gamma'(t) (D_{x^{\mu}} D_{x^{\mu}} x \text{---} y)|_{x=\gamma'(t)} =$$

$$= 2x \text{---} \underset{t^1}{\times} \text{---} \underset{\mu t_1^2}{\circ} \text{---} \underset{\mu t_2^1}{\circ} \text{---} y +$$

$$+ x \text{---} \underset{t^1}{\times} \text{---} \underset{\mu t_1^2}{\circ} \text{---} y$$

Рисунок 1.13 — Диаграммная запись для $a_1(x, y)$.

Подытоживая вышеизложенные леммы и следствия, мы можем сформулировать общую теорему о дифференцировании диаграммы.

Теорема 1.8. Пусть $x, y \in U$ и дана произвольная диаграмма, соединяющая точки x и y , с i линиями, k окружностями и j крестиками. Пусть также на такую диаграмму действует оператор ковариантной производной D_ρ . Тогда справедлив аналог правила Лейбница, согласно которому ковариантная производная действует на отдельные элементы диаграммы и трансформирует их по следующим правилам:

1. действие на линию заменяет последнюю на окружность с двумя линиями по бокам и параметрами ρ и t^m , где m равен степени второго параметра стоящей справа вершины (окружность или крестик) плюс один. Если вершина справа отсутствует, то $m = 1$. Также степени всех стоящих слева вершин увеличиваются на единицу. Это приводит к сумме i новых диаграмм;
2. действие на окружность добавляет с левой стороны к первому его параметру индекс ρ и увеличивает степень второго параметра на единицу. Также степени всех стоящих слева вершин увеличиваются на единицу. Это приводит к набору из k новых диаграмм;
3. действие на крестик зануляет диаграмму.

В итоге, после применения последней теоремы мы получаем $i + k$ новых диаграмм. Теорема 1.8 является прямым следствием трех диаграммных равенств из леммы 1.6.

В качестве примера давайте рассмотрим дифференцирование диаграммы из левой части равенства, изображенного на рис. 1.14. Она содержит все возможные элементы и отражает основную суть теоремы 1.8. Действительно, в ответе мы получаем 4 диаграммы, поскольку изначально было 3 линии и одна окружность.

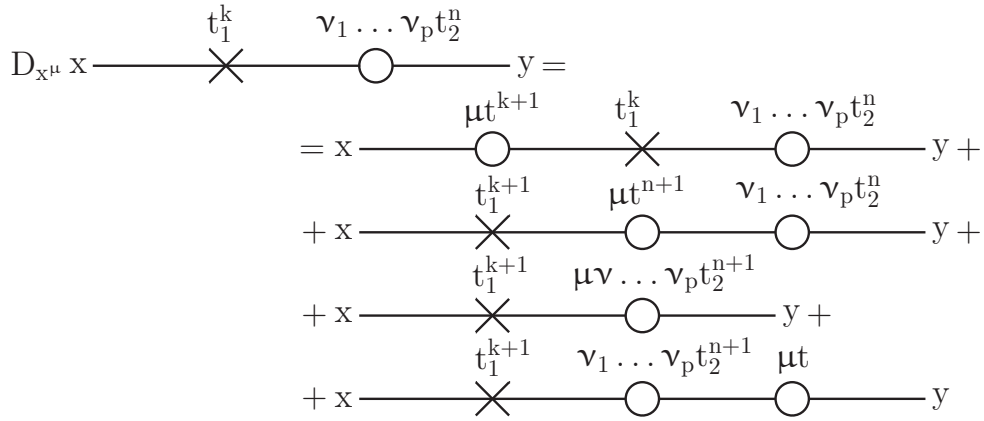


Рисунок 1.14 — Пример дифференцирования диаграммы.

Легко заметить, что оператор ковариантной производной распадается на оператор, действующий на каждую окружность, и оператор добавления новой окружности (с соответствующим учетом изменения индексов).

1.6.5 Дополнительные примеры

Первый диагональный коэффициент. Ранее мы вычисляли первый порядок, поэтому выпишем диаграммный вид вклада, см. рис. 1.15.

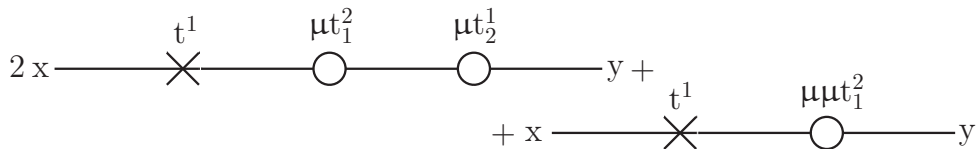


Рисунок 1.15 — Коэффициент $a_1(x, y)$.

Чтобы найти вклад в следовую часть коэффициента $a_1(x, y)$ положим $x = y$ и выпишем нулевой член ряда Тейлора. Легко видеть, что первая диаграмма пропорциональна второй степени разности $(x - y)$, в то время как вторая равна $\nabla^\mu((x - y)^\nu F_{\nu\mu})|_{x=y}$, то есть нулю, из-за антисимметричности напряженности

поля. В итоге получаем, что

$$a_1(y, y) = 0.$$

Второй диагональный коэффициент. Для вычисления второго порядка применим оператор Лапласа к первому коэффициенту, проинтегрируем вдоль прямой $(1 - t)y + tx$ с весом t , а затем найдем его диагональную часть при $x = y$. Для того чтобы упростить вычисления, следует обратить внимание на два факта: окружность с одним греческим индексом пропорциональна $(x - y)$, окружность с индексами вида $\mu\mu$ или $\rho\rho\mu\mu$ дает нулевой вклад. Следовательно, ненулевой вклад следует только из диаграммы, изображенной на рис. 1.16.

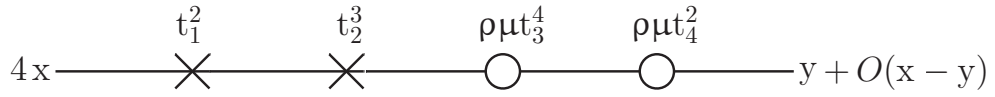


Рисунок 1.16 — Главный вклад в $a_2(x, y)$ при $x \sim y$.

При $x = y$ все упорядоченные экспоненты превращаются в единицы (линии стягиваются) и, с учетом соотношения

$$[\nabla_\rho((x - y)^\nu F_{\nu\mu}(x))]_{x=y} = F_{\rho\mu}(y), \quad (1.25)$$

мы можем выписать окончательный ответ

$$a_2(y, y) = \frac{1}{12} F_{\rho\mu}(y) F^{\rho\mu}(y). \quad (1.26)$$

1.7 Алгебраический подход

1.7.1 Мотивировка

Диаграммная техника из раздела 1.6 позволяет вычислять коэффициенты Сили—деВитта в общем виде, а также находить их следовые части. Механизм вычисления был представлен на примере первого и второго порядков, см. формулу (1.26) и рисунки 1.15 и 1.16.

Однако, процедура является рекуррентной, что приводит к необходимости вычислять все предшествующие коэффициенты. В разделе 1.7 мы построим

формализм, позволяющий вывести нерекурсивную формулу для диагональной, при $x = y$, части произвольного коэффициента Сили—деВитта оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала.

В следствии 1.6.1 было отмечено, что второй элемент диаграммной техники (см. опр. 1.8) содержит два параметра, а третий элемент (см. опр. 1.9) — один параметр. Таким образом, каждой диаграмме можно сопоставить матрицу с двумя строками и количеством столбцов, равным общему количеству окружностей и крестиков в диаграмме. Давайте отметим очевидные свойства, необходимые для построения матричного формализма:

1. Каждой вершине диаграммы соответствует столбец с двумя элементами;
2. Элементы первой строки могут быть двух типов: либо **1** (соответствует крестику), либо набор греческих индексов (соответствует окружности);
3. Элементы второй строки содержат степени параметров параметризации;
4. Символ $\mathbb{1}$ обозначает порождающий элемент (матрица “без столбцов”).

Таким образом, мы получаем набор матриц вида $\mathbb{1}, M^{2 \times 1}, M^{2 \times 2}, \dots$. Другими словами, появляется бесконечномерное пространство, счетный базис которого представим в виде матриц. При этом матрицы обозначают один и тот же элемент только тогда, когда их размер и все элементы совпадают. Отметим, что каждый коэффициент Сили—деВитта состоит из конечного числа диаграмм и, следовательно, из конечного числа матриц.

Далее мы определим на множестве матриц операторы, являющиеся аналогом ковариантной производной и интегрирования вдоль геодезической, изучим их свойства, а также выведем нерекурсивную формулу.

1.7.2 Определения операторов

Согласно предположениям, изложенным выше, любая диаграмма представима в виде матрицы. Заинтересованность в диагональной части приводит к необходимости ввести оператор, сопоставляющий матрице диагональную, то есть когда $x = y$, часть соответствующей диаграммы.

Определение 1.10. Оператор Υ действует на порождающий элемент и на матрицы с одним столбцом по правилам: пусть $i, k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\Upsilon \mathbf{1} = 1, \quad \Upsilon \begin{pmatrix} \nu_i \dots \nu_1 \mathbf{1} \\ k \end{pmatrix} = \frac{\delta_{i0}}{k},$$

$$\Upsilon \begin{pmatrix} \nu_i \dots \nu_1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \left(\nabla_{x^{\nu_i}} \dots \nabla_{x^{\nu_2}} [(x-y)^\rho F_{\rho \nu_1}(x)] \right) \Big|_{x=y}.$$

Действие оператора на матрицу с $n > 1$ столбцами равно произведению действия оператора Υ на каждый отдельный столбец с учетом порядка следования столбцов.

Из определения следует, что оператор Υ зависит от точки $y \in U$. Однако, мы будем опускать этот параметр, считая точку фиксированной.

Согласно теореме 1.8 о дифференцировании диаграммы действие ковариантной производной распадается на два оператора: добавление индекса и добавление окружности (столбца), с учетом изменения весов в других вершинах. Оператор же интегрирования соответствует добавлению крестика (столбца). Таким образом, необходимо ввести три вида операторов, преобразующих матрицы.

Определение 1.11. Оператор добавления индекса:

$$\mathcal{B}^\mu \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ k_1 + 1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \mu \nu_n \\ k_1 + 1 & k_2 + 1 & \dots & k_n + 1 \end{pmatrix},$$

где параметры ν_i , $i = 1, \dots, n$, могут быть заменены на произвольную последовательность греческих индексов, или же на $\mathbf{1}$.

Определение 1.12. Оператор добавления столбца:

$$\mathcal{A}^\mu \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ k_1 + 1 & k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \mu & \nu_n \\ k_1 + 1 & k_2 + 1 & \dots & k_n + 1 & k_n \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n & \mu \\ k_1 + 1 & k_2 + 1 & \dots & k_n + 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где параметры ν_i , $i = 1, \dots, n$, могут быть заменены на произвольную последовательность греческих индексов, или же на $\mathbf{1}$.

Определение 1.13. *Оператор интегрирования:*

$$\mathcal{S}_m^{\mu/\mathbf{1}} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu/\mathbf{1} & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \\ m & k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix},$$

где $m \in \mathbb{N}$, и параметры ν_i , $i = 1, \dots, n$, могут быть заменены на произвольную последовательность греческих индексов, или же на $\mathbf{1}$.

Используя последние определения и следствие 1.3.1, мы можем выписать диагональную часть теплового ядра (1.3) для оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала в виде

$$K(y, y; \tau) = \Upsilon \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \prod_{k=1}^n \mathcal{S}_k^{\mathbf{1}}(\mathcal{A}^{\mu_k} + \mathcal{B}^{\mu_k})(\mathcal{A}^{\mu_k} + \mathcal{B}^{\mu_k}) \right) \mathbb{1}. \quad (1.27)$$

1.7.3 Свойства операторов

Операторы добавления столбца или индекса. Для того чтобы выписать явный вид коэффициентов при степенях τ в разложении (1.27), нам потребуются коммутационные соотношения для операторов. Действительно, в этом случае мы сможем перетащить операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} вправо и, таким образом, убрать рекуррентную процедуру.

Лемма 1.9. *Пусть даны параметры $k, n \in \mathbb{N}$ и индексы μ, ν_1, \dots, ν_n , тогда имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{\mu} \mathcal{S}_k^{\mathbf{1}} &= \mathcal{S}_{k+1}^{\mathbf{1}} \mathcal{A}^{\mu} + \mathcal{S}_{k+1}^{\mu} \mathcal{S}_k^{\mathbf{1}}, & \mathcal{A}^{\mu} \mathcal{S}_k^{\nu_1 \dots \nu_n} &= \mathcal{S}_{k+1}^{\nu_1 \dots \nu_n} \mathcal{A}^{\mu} + \mathcal{S}_{k+1}^{\mu} \mathcal{S}_k^{\nu_1 \dots \nu_n}, \\ \mathcal{B}^{\mu} \mathcal{S}_k^{\mathbf{1}} &= \mathcal{S}_{k+1}^{\mathbf{1}} \mathcal{B}^{\mu}, & \mathcal{B}^{\mu} \mathcal{S}_k^{\nu_1 \dots \nu_n} &= \mathcal{S}_{k+1}^{\nu_1 \dots \nu_n} \mathcal{B}^{\mu} + \mathcal{S}_{k+1}^{\mu \nu_1 \dots \nu_n}. \end{aligned}$$

Доказательство достигается подстановкой определений операторов. В последней лемме приведены только необходимые для работы коммутаторы. Остальные, например $[\mathcal{A}^{\mu}, \mathcal{B}^{\nu}]$, не используются в разложении и доказательствах, поэтому мы не выписываем их.

Оператор интегрирования. Утверждение леммы 1.9 показывает, что коммутатор оператора \mathcal{B} (или \mathcal{A}) с \mathcal{S} -оператором вновь дает \mathcal{S} -оператор (или же произведение таких). Таким образом, коэффициенты теплового ядра редуцируются к комбинациям операторов интегрирования. Также следует отметить, что произвольная матрица из разложения коэффициентов Сили—деВитта может быть получена путем применения конечного числа \mathcal{S} -операторов к порождающему элементу $\mathbb{1}$. Давайте определим дополнительные объекты, в терминах которых рассуждения упрощаются.

Определение 1.14. Пусть даны $m, n \in \mathbb{N}$, множество $I_n = \{n, \dots, 1\}$ и мультииндекс $\mu_{I_n} = \mu_n \dots \mu_1$. Пусть также символ \sharp обозначает количество элементов в множестве, тогда определим конечный операторный ряд равенством

$$\Omega_m^{\mu_{I_n}} = \sum_{\sigma} \mathcal{S}_{m+\sharp \cup_{i=1}^k \sigma_i}^{\mu_{\sigma_k}} \cdots \mathcal{S}_{m+\sharp \sigma_1 \cup \sigma_2}^{\mu_{\sigma_2}} \mathcal{S}_{m+\sharp \sigma_1}^{\mu_{\sigma_1}},$$

где суммирование производится по всем перестановкам

$$\sigma = \{\sigma_j\}_{j=1}^k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

обладающим свойствами:

- $\sigma_j \subset I_n$ для всех $j \in \{1, \dots, k\}$;
- $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- $\cup_{i=1}^k \sigma_i = I_n$;
- $\sigma_s(i) > \sigma_s(j)$ для всех $s \in \{1, \dots, k\}$ и $i, j \in \{1, \dots, \sharp \sigma_s\}$, где $i > j$.

Если подействовать таким объектом на элемент $\mathbb{1}$, а затем воспользоваться Υ -оператором, то получим некоторую комбинацию, состоящую из напряженностей поля и их ковариантных производных. Для нахождения точного ответа стоит обратить внимание на следующие формулы:

$$\nabla_{\mu_{I_n}}((x-y)^\rho F_{\rho\nu}(x)) = (x-y)^\rho \nabla_{\mu_{I_n}} F_{\rho\nu}(x) + \sum_{k=1}^n \nabla_{\mu_{I_n \setminus k}} F_{\mu_k \nu}(x), \quad (1.28)$$

$$\nabla_{\mu_{I_n}}((x-y)^\rho F_{\rho\nu}(x)) \Big|_{x=y} = \sum_{k=1}^n \nabla_{\mu_{I_n \setminus k}} F_{\mu_k \nu}(y). \quad (1.29)$$

Определение 1.15. Пусть m и n из \mathbb{N} , тогда

$$\widehat{\mathcal{S}}_m^{\mu_{I_n} \nu} = \Upsilon \mathcal{S}_m^{\mu_{I_n} \nu} \mathbb{1} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n \nabla_{\mu_{I_n \setminus k}} F_{\mu_k \nu}(y).$$

Ясно, что последний объект зависит от точки $y \in U$, обозначение которой мы также будем опускать. Далее легко показать мультипликативное свойство \mathcal{S} -операторов.

Лемма 1.10. *Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, а также даны два числовых множества I и J , тогда верна следующая цепочка равенств*

$$\begin{aligned} \Upsilon(\mathcal{S}_m^{\mu_I \nu} \mathcal{S}_k^{\mu_J \rho} \mathbb{1}) &= \frac{1}{m \cdot k} \left(\sum_{i=1}^{\#I} \nabla_{\mu_{I_i}} F_{\mu_I \nu}(y) \right) \left(\sum_{j=1}^{\#J} \nabla_{\mu_{J_j}} F_{\mu_J \rho}(y) \right) \\ &= \widehat{\mathcal{S}}_m^{\mu_I \nu} \widehat{\mathcal{S}}_k^{\mu_J \rho} \\ &= (\Upsilon \mathcal{S}_m^{\mu_I \nu} \mathbb{1})(\Upsilon \mathcal{S}_k^{\mu_J \rho} \mathbb{1}). \end{aligned}$$

Доказательство утверждения мгновенно следует из формул (1.28), (1.29) и определений 1.13 и 1.15. Вполне очевидно, что данное свойство можно распространить на произвольное количество операторов интегрирования. В частности, оно позволяет выписать ответ и для $\Upsilon \Omega \mathbb{1}$.

Лемма 1.11. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, тогда верно соотношение*

$$\Upsilon \Omega_m^{\mu_{I_n}} \mathbb{1} = \sum_{\sigma} \widehat{\mathcal{S}}_{m+\#\cup_{i=1}^k \sigma_i}^{\mu_{\sigma_k}} \cdots \widehat{\mathcal{S}}_{m+\#\sigma_1 \cup \sigma_2}^{\mu_{\sigma_2}} \widehat{\mathcal{S}}_{m+\#\sigma_1}^{\mu_{\sigma_1}},$$

где суммирование производится по перестановкам из определения 1.14.

Доказательство следует из леммы 1.10 и определения 1.15. Результат леммы 1.10 также позволяет произвести замену в ней \mathcal{S} -оператора на Ω -оператор. Таким образом, мультипликативное свойство распространяется на произвольное конечное произведение Ω -операторов.

1.7.4 Нерекурсивная формула для коэффициентов

Формула (1.27) является разложением в асимптотический ряд по степеням собственного времени τ . Отдельный коэффициент Сили—деВитта выписывается в виде

$$a_n(y, y) = \Upsilon \left(\prod_{k=1}^n \mathcal{S}_k^1 (\mathcal{A}^{\mu_k} + \mathcal{B}^{\mu_k}) (\mathcal{A}^{\mu_k} + \mathcal{B}^{\mu_k}) \right) \mathbb{1}. \quad (1.30)$$

При помощи коммутационных соотношений из леммы 1.9 перетащим произведение $(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ -операторов через \mathcal{S} -оператор.

Лемма 1.12. Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ и I — набор индексов, такой что $\sharp I = n$. Тогда справедливо операторное равенство

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_I} \mathcal{S}_m^1 = \sum_{k=0}^n \sum_{\sigma_k} \Omega_{m+k}^{\mu_I \setminus \sigma_k} \mathcal{S}_{m+k}^1 (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_{\sigma_k}}, \quad (1.31)$$

где суммирование производится по всем подмножествам $\sigma_k \subset I$, обладающим свойствами:

- $\sharp \sigma_k = k$;
- $\sigma_k(i) > \sigma_k(j)$ для всех $i, j \in \{1, \dots, k\}$, таких что $i > j$.

Доказательство: Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ утверждение очевидно:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_1} \mathcal{S}_m^1 = \mathcal{S}_{m+1}^1 (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_1} + \mathcal{S}_{m+1}^{\mu_1} \mathcal{S}_m^1.$$

Предположим, что имеется равенство при $n = j$, и докажем его для $n = j + 1$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\rho} (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_I} \mathcal{S}_m^1 &= \sum_{k=0}^j \sum_{\sigma_k} (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\rho} \Omega_{m+k}^{\mu_I \setminus \sigma_k} \mathcal{S}_{m+k}^1 (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_{\sigma_k}} = \\ &= \sum_{k=0}^j \sum_{\sigma_k} \left(\Omega_{m+k}^{\rho \mu_I \setminus \sigma_k} \mathcal{S}_{m+k}^1 (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_{\sigma_k}} + \Omega_{m+k+1}^{\mu_I \setminus \sigma_k} \mathcal{S}_{m+k+1}^1 (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\rho \mu_{\sigma_k}} \right). \end{aligned}$$

Утверждение леммы следует из переобозначения индексов в последней формуле. ■

Подстановку равенства (1.31) в формулу (1.30) удобно делать в несколько шагов.

Лемма 1.13. Пусть $I = I_{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \mathcal{S}_k^1 (\mathcal{A}^{\mu_{2k}} + \mathcal{B}^{\mu_{2k}}) (\mathcal{A}^{\mu_{2k-1}} + \mathcal{B}^{\mu_{2k-1}}) &= \\ &= \sum_{p_1=0}^2 \sum_{p_2=0}^{4-p_1} \cdots \sum_{p_{n-1}=0}^{2(n-1)-\sum_{k=1}^{n-2} p_k} \sum_{\sigma} \mathcal{S}_n^1 \Omega_{n+1-p_1}^{\mu_{\sigma p_1}} \mathcal{S}_{n+1-p_1}^1 \Omega_{n+2-p_1-p_2}^{\mu_{\sigma p_2}} \mathcal{S}_{n+2-p_1-p_2}^1 \cdots \\ &\quad \cdots \Omega_{2n-1-\sum_{j=1}^{n-1} p_{j-1}}^{\mu_{\sigma p_{n-1}}} \mathcal{S}_{2n-1-\sum_{j=1}^{n-1} p_{j-1}}^1 (\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_{I \cup_{s=1}^{n-1} \sigma_{ps}}}, \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем подмножествам σ_{p_k} , обладающим свойствами:

- $\#\sigma_{p_k} = p_k$;
- $\sigma_{p_k} \subset (I_{2n} \setminus I_{2(n-k)}) \setminus (\cup_{j=1}^{k-1} \sigma_{p_j})$;
- $\sigma_{p_k}(i) > \sigma_{p_k}(j)$ для всех $i, j \in \{1, \dots, p_k\}$, таких что $i > j$.

Доказательство леммы 1.13 следует из применения формулы (1.31) несколько раз.

Лемма 1.14. Пусть I является числовым множеством, тогда верно соотношение

$$\Upsilon(\mathcal{A} + \mathcal{B})^{\mu_I} \mathbb{1} = \Upsilon \Omega_0^{\mu_I} \mathbb{1} = \widehat{\Omega}_0^{\mu_I}.$$

Последнее равенство следует из определений операторов. В итоге, для получения нерекурсивной формулы нам следует подействовать оператором из леммы 1.13 на порождающий элемент $\mathbb{1}$, а затем справа применить оператор Υ . Окончательный результат можно сформулировать так.

Теорема 1.15. Пусть $n > 0$ и $\mu_{2k-1} = \mu_{2k}$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда верно соотношение

$$a_n(y, y) = \sum_{p_1=0}^2 \sum_{p_2=0}^{4-p_1} \cdots \sum_{p_{n-1}}^{2(n-1) - \sum_{k=1}^{n-2} p_k} \sum_{\sigma} \frac{\widehat{\Omega}_{n+1-p_1}^{\mu_{\sigma p_1}}}{n+1-p_1} \frac{\widehat{\Omega}_{n+2-p_1-p_2}^{\mu_{\sigma p_2}}}{n+2-p_1-p_2} \cdots$$

$$\cdots \frac{\widehat{\Omega}_{2n-1-\sum_{j=1}^{n-1} p_{j-1}}^{\mu_{\sigma p_{n-1}}}}{2n-1-\sum_{j=1}^{n-1} p_{j-1}} \frac{\widehat{\Omega}_0^{\mu_{I \setminus \cup_{s=1}^{n-1} \sigma p_s}}}{n},$$

где суммирование по подмножествам σ производится согласно правилам из леммы 1.13.

1.7.5 Пример: третий диагональный элемент

В качестве примера использования формулы предлагается рассмотреть вычисление третьего порядка, который впервые был получен в работе [14]. Для этого мы выпишем результат теоремы 1.15 для $n = 3$

$$a_3(y, y) = \sum_{p_1=0}^2 \sum_{p_2=0}^{4-p_1} \sum_{\sigma} \frac{\widehat{\Omega}_{4-p_1}^{\mu_{\sigma p_1}}}{4-p_1} \frac{\widehat{\Omega}_{5-p_2-p_1}^{\mu_{\sigma p_2}}}{5-p_2-p_1} \frac{\widehat{\Omega}_0^{\mu_{I \setminus \cup_{s=1}^2 \sigma p_s}}}{3}. \quad (1.32)$$

Чтобы упростить вычисления, заметим, что

$$(x - y)^\nu F_{\nu\mu}(x)|_{x=y} = 0, \quad F_{\mu\mu}(x) = 0,$$

и оператор $\widehat{\mathcal{S}}_m^{\mu\nu\tau\tau}$ симметричен по индексам μ и ν . Тогда ненулевой вклад дадут лишь слагаемые с $p_1 = p_2 = 0$ и $p_1 = 0, p_2 = 3$, и формула (3.29) может быть переписана в виде

$$a_3(y, y) = \frac{1}{60} \widehat{\Omega}_0^{\mu\mu\tau\tau\nu\nu} + \frac{1}{12} \left(\widehat{\Omega}_2^{\mu\mu\tau} \widehat{\Omega}_0^{\tau\nu\nu} + \widehat{\Omega}_2^{\mu\tau\tau} \widehat{\Omega}_0^{\mu\nu\nu} \right). \quad (1.33)$$

Используя формулу (1.14) и определение 1.15, мы получаем соотношения

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}_0^{\mu\mu\tau\tau\nu\nu} &= \frac{4}{3} \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) + \frac{2}{3} \nabla_\mu F_{\mu\nu}(y) \nabla_\tau F_{\tau\nu}(y) \\ &+ F_{\tau\nu}(y) \nabla_\mu \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) + \nabla_\mu \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) F_{\tau\nu}(y) - 2F_{\tau\mu}(y) F_{\mu\nu}(y) F_{\nu\tau}(y) \end{aligned}$$

и

$$\widehat{\Omega}_2^{\mu\mu\tau} \widehat{\Omega}_0^{\tau\nu\nu} + \widehat{\Omega}_2^{\mu\tau\tau} \widehat{\Omega}_0^{\mu\nu\nu} = -\frac{1}{15} \nabla_\mu F_{\mu\nu}(y) \nabla_\tau F_{\tau\nu}(y).$$

После подстановки последних равенств в формулу (1.33), окончательный результат приобретает вид

$$\begin{aligned} a_3(y, y) &= \frac{1}{45} \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) + \frac{1}{180} \nabla_\mu F_{\mu\nu}(y) \nabla_\tau F_{\tau\nu}(y) \\ &+ \frac{1}{60} F_{\tau\nu}(y) \nabla_\mu \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) + \frac{1}{60} \nabla_\mu \nabla_\mu F_{\tau\nu}(y) F_{\tau\nu}(y) \\ &- \frac{1}{30} F_{\tau\mu}(y) F_{\mu\nu}(y) F_{\nu\tau}(y), \end{aligned}$$

который полностью совпадает с ранее известным ответом.

1.8 Обратная упорядоченная экспонента

Пусть $c_k(x_1, \dots, x_k)$ является характеристической функцией множества

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 1 \geq x_1 \geq \dots \geq x_k \geq 0\}$$

при $k \geq 1$ и единицей при $k = 0$. Пусть также множество функций $\{d_k\}_{k=0}^\infty$ определены набором соотношений: $d_0 = 1$ и

$$d_k(x_1, \dots, x_k) = - \sum_{n=1}^k d_{k-n}(x_1, \dots, x_{k-n}) c_n(x_{k-n+1}, \dots, x_k), \quad k \geq 1. \quad (1.34)$$

Тогда методом математической индукции можно проверить, что

$$d_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n=1}^k \sum_{k_1, \dots, k_n} (-1)^n c_{k_1}(x_1, \dots, x_{k_1}) \cdot \dots \cdot c_{k_n}(x_{k_1+\dots+k_{n-1}+1}, \dots, x_k), \quad k \geq 1,$$

где первое суммирование производится по множеству

$$\{(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n : k_1 + \dots + k_n = k\}.$$

Лемма 1.16. Пусть $k > 0$, тогда $d_k(x_1, \dots, x_k) = (-1)^k c_k(x_k, \dots, x_1)$.

Доказательство: Воспользуемся вновь методом математической индукции. Для $k = 1$ формула очевидна. Пусть она верна для $k = n - 1$, тогда для $k = n$

$$d_n(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} c_{n-j}(x_{n-j}, \dots, x_1) c_j(x_{n-j+1}, \dots, x_n).$$

Но в то же время легко проверить два равенства:

$$\begin{aligned} c_{n-1}(x_{n-1}, \dots, x_1) c_1(x_n) - c_{n-2}(x_{n-2}, \dots, x_1) c_2(x_{n-1}, x_n) \\ = c_n(x_n, \dots, x_1) - c_{n-2}(x_{n-2}, \dots, x_1) c_3(x_{n-2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} c_{n-j-1}(x_{n-j-1}, \dots, x_1) c_{j+1}(x_{n-j}, \dots, x_n) \\ - c_{n-j}(x_{n-j}, \dots, x_1) c_{j+1}(x_{n-j}, \dots, x_n) \\ = c_{n-j-1}(x_{n-j-1}, \dots, x_1) c_{j+2}(x_{n-j-1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

для всех $2 \leq j \leq n - 2$, из которых и следует утверждение леммы. ■

Первое равенство леммы 1.2 является следствием последнего утверждения. Действительно, давайте сделаем преобразование $B_\mu(y) \rightarrow pB_\mu(y)$ в определении 1.3, где $p \in \mathbb{R}_+$ и может варьироваться. Тогда упорядоченная экспонента и обратный к ней оператор раскладываются в ряды вида

$$\Phi(x, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n a_n, \quad \Phi^{-1}(x, y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n b_n, \quad (1.35)$$

где $a_n = a_n(B, x, y)$ и $b_n = b_n(B, x, y)$. Из равенства $\Phi^{-1}(x, y)\Phi(x, y) = 1$ вытекает система рекуррентных соотношений вида

$$b_n = -a_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_{n-k} a_k, \quad n \geq 1, \quad (1.36)$$

из которой, с учетом соотношения (1.34) и леммы 1.16, следует справедливость первого утверждения леммы 1.2.

Глава 2. Ковариантное разложение теплового ядра

2.1 Определение

Ковариантное разложение является аналогом разложения гладкой функции в ряд Тейлора для случая некоммутирующих коэффициентов. Другими словами, если $g \in C^\infty(U, \mathfrak{g})$, то ковариантным разложением функции g около точки $y \in U$ называется разложение в ряд Тейлора конструкции вида

$$\Phi(y, x)g(x)\Phi(x, y),$$

где $x \in U$, и описание экспоненты $\Phi(x, y)$ дано в определении 1.4.

Лемма 2.1. Пусть $x, y \in U$, а также $g \in C^\infty(U, \mathfrak{g})$, тогда справедливо разложение

$$\Phi(y, x)g(x)\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x - y)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{n!} \nabla_{y^{\mu_1}} \dots \nabla_{y^{\mu_n}} g(y),$$

где оператор ∇_{y^μ} определен формулой (1.21).

Доказательство: Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим производную порядка n и воспользуемся леммой 1.4 и следствием 1.4.1, тогда можно выписать равенство

$$\partial_{x^{\mu_1}} \dots \partial_{x^{\mu_n}} \Phi(y, x)g(x)\Phi(x, y) = \Phi(y, x) (\nabla_{x^{\mu_1}} \dots \nabla_{x^{\mu_n}} g(x)) \Phi(x, y) + \dots,$$

где многоточие обозначает слагаемые, содержащие $F_{\mu\nu}$ и ее производные и/или слагаемые из поправки $o(1)$. Далее легко заметить, что при домножении на моном $(x - y)^{\mu_1 \dots \mu_n}$ все слагаемые, за исключением первого, обращаются в нуль из-за свойства

$$(x - y)^{\mu_i} (x - y)^{\mu_j} F_{\mu_i \mu_j} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{(x - y)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{n!} \left(\partial_{x^{\mu_1}} \dots \partial_{x^{\mu_n}} \Phi(y, x)g(x)\Phi(x, y) \Big|_{x=y} \right) \\ = \frac{(x - y)^{\mu_1 \dots \mu_n}}{n!} \nabla_{y^{\mu_1}} \dots \nabla_{y^{\mu_n}} g(y), \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение данной леммы. ■

2.2 Калибровка Фока—Швингера

Для удобства дальнейшего изложения мы определим две функции двух переменных $(x, y) \in U \times U$:

$$f_\mu(x - y, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - y)^{\mu_1 \dots \mu_k}}{(k + 1)!} (\nabla_{y^{\mu_1}} \dots \nabla_{y^{\mu_k}} F_{\mu_k \mu}(y)); \quad (2.1)$$

$$f_\mu^{\text{FS}}(x - y, y) = (x - y)^\nu \partial_{x^\nu} f_\mu(x - y, y). \quad (2.2)$$

Из формул видно, что для каждого фиксированного значения дискретного параметра μ функции являются отображениями из $U \times U$ в \mathfrak{g} . При этом мы не будем требовать сходимости рядов, предполагая лишь их асимптотичность. Для нахождения коэффициентов Сили—деВитта этого достаточно.

Из построения также следует, что функции удовлетворяют условию Фока—Швингера, которое может быть записано в виде

$$(x - y)^\mu f_\mu(x - y, y) = 0, \quad (x - y)^\mu f_\mu^{\text{FS}}(x - y, y) = 0. \quad (2.3)$$

Иногда такую калибровку также называют радиальной [98] или релятивистской калибровкой Пуанкаре [99; 100].

Теорема 2.2. Пусть $x, y \in U$ и $\mu \in \{1, \dots, d\}$, тогда справедливы соотношения

$$\vec{D}_{x^\mu} \Phi(x, y) = \Phi(x, y) f_\mu^{\text{FS}}(x - y, y), \quad (2.4)$$

$$\Phi(x, y) \overleftarrow{D}_{y^\mu} = -f_\mu^{\text{FS}}(y - x, x) \Phi(x, y), \quad (2.5)$$

$$\Phi(x, y) \overleftarrow{D}_{y^\mu} = \Phi(x, y) f_\mu(x - y, y), \quad (2.6)$$

$$\vec{D}_{x^\mu} \Phi(x, y) = -f_\mu(y - x, x) \Phi(x, y), \quad (2.7)$$

где “левая” и “правая” производные были введены в определении 1.5.

Доказательство: Рассмотрим сперва первую формулу. Применяя лемму 2.1 к функции $F_{\nu\mu}$ в точке $z^\mu(t) = (1 - t)y^\mu + tx^\mu$, мы можем выписать разложение

$$\Phi(y, z) F_{\nu\mu}(z) \Phi(z, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - y)^{\mu_1 \dots \mu_k}}{k!} \nabla_{y^{\mu_1}} \dots \nabla_{y^{\mu_k}} F_{\nu\mu}(y).$$

Тогда интеграл из леммы 1.4 можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dt t(x-y)^\nu \Phi(x, z(t)) F_{\nu\mu}(z(t)) \Phi(z(t), y) \\ &= \Phi(x, y) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-y)^{\mu_1 \dots \mu_k}}{(k+1)!} k \nabla_{y^{\mu_1}} \dots \nabla_{y^{\mu_{k-1}}} F_{\mu_k \mu}(y), \end{aligned}$$

откуда и следует равенство (2.4). Далее, выбирая параметризацию в виде $w^\mu(t) = (1-t)x^\mu + ty^\mu$, мы получаем формулу (2.5). Соотношения (2.6) и (2.7) следуют из применения аналогичных действий к интегралу из следствия 1.4.1. ■

Следствие 2.2.1. Пусть $x, y \in U$ и $\mu \in \{1, \dots, d\}$, тогда верны соотношения

$$\Phi(x, y) f_\mu(x-y, y) = -f_\mu^{\text{FS}}(y-x, x) \Phi(x, y),$$

$$\Phi(x, y) (f_\mu(x-y, y) + f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y)) = - (f_\mu(y-x, x) + f_\mu^{\text{FS}}(y-x, x)) \Phi(x, y).$$

Следствие 2.2.2. Пусть $x, y \in U$ и $\mu \in \{1, \dots, d\}$, тогда

$$B_\mu(x) = \Phi(x, y) [(x-y)^\nu \partial_{x^\nu} \Phi(y, x) \partial_{y^\mu} \Phi(x, y)] \Phi(y, x) - [\partial_{x^\mu} \Phi(x, y)] \Phi(y, x).$$

Первое следствие является результатом комбинирования формул (2.4)–(2.7), второе следует из равенств (2.4) и (2.6) и определения (2.2). Давайте также перепишем формулу (2.4) в виде

$$f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y) = \Phi^{-1}(x, y) \partial_{x^\mu} \Phi(x, y) + \Phi^{-1}(x, y) B_\mu(x) \Phi(x, y). \quad (2.8)$$

Из последнего равенства видно, что $f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y)$ является калибровочным преобразованием компонент связности $B_\mu \in \mathfrak{g}$ при помощи группового элемента $\Phi(x, y) \in \mathcal{G}$, где \mathcal{G} — группа калибровочных преобразований.

2.3 Рекуррентная система в калибровке Фока—Швингера

На данном этапе удобно вернуться к системе дифференциальных уравнений (1.5) для коэффициентов Сили—деВитта и найти решение для случая,

когда калибровочное поле удовлетворяет условию Фока—Швингера (2.3). Для этого сделаем подстановку

$$a_n(x, y) = \Phi(x, y)\hat{a}_n(x, y). \quad (2.9)$$

Тогда, применяя лемму 2.1 о ковариантном разложении и теорему 2.2 о коммутационных соотношениях, рекуррентная система уравнений (1.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} a_0(x, y) &= 1, \\ (n + (x - y)^\mu \partial_{x^\mu})a_n(x, y) &= -A(x - y, y)a_{n-1}(x, y), \quad n > 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где оператор определяется формулой

$$\begin{aligned} A(x - y, y) &= \Phi(y, x)A(x)\Phi(x, y) \\ &= -(\partial + f^{\text{FS}}(x - y, y))_\mu (\partial + f^{\text{FS}}(x - y, y))^\mu - V(x - y, y), \end{aligned} \quad (2.11)$$

и ковариантное разложение потенциала имеет вид

$$V(x - y, y) = \Phi(y, x)v(x)\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - y)^{\mu_1 \dots \mu_k}}{k!} \nabla_{y^{\mu_1}} \dots \nabla_{y^{\mu_k}} v(y). \quad (2.12)$$

Лемма 2.3. Пусть $x, y \in U$, тогда решение системы уравнений (2.10) имеет вид

$$\begin{aligned} a_n(x, y) &= (-1)^n \int_0^1 dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 A(t_n(x - y), y) \dots \\ &\quad A(t_1(x - y), y) \cdot 1, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для доказательства последней леммы достаточно использовать индукционный переход.

2.4 Вторая нерекурсивная формула

Обозначения. Для вывода нерекурсивной формулы нам потребуется некоторый набор вспомогательных операторов, поэтому необходимо ввести дополнительные обозначения.

При помощи выделенных курсивом греческих символов с индексом μ_i мы будем обозначать пару (μ_i, i) , где $\mu_i \in \{1, \dots, d\}$ и $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, равенство $\mu_i = \mu_j$ эквивалентно двум соотношениям: $\mu_i = \mu_j$ и $i = j$. Также, если в формуле появляется дважды повторяющийся индекс $\mu_i \mu_i$, то подразумевается суммирование по μ_i от 1 до d .

Далее, при помощи круглых скобок мы будем обозначать симметризацию. Для примера, тензор с индексами $(\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1})$ равен отношению суммы тензоров со всевозможными перестановками индексов и $k!$. При этом, если индексы выделены вертикальными символами $|$, то они не участвуют в симметризации.

Также, если $\sigma = \{\sigma(p), \dots, \sigma(1)\}$ является множеством чисел, то по определению будем подразумевать, что $\mu_\sigma = \mu_{\sigma(p)} \dots \mu_{\sigma(1)}$ является мульти-индексом.

Определения операторов. В данной части мы определим набор операторов и необходимые свойства между ними. Рассуждая глобально, нам потребуется четыре типа операторов:

- \mathbf{A}^{μ_j} — оператор дифференцирования;
- \mathbf{S}^k — оператор интегрирования, где $k > 0$;
- $\mathbf{\Omega}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}}$ — оператор домножения, где $i_k \geq \dots \geq i_2 \geq i_1 > 0$, $k > 0$;
- $\mathbf{\Upsilon}$ — отображение, которое сопоставляет оператору домножения тензор.

Стоит обратить внимание, что $\mathbf{\Upsilon}$ зависит от точки $y \in U$, обозначение которой мы будем опускать.

Далее мы определим порождающий элемент $\mathbb{1}$ соотношениями

$$\mathbf{\Upsilon} \mathbb{1} = 1 \text{ и } \mathbf{A}^{\mu_j} \mathbb{1} = 0 \quad (2.14)$$

и опишем необходимые и достаточные для построения решения свойства операторов. Их можно сформулировать в виде набора коммутационных соотношений

$$\mathbf{\Upsilon} \mathbf{\Omega}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} = \tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} \mathbf{\Upsilon}, \quad \mathbf{\Upsilon} \mathbf{S}^k = \frac{1}{k} \mathbf{\Upsilon}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{A}^{\mu_j} \mathbf{\Omega}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} = \mathbf{\Omega}^{\mu_j \mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} \mathbf{A}^{\mu_j}, \quad \mathbf{A}^{\mu_j} \mathbf{S}^k = \mathbf{S}^{k+1} \mathbf{A}^{\mu_j}, \quad (2.16)$$

где $k > 0$, $j \geq i_k \geq \dots \geq i_2 \geq i_1 > 0$, и тензор $\tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}}$ определяется в несколько этапов:

если $i_2 > i_1$, тогда

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} = \frac{2(k-1)}{k} \nabla_{(\mu_{i_k}} \dots \nabla_{\mu_{i_3}} F_{\mu_{i_2})\mu_{i_1}}(y); \quad (2.17)$$

если $i_2 = i_1$, тогда

$$\tilde{\Omega}^{\mu_{i_2}\mu_{i_1}} = v(y); \quad (2.18)$$

$$\tilde{\Omega}^{\mu_{i_3}\mu_{i_2}\mu_{i_1}} = \frac{2}{3} \nabla_{(\mu_{i_3} F_{\mu_{i_1}})_{\mu_{i_1}}}(y) + \nabla_{\mu_{i_3}} v(y); \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^{\mu_{i_k}\dots\mu_{i_1}} &= \frac{k-1}{k} \nabla_{(\mu_{i_k} \dots \nabla_{\mu_{i_3}} F_{\mu_{i_1}})_{\mu_{i_1}}}(y) + \nabla_{(\mu_{i_k} \dots \nabla_{\mu_{i_3}})v}(y) + \\ &+ \sum_{n=0}^{k-4} \frac{(n+1)(k-n-3)(k-2)!}{(n+2)!(k-n-2)!} \nabla_{(\mu_{i_k} \dots \nabla_{\mu_{i_{n+5}}} F_{\mu_{i_{n+4}}})_{|\mu_{i_1}|}}(y) \nabla_{\mu_{i_{n+3}}} \\ &\dots \nabla_{\mu_{i_4}} F_{\mu_{i_3}})_{\mu_{i_1}}(y). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ежели последняя функция содержит один индекс, то она равна нулю $\tilde{\Omega}^{\mu_i} = 0$. Также представляется удобным добавить обозначение $\tilde{\Omega}^{\mu_\sigma} = 1$, если $\sigma = \emptyset$, которое позволит записать ответ в более компактном виде.

Лемма 2.4. Пусть $y \in U$ и $n \geq 0$, тогда, принимая во внимание определения (2.14)–(2.20), мы имеем

$$a_n(y, y) = \Upsilon \prod_{k=1}^n S^k (A^{\mu_{2k}} A^{\mu_{2k}} + \Omega^{\mu_{2k}} A^{\mu_{2k}} + \Omega^{\mu_{2k}\mu_{2k}}) \mathbb{1}.$$

Доказательство: Утверждение следует из подстановки определений (2.11) и (2.12) в формулу (2.13), а также вида оператора Лапласа

$$\begin{aligned} -A(x-y, y) &= \partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu} + 2f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y) \partial_{x_\mu} + \\ &+ \partial_{x_\mu} f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y) + f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y) f^{\text{FS}\mu}(x-y, y) + V(x-y, y). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Свойство (2.16) оператора интегрирования учитывает соотношение между степенью параметра параметризации и числом производных, действующих на подынтегральную функцию в формуле (2.13). ■

Следует отметить, что в формуле из леммы 2.4 индекс μ_{2k} имеет четный параметр. Такой выбор сделан специально для удобства формулировки следующей теоремы. При этом он не влияет на результат, поскольку индекс μ_{2k} является немым, и упорядочивание, которое важно в (2.17)–(2.20), не нарушается.

Теорема 2.5. Пусть $I_{2n} = \{2n, \dots, 1\}$ и σ_n — множество всех множеств $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$, таких что $\sigma_i = \{\sigma_i(p_i), \dots, \sigma_i(1)\}$, где $p_i = \#\sigma_i$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\sigma_i(k) > \sigma_i(j)$ для $p_i \geq k > j \geq 1$;
2. $\cup_{j=1}^n \sigma_j = I_{2n}$;
3. $\sigma_i \subset \{2n, \dots, 2i - 1\} \setminus (\cup_{j=i+1}^n \sigma_j)$;
4. либо $\{2i - 1\} \subset \sigma_i$, либо $\sigma_i = \emptyset$,

для всех $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда формула для диагональной части $a_n(x, y)$ имеет вид

$$a_n(y, y) = \sum_{\sigma_n} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_n}}}{\sum_{i=1}^n p_i - n} \cdots \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_2}}}{p_1 + p_2 - 2} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_1}}}{p_1 - 1} \Bigg|_{\mu_{2j-1} = \mu_{2j}, \forall j}. \quad (2.22)$$

Доказательство: Для того чтобы показать равенство формулы (2.22) и утверждения из леммы 2.4, удобно сперва доказать соотношение более общего характера. Мы покажем, что для $n > 0$ верна формула

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n S^i (\mathbf{A}^{\mu_{2i}} \mathbf{A}^{\mu_{2i}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{2i}} \mathbf{A}^{\mu_{2i}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{2i}\mu_{2i}}) \mathbb{1} &= \\ &= \sum_{\sigma_n} \mathbf{S}^{\sum_{i=1}^n p_i - n} \mathbf{\Omega}^{\mu_{\sigma_n}} \cdots \mathbf{S}^{p_1 + p_2 - 2} \mathbf{\Omega}^{\mu_{\sigma_2}} \mathbf{S}^{p_1 - 1} \mathbf{\Omega}^{\mu_{\sigma_1}} \mathbb{1} \Bigg|_{\mu_{2j-1} = \mu_{2j}, \forall j}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

тогда, применяя оператор Υ , мы получим утверждение леммы. Доказательство удобно проводить по индукции. Действительно, для $n = 1$ формула очевидна. Предположим, что имеет место равенство при $n = k - 1$, и докажем для $n = k$. Чтобы сделать индукционный переход мы подействуем оператором

$$\mathbf{S}^k (\mathbf{A}^{\mu_{2k}} \mathbf{A}^{\mu_{2k}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{2k}} \mathbf{A}^{\mu_{2k}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{2k}\mu_{2k}}) \quad (2.24)$$

на соотношение для случая $n = k - 1$. Отождествление $\mu_{2j-1} = \mu_{2j}$ в правой части равенства (2.23) работает для $j \in \{1, \dots, k - 1\}$, поэтому мы можем добавить дополнительное равенство $\mu_{2k-1} = \mu_{2k}$ и внести оператор (2.24) в виде

$$\mathbf{S}^k (\mathbf{A}^{\mu_{2k}} \mathbf{A}^{\mu_{2k-1}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{2k-1}} \mathbf{A}^{\mu_{2k}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{2k}\mu_{2k-1}}).$$

Далее, чтобы понять переход $\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k$, удобно рассмотреть каждое слагаемое отдельно:

1) Слагаемое с оператором $\mathbf{S}^k \mathbf{\Omega}^{\mu_{2k}\mu_{2k-1}}$ описывается перестановками $\{\sigma_i\}_{i=1}^k$, в которых $\sigma_k = \{2k, 2k - 1\}$ и $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k-1} \in \sigma_{k-1}$. С учетом равенства $p_k = 2 = 2k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$ мы можем написать $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^{\sum_{i=1}^k p_i - k}$;

2) Слагаемое с оператором $\mathbf{S}^k \mathbf{\Omega}^{\mu_{2k-1}} \mathbf{A}^{\mu_{2k}}$ соответствует множеству, в котором $\sigma_k = \{2k - 1\}$, и подмножество $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k-1}$ сконструировано из элемента множества σ_{k-1} при помощи комбинирования одного из его элементов с $\{2k\}$. Также, $p_k = 1 = 2k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$;

3) Слагаемое с оператором $\mathbf{S}^k \mathbf{A}^{\mu_{2k}} \mathbf{A}^{\mu_{2k-1}}$ соответствует $\sigma_k = \emptyset$ и $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k-1}$, который получается добавлением $\{2k\}$ и $\{2k - 1\}$ в элементы множества σ_{k-1} . Следовательно, $p_k = 0 = 2k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i$. ■

2.5 Примеры вычислений

В качестве примеров использования второй нерекурсивной формулы приведем подсчет первых трех диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта $a_n(x, y)$, где $n = 1, 2, 3$.

$n = 1$: в этом случае возникает лишь одно слагаемое, равное

$$a_1(y, y) = \tilde{\Omega}^{\mu_1 \mu_1} = v(y).$$

$n = 2$: формула из теоремы 2.5 переписывается в виде

$$a_2(y, y) = \sum_{\sigma_2} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_2}}}{(p_1 + p_2 - 2)} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_1}}}{(p_1 - 1)} \Bigg|_{\mu_{2j-1} = \mu_{2j}, \forall j}. \quad (2.25)$$

Давайте выпишем все возможные подмножества $\{\sigma_i\}_{i=1}^2$:

$$\{4, 3\}\{2, 1\}, \{3\}\{4, 2, 1\}, \emptyset \{4, 3, 2, 1\}.$$

Поскольку $\tilde{\Omega}^{\mu_3} = 0$ и $\nabla_{(\mu_4 \nabla_{\mu_4} F_{\mu_2})\mu_2} = 0$, мы получаем следующий ответ

$$\frac{1}{2} \tilde{\Omega}^{\mu_4 \mu_4} \tilde{\Omega}^{\mu_2 \mu_2} + \frac{1}{6} \tilde{\Omega}^{\mu_4 \mu_4 \mu_2 \mu_2} = \frac{1}{2} v^2(y) + \frac{1}{12} F_{\mu_4 \mu_2}(y) F_{\mu_4 \mu_2}(y) + \frac{1}{6} \nabla_{\mu_4} \nabla_{\mu_4} v(y). \quad (2.26)$$

$n = 3$: в данном случае формула для коэффициента такова

$$a_3(y, y) = \sum_{\sigma_3} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_3}}}{(p_1 + p_2 + p_3 - 3)} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_2}}}{(p_1 + p_2 - 2)} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_1}}}{(p_1 - 1)} \Bigg|_{\mu_{2j-1} = \mu_{2j}, \forall j}. \quad (2.27)$$

Принимая во внимание равенства $\tilde{\Omega}^{\mu_1} = 0$ и $\tilde{\Omega}^{\mu_6 \mu_4} \tilde{\Omega}^{\mu_6 \mu_4 \mu_2 \mu_2} = 0$, мы выписываем лишь ненулевые подмножества $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$:

$$\emptyset \emptyset \{6, 6, 4, 4, 2, 2\}, \emptyset \{4, 4\}\{6, 6, 2, 2\}, \emptyset \{6, 6, 4\}\{4, 2, 2\}, \emptyset \{6, 4, 4\}\{6, 2, 2\},$$

$\emptyset \{6,4,4\}\{6,2,2\}$, $\emptyset \{6,6,4,4\}\{2,2\}$, $\{6,6\} \emptyset \{4,4,2,2\}$, $\{6,6\}\{4,4\}\{2,2\}$.

Поскольку верны соотношения

$$\nabla_{(\mu_6 \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_4} \nabla_{\mu_4} F_{\mu_2})\mu_2} = 0, \quad \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_4} F_{\mu_6\mu_4} = 0,$$

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} f = \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} f + F_{\mu\nu} f + f F_{\nu\mu}, \quad \nabla_{\mu} F_{\nu\rho} + \nabla_{\nu} F_{\rho\mu} + \nabla_{\rho} F_{\mu\nu} = 0,$$

где f — произвольная гладкая функция, то мы получаем окончательный результат для диагональной части коэффициента в виде

$$\begin{aligned} a_3(y, y) = & \frac{1}{45} \nabla_{\mu_6} F_{\mu_2\mu_4} \nabla_{\mu_6} F_{\mu_2\mu_4} + \frac{1}{180} \nabla_{\mu_6} F_{\mu_2\mu_6} \nabla_{\mu_4} F_{\mu_2\mu_4} + \\ & + \frac{1}{60} \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_6} F_{\mu_2\mu_4} F_{\mu_2\mu_4} - \frac{1}{30} F_{\mu_2\mu_4} F_{\mu_4\mu_6} F_{\mu_6\mu_2} + \frac{1}{60} F_{\mu_2\mu_4} \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_6} F_{\mu_2\mu_4} + \\ & + \frac{1}{6} v^3 + \frac{1}{12} (\nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_6} v) v + \frac{1}{12} \nabla_{\mu_6} v \nabla_{\mu_6} v + \frac{1}{12} v \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_6} v + \\ & + \frac{1}{30} v F_{\mu_2\mu_4} F_{\mu_2\mu_4} + \frac{1}{60} F_{\mu_2\mu_4} v F_{\mu_2\mu_4} + \frac{1}{30} F_{\mu_2\mu_4} F_{\mu_2\mu_4} v - \\ & - \frac{1}{60} \nabla_{\mu_2} v \nabla_{\mu_4} F_{\mu_4\mu_2} + \frac{1}{60} \nabla_{\mu_4} F_{\mu_4\mu_2} \nabla_{\mu_2} v + \frac{1}{60} \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_6} \nabla_{\mu_4} \nabla_{\mu_4} v. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Он полностью совпадает с известным результатом (см. [14]) и демонстрирует справедливость теоремы 2.5.

2.6 Обобщение второй нерекурсивной формулы

2.6.1 Формулировка результата и доказательство

Используя соображения главы 2, можно доказать более общий результат. Пусть, как и ранее, $U \subset \mathbb{R}^d$ является выпуклой гладкой областью, такой что $\dim U = d$. Далее введем набор гладких функций $a^{\mu\nu}, b^{\mu}, c \in C^{\infty}(U)$, возможно, некоммутирующих между собой, и определим оператор второго порядка равенством

$$A(x) = a^{\mu\nu}(x) \partial_{\mu} \partial_{\nu} + b^{\mu}(x) \partial_{\mu} + c(x), \quad x \in U. \quad (2.29)$$

Если точки x и y лежат в области U , то мы можем рассмотреть рекуррентную систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} a_0(x, y) &= 1, \\ (n + (x - y)^\mu \partial_\mu) a_n(x, y) &= A(x) a_{n-1}(x, y), \quad n > 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Затем, используя обозначения раздела 2.4, введем в рассмотрение набор операторов

$$\mathbf{A}^{\mu_j}, \mathbf{S}^k, \mathbf{\Omega}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}}, \mathbf{\Upsilon},$$

где $k > 0$, $j \geq i_k \geq \dots \geq i_1 > 0$, и порождающий элемент $\mathbb{1}$, которые подчиняются привычным соотношениям (2.14), (2.15) и (2.16). Изменения внесем лишь в определение $\mathbf{\Upsilon} \mathbf{\Omega}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} \mathbb{1} = \tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}}$, а именно:

если $k \geq 2$ и $i_2 > i_1$, то

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} = \partial_{(\mu_{i_k} \dots \mu_{i_3})} a^{\mu_{i_2} \mu_{i_1}}(y);$$

если $k \geq 3$ и $i_2 = i_1$, то

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} = \partial_{(\mu_{i_k} \dots \mu_{i_4})} b^{\mu_{i_3}}(y);$$

если $k \geq 4$ и $i_2 = i_1$, $i_4 = i_3$, то

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}^{\mu_{i_k} \dots \mu_{i_1}} = \partial_{(\mu_{i_k} \dots \mu_{i_5})} c(y).$$

Другие комбинации не возникают в разложении, поэтому оставим их без определения. Также напомним, что оператор $\mathbf{\Upsilon}$ является функцией точки $y \in U$.

Теорема 2.6. Пусть $y \in U$ и $n > 0$, тогда, с учетом вышеизложенных фактов, имеем соотношение

$$\begin{aligned} a_n(y, y) &= \mathbf{\Upsilon} \prod_{k=1}^n \mathbf{S}^k (\mathbf{\Omega}^{\mu_{4k} \mu_{4k-2}} \mathbf{A}^{\mu_{4k}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-2}} + \\ &\quad + \mathbf{\Omega}^{\mu_{4k} \mu_{4k-2} \mu_{4k-2}} \mathbf{A}^{\mu_{4k}} + \mathbf{\Omega}^{\mu_{4k} \mu_{4k} \mu_{4k-2} \mu_{4k-2}}) \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Доказательство: Символом $A(x - y, y)$ обозначим оператор $A(x)$, коэффициенты $a^{\mu\nu}(x)$, $b^\mu(x)$ и $c(x)$ которого разложены в ряд Тейлора по степеням разности $(x - y)$ около точки y . Тогда решение рекуррентной системы (2.30) записывается так

$$a_n(x, y) = \int_0^1 dt_n \dots \int_0^{t_2} dt_1 A(t_n(x - y), y) \dots A(t_1(x - y), y) \cdot 1, \quad n > 0.$$

Заключение доказательства следует после масштабирования $t_i \rightarrow \prod_{j=i}^n t_j$ в следующем порядке $i = n - 1, \dots, 1$ и использования определений для операторов. ■

Пусть $I_{4n} = \{4n, \dots, 1\}$, и σ_n является множеством всех подмножеств $\{\sigma_i\}_{i=1}^n$, таких что $\sigma_i = \{\sigma_i(p_i), \dots, \sigma_i(1)\}$, где $p_i = \#\sigma_i > 0$, удовлетворяющих соотношениям:

- $\sigma_i(k) > \sigma_i(j)$ для $p_i \geq k > j \geq 1$;
- $\cup_{j=1}^n \sigma_j = I_{4n}$;
- $\sigma_i \subset \{4n, \dots, 4i - 3\} \setminus (\cup_{j=i+1}^n \sigma_j)$;
- либо $\{4i, 4i - 2\} \subset \sigma_i$ и $4i - 1 \notin \sigma_i$, либо $\{4i, 4i - 1, 4i - 2, 4i - 3\} \subset \sigma_i$,

где $i \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 2.7. Пусть $y \in U$ и $n > 0$, тогда, с учетом вышеизложенных определений и свойств, имеет место равенство

$$a_n(y, y) = \sum_{\sigma_n} \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_n}}}{\sum_{i=1}^n p_i - 3n} \cdots \frac{\tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_1}}}{p_1 - 3} \Bigg|_{\mu_{2j-1} = \mu_{2j}}, \quad (2.32)$$

где $j \in \{1, \dots, 2n\}$.

Доказательство: Для того чтобы показать равенство формул (2.4) и (2.22), мы повторим доказательство теоремы 2.5, внося принципиальные изменения. Таким образом, нам необходимо доказать верность соотношения

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n S^k (\Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-2}} \mathbf{A}^{\mu_{4k}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-2}} + \\ & + \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-2} \mu_{4k-2}} \mathbf{A}^{\mu_{4k}} + \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k} \mu_{4k-2} \mu_{4k-2}}) \mathbb{1} = \\ & = \sum_{\sigma_n} S^{\sum_{i=1}^n p_i - 3n} \Omega^{\mu_{\sigma_n}} \dots \\ & \dots S^{p_1 + p_2 - 6} \Omega^{\mu_{\sigma_2}} S^{p_1 - 3} \Omega^{\sigma_1} \mathbb{1} \Big|_{\mu_{2j-1} = \mu_{2j}, \forall j}, \end{aligned}$$

где $n > 0$. Тогда, применяя оператор Υ , мы получим утверждение теоремы 2.7. Воспользуемся методом математической индукции. Действительно, для $n = 1$ формула очевидна. Предположим, что она верна для значения $n = k - 1$, и докажем ее для $n = k$. Применим к обеим частям соотношения оператор

$$S^k (\Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-2}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-1}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-3}} + \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-2} \mu_{4k-3}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-1}} + \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-1} \mu_{4k-2} \mu_{4k-3}})$$

и добавим два равенства $\mu_{4k-1} = \mu_{4k}$ и $\mu_{4k-3} = \mu_{4k-2}$. Рассмотрим каждое слагаемое отдельно и проследим за переходом $\sigma_{k-1} \rightarrow \sigma_k$:

1) Слагаемое $\mathbf{S}^k \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-1} \mu_{4k-2} \mu_{4k-3}}$ описывается перестановками $\{\sigma_i\}_{i=1}^k$, где $\sigma_k = \{4k, 4k-1, 4k-2, 4k-3\}$ и $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k-1} \in \sigma_{k-1}$. Учитывая, что $p_k = 4$ и $\sum_{i=1}^{k-1} p_i = 4k-4$, мы можем написать $\mathbf{S}^k = \mathbf{S}^{\sum_{i=1}^k p_i - 3k}$,

2) Слагаемое $\mathbf{S}^k \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-2} \mu_{4k-3}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-1}}$ соответствует множеству, в котором $\sigma_k = \{4k, 4k-2, 4k-3\}$, и $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k-1}$ строится с использованием множества из σ_{k-1} путем комбинирования одного из его элементов с $\{4k-1\}$. Следовательно, $p_k = 3$ и $\sum_{i=1}^{k-1} p_i = 4k-3$;

3) Слагаемое $\mathbf{S}^k \Omega^{\mu_{4k} \mu_{4k-2}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-1}} \mathbf{A}^{\mu_{4k-3}}$ соответствует $\sigma_k = \{4k, 4k-2\}$ и $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k-1}$, которое строится добавлением $4k-1$ и $4k-3$ в элементы множества из σ_{k-1} . Таким образом, $p_k = 2$ и $\sum_{i=1}^{k-1} p_i = 4k-2$. ■

2.6.2 Случай римановой метрики

Для наглядности вычислим первые два диагональных элемента. Для случая $n = 1$ суммирование в формуле (2.22) отсутствует. Действительно, вклад дает только одно множество $\sigma_1 = \{4, 3, 2, 1\}$, и мы мгновенно получаем ответ

$$a_1(y, y) = \tilde{\Omega}^{\mu_{\sigma_1}}|_{\mu_1=\mu_2, \mu_3=\mu_4} = c(y).$$

Для случая $n = 2$ имеется три множества:

$$\begin{aligned} &\{8, 6\} \{7, 5, 4, 3, 2, 1\}, \\ &\{8, 6, 5\} \{7, 4, 3, 2, 1\}, \\ &\{8, 7, 6, 5\} \{4, 3, 2, 1\}. \end{aligned}$$

Таким образом, используя определения операторов, окончательный ответ представим в виде

$$a_2(y, y) = \frac{1}{6} a^{\mu\nu}(y) \partial_\mu \partial_\nu c(y) + \frac{1}{4} b^\mu(y) \partial_\mu c(y) + \frac{1}{2} c^2(y).$$

Далее приведем более содержательный пример использования формулы (2.22). Пусть $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор с гладкими в области U компонентами, g — его детерминант. Далее, $B_\mu \in C^\infty(U)$ — гладкие компоненты калибровочной

связности со значениями в алгебре Ли, и $v \in C^\infty(U)$ — потенциал. Будем также предполагать, что задача рассматривается с использованием нормальных координат, центрированных в точке $y \in U$, а компоненты калибровочной связности удовлетворяют соотношению Фока—Швингера. Это означает, что первые порядки разложения в ряд Тейлора имеют вид

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}(x) &= \delta^{\mu\nu} + \frac{1}{3}(x-y)^{\alpha\beta} R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta(y) + \frac{1}{6}(x-y)^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha R^\mu{}_\beta{}^\nu{}_\gamma(y) \\ &\quad + \frac{1}{15}(x-y)^{\alpha\beta\delta\gamma} R^\mu{}_{\alpha\beta\lambda}(y) R^\lambda{}_{\gamma\delta}{}^\nu{}_\delta(y) \\ &\quad + \frac{1}{20}(x-y)^{\alpha\beta\delta\gamma} \partial_\alpha \partial_\beta R^\mu{}_{\gamma}{}^\nu{}_\delta(y) + O(|x-y|^5), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} B_\mu(x) &= \frac{1}{2}(x-y)^\nu F_{\nu\mu}(y) + \frac{1}{3}(x-y)^{\alpha\beta} \nabla_\alpha F_{\beta\mu}(y) \\ &\quad + \left(\frac{1}{24} R^\lambda{}_{\alpha\mu\beta}(y) F_{\lambda\gamma}(y) + \frac{1}{8} \nabla_\alpha \nabla_\beta F_{\gamma\mu}(y) \right) (x-y)^{\alpha\beta\gamma} + O(|x-y|^4), \end{aligned}$$

где были использованы обозначения (1.13) и (1.21), и y является параметром. Следующие порядки разложения коэффициентов $g^{\mu\nu}$ и B_μ могут быть найдены в работах [101; 102].

В этом случае оператор Лапласа $A(x)$ имеет вид

$$g^{-1/4}(x) \overrightarrow{D}_\mu g^{\mu\nu}(x) g^{1/2}(x) \overrightarrow{D}_\nu g^{-1/4}(x) - V(x),$$

где потенциал

$$V(x) = v(y) + (x-y)^\mu \nabla_\mu v(y) + (x-y)^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu v(y) + O(|x-y|^3).$$

Функции $a^{\mu\nu}(x)$, $b^\nu(x)$ и $c(x)$, введенные выше, могут быть записаны так:

$$a^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, \quad b^\nu = 2B_\mu g^{\mu\nu} + \partial_\mu g^{\mu\nu},$$

$$\begin{aligned} c &= B_\mu g^{\mu\nu} B_\nu + (\partial_\mu g^{\mu\nu}) B_\nu + g^{\mu\nu} (\partial_\mu B_\nu) \\ &\quad - \frac{1}{4} g^{-1} (\partial_\mu g^{\mu\nu}) (\partial_\nu g) - \frac{1}{4} g^{-1} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu g) \\ &\quad \quad \quad + \frac{3}{16} g^{-2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu g) (\partial_\nu g) - V. \end{aligned}$$

Для того чтобы вычислить диагональные части коэффициентов Сили—деВитта, необходимо знать разложение для детерминанта метрического тензора g , которое выписывается благодаря соотношению

$$\det g = \exp(\ln \det g) = \exp(\text{Tr} \ln g)$$

и имеет вид

$$\begin{aligned}
g(x) = & 1 - \frac{1}{3}(x - y)^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(y) - \frac{1}{6}(x - y)^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma R_{\alpha\beta}(y) \\
& - \left(\frac{1}{20}\partial_\gamma\partial_\delta R_{\alpha\beta}(y) + \frac{1}{90}R^\mu{}_\alpha{}^\nu{}_\beta(y)R_{\mu\gamma\nu\delta}(y) - \frac{1}{18}R_{\alpha\beta}(y)R_{\gamma\delta}(y) \right) (x - y)^{\alpha\beta\gamma\delta} \\
& + O(|x - y|^5).
\end{aligned}$$

Таким образом, результаты для первых двух коэффициентов следующие

$$a_1(y, y) = \frac{1}{6}R(y) - v(y),$$

$$\begin{aligned}
a_2(y, y) = & \frac{1}{30}\partial_\mu\partial^\mu R(y) + \frac{1}{72}R^2(y) \\
& - \frac{1}{180}R^{\alpha\beta}(y)R_{\alpha\beta}(y) + \frac{1}{180}R^{\alpha\beta\gamma\delta}(y)R_{\alpha\beta\gamma\delta}(y) \\
& + \frac{1}{12}F^{\alpha\beta}(y)F_{\alpha\beta}(y) - \frac{1}{6}\nabla_\alpha\nabla^\alpha v(y) - \frac{1}{6}R(y)v(y) + \frac{1}{2}v^2(y).
\end{aligned}$$

Точно такие же ответы были получены ранее в работе [98]. Также, повторяя шаг за шагом вычисления, мы можем убедиться, что ответы для следующих коэффициентов совпадают со значениями из работ [74; 76].

2.7 Связь с континуальным представлением

Подход, которому посвящена данная часть работы, в большей степени ориентирован на компактную запись и уточнение физического смысла. Функциональный интеграл в некотором роде является золотой серединой, поскольку он сохраняет необходимые математические свойства для работы с физическими явлениями, хотя и содержит по сей день множество открытых вопросов.

Переход от ранее изученного асимптотического разложения (1.3) к континуальному представлению осуществляется в два этапа. Вначале мы докажем, что при малых временах асимптотический ряд может быть записан в виде экспоненциальной формулы (2.41), а затем на основе базовой формулы (2.59) сделаем переход к функциональному интегрированию (2.63). При этом мы будем предполагать, что коэффициенты Сили—деВитта допускают разложение в сходящийся ряд Тейлора.

2.7.1 Задача Штурма—Лиувилля

Пусть $\tau > 0$. Рассмотрим задачу Штурма—Лиувилля

$$-\frac{1}{2}y''_{ss}(s) = \lambda y(s)$$

на промежутке $[0, \tau]$ с однородными краевыми условиями $y(0) = y(\tau) = 0$.

Известно, что

$$\lambda_n = \frac{1}{2}(\pi n/\tau)^2 \quad \text{и} \quad \psi_n(s) = \sqrt{2/\tau} \sin(\sqrt{2\lambda_n} s) \quad (2.33)$$

являются его собственными значениями и функциями соответственно. Функция Грина $g(s, t)$ для такой задачи является решением системы

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}g''_{ss}(s, t) = \delta(s - t); \\ g(0, t) = g(\tau, t) = 0, \quad t \in [0, \tau], \end{cases}$$

и имеет вид (см. [103])

$$g(s, t) = \begin{cases} \frac{2s}{\tau}(\tau - t), & s \leq t; \\ \frac{2t}{\tau}(\tau - s), & s > t. \end{cases} \quad (2.34)$$

В дальнейшем нам потребуются ее производные по аргументам. Помимо очевидных вычислений, следует определить производную в точке излома равенством

$$\frac{d}{ds}g(s, t) \Big|_{t=s} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds}g(s, t) \Big|_{t=s+0} + \frac{1}{2} \frac{d}{ds}g(s, t) \Big|_{t=s-0} = 1 - \frac{2s}{\tau}, \quad (2.35)$$

а также вторую смешанную производную

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt}g(s, t) = -\frac{2}{\tau} + \frac{2}{\tau} \delta(s - t). \quad (2.36)$$

2.7.2 Основные обозначения

Пусть $\{\eta_\mu\}_{\mu=1}^d$, где $\eta_\mu \in C^\infty(0, \tau)$ для всех $\mu \in \{1, \dots, d\}$, является множеством “внешних” источников. Будем обозначать $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)$, а также

предполагать, что они удовлетворяют соотношению

$$\frac{\delta\eta_\mu(s)}{\delta\eta_\nu(t)} = \delta_\mu^\nu \delta(s-t), \quad (2.37)$$

которое называется функциональной производной.

Далее определим функционал

$$b(\eta) = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^\tau ds dt \eta_\mu(s) g(s,t) \eta^\mu(t), \quad (2.38)$$

производная которого по параметру τ , с учетом функции Грина (2.34), имеет вид

$$\frac{d}{d\tau} b(\eta) = \frac{1}{\tau^2} \int_0^\tau ds s \eta_\mu(s) \int_0^\tau dt t \eta^\mu(t). \quad (2.39)$$

Также, для краткости, стоит ввести дополнительное обозначение

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x-y, t, \tau\right) &= -f_\mu^{\text{FS}}\left(\frac{\delta}{\delta\eta(t)} + \frac{t(x-y)}{\tau}\right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta\eta_\mu(t)} + \frac{(x-y)^\mu}{\tau}\right) \\ &+ V\left(\frac{\delta}{\delta\eta(t)} + \frac{t(x-y)}{\tau}\right), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $t \in [0, \tau]$, $x, y \in U$, и в функциях $f_\mu^{\text{FS}}(x-y, y)$ и $V(x-y, y)$ опущен второй аргумент, поскольку он не важен при доказательстве.

2.7.3 Экспоненциальная формула

Теорема 2.8. Пусть $x, y \in U$, $\hat{a}_k(x, y)$ — функции из (2.13) и $\tau > 0$ достаточно мало. Тогда, с учетом определений (2.37)–(2.40) и вышеизложенных предположений, верно соотношение

$$P_t e^{\int_0^\tau dt J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x-y, t, \tau\right) e^{b(\eta)}} \Big|_{\eta=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \hat{a}_k(x, y). \quad (2.41)$$

Доказательство: Рассмотрим сначала случай без потенциала. Относительно левой части формулы (2.41) важно сделать наблюдение. Давайте во всех интегралах заменим переменную $t \rightarrow \tau t$, тогда, учитывая свойство

$$\delta(\tau t - \tau s) = \tau^{-1} \delta(t - s),$$

мы можем перейти к новым внешним источникам $\eta_\mu(\tau t) \rightarrow \hat{\eta}_\mu(t)$ на промежутке $[0,1]$. При этом, чтобы сохранить вид соотношения (2.37), в левой части (2.41) удобно сделать подстановки

$$\frac{\delta}{\delta\eta_\mu(\tau t)} \rightarrow \frac{\delta}{\delta\hat{\eta}_\mu(t)}, \quad \eta_\mu(\tau t) \rightarrow \frac{1}{\tau}\hat{\eta}_\mu(t). \quad (2.42)$$

Таким образом, легко убедиться, что степень параметра τ равна степени функционала $b(\eta)$. Следовательно, справедливо разложение вида

$$P_t e^{\int_0^\tau dt J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x-y, t, \tau\right)} \frac{1}{k!} b^k(\eta) \Big|_{\eta=0} = \tau^k c_k(x, y). \quad (2.43)$$

Проверим, что коэффициенты $c_k(x, y)$ удовлетворяют тем же уравнениям (2.10), что и коэффициенты $\hat{a}_k(x, y)$, откуда и будет следовать их равенство.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Необходимо показать, что $(k + (x - y)^\mu \partial_{x^\mu}) c_k(x, y)$ может быть представлен в виде суммы четырех слагаемых

$$\begin{aligned} & \partial_{x^\mu} \partial_{x^\mu} c_{k-1}(x, y) + \left(\partial_{x^\mu} f_\mu^{\text{FS}}(x - y) \right) c_{k-1}(x, y) + \\ & + f^{\text{FS}\mu}(x - y) f_\mu^{\text{FS}}(x - y) c_{k-1}(x, y) + 2f_\mu^{\text{FS}}(x - y) \partial_{x^\mu} c_{k-1}(x, y). \end{aligned} \quad (2.44)$$

На данном этапе стоит заметить, что оператор $(k + (x - y)^\mu \partial_\mu) \tau^{k-1}$ можно представить в виде произведения трех операторов

$$\tau^{-(x-y)^\mu \partial_\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} \tau^{(x-y)^\mu \partial_\mu} \tau^k.$$

Ясно, что первый оператор $\tau^{(x-y)^\mu \partial_\mu}$ домножает $(x - y)^\mu$ на τ . Затем берется производная по переменной τ , и последний оператор делит $(x - y)^\mu$ на τ . После вычислений, с учетом формулы (2.39), определения упорядоченной экспоненты и равенства

$$\tau^{(x-y)^\mu \partial_\mu} J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, t, \tau\right) = J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, t, 1\right), \quad (2.45)$$

результат в левой части (2.43) принимает вид

$$\begin{aligned} & P_t e^{\int_0^\tau dt J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x-y, t, \tau\right)} \frac{1}{(k-1)!} b^{k-1}(\eta) \int_0^\tau ds \frac{s\eta_\mu(s)}{\tau} \int_0^\tau d\hat{s} \frac{\hat{s}\eta^\mu(\hat{s})}{\tau} \Big|_{\eta=0} + \\ & + J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, \tau, \tau\right) P_t e^{\int_0^\tau dt J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x-y, t, \tau\right)} \frac{1}{k!} b^k(\eta) \Big|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Прежде всего необходимо обратить внимание на первое слагаемое. Учитывая, что

$$\begin{aligned} f_{\rho}^{\text{FS}} \left(\frac{\delta}{\delta\eta(t)} + \frac{tx}{\tau} \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta\eta_{\rho}(t)} + \frac{x^{\rho}}{\tau} \right) = \\ = f_{\rho}^{\text{FS}} \left(\frac{\delta}{\delta\eta(t)} + \frac{tx}{\tau} \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta\eta_{\rho}(t)} - \frac{1}{t} \frac{\delta}{\delta\eta_{\rho}(t)} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

из-за антисимметричности, а также

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta\eta_{\mu}(t)} - \frac{1}{t} \frac{\delta}{\delta\eta_{\mu}(t)} \right) \int_0^{\tau} ds s \eta_{\nu}(s) = 0, \quad \frac{\delta}{\delta\eta^{\mu}(t)} \int_0^{\tau} ds \frac{s}{\tau} \eta^{\nu}(s) = \partial_{x^{\mu}} \frac{tx^{\nu}}{\tau}, \quad (2.48)$$

его можно записать как $\partial_{x^{\mu}} \partial_{x^{\mu}} \tau^{k-1} c_{k-1}(x, y)$.

В итоге необходимо показать, что вторая часть формулы (2.46) соответствует остальным трем слагаемым из (2.44). Используя терминологию из теоретической физики, с учетом перестановок можно считать, что один конец функции Грина лежит в самой левой J-функции. Учитывая определение и свойство (2.36) функции Грина, а также соотношения (2.48), второе слагаемое (2.46) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} J \left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, \tau, \tau \right) b(\eta) \Big|_{\eta=0} \tau^{k-1} c_{k-1}(x, y) + \\ + J \left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, \tau, \tau \right) \int_0^{\tau} dt J \left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, t, \tau \right) b(\eta) \Big|_{\eta=0} \tau^{k-1} c_{k-1}(x, y) + \\ + 2J \left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, \tau, \tau \right) \int_0^{\tau} dt (\tau - t) \eta_{\mu}(t) \partial^{\mu} \tau^{k-1} c_{k-1}(x, y). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Тогда утверждение следует из леммы 2.9.

Для доказательства случая с потенциалом можно провести аналогичное рассуждение, если учесть те факты, что после масштабирования слагаемое в показателе экспоненты (2.41) с потенциалом пропорционально τ , и что после дифференцирования появляется дополнительное слагаемое вида

$$V \left(\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} + (x - y) \right) P_t e^{\int_0^{\tau} dt J \left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x - y, t, \tau \right) e^{b(\eta)}} \Big|_{\eta=0}. \quad (2.50)$$

Далее, из определения функции Грина (2.34) следует, что функциональную производную $\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)}$ в левом множителе можно убрать. В таком случае возникает оператор домножения на $V(x - y)$, и доказательство завершается. ■

Лемма 2.9. Пусть $\tau > 0$, $x \in U$, $f_\rho^{\text{FS}}(x)$ и $b(\eta)$ взяты из определений (2.2) и (2.38), тогда верны следующие равенства:

$$-f_\rho^{\text{FS}} \left(\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} + x \right) \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} + \frac{x^\rho}{\tau} \right) b(\eta) = \partial_{x_\mu} f_\mu^{\text{FS}}(x); \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} f_\rho^{\text{FS}} \left(\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} + x \right) \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} + \frac{x^\rho}{\tau} \right) \\ \int_0^\tau dt f_\sigma^{\text{FS}} \left(\frac{\delta}{\delta\eta(t)} + \frac{t}{\tau} x \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta\eta_\sigma(t)} + \frac{x^\sigma}{\tau} \right) b(\eta) = \\ = f_\rho^{\text{FS}}(x) f^{\text{FS}\rho}(x); \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$-f_\rho^{\text{FS}} \left(\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} + x \right) \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} + \frac{x^\rho}{\tau} \right) \int_0^\tau dt (\tau - t) \eta_\mu(t) = f_\mu^{\text{FS}}(x). \quad (2.53)$$

Доказательство: Для доказательства первого равенства достаточно рассмотреть произвольное слагаемое

$$\left(\frac{\delta}{\delta\eta(t)} + x \right)^{\rho_1 \dots \rho_k} \nabla_{\rho_1} \dots \nabla_{\rho_{k-1}} F_{\rho_k \rho}(y)$$

из разложения $f_\rho^{\text{FS}}(x)$ и, с учетом формул (2.35) и (2.47), использовать соотношение

$$\left(\frac{\delta}{\delta\eta(\tau)} + x \right)^{\rho_i} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} - \frac{1}{\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} \right) b(\eta) \Big|_{\eta=0} = -\delta^{\rho_i \rho}. \quad (2.54)$$

Второе и третье соотношения следуют, с учетом (2.47), из равенств

$$\left(\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} - \frac{1}{\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} \right) \left(\frac{d}{dt} \frac{\delta}{\delta\eta_\sigma(t)} - \frac{1}{t} \frac{\delta}{\delta\eta_\sigma(t)} \right) b(\eta) = 2\delta^{\rho\sigma} \delta(t - \tau), \quad (2.55)$$

$$\left(\frac{d}{d\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} - \frac{1}{\tau} \frac{\delta}{\delta\eta_\rho(\tau)} \right) \int_0^\tau dt (\tau - t) \eta_\mu(t) = -\delta_\mu^\rho, \quad (2.56)$$

где было использовано свойство

$$2 \int_0^\tau ds \delta(s - \tau) = 1.$$

■

2.7.4 Интеграл по путям

Рассмотрим $W_{y,x}$ — множество непрерывных путей $\gamma : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ с началом в точке y и концом в точке x . Пусть также $\int_0^\tau dt u(t)v(t)$ — скалярное произведение на множестве $C(0, \tau)$.

Для дальнейших построений достаточно знать лишь функциональный интеграл по множеству $W_{0,0}$ с действием $\frac{1}{4} \int_0^\tau dt \left(\frac{du(t)}{dt} \right)^2$. Из общей теории известно, что подобные величины расходятся, и один из способов придать им осмысленность — использовать переход в бесконечномерное пространство (см. [32; A1]) и связь со спектром вспомогательной задачи Штурма—Лиувилля, см. раздел 2.7.1.

Пусть $T = \mathbb{R}^\infty$ является декартовым произведением бесконечного числа \mathbb{R} с топологией Тихонова. Элементами множества T являются последовательности, то есть если $x \in T$, то $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$. Далее, для двух элементов $x, y \in T$ определим скалярное произведение формулой $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^\infty x_j y_j$, а также введем два специальных отображения: пусть $c \in \mathbb{C}$, тогда

$$\begin{aligned} T \times T &\rightarrow T, & xy &= \{x_k y_k\}_{k=1}^\infty, \\ T \times \mathbb{C} &\rightarrow T, & x^c &= \{x_k^c\}_{k=1}^\infty. \end{aligned}$$

Затем для каждого $x \in T$ мы определим набор укороченных последовательностей $\mathcal{X}_N \in T$, где $N \in \mathbb{N}$ и

$$(\mathcal{X}_N)_k = \begin{cases} x_k, & \text{если } k \leq N; \\ 0, & \text{если } k > N. \end{cases}$$

Также введем в рассмотрение множество положительных элементов

$$\mathbf{B} = \{\beta \in T \mid \beta_k > 0, k \in \mathbb{N}\}.$$

Определение 2.1. Пусть $\beta \in \mathbf{B}$ и $G : T \rightarrow \mathbb{C}$ — функционал на множестве T , тогда функциональный интеграл от G по множеству T равен числу

$$\Phi_\beta(G) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^N \frac{\beta_k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^N} G(\mathcal{X}_N) e^{-\frac{1}{2} \langle \beta \mathcal{X}_N, \mathcal{X}_N \rangle} d\mathcal{X}_N, \quad (2.57)$$

где $d\mathcal{X}_N = dx_1 \dots dx_N$.

Как правило, в физических приложениях подразумевается, что функциональный интеграл обладает свойствами обычного интеграла. Предположим, что G_1 и G_2 — два функционала на множестве T , и $a, b \in \mathbb{C}$, тогда мы можем выписать свойства линейности, сопряжения и монотонности в виде:

$$\Phi_\beta(aG_1 + bG_2) = a\Phi_\beta(G_1) + b\Phi_\beta(G_2), \quad \Phi_\beta(\overline{G_1}) = \overline{\Phi_\beta(G_1)},$$

$$G_1(x) \geq G_2(x) \text{ для всех } x \in T \Rightarrow \Phi_\beta(G_1) \geq \Phi_\beta(G_2).$$

Доказательство таких свойств для конкретного класса функционалов является отдельной задачей и не входит в рамки настоящей диссертации.

Параметр β в формуле (2.57) является дискретным множеством с положительными элементами и определяет оператор в квадратичной форме. Другими словами, β является спектральным множеством. Давайте сделаем некоторые преобразования и перейдем к множеству петель.

Пусть спектральное множество $\beta = \{\pi^2 k^2 / 2\tau^2\}_{k=1}^\infty$ и бесконечный набор функций $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$, ортонормированных относительно скалярного произведения $\int_0^\tau ds \psi_i(s)\psi_j(s) = \delta_{ij}$, выбраны с учетом формулы (2.33).

Ясно, что множество функций $\tilde{T} = \{\langle x, \psi \rangle : \{x_k\}_{k=1}^\infty \in T\}$ на промежутке $[0, \tau]$ содержит также и разрывные функции, поэтому мы рассмотрим подмножество $W_{0,0}$ непрерывных петель с началом и концом в точке нуль. Оно допускает запись в терминах пространства Соболева

$$\begin{aligned} W_{0,0} &= H_0^1(0, \tau) = \{u \in L_2(0, \tau) : \int_0^\tau ds \dot{u}^2(s) < \infty, u(0) = u(\tau) = 0\} \\ &= \{\langle x, \psi \rangle : \langle \beta x, x \rangle < \infty\}. \end{aligned}$$

Далее, каждый функционал G на T мы можем преобразовать в функционал \tilde{G} на множестве \tilde{T} путем подстановки $x_j = \int_0^\tau ds u(s)\psi_j(s)$, где $x \in T$ и $u \in \tilde{T}$, и наоборот. Следовательно, мы имеем соответствие $G(x) \leftrightarrow \tilde{G}(u)$.

Таким образом, с учетом наличия убывающей экспоненты под интегралом и вышеизложенных условий, мы будем в дальнейшем понимать функциональный интеграл по множеству петель следующим образом

$$\int_{W_{0,0}} \mathcal{D}u e^{-\frac{1}{4} \int_0^\tau dt \left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2} \tilde{G}(u) = \frac{\Phi_\beta(G)}{\sqrt{4\pi\tau}}, \quad (2.58)$$

где $\frac{1}{4} \int_0^\tau dt \left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \langle \beta x, x \rangle$. Ясно, что такой объект наследует свойства Φ_β -интеграла.

Переход в бесконечномерное пространство позволяет в более аккуратном виде ввести понятие функциональной производной. Запишем ее в более простом виде. Пусть $u \in W_{0,0}$, тогда

$$\frac{\delta u(t)}{\delta u(s)} = \delta(t - s),$$

где $t \in [0, \tau]$. Тогда, с учетом вышеизложенных конструкций и полноты базисных функций $\langle \psi(t), \psi(s) \rangle = \delta(t - s)$, имеет место формула

$$\frac{\delta}{\delta u(t)} = \langle \psi(t), \partial_x \rangle, \quad x \in T, t \in [0, \tau].$$

Другой достаточно плодотворный способ работы с функциональным интегралом связан с использованием регуляризации при помощи аналитического продолжения дзета-функции (см. [32; 34; 90]). Ввиду этого, интеграл приобретает конечное значение. Затем, изменяя нормировку меры, базовая формула принимает вид

$$\int_{W_{0,0}} \mathcal{D}u e^{-\frac{1}{4} \int_0^\tau dt \left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}, \quad (2.59)$$

который совпадает с формулой (2.58), где в качестве функционала выбрана единица, а также использовано свойство $\Phi_\beta(1) = 1$.

Рассмотрим далее множество $\mathcal{W}_{y,x} = W_{y,x}^{\times d}$, тогда, если $u \in \mathcal{W}_{y,x}$, то $u = (u_1, \dots, u_d)$ и $u_\mu \in W_{y,x}$ для $\forall \mu \in \{1, \dots, d\}$. Скалярное произведение имеет вид $(u, v) = \int_0^\tau dt u_\mu(t) v^\mu(t)$.

Также введем действие

$$S[u] = \frac{1}{4} \int_0^\tau dt \frac{du_\mu(t)}{dt} \frac{du^\mu(t)}{dt}, \quad \forall u \in \mathcal{W}_{y,x}. \quad (2.60)$$

Лемма 2.10. Пусть $\tau > 0$, b и S определены в (2.38) и (2.60), тогда, с учетом вышеизложенных предположений, верна формула

$$(4\pi\tau)^{d/2} \int_{W_{0,0}} \mathcal{D}u e^{-S[u] + (\eta, u)} = e^{b(\eta)}. \quad (2.61)$$

Доказательство: Пусть $v_\mu(t) = \int_0^\tau ds g(t, s) \eta_\mu(s)$, тогда $u + v \in W_{0,0}$ для любого $u \in W_{0,0}$, и, следовательно, можно сделать сдвиг. В таком случае лемма следует из формулы (2.59) и равенства $S[u + v] = S[u] + (\eta, u) + b(\eta)$. ■

Теорема 2.11. Пусть $x, y \in U$, K , b и S определены в (1.2), (2.38) и (2.60) соответственно и $\tau > 0$ — достаточно мало. Тогда, с учетом вышеизложенных предположений, имеем

$$P_t e^{\int_0^\tau dt J\left(\frac{\delta}{\delta\eta}, x-y, t, \tau\right)} e^{b(\eta)} \Big|_{\eta=0} = (4\pi\tau)^{d/2} \int_{\mathcal{W}_{0,0}} \mathcal{D}u e^{-S[u]} P_t e^{\int_0^\tau dt J(u, x-y, t, \tau)} \quad (2.62)$$

и

$$K(x, y; \tau) = \Phi(x, y) \int_{\mathcal{W}_{y,x}} \mathcal{D}v e^{-S[v]} P_t e^{\int_0^\tau dt J(v-y, 0, t, \tau)}. \quad (2.63)$$

Доказательство: Первая формула следует из соотношения

$$\varphi[u] = \varphi \left[\frac{\delta}{\delta\eta} \right] e^{(\eta, u)} \Big|_{\eta=0}$$

для произвольного полинома φ и леммы 2.10.

Второе равенство следует из формулы (1.3), теоремы 2.8, замены переменной вида $v(t) = u(t) + y + \frac{t}{\tau}(x - y)$, где $u \in \mathcal{W}_{0,0}$, $v \in \mathcal{W}_{y,x}$, и соотношения $S[u] = S[v] - \frac{1}{4\tau}(x - y)^2$. ■

Следствие 2.11.1. Пусть $x \in U$, $\tau > 0$ — достаточно мало, тогда

$$K(x, x; \tau) = \int_{\mathcal{W}_{0,0}} \mathcal{D}u e^{-S[u]} P_t e^{\int_0^\tau dt J(u, 0, t, \tau)}. \quad (2.64)$$

2.8 Зависимость от калибровочного условия

Практически все расчеты в данной главе проводились для калибровки Фока—Швингера. В частности, она сыграла ключевую роль при доказательстве теоремы 2.8. Тем не менее, формулу можно обобщить на случай произвольной калибровки. Пусть $x, y \in U$ и $\omega \in \mathcal{G}$, тогда калибровочные преобразования имеют вид

$$B_\mu^\omega(x) = \omega^{-1}(x) B_\mu(x) \omega(x) + \omega^{-1}(x) \partial_{x^\mu} \omega(x), \quad (2.65)$$

$$v^\omega(x) = \omega^{-1}(x) v(x) \omega(x), \quad (2.66)$$

и для малых значений параметра τ верна формула

$$K(x, y; \tau) = \omega(x) \int_{\mathcal{W}_{y,x}} \mathcal{D}u e^{-S[u]} P_t e^{\int_0^\tau dt (-\dot{u}^\mu B_\mu^\omega(u) + v^\omega(u))} \omega^{-1}(y), \quad (2.67)$$

которое мгновенно следует из постановки задачи (1.2).

В частном случае, когда $\omega(x) = \Phi(x, y)$, мы получаем

$$\omega(y) = 1, \quad f_{\mu}^{\text{FS}}(x - y, y) \quad \text{и} \quad V(x - y, y) \quad (2.68)$$

из (2.2) и (2.12). Важно отметить, что при обсуждении физических явлений не обязательно оставлять малость времени. Например, в физике обсуждаются упорядоченные экспоненты для произвольных параметров: линия Вильсона (как в (2.63)) или петля Вильсона (как в (2.64)).

Глава 3. Теорема Атьи—Зингера—Патоди для доменных стенок

3.1 Постановка задачи и формулировка результата

Пусть M является компактным ориентируемым римановым многообразием без границы размерности $\dim M = n = 2m$, и Σ — гладкое замкнутое подмногообразие M коразмерности 1. Локальные координаты на M будут обозначаться через x^μ, x^ν и т. д. Пусть также x^a , $a = 1, \dots, n-1$, являются координатами на Σ . Далее обозначим произвольным образом две стороны Σ символами $+$ и $-$ и определим два единичных, нормальных к поверхности Σ , вектора \mathbf{n}^+ и \mathbf{n}^- , см. рис. 3.1. Будем также предполагать, что компоненты метрического тензора являются гладкими функциями в окрестности Σ , поэтому $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^- \equiv \mathbf{n}$. Таковую координатную систему можно перенести с Σ в некоторую окрестность в M в виде координат Гаусса. Таким образом, компонента x^n обозначает геодезическое расстояние до поверхности Σ . Символом V обозначим эрмитово расслоение над многообразием M .

Опишем далее спектральную задачу. Для этого следует ввести в рассмотрение оператор Дирака внутри многообразия с набором условий на границе Σ . Следует отметить, что существование оператора Дирака не предполагает обязательного наличия спинорной структуры. Примером может послужить оператор Ходжа—Дирака $d + \delta$, который задается на дифференциальных формах. Определим оператор Дирака в области $M \setminus \Sigma$ локальной формулой

$$\not{D} = i\gamma^\mu \nabla_\mu, \quad (3.1)$$

где γ -матрицы действуют послойно на V , являются эрмитовыми и удовлетворяют соотношению Клиффорда

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I_V.$$

Также предположим, что связность согласована со структурой Клиффорда, то есть выполнено равенство $\nabla_\mu \gamma^\nu = \gamma^\nu \nabla_\mu$. Определим далее матрицу киральности соотношением

$$\gamma_* = -\frac{i^m}{n!} \varepsilon_{\mu\dots\rho} \gamma^\mu \dots \gamma^\rho, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_{\mu\dots\rho}$ — тензор Леви-Чивиты на многообразии M . Легко проверить, что оператор γ_* является эрмитовым, а также подчиняется следующему набору соотношений:

$$\gamma_* \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma_*, \quad \gamma_*^2 = I_V, \quad (3.3)$$

$$\gamma_*^\dagger = \gamma_*, \quad \not{D} \gamma_* = -\gamma_* \not{D}. \quad (3.4)$$

Можно заметить, что расслоение V раскладывается в прямую сумму $V = V_R \oplus V_L$ так, что γ_* равен 1 (-1) на V_R (соответственно, на V_L). Согласно обозначениям из физики, сечения $\psi \in \Gamma(V)$ называются спинорами, а их сужения на V_R и V_L — правыми и левыми (киральными) спинорами соответственно.

Далее будем предполагать, что ковариантная производная ∇_a хорошо определена везде, за исключением поверхности Σ , на которой она может иметь разные пределы с двух сторон. Обозначим их ∇_a^+ и ∇_a^- . Однако, они обе определяют связность на одном и том же векторном расслоении (то есть на ограничении V на Σ). Следовательно, их разность является вектором

$$B_a = \nabla_a^+ - \nabla_a^-. \quad (3.5)$$

Естественным условием сшивания спиноров на поверхности Σ является их непрерывность

$$\psi^+ = \psi^-, \quad (3.6)$$

где при помощи знаков $+/-$ обозначены предельные значения на поверхности Σ с соответствующих сторон. Поскольку предполагается изучение оператора второго порядка \not{D}^2 , мы должны ввести второе граничное условие. Оно следует из условия (3.6) и имеет вид $(\not{D}\psi)^+ = (\not{D}\psi)^-$, или, более явно,

$$(\nabla_{\mathbf{n}^+}\psi)^+ + (\nabla_{\mathbf{n}^-}\psi)^- = -\gamma^n \gamma^a B_a \psi|_\Sigma. \quad (3.7)$$

Следует отметить, что условия (3.6) и (3.7) учитывают киральность. Это означает, что ψ удовлетворяет условиям (3.6) и (3.7) тогда и только тогда, когда им удовлетворяет функция $\gamma_*\psi$. Таким образом, с учетом равенства (3.4), мы заключаем, что оператор \not{D} раскладывается на

$$\not{D}_R : \Gamma(V_R) \rightarrow \Gamma(V_L) \quad \text{и} \quad \not{D}_L : \Gamma(V_L) \rightarrow \Gamma(V_R),$$

которые удовлетворяют соотношению $\not{D}_L = \not{D}_R^\dagger$. Это означает наличие эллиптического комплекса и дает возможность определить индекс оператора Дирака

\not{D} как разность числа нулевых собственных значений \not{D} , отвечающих правой и левой киральностям.

Однако, такой индекс можно вычислить и другим путем. А именно, при помощи L^2 следа, включающего тепловое ядро оператора \not{D}^2

$$\text{Index}(\not{D}) = \text{Tr} \left(\gamma_* e^{-\tau \not{D}^2} \right), \quad \tau > 0. \quad (3.8)$$

Пусть набор e_α , $\alpha = 1, \dots, n$, является локальным ортонормированным базисом в касательном расслоении ТМ, а набор e^α — базисом в дуальном расслоении T^*M . В таком случае компоненты связности Леви-Чивиты равны $\omega_\mu^{\alpha\beta} = e_\beta^\nu (\Gamma_{\mu\nu}^\rho e_\rho^\alpha - \partial_\mu e_\nu^\alpha)$, где $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ — символ Кристоффеля. При этом индексы α, β и т. д. плоского пространства опускаются и поднимаются при помощи единичной матрицы. Таким образом, их положение не играет существенной роли. Далее соответствующая спинорная связность определяется локально формулой

$$\omega_\mu^{[s]} = \frac{1}{8} \omega_\mu^{\alpha\beta} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \quad \nabla_\mu^{[s]} = \partial_\mu + \omega_\mu^{[s]}. \quad (3.9)$$

При этом поле

$$A = \nabla - \nabla^{[s]} \quad (3.10)$$

называется связностью Янга—Миллса, или же калибровочными полями. A является вектором, компоненты которого — диффеоморфизмы, удовлетворяющие соотношению $[A, \gamma^\mu] = 0$.

Согласованность реперного базиса около поверхности Σ с системой координат Гаусса выражается так: $e_n^n = 1$, $e_A^n = e_n^a = 0$ для $A = 1, \dots, n-1$. Поскольку $\Gamma_{an}^b = -K_a^b$ на Σ , где K_a^b — внешняя кривизна, то верно соотношение $\omega_a^{An} = -K_a^A = -K_a^b e_b^A$. Далее, используя координаты Гаусса, можно расширить эти соотношения на некоторую окрестность поверхности Σ .

Затем мы можем выбрать удобное представление для алгебры Клиффорда. Это связано с тем, что все неприводимые представления алгебры Клиффорда в евклидовом пространстве четной размерности унитарно эквивалентны. Следовательно, выбором базиса можно трансформировать γ -матрицы к виду:

$$\gamma^a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \hat{\gamma}^a, \quad \gamma^n = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \otimes \text{id}, \quad \gamma_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \text{id}, \quad (3.11)$$

где символ id обозначает тождественный оператор. При этом матрицы $\hat{\gamma}^a$ должны удовлетворять соотношению

$$\varepsilon_{a\dots cn} \hat{\gamma}^a \dots \hat{\gamma}^c = -(n-1)! (-i)^{m-1}.$$

Последнее условие фиксирует одно из двух эквивалентных представлений для алгебры Клиффорда в пространстве нечетной размерности. Ясно, что поле Янга–Миллса и B_a должны иметь диагональный вид в таком базисе

$$A_\mu = \begin{pmatrix} \hat{A}_\mu & 0 \\ 0 & \hat{A}_\mu \end{pmatrix}, \quad B_a = \begin{pmatrix} \hat{B}_a & 0 \\ 0 & \hat{B}_a \end{pmatrix}$$

и удовлетворять соотношению $[\hat{A}_\mu, \hat{\gamma}_a] = 0$. Таким образом, используя симметрию внешней кривизны, оператор Дирака может быть переписан в более развернутом виде

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\hat{\nabla}_n + \mathcal{D} + \frac{1}{2}K_a^a \\ \hat{\nabla}_n + \mathcal{D} - \frac{1}{2}K_a^a & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = i\hat{\gamma}^a \hat{\nabla}_a, \quad (3.12)$$

где $\hat{\nabla}$ определяется локально формулой

$$\hat{\nabla}_\mu = \partial_\mu + \hat{A}_\mu + \frac{1}{8}\omega_\mu^{AB}[\hat{\gamma}_A, \hat{\gamma}_B]. \quad (3.13)$$

Из последних соотношений видно, что оператор \mathcal{D} является оператором Дирака на поверхности Σ и зависит от спинорной связности, определенной при помощи репера и поля Янга–Миллса \hat{A}_a . Однако, поле Янга–Миллса имеет разные предельные значения на поверхности Σ , A_a^+ и A_a^- , такие что

$$\hat{A}_a^+ - \hat{A}_a^- = \hat{B}_a.$$

В связи с этим фактом оператор Дирака \mathcal{D} также имеет разные пределы \mathcal{D}^\pm , которые подчиняются соотношению

$$\mathcal{D}^+ - \mathcal{D}^- = i\hat{\gamma}^a \hat{B}_a. \quad (3.14)$$

Также стоит отметить, что рассматриваемые конструкции (индекс, плотность Понтрягина) являются калибровочно инвариантными величинами. Из-за этого мы можем выбрать удобное для нас калибровочное условие. Оно имеет вид

$$\omega_n = 0, \quad (3.15)$$

где подразумеваются все части связности, спинорная и Янга—Миллса. Такое калибровочное условие допустимо локально в окрестности Σ .

Далее для формулировки результата и анализа нам потребуются спектральные функции операторов \not{D} , \mathcal{D}^+ и \mathcal{D}^- . Пусть L является оператором Лапласа на d -мерном многообразии, и пусть Q — гладкий эндоморфизм (локально гладкая и матрично-значная функция). Тогда мы можем выписать следующее полное асимптотическое разложение при малых значениях собственного времени $\tau \rightarrow +0$

$$\mathrm{Tr} (Q e^{-\tau L}) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{\frac{k-d}{2}} a_{k/2}(Q, L). \quad (3.16)$$

Для задачи с доменными стенками и описанными выше условиями на границе такое разложение было получено в работах [55; 68; 104]. Коэффициенты теплового ядра в этом случае являются локальными, то есть могут быть представлены в виде интегралов по M и Σ от полиномов, построенных по локальным инвариантам данной задачи. К примеру, внутри области M такими величинами являются риманова кривизна, напряженность поля Янга—Миллса, а также их ковариантные производные. На поверхности Σ могут появляться также внешняя кривизна и вектор V .

Поскольку левая часть равенства (3.8) не зависит от параметра τ , можно выписать следующее соотношение

$$\mathrm{Index} (\not{D}) = a_m(\gamma_*, \not{D}^2). \quad (3.17)$$

Пусть f является гладкой функцией с компактным носителем, который не имеет пересечений с поверхностью Σ . Тогда плотность Понтрягина $P(x)$ для оператора \not{D} определяется интегральным соотношением

$$\int_M d^n x f(x) P(x) = a_m(f \gamma_*, \not{D}^2). \quad (3.18)$$

Далее, η -функция оператора \mathcal{D} определяется как сумма по собственным значениям λ

$$\eta(z, \mathcal{D}) = \sum_{\lambda > 0} \lambda^{-z} - \sum_{\lambda < 0} (-\lambda)^{-z}. \quad (3.19)$$

Давайте также введем гладкое семейство операторов $\mathcal{D}(s)$, таких что

$$\mathcal{D}(0) = \mathcal{D}^-, \quad \mathcal{D}(r) = \mathcal{D}^+.$$

Здесь мы предполагаем, что $\mathcal{D}(s) = i\hat{\gamma}^a \hat{\nabla}_a(s)$ и для всех значений параметра $s \in [0, r]$ связность остается согласованной со структурой Клиффорда на Σ . Для дальнейшего удобства мы также будем предполагать, что в начальной и конечной точках интервала $[0, r]$ все производные оператора $\mathcal{D}(s)$ по переменной s равны нулю.

Значение величины $\eta(z, \mathcal{D})$ в точке $z = 0$ измеряет спектральную асимметрию оператора \mathcal{D} . В действительности функция $\eta(0, \mathcal{D}(s))$ имеет разрывы, когда собственное значение переходит через точку 0. Если же ни одно из собственных значений оператора $\mathcal{D}(s)$ не меняет свой знак, когда s варьируется между 0 и r , то мы имеем

$$\partial_s \eta(0, \mathcal{D}(s)) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} a_{m-1}(\partial_s \mathcal{D}(s), \mathcal{D}(s)^2), \quad (3.20)$$

см. [41]. Давайте проинтегрируем последнюю формулу и определим *относительную спектральную асимметрию* как

$$\tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r ds a_{m-1}(\partial_s \mathcal{D}(s), \mathcal{D}(s)^2). \quad (3.21)$$

Это определение будет использоваться независимо от того, пересекает собственное значение точку 0 или нет. Следует отметить, что в общем случае правая часть равенства (3.21) *не равна* разности $\eta(0, \mathcal{D}^+) - \eta(0, \mathcal{D}^-)$. В отличие от $\eta(0, \mathcal{D})$, относительная спектральная асимметрия остается всегда локальной.

Сейчас мы готовы сформулировать один из ключевых результатов:

Теорема 3.1. *Предположим, что по крайней мере одно из следующих предположений верно:*

- (a) *внешняя кривизна K_a^b на Σ равна нулю;*
- (b) $n \leq 4$;
- (c) $n = 6$ и $\text{tr}(F_{ab}^+ - F_{ab}^-) = 0$.

Тогда верно соотношение

$$\text{Index}(\mathcal{D}) = \int_{M \setminus \Sigma} d^n x P(x) - \frac{1}{2} \tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-). \quad (3.22)$$

Замечание 3.2. *Для случая общего положения, когда ни одно из предположений (a)–(c) не выполнено, правая часть равенства (3.22) приобретает дополнительное слагаемое, выписанное в (3.44).*

Мы будем доказывать теорему 3.1 в несколько шагов. В следующем разделе мы будем работать со случаем прямого произведения около Σ . В разделе 3.3 мы откажемся от этого предположения.

3.2 Случай прямого произведения около Σ

В данном разделе мы рассмотрим промежуточный случай, когда многообразие M имеет структуру прямого произведения $\Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ около рассматриваемой поверхности, как это изображено на рис. 3.1, где $s = x^n$. Мы предполагаем, что оператор \mathcal{D} также имеет структуру прямого произведения, поэтому по каждую сторону от Σ мы имеем

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_s + \mathcal{D} \\ \partial_s + \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = i\hat{\gamma}^a \hat{\nabla}_a, \quad (3.23)$$

где $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$ для $s \in (0, \varepsilon_0]$ и $\mathcal{D} = \mathcal{D}^-$ для $s \in [-\varepsilon_0, 0)$.

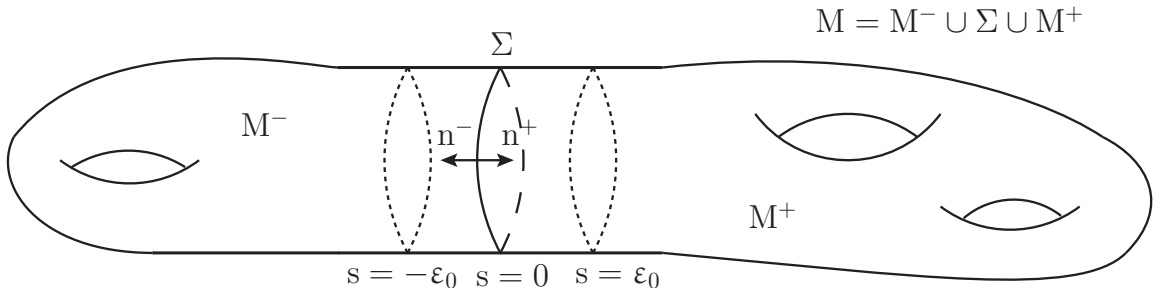


Рисунок 3.1 — Многообразие M со структурой произведения около Σ .

Для доказательства теоремы 3.1 в этом случае мы будем использовать следующий метод. Сперва мы разрежем многообразие M вдоль поверхности Σ и вставим между двумя частями цилиндр $C = \Sigma \times [0, r]$ так, как это показано на рис. 3.2. Полученное в этом случае многообразие будет обозначаться \tilde{M} . Затем мы определим оператор Дирака в цилиндре следующим образом

$$\mathcal{D}(s) = \mathcal{D}^- + f(s/r)i\hat{\gamma}^a \hat{B}_a, \quad \text{где } s \in [0, r], \quad (3.24)$$

и f — сглаживающая функция со свойствами:

$$f(0) = 0, f(1) = 1, \text{ и } f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1) = 0, \forall m > 0.$$

Такая функция существует. В качестве примера можно привести

$$f(s) = \int_0^s dt e^{\frac{1}{t(t-1)}} / \int_0^1 dt e^{\frac{1}{t(t-1)}}.$$

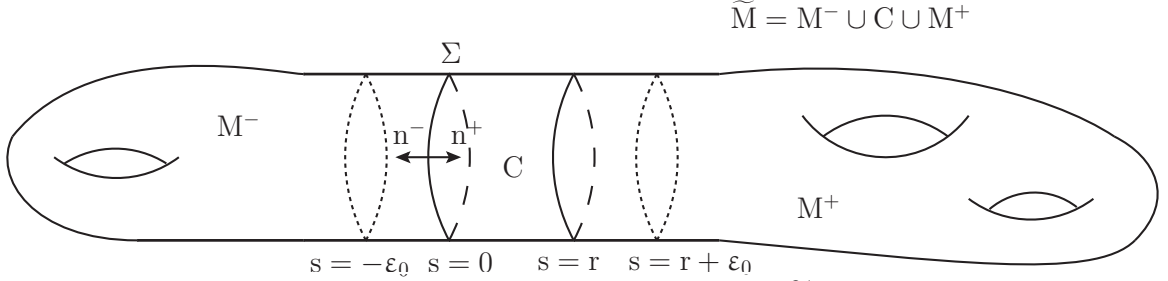


Рисунок 3.2 — Расширенное многообразие \tilde{M} с цилиндром C .

Для удобства также отметим вид оператора Лапласа

$$\mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} -\partial_s^2 + \mathcal{D}^2(s) - \dot{\mathcal{D}}(s) & 0 \\ 0 & -\partial_s^2 + \mathcal{D}^2(s) + \dot{\mathcal{D}}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где точка обозначает производную по переменной s .

Таким образом, мы получили гладкую спектральную задачу на многообразии \tilde{M} . В этом случае соответствующий индекс записывается в виде суммы двух слагаемых

$$\text{Index}(\mathcal{D})_{\tilde{M}} = \int_{\tilde{M}} d^n x P(x) = \int_M d^n x P(x) + \int_C d^n x P(x). \quad (3.26)$$

В последнем интеграле $P(x)$ является плотностью Понтрягина для новой спектральной задачи на \tilde{M} , а не для начальной. Поскольку это не приводит к путанице, новых обозначений вводить мы не будем.

Для начала давайте покажем справедливость следующего утверждения

Лемма 3.3. *С учетом вышеизложенных условий и обозначений мы имеем*

$$\int_C d^n x P(x) = -\frac{1}{2} \tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-). \quad (3.27)$$

Доказательство: Введем в рассмотрение фундаментальное решение $K(x, y; \tau)$ для уравнения теплопроводности (тепловое ядро), которое удовлетворяет задаче

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathcal{D}^2 \right) K(x, y; \tau) = 0, \quad K(x, y; 0) = g^{-\frac{1}{2}}(x) \delta(x - y). \quad (3.28)$$

Для построения асимптотического разложения теплового ядра мы будем использовать итерационную процедуру, предложенную в работе деВитта [6] (математическое описание которой может быть найдено в [93; 105] или в первых двух главах данной диссертации). Ежели оба аргумента, x и y , принадлежат цилиндру C , то анзатц для разложения имеет вид

$$K(x, y; \tau) = \tau^{-\frac{n}{2}} \Delta^{1/2}(\hat{x}, \hat{y}) e^{-\frac{\sigma(\hat{x}, \hat{y})}{2\tau} - \frac{(s-t)^2}{4\tau}} \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k a_k(\mathbb{D}^2; x, y), \quad (3.29)$$

где были использованы следующие обозначения

$$x = (\hat{x}, s), \quad y = (\hat{y}, t), \quad s, t \in [0, r], \quad \hat{x}, \hat{y} \in \Sigma.$$

Также, $\sigma(\hat{x}, \hat{y})$ обозначает функцию Синга на Σ , то есть половину квадрата геодезического расстояния между точками \hat{x} и \hat{y} , и $\sigma^a(\hat{x}, \hat{y}) = \partial_{\hat{x}^a} \sigma(\hat{x}, \hat{y})$. В свою очередь, Δ — детерминант Ван-Влек—Моретта и определяется равенством

$$\Delta(\hat{x}, \hat{y}) = [g(\hat{x})g(\hat{y})]^{-1/2} \det \left[-\frac{\partial^2 \sigma(\hat{x}, \hat{y})}{\partial x^a \partial y^b} \right].$$

Поскольку многообразие \tilde{M} не имеет границы и доменных стенок, в асимптотическом разложении (3.29) появляются коэффициенты лишь с целыми номерами. При этом они удовлетворяют системе рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} (k + \sigma^a \hat{\nabla}_a(s) + (s-t)\partial_s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a_k(\mathbb{D}^2; x, y) = \\ = \Delta^{-1/2}(\hat{x}, \hat{y}) (\partial_s^2 - \mathcal{D}(s)^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{1/2}(\hat{x}, \hat{y}) a_{k-1}(\mathbb{D}^2; x, y) \\ + \Delta^{-1/2}(\hat{x}, \hat{y}) \dot{\mathcal{D}}(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta^{1/2}(\hat{x}, \hat{y}) a_{k-1}(\mathbb{D}^2; x, y), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где $k > 0$. Первый коэффициент $a_0(\mathbb{D}^2; x, y)$ удовлетворяет аналогичному соотношению с нулевой правой частью и соотношению на диагонали

$$a_0(\mathbb{D}^2; x, x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \text{id}. \quad (3.31)$$

Благодаря уравнению (3.26) интеграл от плотности $P(x)$ по цилиндру C не может иметь зависимости от длины цилиндра r . Таким образом, при переходе к пределу $r \rightarrow \infty$ в асимптотическом разложении плотности $P(x)$ ненулевой вклад дает лишь слагаемое, пропорциональное $1/r$.

Поскольку имеется равенство

$$P(x) = g^{1/2} \text{tr}(\gamma_* a_m(\mathbb{D}^2; x, x)), \quad (3.32)$$

то мы должны найти в коэффициенте Сили—деВитта ту часть, которая пропорциональна $1/r$. Самым простым путем анализа поведения слагаемых из (3.30) в таком пределе является масштабирование. Для этого нужно сделать замену координат $s \rightarrow s/r$ и изменить компоненты метрического тензора

$$g_{nm} = 1 \rightarrow r^2 \quad \text{и} \quad g^{nm} = 1 \rightarrow r^{-2}.$$

Ключевым моментом является то, что оператор ∂_s^2 при такой замене приобретает фактор r^{-2} , в то время как $\dot{\mathcal{D}}$ меняется на $r^{-1}\dot{\mathcal{D}}$. Остальные слагаемые остаются ограниченными.

Одним из основных следствий такого масштабирования является то, что слагаемое с оператором ∂_s^2 может быть удалено из уравнения (3.30), поскольку мы интересуемся лишь слагаемыми, выживающими в пределе $r \rightarrow \infty$ после интегрирования по цилиндру S . Таким образом, мы можем также перейти к пределу $t = s$ прямо в уравнении (3.30). Тогда мы получим новые соотношения

$$\begin{aligned} (k + \sigma^a \hat{\nabla}_a(s)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a_k(\mathbb{D}^2; (\hat{x}, s), (\hat{y}, s)) &= \\ &= -\Delta^{-1/2}(\hat{x}, \hat{y}) \mathcal{D}(s)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{1/2}(\hat{x}, \hat{y}) a_{k-1}(\mathbb{D}^2; (\hat{x}, s), (\hat{y}, s)) \\ &+ \Delta^{-1/2}(\hat{x}, \hat{y}) \dot{\mathcal{D}}(s) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Delta^{1/2}(\hat{x}, \hat{y}) a_{k-1}(\mathbb{D}^2; (\hat{x}, s), (\hat{y}, s)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

где $k > 0$.

Из вида последних соотношений следует, что они являются решением рекуррентной системы для теплового ядра оператора $\mathcal{L}(s, 1)$, где

$$\mathcal{L}(s, \xi) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}(s)^2 - \xi \dot{\mathcal{D}}(s) & 0 \\ 0 & \mathcal{D}(s)^2 + \xi \dot{\mathcal{D}}(s) \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Следовательно, не учитывая слагаемые, которые убывают быстрее r^{-1} при переходе к пределу $r \rightarrow +\infty$, мы имеем соотношение

$$a_m(\mathbb{D}^2; (\hat{x}, s), (\hat{y}, s)) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} a_m(\mathcal{L}(s, 1); \hat{x}, \hat{y}). \quad (3.35)$$

При этом оператор \mathcal{L} определен на Σ . Следовательно, некоторые формулы для теплового ядра требуют достаточно очевидных модификаций. В частности, необходимо сделать замену n на $n - 1$ в формулах (3.29) и (3.34). Более того, поскольку $\dot{\mathcal{D}}(s) \sim r^{-1}$, мы должны сохранить лишь слагаемое, пропорциональное первой степени $\dot{\mathcal{D}}(s)$. В результате чего верно соотношение

$$\int_{\mathbb{C}} d^n \mathbf{x} g^{1/2} \operatorname{tr} (\gamma_* a_m(\mathcal{D}^2; \mathbf{x}, \mathbf{x})) = (4\pi)^{-\frac{1}{2}} \left. \frac{d}{d\xi} \right|_{\xi=0} \int_0^r ds \int_{\Sigma} d^{n-1} \hat{\mathbf{x}} g^{1/2} \operatorname{tr} (\gamma_* a_m(\mathcal{L}(s, \xi); \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}})).$$

Производная по переменной ξ может быть вычислена при помощи разложения по переменной τ . Действительно, верна следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\xi} \right|_{\xi=0} \operatorname{Tr} (\gamma_* \exp(-\tau \mathcal{L}(s, \xi))) &= -\tau \operatorname{Tr} \left(\gamma_* \left. \frac{d\mathcal{L}(s, \xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \exp(-\tau \mathcal{L}(s, 0)) \right) \\ &= -\tau \operatorname{Tr} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\mathcal{D}}(s) & 0 \\ 0 & \dot{\mathcal{D}}(s) \end{pmatrix} \exp(-\tau \mathcal{L}(s, 0)) \right) \\ &= 2\tau \operatorname{Tr} \left(\dot{\mathcal{D}}(s) \exp(-\tau \mathcal{D}(s)^2) \right), \end{aligned}$$

где был использован тот факт, что γ_* коммутирует с оператором $\mathcal{L}(s, 0)$. Это дает

$$\int_{\mathbb{C}} d^n \mathbf{x} g^{1/2} \operatorname{tr} (\gamma_* a_m(\mathcal{D}^2; \mathbf{x}, \mathbf{x})) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^r ds a_{m-1}(\dot{\mathcal{D}}(s), \mathcal{D}(s)^2),$$

и, после принятия во внимание формул (3.32) и (3.21), доказательство завершается. ■

Альтернативное доказательство последней леммы может быть получено при помощи разложения из работы [2]. Оно приведено в разделе 3.6.

Для завершения доказательства теоремы 3.1 остается показать, что сглаживание спектральной задачи при помощи вставки цилиндра не меняет значение индекса. Для этого мы сперва рассмотрим немного другое сглаживание. Пусть δ_0 — некоторый параметр, такой что $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$, и $\chi^\delta(s)$ — семейство функций, где $\delta \in [0, 1]$. Мы предполагаем, что $\chi^\delta(s)$ принимает значения между $0 = \chi^\delta(s)|_{s \leq -\delta_0}$ и $1 = \chi^\delta(s)|_{s \geq \delta}$, является гладкой для $s \neq 0$ и удовлетворяет соотношению

$$\chi^\delta(-0) = 1 - \chi^\delta(+0) = \delta/2,$$

см. рис. 3.3. Далее определим компоненты связности

$$A_a^\delta(x) = A_a^-(\hat{x}) + \chi^\delta(s)B_a(\hat{x}) \quad (3.36)$$

и оператор Дирака \mathcal{D}_δ , который совпадает с прежним оператором Дирака \mathcal{D} вне области $\Sigma \times [-\delta_0, \delta_0]$ и имеет компоненты связности (3.36) внутри $\Sigma \times [-\delta_0, \delta_0]$. При этом, для значения $\delta = 0$ мы получаем нашу прежнюю спектральную задачу, в то время как для $\delta = 1$ операторы Дирака на \tilde{M} и \mathcal{D}_δ соотносятся при помощи (очевидной) гладкой гомотопии.

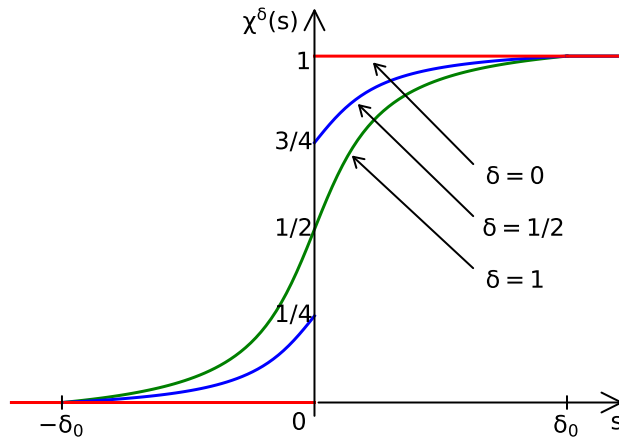


Рисунок 3.3 — Функция $\chi^\delta(s)$.

Поскольку оператор на многообразии \tilde{M} и оператор \mathcal{D}_δ связаны гладкой гомотопией, мы получаем соотношение

$$\text{Index}(\mathcal{D})_{\tilde{M}} = \text{Index}(\mathcal{D}_\delta). \quad (3.37)$$

Лемма 3.4. Для семейства операторов \mathcal{D}_δ , $\delta \in [0, 1]$, мы имеем

$$\text{Index}(\mathcal{D}_\delta) = \text{Index}(\mathcal{D}). \quad (3.38)$$

Доказательство: С учетом гомотопии, описанной уравнением (3.36), мы можем утверждать, что все напряженности и их ковариантные производные внутри многообразия, также как и граничные условия на поверхности Σ вместе с соответствующими геометрическими инвариантами на Σ , являются гладкими функциями параметра δ . Следовательно, для любого Q и произвольного значения $k \geq 0$ коэффициент $a_k(Q, \mathcal{D}_\delta^2)$ также является гладкой функцией параметра δ . Ежели взять $Q = \gamma_*$ и $k = n$, а затем вспомнить, что индекс принимает

лишь целочисленные значения, то этим и завершается доказательство первоначальной леммы. ■

Комбинируя уравнение (3.26), лемму 3.3 и соотношение (3.37) с леммой 3.4, мы получаем доказательство теоремы 3.1 для случая многообразия со структурой произведения около поверхности Σ .

3.3 Случай общего положения около Σ

Перейдем к рассмотрению более общего случая путем отказа от структуры прямого произведения около поверхности Σ . При этом мы продолжим использовать систему координат Гаусса для удобства, поскольку она приводит к блочно-диагональной структуре метрики $g^{\mu\nu}$. Для доказательства теоремы в этом случае необходимо произвести деформацию, то есть заменить в некоторой окрестности поверхности Σ функции метрического тензора и компонент связности на их гладкие аналоги, удовлетворяющие структуре прямого произведения, не изменяя при этом их предельные значения с обеих сторон на самой поверхности Σ .

Это можно сделать следующей процедурой. Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ такое, что в ε -окрестности Σ действуют нормальные координаты Гаусса, а также наложено аксиальное калибровочное условие (3.15). Далее выберем гладкую функцию $\eta^1(s)$, удовлетворяющую условиям: $\eta^1(s) = 0$ для $0 \leq s \leq \varepsilon_1$ и некоторого $\varepsilon_1 < \varepsilon$, и $\eta^1(s) = s$ для $s \geq \varepsilon$, см. рис. 3.4. Затем определим семейство гладких функций

$$\eta^\delta(s) = s(1 - \delta) + \eta^1(s)\delta, \quad (3.39)$$

зависящее от параметра $\delta \in [0,1]$. Затем деформируем поля в окрестности $\Sigma \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ следующим образом

$$\begin{aligned} e_a^{A\delta}(s, \hat{x}) &= e_a^A(\eta^\delta(s), \hat{x}), & e_a^{A\delta}(-s, \hat{x}) &= e_a^A(-\eta^\delta(s), \hat{x}), \\ A_a^\delta(s, \hat{x}) &= A_a(\eta^\delta(s), \hat{x}), & A_a^\delta(-s, \hat{x}) &= A_a(-\eta^\delta(s), \hat{x}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $s \in [0, \varepsilon]$. Компоненты связности Леви-Чивиты деформированы соответственно. При этом в точке $\delta = 1$ мы получаем структуру прямого произведения в цилиндре $\Sigma \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Следовательно, теорема 3.1 применима для случая $\delta = 1$.

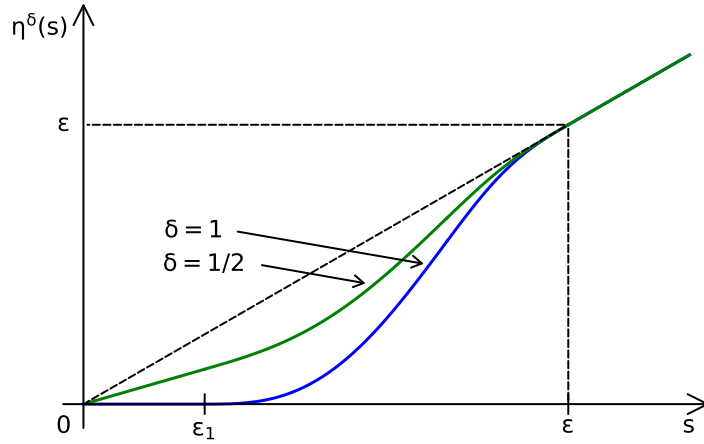


Рисунок 3.4 — Семейство функций $\eta^\delta(s)$.

Деформация (3.40) индуцирует гладкую гомотопию символа оператора Дирака \mathcal{D} , которая сохраняет граничные данные. Следовательно, такое изменение не влияет на индекс и не меняет оператора \mathcal{D} . Однако, сам интеграл от плотности Понтрягина по области может изменяться. Таким образом, утверждение теоремы 3.1 выполнены тогда и только тогда, когда указанный интеграл от плотности Понтрягина остается неизменным.

Для дальнейшего доказательства необходимо выписать явный вид плотности Понтрягина [96] в указанной окрестности

$$P(x)d^n x = \widehat{A}(R) \wedge \text{ch}(F) \quad (3.41)$$

через \widehat{A} -род и характер Черна, вычисленные для 2-формы кривизны R и 2-формы напряженности калибровочного поля F соответственно. Обозначим $C_+ = \Sigma \times (0, \varepsilon]$ и $C_- = \Sigma \times [-\varepsilon, 0)$. Тогда верна цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_{M \setminus \Sigma} d^n x (P^\delta - P) &= \int_{C_+ \cup C_-} (\widehat{A}(R^\delta) \wedge \text{ch}(F^\delta) - \widehat{A}(R) \wedge \text{ch}(F)) \\ &= \int_{C_+ \cup C_-} [\widehat{A}(R^\delta) - \widehat{A}(R)] \wedge \text{ch}(F^\delta) \\ &\quad - \int_{C_+ \cup C_-} \widehat{A}(R) \wedge [\text{ch}(F^\delta) - \text{ch}(F)]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ясно, что \widehat{A} -род и характер Черна являются характеристическими полиномами. Следовательно, они являются замкнутыми, и их разности, ввиду гомотопии, выражаются через точные формы, то есть

$$\widehat{A}(R^\delta) - \widehat{A}(R) = dT \widehat{A}(\Gamma^\delta, \Gamma), \quad \text{ch}(F^\delta) - \text{ch}(F) = dT \text{ch}(A^\delta, A), \quad (3.43)$$

где символ T означает трангрессию соответствующего инвариантного полинома. Таким образом, интегралы из формулы (3.42) содержат лишь поверхностные слагаемые. Точное определение может быть найдено в [96].

На данный момент нам необходимо лишь одно базовое свойство трангрессии, а именно: $T \text{ch}(A^\delta, A)$ равно нулю, когда A равно A^δ . Поскольку $A = A^\delta$ на всех границах области $C_+ \cup C_-$, второе слагаемое во второй строке (3.42) в действительности отсутствует. Тогда окончательное выражение имеет вид

$$- \int_{\Sigma} T \hat{A}(\Gamma^\delta, \Gamma) \wedge [\text{ch}(F^+) - \text{ch}(F^-)], \quad (3.44)$$

где было учтено равенство $\Gamma = \Gamma^\delta$ на поверхностях $\Sigma \times \{\varepsilon\}$ и $\Sigma \times \{-\varepsilon\}$.

Утверждение теоремы 3.1 справедливо тогда и только тогда, когда выражение (3.44) равно нулю при $\delta = 1$. Это может быть выполнено в некоторых случаях. Рассмотрим каждый пункт теоремы 3.1 отдельно.

Легко проверить, что подинтегральное выражение в формуле (3.44) пропорционально разности $\Gamma^1 - \Gamma$. Используя определение символов Кристоффеля, выпишем матричные элементы разности при ограничении на Σ :

$$\begin{aligned} [(\Gamma^1)_{bc}^a dx^c - \Gamma_{bc}^a dx^c] \Big|_{\Sigma} &= 0, & [(\Gamma^1)_{nc}^n dx^c - \Gamma_{nc}^n dx^c] \Big|_{\Sigma} &= 0, \\ [(\Gamma^1)_{nc}^a dx^c - \Gamma_{nc}^a dx^c] \Big|_{\Sigma} &= \frac{1}{2} g^{ad} \dot{g}_{dc} dx^c = -K_c^a dx^c, \\ [(\Gamma^1)_{bc}^n dx^c - \Gamma_{bc}^n dx^c] \Big|_{\Sigma} &= -\frac{1}{2} \dot{g}_{bc} dx^c = g_{bd} K_c^d dx^c. \end{aligned}$$

Таким образом, если $K_{ab} = 0$ для $\delta = 0$, то $(\Gamma_a^1 - \Gamma_a) dx^a = 0$, и интеграл (3.44) уходит. Это соответствует случаю (а) теоремы 3.1. Более того, легко проверить, что сужение $R \Big|_{\Sigma}$ содержит лишь компоненты вида $R_{\mu ab}^{\nu}$. Следовательно, $T \hat{A}(\Gamma^\delta, \Gamma)$ не зависит от вторых производных компонент метрического тензора по n -ой переменной, то есть является полиномом от K_{ab} , $g_{ab} \Big|_{\Sigma}$ и $\Gamma_{bc}^a \Big|_{\Sigma}$.

Поскольку \hat{A} -род содержит $4k$ -формы, выражение (3.44) тривиально равно нулю для $n = 2$. В случае $n = 4$ вклад в (3.44) может дать только 0 -форма ch_0 . Однако, поскольку ch_0 не зависит от связности, интеграл из (3.44) равен нулю также и для $n = 4$. Это доказывает пункт (b) теоремы 3.1.

Аналогично, при $n = 6$ вклад дает только слагаемое $ch_1(F^+) - ch_1(F^-)$. Благодаря ограничению на поверхность Σ последнее выражение становится пропорциональным $\text{tr}(F_{ab}^+ - F_{ab}^-)$ и доставляет пункт (c) теоремы 3.1. Отметим, что последнее выражение равно нулю, когда связность Янга—Миллса соответствует компактной полупростой группе.

Это завершает доказательство основной теоремы 3.1.

3.4 Инвариантность индекса в случае прямого произведения

3.4.1 Общие соображения

В разделе 3.2 была получена формула (3.26) для области M , дополненной цилиндром S . При этом результат леммы 3.3 выражает интеграл по цилиндру через асимметрию оператора \mathcal{D} на границе. Следует отметить, что вспомогательная спектральная задача в области \tilde{M} имеет явное отличие от начальной, поскольку связность Янга—Миллса обладает гладкими компонентами связности. В настоящем разделе показано, что индекс не изменяется при сглаживании компонент связности в случае структуры прямого произведения.

Рассматриваемый оператор Лапласа \mathcal{D}^2 на многообразии M содержит δ -функционал в потенциале. Спектральная задача для такого оператора ставится следующим образом: на поверхности скачка требуется непрерывность собственной функции и скачок ее первой, нормальной к поверхности Σ , производной. То есть решение задачи ищется в области $M \setminus \Sigma$ и с условиями на Σ .

Предположим, что локальная зависимость компонент связности от n -ой координаты была сглажена путем замены в некоторой окрестности точки $s = 0$ функции $\theta(s)$ на ее гладкий аналог $\theta^\sigma(s)$, такой что $\theta^\sigma \rightarrow \theta$ при $\sigma \rightarrow +0$, см. рис. 3.5. Тогда второе краевое условие для спектральной задачи сводится к непрерывности нормальной производной. Другими словами, регуляризация предполагает, что нормальная производная собственной функции в самый последний момент снятия регуляризации делает скачок. На первый взгляд такое приближение кажется сомнительным, поэтому предлагается рассмотреть промежуточный вариант, при котором скачок компонент связности увеличивается постепенно, что приводит к непрерывному изменению краевого условия.

3.4.2 Формулировка леммы и доказательство

Произведем регуляризацию компонент связности подстановкой $\chi^\delta(s)$ вместо $\theta(s)$. Такая функция изображена на рис. 3.3, а свойства описаны в разделе 3.2. Также для удобства мы потребуем, чтобы выполнялось дополнительное условие: для каждого фиксированного $\delta_1 \in [0,1]$ функция

$$d(\delta_1, \delta) = \max_{s \in [-\delta_0, \delta_0]} |\chi^{\delta_1}(s) - \chi^\delta(s)| \quad (3.45)$$

параметра δ строго возрастает на множестве $[\delta_1, 1]$. При такой замене второе краевое условие будет изменяться непрерывно.

Для дальнейшего удобства также следует ввести вспомогательные обозначения. Символом \mathcal{D}_δ мы будем обозначать оператор Дирака с регуляризованными компонентами связности. При этом выполняется равенство $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$. Далее, через λ^δ и ψ_{λ^δ} мы будем обозначать собственные значения и собственные функции оператора Лапласа \mathcal{D}_δ^2 . Как известно, в этом случае индекс выражается формулой

$$\text{Index}(\mathcal{D}_\delta) = \sum_{\lambda^\delta} e^{-t\lambda^\delta} \int_M d^n x \text{tr} [\gamma_* \psi_{\lambda^\delta}(x) \overline{\psi_{\lambda^\delta}(x)}], \quad (3.46)$$

где суммирование производится по всем значениям спектрального параметра с учетом его кратности. Также мы предполагаем включение меры интегрирования $g^{1/2}$ в собственные функции, поэтому под оператором Дирака \mathcal{D}_δ мы будем подразумевать “подкрученный” оператор $g^{1/4} \mathcal{D}_\delta g^{-1/4}$. Далее, пусть собственные значения λ^δ перенумерованы в порядке их возрастания с учетом кратностей для каждого $\delta \in [0,1]$, поэтому можно переходить от суммирования по множеству $\{\lambda^\delta\}$ к суммированию по n от 0 до $+\infty$ по числам

$$\lambda_1^\delta \leq \lambda_2^\delta \leq \dots \quad (3.47)$$

Это возможно, поскольку оператор \mathcal{D}_δ^2 имеет дискретный счетный спектр для всех $\delta \in [0,1]$, см. [94]. Нумерация собственных значений дает возможность рассматривать каждый член суммы отдельно.

Лемма 3.5. *С учетом вышеизложенных требований мы имеем равенство*

$$\text{Index}(\mathcal{D}_\delta) = \text{Index}(\mathcal{D}) \quad (3.48)$$

для всех $\delta \in [0,1]$.

Доказательство: Выберем произвольным образом два числа $\delta_1, \delta_2 \in [0,1]$, таких что $\delta_1 \geq \delta_2$. Тогда, с учетом формулы (3.46), разность индексов для операторов \mathcal{D}_{δ_1} и \mathcal{D}_{δ_2} переписывается в виде

$$\begin{aligned} \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_1}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_2}) = \\ - \sum_{k_1, k_2} \int_0^\tau dt \text{tr} A_{\lambda_{k_2}^{\delta_2} \lambda_{k_1}^{\delta_1}} e^{-(\tau-t)\lambda_{k_1}^{\delta_1}} e^{-t\lambda_{k_2}^{\delta_2}} (\lambda_{k_1}^{\delta_1} - \lambda_{k_2}^{\delta_2}) U_{\lambda_{k_1}^{\delta_1} \lambda_{k_2}^{\delta_2}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

где операторы определяются равенствами

$$A_{\lambda_{k_2}^{\delta_2} \lambda_{k_1}^{\delta_1}} = \int_M d^n y \overline{\psi_{\lambda_{k_2}^{\delta_2}}(y)} \gamma_* \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}(y), \quad U_{\lambda_{k_1}^{\delta_1} \lambda_{k_2}^{\delta_2}} = \int_M d^n x \overline{\psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}(x)} \psi_{\lambda_{k_2}^{\delta_2}}(x) \quad (3.50)$$

и являются унитарными. Далее введем два семейства операторов Гильберта—Шмидта с параметром t , принадлежащим замкнутому интервалу $[0, \tau]$. Они определяются равенствами

$$B(t)_{\lambda\sigma} = e^{-\frac{1}{2}(\tau-t)\sigma} e^{-\frac{1}{2}t\lambda} A_{\lambda\sigma}, \quad C(t)_{\sigma\lambda} = e^{-\frac{1}{2}(\tau-t)\sigma} e^{-\frac{1}{2}t\lambda} (\sigma - \lambda) U_{\sigma\lambda}. \quad (3.51)$$

В частности, последние операторы дают возможность оценить сверху разность индексов. Действительно, из соотношения (3.49) следует оценка

$$|\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_1}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_2})| \leq \int_0^\tau dt \|B(t)C(t)\|_1, \quad (3.52)$$

которая после двукратного применения неравенства Коши—Буняковского—Шварца переписывается в виде

$$\begin{aligned} |\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_1}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_2})| &\leq \int_0^\tau dt \|B(t)\|_2 \|C(t)\|_2 \\ &\leq \left(\int_0^\tau dt \|B(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau dt \|C(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — операторные нормы, ядерная и Гильберта—Шмидта соответственно.

Далее рассмотрим каждый множитель по отдельности. Ясно, что величина $\|B(t)\|_2^2$ является следом двух операторов и записывается как

$$\text{Tr} \left(e^{-(\tau-t)\mathcal{D}_{\delta_1}} e^{-t\mathcal{D}_{\delta_2}} \right), \quad (3.53)$$

и, следовательно, существует такое положительное число $N_0 < +\infty$, что

$$N_0 = \max_{\delta_2 \in [0,1]} \max_{\delta_1 \in [0,1]} \left(\int_0^\tau dt \|B(t)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.54)$$

Оценку второго множителя необходимо делать в несколько этапов. Прежде всего выпишем явную формулу

$$\|C(t)\|_2^2 = \sum_{k_1, k_2} \operatorname{tr} e^{-(\tau-t)\lambda_{k_1}^{\delta_1}} e^{-t\lambda_{k_2}^{\delta_2}} \left(\lambda_{k_1}^{\delta_1} - \lambda_{k_2}^{\delta_2} \right)^2 \left| U_{\lambda_{k_1}^{\delta_1} \lambda_{k_2}^{\delta_2}} \right|^2, \quad (3.55)$$

из которой следует, что величина $\|C(t)\|_2^2$ является полной второй производной по параметру t . Ввиду этого мы можем в явном виде произвести интегрирование и получить формулу

$$\int_0^\tau dt \|C(t)\|_2^2 = \sum_{k_1, k_2} \operatorname{tr} \left(e^{-\tau\lambda_{k_2}^{\delta_2}} - e^{-\tau\lambda_{k_1}^{\delta_1}} \right) \left(\lambda_{k_1}^{\delta_1} - \lambda_{k_2}^{\delta_2} \right) \left| U_{\lambda_{k_1}^{\delta_1} \lambda_{k_2}^{\delta_2}} \right|^2, \quad (3.56)$$

которая оценивается сверху величиной

$$\sum_{i=1,2} \sum_{k_i} e^{-\tau\lambda_{k_i}^{\delta_i}} \left| \left(\mathcal{D}_{\delta_1}^2 - \mathcal{D}_{\delta_2}^2 \right) \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}, \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}} \right|, \quad (3.57)$$

где большими круглыми скобками обозначено скалярное произведение сечений расслоения в L^2 . Последняя формула позволяет произвести оценку. Без потери общности мы проделаем вычисления для случая $i = 1$, для $i = 2$ все аналогично. Действительно, перепишем разность операторов в виде

$$\mathcal{D}_{\delta_1}^2 - \mathcal{D}_{\delta_2}^2 = -(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2})^2 - (\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2})\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_1}(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}), \quad (3.58)$$

тогда скалярное произведение из формулы (3.57) представляется в виде суммы трех слагаемых, для каждого из которых мы можем произвести оценку сверху.

Используя равенства

$$\|\psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(M)} = 1, \quad \|\mathcal{D}_{\delta_1} \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(M)}^2 = |\lambda_{k_1}^{\delta_1}|, \quad (3.59)$$

где $W_2^0(M)$ обозначает пространство Соболева, а также неравенство Коши—Буняковского—Шварца, мы получаем оценки для каждого слагаемого

$$\left| \left((\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2})^2 \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}, \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}} \right) \right| \leq \|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(M)}^2, \quad (3.60)$$

$$\left| \left((\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \mathcal{D}_{\delta_1} \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}, \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}} \right) \right| \leq |\lambda_{k_1}^{\delta_1}|^{\frac{1}{2}} \|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(M)}, \quad (3.61)$$

$$\left| \left(\mathcal{D}_{\delta_1} (\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}, \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}} \right) \right| \leq |\lambda_{k_1}^{\delta_1}|^{\frac{1}{2}} \|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(M)}. \quad (3.62)$$

Для того чтобы получить равномерную по собственным функциям оценку, необходимо более подробно рассмотреть разность операторов Дирака

$$\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2} = i\gamma^a (\chi^{\delta_1} - \chi^{\delta_2}) \hat{B}_a. \quad (3.63)$$

Такая разность является оператором умножения на гладкую ограниченную функцию, носитель которой расположен в множестве $\Sigma \times [-\delta_0, \delta_0]$.

Введем число для обозначения нормы оператора

$$N_1 = \max_{x \in \Sigma \times [-\delta_0, \delta_0]} \left| i\gamma^a \hat{B}_a \right|, \quad (3.64)$$

тогда

$$\|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2})\psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(M)}^2 \leq N_1 d(\delta_1, \delta_2) \|\psi_{\lambda_{k_1}^{\delta_1}}\|_{W_2^0(\Sigma \times [-\delta_0, \delta_0])}^2 \leq N_1 d(\delta_1, \delta_2). \quad (3.65)$$

Собирая все вычисления в обратном порядке, формула (3.57) оценивается сверху величиной

$$\sum_{i=1,2} \sum_{k_i} e^{-\tau \lambda_{k_i}^{\delta_i}} \left[N_1 d(\delta_1, \delta_2) + 2(|\lambda_{k_i}^{\delta_i}| N_1 d(\delta_1, \delta_2))^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (3.66)$$

Введем для удобства число

$$N = \max_{\delta \in [0,1]} \sum_k e^{-\tau \lambda_k^\delta} \left[N_1 + 2(|\lambda_{k_n}^\delta| N_1)^{\frac{1}{2}} \right], \quad (3.67)$$

тогда, с учетом того, что

$$0 \leq d(\delta_1, \delta_2) \leq \frac{1}{2}, \quad (3.68)$$

получаем оценку сверху для разности индексов

$$|\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_1}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_2})| \leq N_0 (4N^2 d(\delta_1, \delta_2))^{\frac{1}{4}}. \quad (3.69)$$

Для доказательства утверждения леммы осталось обратить внимание на то, что при каждом фиксированном $\delta_1 \in [0,1]$ функция $d(\delta_1, \cdot)$ является строго возрастающей на промежутке $[\delta_1, 1]$. Действительно, в этом случае существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и такое множество точек $\{\delta_i\}_{i=1}^n$, принадлежащих отрезку $[0,1]$, что выполнены следующие условия:

$$0 = \delta_1 < \dots < \delta_n = 1, \quad (3.70)$$

а также

$$|\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_i}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_{i+1}})| < 1 \quad (3.71)$$

для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Поскольку индекс является целым числом, из последнего неравенства следует соотношение

$$\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_i}) = \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_{i+1}}) \quad (3.72)$$

для всех $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Следовательно, индекс $\text{Index}(\mathcal{D}_\delta)$ является функцией, постоянной на промежутке $[0,1]$. ■

3.4.3 Следствие инвариантности индекса

В предыдущем разделе было показано, что при регуляризации специального вида, см. рис. 3.3, индекс оператора Дирака остается постоянным при всех значениях параметра регуляризации. Такой результат был достигнут во многом благодаря непрерывной зависимости скачка компонент связности от параметра регуляризации.

Теперь можно показать равенство индексов для регуляризации, при которой нормальная производная является непрерывной для всех допредельных значений параметра регуляризации.

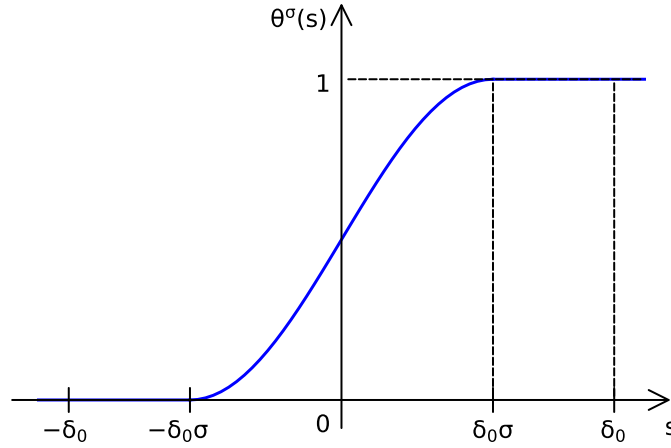
Действительно, давайте сделаем сглаживание компонент связности в окрестности поверхности $\Sigma \times \{0\}$ путем замены функции Хевисайда θ на $\theta^\sigma \in C^\infty(\mathbb{R})$, где $\sigma \in [0,1]$. При этом функция строго возрастает от $0 = \theta^\sigma(s)|_{s \leq -\delta_0\sigma}$ до $1 = \theta^\sigma(s)|_{s \geq \delta_0\sigma}$. Схематически такая функция изображена на рис. 3.5.

Через \mathcal{D}_σ обозначим оператор Дирака, регуляризованный при помощи сглаживающей функции θ^σ . Для такого оператора можно сформулировать результат, аналогичный лемме 3.5.

Лемма 3.6. *С учетом вышеизложенных предположений имеет место равенство*

$$\text{Index}(\mathcal{D}_\sigma) = \text{Index}(\mathcal{D}) \quad (3.73)$$

для всех $\sigma \in [0,1]$.

Рисунок 3.5 — График функции $\theta^\sigma(s)$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из леммы 3.5. Действительно, для любого значения параметра $\sigma \in [0,1]$ мы можем построить функцию χ^δ из предыдущего раздела, обладающую дополнительным свойством: $\chi^1 = \theta^\sigma$. Тогда для дважды регуляризованного оператора $\mathcal{D}_{\sigma\delta}$, $\delta \in [0,1]$, верна цепочка равенств

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma\delta} = \mathcal{D}_{\sigma 0} = \mathcal{D}_\sigma,$$

из которой и следует утверждение леммы. ■

3.5 Инвариантность индекса в общем случае

3.5.1 Мотивировка

В разделе 3.4 на многообразии M было наложено дополнительное ограничение в виде структуры прямого произведения в некоторой ε_0 -окрестности поверхности Σ . На математическом языке такие условия формулируются так:

$$\frac{d}{ds}g^{ab}(x) = 0 \text{ и } \frac{d}{ds}\hat{A}_\mu^-(x) = 0 \quad (3.74)$$

для всех $x \in \Sigma \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. В данной части работы мы откажемся от такого предположения. Действительно, давайте вернем зависимость от n -ой переменной.

Это можно сделать при помощи замены функций

$$g^{ab} \rightarrow \tilde{g}^{ab}, \quad \hat{A}_\mu^- \rightarrow \tilde{A}_\mu^-, \quad (3.75)$$

где \tilde{g}^{ab} и \tilde{A}_μ^- — произвольные гладкие функции на M , не нарушающие общие предположения раздела 3.1. Такая подстановка, в частности, может привести к появлению внешней кривизны. Необходимо отметить, что за счет выбора координат Гаусса, блочная структура метрики сохраняется

$$(g^{\mu\nu}) \rightarrow (\tilde{g}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} (\tilde{g}^{ab}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Основной задачей данного раздела является построение регуляризации, которая возвращала бы многообразие M в окрестности поверхности Σ структуру прямого произведения, а также оставляла бы индекс оператора Дирака постоянным.

3.5.2 Формулировка результата и доказательство

Сперва следует отметить, что риманова связность строится при помощи метрического тензора $g^{\mu\nu}$ и содержит его первые производные. Следовательно, оператор Дирака \mathcal{D}_δ содержит не только регуляризующую функцию χ^δ , как это было в разделе 3.4, но также и ее первую производную χ_1^δ , которые связаны равенством вида

$$\chi^\delta(s) = \int_0^s dt \chi_1^\delta(t). \quad (3.77)$$

Давайте сформулируем основные свойства функции $\chi_1^\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$ для всех $\delta \in [0,1]$:

- $\exists C > 0$ такое, что $|\chi_1^\delta(s)| < C$ для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\delta \in [0,1]$;
- $\chi^\delta(s)$ — нечетная, и $\chi^\delta(s) = s$ для $s \geq \delta_0$;
- $\chi_1^0(s) = 1$ для всех $s \in \mathbb{R}$, и $\chi_1^1(s) = 0$ в некоторой окрестности $s = 0$;
- для каждого фиксированного $\delta_1 \in [0,1]$ функции

$$\max_{s \in [-\delta_0, \delta_0]} |\chi^{\delta_1}(s) - \chi^\delta(s)|, \quad \max_{s \in [-\delta_0, \delta_0]} |\chi_1^{\delta_1}(s) - \chi_1^\delta(s)| \quad (3.78)$$

параметра δ строго возрастают на множестве $[\delta_1, 1]$ и строго убывают на множестве $[0, \delta_1]$.

Графические примеры таких функций представлены на рисунках 3.6 и 3.7.

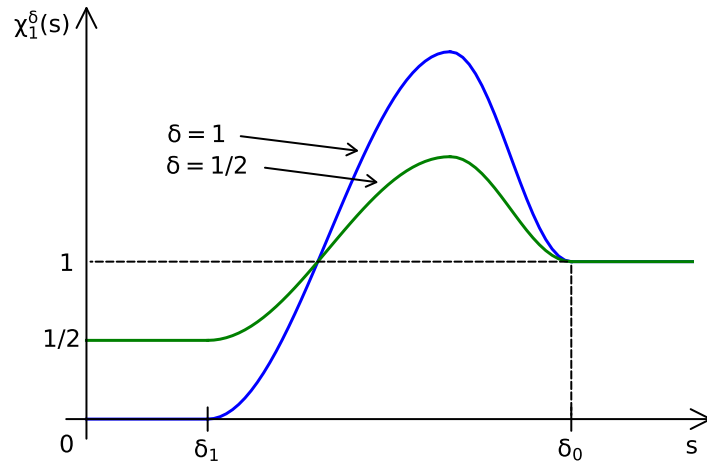


Рисунок 3.6 — График функции $\chi_1^\delta(s)$ для различных значений параметра δ .

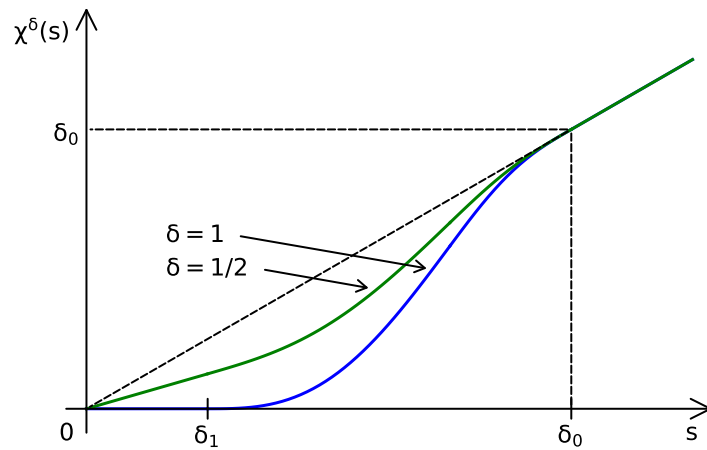


Рисунок 3.7 — График функции $\chi^\delta(s)$ для различных значений параметра δ .

После введения вспомогательной функции мы можем определить регуляризованные компоненты метрики и связности. Сам процесс заключается в замене переменной s на ее деформированный аналог $\chi^\delta(s)$, $\delta \in [0,1]$, то есть

$$\tilde{g}_{ab}^\delta(x) = \tilde{g}_{ab}(x)|_{s=\chi^\delta(s)}, \quad \tilde{A}_a^{\delta-}(x) = \tilde{A}_a^-(x)|_{s=\chi^\delta(s)}. \quad (3.79)$$

Заметим, что вне δ_0 -окрестности поверхности Σ компоненты метрики и связности не испытывают регуляризации. Таким образом, δ_0 можно выбрать столь малым, чтобы в регуляризованной области оставались определены координаты Гаусса.

После введения регуляризации оператор Дирака \mathcal{D} переходит в некоторый новый оператор, который мы будем обозначать \mathcal{D}_δ , при $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$.

Лемма 3.7. *С учетом вышеизложенных требований мы имеем равенство*

$$\text{Index}(\mathcal{D}_\delta) = \text{Index}(\mathcal{D}) \quad (3.80)$$

для всех $\delta \in [0,1]$.

Доказательство: Пусть λ^δ и ψ_{λ^δ} — соответствующие собственные значения и собственные функции оператора \mathcal{D}_δ^2 . При этом мы сохраним предположения о нумерации и обозначения из раздела 3.4. Тогда для произвольных $\delta_1, \delta_2 \in [0,1]$, таких что $\delta_1 \geq \delta_2$, первые несколько выкладок полностью повторяются и, с учетом нормировок (3.59), разность индексов оценивается сверху (см. формулы (3.57) и (3.60)–(3.62)) величиной

$$\begin{aligned} |\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_1}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_2})| \leq & \\ & N_0 \left(\sum_{i=1,2} \sum_{k_i} e^{-\tau \lambda_{k_i}^{\delta_i}} \left[\|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(M)}^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 |\lambda_{k_i}^{\delta_i}|^{\frac{1}{2}} \|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2}) \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(M)} \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.81) \end{aligned}$$

где N_0 — константа, не зависящая от параметров δ_1 и δ_2 .

На этом этапе появляются различия. Действительно, в отличие от случая прямого произведения, где разность операторов Дирака была ограниченным оператором умножения, возникает также неограниченный оператор первой производной. В то же время необходимо помнить, что под оператором мы понимаем “подкрученный” его аналог.

После введения регуляризации такие величины, как определитель метрики, γ -матрицы и связность Леви-Чивиты, тоже претерпевают деформацию. Обозначим их через g^δ , γ_δ^μ и $\omega_\mu^{\delta[s]}$ соответственно. Тогда разность операторов

$$\mathcal{D}_{\delta_1} - \left(\frac{g^{\delta_2}}{g^{\delta_1}} \right)^{\frac{1}{4}} \mathcal{D}_{\delta_2} \left(\frac{g^{\delta_1}}{g^{\delta_2}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.82)$$

переписывается в виде

$$i(\gamma_{\delta_1}^\mu - \gamma_{\delta_2}^\mu) \partial_\mu + \kappa_{\delta_1, \delta_2}, \quad (3.83)$$

где оператор умножения имеет следующий вид

$$\kappa_{\delta_1, \delta_2} = i(\gamma_{\delta_1}^\mu \omega_\mu^{\delta_1[s]} - \gamma_{\delta_2}^\mu \omega_\mu^{\delta_2[s]}) + i(\gamma_{\delta_1}^\mu A_\mu^{\delta_1} - \gamma_{\delta_2}^\mu A_\mu^{\delta_2}) - \frac{i}{4} \left(\frac{\gamma_{\delta_2}^\mu \partial_\mu g^{\delta_1}}{g^{\delta_1}} - \frac{\gamma_{\delta_2}^\mu \partial_\mu g^{\delta_2}}{g^{\delta_2}} \right). \quad (3.84)$$

Важным является тот факт, что последние формулы не содержат производные компонент связности и метрики выше первого порядка. Благодаря этому, мы можем воспользоваться последним свойством функции χ^δ и найти такую константу $N_1 > 0$ и такую функцию f , которая обладает свойствами

- $f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$;
- для каждого фиксированного $\delta_1 \in [0,1]$ функция одной переменной $f(\delta_1, \cdot)$ является строго возрастающей на промежутке $[\delta_1, 1]$, при этом $f(\delta_1, \delta_1) = 0$, а функция $f(\cdot, \delta_1)$ — строго убывающей на интервале $[0, \delta_1]$;
- выполнены равенства

$$|\gamma_{\delta_1}^\mu - \gamma_{\delta_2}^\mu| \leq N_1 f(\delta_1, \delta_2), \quad |\kappa_{\delta_1, \delta_2}| \leq N_1 f(\delta_1, \delta_2) \quad (3.85)$$

для любого значения индекса $\mu \in \{1, \dots, n\}$.

Пользуясь последними формулами, неравенством Коши—Буняковского—Шварца и неравенством треугольника, мы получаем оценку

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2})\psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(M)}^2 &\leq \\ &N_1^2 f^2(\delta_1, \delta_2) \sum_{\mu, \nu} \|\partial_\mu \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(U_{\delta_0}(\Sigma))} \|\partial_\nu \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(U_{\delta_0}(\Sigma))} \\ &+ 2N_1^2 f^2(\delta_1, \delta_2) \sum_{\mu} \|\partial_\mu \psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(U_{\delta_0}(\Sigma))} + N_1^2 f^2(\delta_1, \delta_2), \end{aligned} \quad (3.86)$$

где $U_{\delta_0}(\Sigma)$ является δ_0 -окрестностью поверхности Σ . Также были использованы нормировка собственных функций (3.59) и соотношение

$$\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2} = 0, \quad x \in M \setminus U_{\delta_0}(\Sigma).$$

Однако, последняя оценка не является равномерной по собственным функциям. Поэтому необходимо воспользоваться неравенством Гординга (см. [106]), согласно которому для компактного односвязного многообразия без края M существуют такие положительные числа $N_2, N_3 > 0$, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\partial_\mu \psi_{\lambda_k^\delta}\|_{W_2^0(M)} &\leq N_2 \|\mathcal{D}_\delta \psi_{\lambda_k^\delta}\|_{W_2^0(M)} + N_3 \|\psi_{\lambda_k^\delta}\|_{W_2^0(M)} \\ &\leq N_2 |\lambda_k^\delta|^{\frac{1}{2}} + N_3 \end{aligned} \quad (3.87)$$

для всех значений индексов μ и k и параметра $\delta \in [0,1]$. Тогда неравенство (3.86) переписывается как

$$\|(\mathcal{D}_{\delta_1} - \mathcal{D}_{\delta_2})\Psi_{\lambda_{k_i}^{\delta_i}}\|_{W_2^0(M)}^2 \leq N_1^2 f^2(\delta_1, \delta_2) \left(n[N_2 |\lambda_{k_i}^{\delta_i}|^{\frac{1}{2}} + N_3] + 1 \right)^2. \quad (3.88)$$

Таким образом, принимая во внимание включение $\text{Im}(f) \subset [0,1]$ и вводя вспомогательное число

$$N = \max_{\delta_1 \in [0,1]} \max_{\delta_2 \in [0,1]} N_0 \left(\sum_{i=1,2} \sum_{k_i} e^{-\tau \lambda_{k_i}^{\delta_i}} \left[N_1^2 \left(n[N_2 |\lambda_{k_i}^{\delta_i}|^{\frac{1}{2}} + N_3] + 1 \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 |\lambda_{k_i}^{\delta_i}|^{\frac{1}{2}} N_1 \left(n[N_2 |\lambda_{k_i}^{\delta_i}|^{\frac{1}{2}} + N_3] + 1 \right) \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.89)$$

мы получаем оценку сверху для разности индексов (3.81) вида

$$|\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_1}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_2})| \leq N f^{\frac{1}{2}}(\delta_1, \delta_2). \quad (3.90)$$

Из последнего соотношения следует утверждение настоящей леммы. Действительно, существуют такие числа $k \in \mathbb{N}$ и $\{\delta_i\}_{i=1}^k$, что выполнены соотношения

$$0 = \delta_1 < \dots < \delta_k = 1 \quad (3.91)$$

и

$$|\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_i}) - \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_{i+1}})| < 1 \quad (3.92)$$

для всех $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Учитывая тот факт, что индекс является целым числом, мы получаем серию равенств

$$\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_i}) = \text{Index}(\mathcal{D}_{\delta_{i+1}}) \quad (3.93)$$

для всех $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Следовательно, функция $\text{Index}(\mathcal{D}_{\delta})$ параметра δ является постоянной на промежутке $[0,1]$. ■

3.6 Альтернативный подход в случае прямого произведения

Изначально доказательство леммы 3.3 имело совершенно иной вид и основывалось на результатах глав 1 и 2. Однако оно имеет более громоздкий вид, поэтому и носит характер дополнения.

Как было показано после формулы (3.32), процесс масштабирования переменной s позволяет избавиться от оператора ∂_s^2 , поскольку он приносит множитель r^{-2} . Давайте рассмотрим этот факт более подробно и попытаемся заменить метод скейлинга на метод анализа локальных слагаемых разложения теплового ядра. Для простоты предположим, что метрический тензор в цилиндре S равен символу Кронекера.

Основными результатами раздела 3.3 являются теоремы 1.15, 2.5 и 2.7 для оператора Лапласа с ковариантной производной. Они дают нерекурсивную формулу для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта. Также известно (см. формулу (3.32)), что плотность Понтрягина выражается через последние. Следовательно, мы можем использовать явный вид формул для анализа коэффициентов асимптотического разложения при $r \rightarrow \infty$.

Из вышеуказанных теорем можно извлечь следствие. Пусть V — потенциал оператора Лапласа и $F_{\nu\rho}$ — напряженность калибровочного поля, тогда следовая часть коэффициента теплового ядра строится из конечного числа блоков двух сортов. Первый из них включает потенциал

$$\nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_k} V. \quad (3.94)$$

Учитывая, что в указанном случае вся зависимость от n -ой переменной находится в функции $f(\cdot)$, см. формулу (3.24), то наличие среди производных $\nabla_n = \partial_s$ приведет к появлению степени r^{-1} .

Второй вид блока можно записать так

$$\nabla_{\mu_1} \dots \nabla_{\mu_k} (\hat{x} - \hat{y})^\nu F_{\nu\rho}(\hat{x})|_{\hat{x}=\hat{y}}, \quad (3.95)$$

где зависимость от переменной s может иметь не только функция f , но и множитель $(\hat{x} - \hat{y})^\nu$. При этом индекс ρ также отвечает производной. Отметим, что по крайней мере одна производная обязана действовать на степенной множитель, иначе след будет нулевым. Итак, пусть одна из производных падает на скобку, тогда возможны два случая: либо F_{ab} , и тогда справедливо рассуждение для случая формулы (3.94), либо F_{nb} , которая пропорциональна первой степени r^{-1} . Таким образом производная всегда появляется с множителем r^{-1} . А поскольку оператор ∂_s^2 равен квадрату производной, то и степень повышается сразу на двойку.

Следовательно, такая цепочка рассуждений является альтернативой методу скейлинга.

3.7 Обобщение теоремы об индексе

3.7.1 Мотивировка

Как было отмечено в разделе 3.1 теорема Атьи—Зингера—Патоли устанавливает связь между спектральной функцией оператора Дирака и интегралом от соответствующей плотности Понтрягина. При этом последняя может содержать сингулярные слагаемые, которые приводят к рассмотрению поверхностных слагаемых.

В предыдущих разделах 3.1—3.6 была рассмотрена задача на римановом многообразии M с условием “доменная стенка”, представляющая собой подмногообразие $\Sigma \subset M$ коразмерности 1, на котором компоненты калибровочной связности имеют скачок. Такая задача является хорошо поставленной и позволяет получить явную формулу (3.22) (см. [A5]), которая, однако, имеет достаточно затейливый вид.

Легко заметить, что второе и третье слагаемые в правой части формулы (3.22) являются интегралами по поверхности Σ и на первый взгляд имеют различную природу, поскольку второе слагаемое является относительной спектральной асимметрией оператора Дирака, в то время как третье не имеет явного смысла и, более того, содержит внешнюю кривизну.

Ввиду этого имеет смысл ввести в рассмотрение определение обобщенной относительной спектральной асимметрии, которая позволила бы объединить поверхностные слагаемые естественным путем. При этом важно показать согласованность нового определения со старым (см. теорему 3.8).

Также важно рассмотреть расширение условия “доменная стенка” на случай, когда не только компоненты связности Янга—Миллса имеют скачок на поверхности Σ , но и компоненты римановой связности. При этом метрический тензор остается непрерывным. Пример использования такого типа условий можно встретить в работе [107].

3.7.2 Формулировка результатов

Будем предполагать, что выполнены все условия раздела 3.1. Также мы продолжим использовать ранее введенные обозначения. В частности, 1-форма связности Янга–Миллса имеет разложение

$$A^+ = A^- + \theta(s)B,$$

где $\theta(s)$ — функция Хевисайда, а 1-форма A^- и B имеет гладкие плотности. Через F^+ и F^- обозначим соответствующие 2-формы напряженности полей Янга–Миллса.

Далее, дабы расширить постановку задачи, будем предполагать, что 1-формы римановой связности также имеют скачок на поверхности Σ и локально представима в виде

$$\Gamma^+ = \Gamma^- + \theta(s)\Gamma_0,$$

где 1-формы Γ^- и Γ_0 имеют гладкие плотности. Также через R^+ и R^- обозначим соответствующие 2-формы римановой кривизны. При этом подразумевается, что компоненты метрического тензора остаются непрерывными.

Стандартное определение относительной спектральной асимметрии формулируется при помощи коэффициентов Сили–деВитта и операторов \mathcal{D}^- и \mathcal{D}^+ на поверхности Σ , см. формулу (3.21). Однако, такое определение упускает некоторую информацию. Действительно, поверхность Σ является подмногообразием M и имеет внешнюю кривизну. Учитывая этот факт, мы можем заявить, что старое определение для относительной спектральной асимметрии не учитывает “фон”, то есть параметры многообразия, которое содержит в себе Σ . Сейчас мы готовы дать новое расширенное определение в обобщенной постановке.

Определение 3.1. *С учетом вышеизложенных предположений обобщенная относительная спектральная асимметрия определяется равенством*

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(A^+, \Gamma^+, A^-, \Gamma^-) = \\ - 2 \int_{\Sigma} \left(\widehat{A}(R^+) \wedge \text{T ch}(A^+, A^-) + \text{T} \widehat{A}(\Gamma^+, \Gamma^-) \wedge \text{ch}(F^-) \right), \end{aligned} \quad (3.96)$$

где подразумевается сужение форм на поверхность Σ .

Легко получить эквивалентную формулировку для последнего определения

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(A^+, \Gamma^+, A^-, \Gamma^-) &= \\ &= -2 \int_{\Sigma} \left(\widehat{A}(R^-) \wedge T \operatorname{ch}(A^+, A^-) + T \widehat{A}(\Gamma^+, \Gamma^-) \wedge \operatorname{ch}(F^+) \right). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Для этого достаточно вспомнить, что поверхность Σ не имеет границы, а затем воспользоваться теоремой Стокса и следующими соотношениями для трансгрессии:

$$\begin{aligned} dT \operatorname{ch}(A^+, A^-) &= \operatorname{ch}(F^+) - \operatorname{ch}(F^-), \\ dT \widehat{A}(\Gamma^+, \Gamma^-) &= \widehat{A}(R^+) - \widehat{A}(R^-). \end{aligned}$$

Если же 1-форма римановой связности не содержит скачка, то есть $\Gamma^+ = \Gamma^-$, то мы получаем следующий частный случай

$$\tilde{\eta}(A^+, \Gamma^+, A^-, \Gamma^+) = -2 \int_{\Sigma} \widehat{A}(R^+) \wedge T \operatorname{ch}(A^+, A^-). \quad (3.98)$$

Для того чтобы понять, почему определение имеет именно такой вид, его следует рассмотреть в контексте теоремы Атьи—Зингера—Патоли для доменных стенок. Это удобно делать в два шага. Сперва рассмотрим случай, изученный в разделе 3.3, когда 1-форма римановой связности является гладкой на всем многообразии M . Следовательно, $\Gamma^+ = \Gamma^- = \Gamma$.

Теорема 3.8. *С учетом условий, изложенных ранее, и раздела 3.1, верны следующие соотношения:*

$$\tilde{\eta}(A^+, \Gamma^\delta, A^-, \Gamma^\delta)|_{\delta=1} = \tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-); \quad (3.99)$$

$$\tilde{\eta}(A^+, \Gamma, A^-, \Gamma) = \tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-) + 2 \int_{\Sigma} T \widehat{A}(\Gamma^\delta|_{\delta=1}, \Gamma) \wedge [\operatorname{ch}(F^+) - \operatorname{ch}(F^-)]; \quad (3.100)$$

$$\operatorname{Index}(\not{D}) = \int_{M \setminus \Sigma} d^n x P - \frac{1}{2} \tilde{\eta}(A^+, \Gamma, A^-, \Gamma), \quad (3.101)$$

где Γ^δ — деформированная в окрестности поверхности Σ 1-форма римановой связности из раздела 3.3, формула 3.44.

Доказательство: Легко заметить, что формула (3.101) следует из соотношения (3.100) и теоремы Атьи—Зингера—Патоли об индексе для доменных стенок (3.22).

Далее, равенство (3.100) может быть получено при помощи формулы (3.99), определения обобщенной относительной спектральной асимметрии в форме (3.98), а также теоремы Стокса.

Следовательно, мы должны доказать лишь соотношение (3.99). Для этой цели необходимо вспомнить как формула (3.21) была получена в разделе 3.2 в случае прямого произведения, то есть когда метрический тензор, A^- и B не зависят от переменной s в некоторой окрестности поверхности Σ . Последовательность действий следующая:

1. разрезать многообразие M вдоль поверхности Σ и затем приклеить между двумя частями цилиндр $C_\varepsilon = \Sigma \times [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, как это показано на рис. 3.2;
2. определить в цилиндре C_ε 1-формы связностей (риманова и Янга—Миллса) специальным гладким образом

$$\Gamma' = \Gamma_\mu|_{s=0} dx^\mu, \quad A' = A_\mu^-|_{s=0} dx^\mu + f(s/\varepsilon) B_\mu|_{s=0} dx^\mu,$$

где

$$f \in C^\infty([0,1]) : f(0) = 0, f(1) = 1, f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1) = 0 \text{ для всех } m > 0;$$

3. вычислить n -форму Понтрягина $d^n x P_\varepsilon$ в цилиндре C_ε при помощи коэффициентов Сили—деВитта;
4. вычислить предел

$$\tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-) = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{C_\varepsilon} d^n x P_\varepsilon,$$

используя тот факт, что последний интеграл не зависит от параметра регуляризации ε .

Следовательно, мы можем повторить шаги 3 и 4, используя эквивалентную формулу для плотности Понтрягина P_ε , которая может быть выражена через \widehat{A} -род и полином Черна ch (см. [96])

$$d^n x P_\varepsilon = \widehat{A}(R') \wedge ch(F'_\varepsilon), \quad (3.102)$$

где R' и F'_ε — соответствующие 2-формы кривизны.

Затем, применяя вспомогательную лемму 3.10 после выбора параметров в виде

$$V = ch, \quad \omega_1 = \widehat{A}(R'), \quad \omega_2 = 0,$$

$$B^1 = A_\mu^-|_{s=0} dx^\mu, \quad B^2 = 0, \quad B^3 = B_\mu|_{s=0} dx^\mu,$$

мы получаем эквивалентное представление для асимметрии в виде (3.98), из которого следует последнее соотношение (3.99) теоремы. ■

Вторым шагом является переход к более общему случаю. Пусть риманова связность имеет различные пределы, Γ^- и Γ^+ , при подходе к поверхности Σ , в то время как компоненты метрического тензора остаются непрерывными. Тогда теорема Атьи—Зингера—Патоди об индексе для доменных стенок может быть сформулирована так

Теорема 3.9. *С учетом вышеупомянутых условий верно соотношение*

$$\text{Index}(\not{D}) = \int_{M \setminus \Sigma} d^n x P - \frac{1}{2} \tilde{\eta}(A^+, \Gamma^+, A^-, \Gamma^-). \quad (3.103)$$

Доказательство: В этом случае удобно воспользоваться процедурой из предыдущей теоремы с тем лишь изменением, что вместо одного цилиндра мы подставим два. Действительно, давайте разрежем многообразие M вдоль поверхности Σ и затем приклеим один за другим два цилиндра C_{ε_1} и C_{ε_2} , как это показано на рис. 3.8. Затем определим на них 1-формы связностей следующим образом:

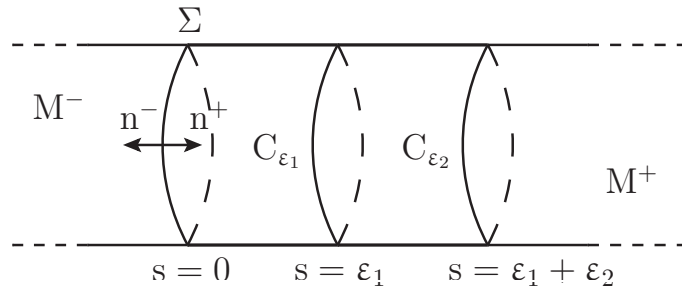


Рисунок 3.8 — Расширенное многообразие с двумя цилиндрами C_{ε_1} и C_{ε_2} .

1. в цилиндре C_{ε_1} риманова 1-форма определяется гладким образом между значениями $\Gamma^-|_\Sigma$ и $\Gamma^+|_\Sigma$, а 1-форма Янга—Миллса между $A^-|_\Sigma$ и $A^+|_\Sigma$;
2. в цилиндре C_{ε_2} 1-форма Янга—Миллса определяется гладким образом между двух значений $A^-|_\Sigma$ и $A^+|_\Sigma$, в то время как риманова 1-форма между $\Gamma^+|_\Sigma$ и $\Gamma^+|_\Sigma$.

Затем, следуя логике из предыдущей теоремы, мы должны найти значение предела

$$-2 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{C_{\varepsilon_1}} d^n x P_{\varepsilon_1}^1 - 2 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{C_{\varepsilon_2}} d^n x P_{\varepsilon_2}^2,$$

где $P_{\varepsilon_1}^1$ и $P_{\varepsilon_2}^2$ — соответствующие плотности Понтрягина в цилиндрах C_{ε_1} и C_{ε_2} . Давайте также отметим, что возможно построить такую гомотопию, что все напряженности вместе со своими производными внутри многообразия, а также условия сшивки на поверхности Σ вместе с соответствующими инвариантами на Σ , являются гладкими функциями параметра гомотопии. Следовательно, последние интегралы также гладким образом зависят от параметра. Более того, они постоянны, поскольку индекс является целым числом.

Таким образом, применяя дважды лемму 3.10, мы получаем функцию $\tilde{\eta}(A^+, \Gamma^+, A^-, \Gamma^-)$ в виде (3.96). ■

3.7.3 Вспомогательная лемма

Лемма 3.10. Пусть $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ и $A_\varepsilon = B^1 + sB^2 + f(s/\varepsilon)B^3$, где $f \in C^\infty([0,1])$, такая что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, является семейством 1-форм связностей в цилиндре $C_\varepsilon = \Sigma \times [0, \varepsilon]$. F_ε — соответствующая 2-форма напряженности. Далее, пусть V является инвариантным полиномом, и $\omega = \omega_1 + s\omega_2$ — форма четной степени, плотность которой является гладкой. Более того, потребуем, чтобы плотности форм B^1 , B^3 и ω_1 были гладкими и не зависели от переменной s и параметра ε , в то время как плотности B^2 , \dot{B}^2 и ω_2 были бы гладкими и ограниченными функциями в цилиндре C_ε для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где точка обозначает производную по переменной s . Если следующий интеграл

$$\int_{C_\varepsilon} \omega \wedge V(F_\varepsilon)$$

не зависит от параметра ε , тогда он равен

$$\int_{\Sigma} \omega_1 \wedge TV(B^1 + B^3, B^1),$$

где мы подразумеваем сужение форм на подмногообразии Σ , и TV является трансгрессией полинома V .

Доказательство: Основная идея заключается в использовании асимптотического разложения при малых значениях параметра $\varepsilon \rightarrow +0$. Для удобства мы можем представить 2-форму напряженности в виде суммы двух слагаемых

$$F_\varepsilon = \varepsilon^{-1}f'(s/\varepsilon) ds \wedge B^3 + \theta,$$

где второе слагаемое имеет гладкую плотность, ограниченную для всех значений $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Также известно, что инвариантный полином можно разложить в сумму $V = \sum_{k \geq 0} V_k$, где V_k — инвариантный полином степени k . Символом \tilde{V}_k обозначим поляризацию полинома V_k . Используя тот факт, что форма ds может появляться лишь единожды, мы получаем следующее разложение

$$V(F_\varepsilon) = \varepsilon^{-1} f'(s/\varepsilon) \sum_{k \geq 1} k \tilde{V}_k(ds \wedge B^3, F_\varepsilon, \dots, F_\varepsilon) + O(1).$$

После этого, используя вспомогательную полевую напряженность \hat{F}_s для 1-формы $B^1 + sB^3$ и производя в интеграле замену переменной вида $s \rightarrow f(s/\varepsilon)$, мы получаем

$$\int_{C_1} ds \wedge \omega_1 \wedge \left[\sum_{k \geq 1} k \tilde{V}_k(B^3, \hat{F}_s, \dots, \hat{F}_s) \right] + O(\varepsilon).$$

Фактор ds выделен специально. Благодаря этому мы можем перейти к ограничениям форм ω_1 , B^1 и B^3 на поверхность Σ . Более того, первое слагаемое не зависит от параметра ε , в то время как второе слагаемое произвольно мало и, следовательно, может быть опущено.

Как мы знаем, форма ω_1 не зависит от переменной s . Поэтому утверждение леммы следует из определения трансгрессии. ■

Заключение

Основные результаты и перспективы развития работы заключаются в следующем.

Главы 1 и 2 посвящены изучению коэффициентов Сили—деВитта для оператора Лапласа с гладкими коэффициентами. Основным результатом представлен в виде набора теорем, связанных с диаграммной техникой (теорема 1.8), с алгебраическим подходом вычисления диагональных частей (теорема 1.15), с коммутационными соотношениями упорядоченных экспонент (теорема 2.2), с нерекурсивными формулами для коэффициентов на диагонали (теоремы 2.5, 2.6 и 2.7), а также с континуальным представлением теплового ядра (теоремы 2.8 и 2.11).

Предполагается, что упомянутые выше результаты найдут свое применение в теоретической и математической физике. В частности, при изучении петлевых разложений в квантовой теории поля и дальнейшем применении в теории перенормировки. Также изученные свойства упорядоченных экспонент могут быть полезны в теории интегрируемых моделей.

Глава 3 посвящена изучению теоремы Атьи—Зингера—Патоуди об индексе для многообразий с доменными стенками. Основным результатом сформулирован в теоремах 3.1, 3.8 и 3.9. Полученные формулы являются новыми и могут найти свое применение в теоретической физике, поскольку дают связь аномалий внутри многообразия и на его поверхности.

Несмотря на тот факт, что формула (3.22) для индекса оператора Дирака \mathcal{D} приобрела более лаконичную форму (3.101), часть вопросов, отмеченных в работе [A5] осталась. Один из них можно сформулировать так: какие условия необходимы для того, чтобы выполнялось равенство $\tilde{\eta}(A^+, \Gamma, A^-, \Gamma) = \tilde{\eta}(\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-)$? Несколько возможных вариантов перечислены в результатах теоремы 3.1, но они не являются критерием. Другими словами, не ясно, через спектральные функции каких операторов выражается $\tilde{\eta}(A^+, \Gamma^+, A^-, \Gamma^-)$. Этот вопрос является открытым и не входит в рамки данной диссертации.

Также стоит отметить, что лемма 3.10 в действительности доставляет независимый вывод формулы (3.101) и, таким образом, представляет более элегантное и лаконичное доказательство. Более того она обобщает теорему об индексе, см. теорему 1.15, на более широкий класс многообразий.

Другая возможность заключается в рассмотрении более общего оператора Дирака (включающего, к примеру, аксиальные векторные поля и др.), или же в обобщении условий склеивания на поверхности Σ . Однако, в обоих случаях мы должны определить операторы \mathcal{D}^+ и \mathcal{D}^- . Явные вычисления для случая $n = 4$, как это было сделано в [53], возможны, но они не дают достаточного понимания ситуации.

В заключение автор выражает большую признательность Деркачёву С. Э. за поддержку, помощь и обсуждение результатов. Также автор благодарит Василевича Д. В. и Харук Н. В., в совместной работе с которыми была получена часть результатов.

Список литературы

1. *Fock V. A.* Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quantenmechanik // Sow. Phys. — 1937. — Vol. 12. — P. 404—425.
2. *Фок В. А.* Работы по квантовой теории поля. — Ленинград : ЛГУ, 1957. — с. 1—160.
3. *Pauli W.* Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik // Helv. Phys. Acta. — 1932. — Vol. 5. — P. 179.
4. *Nambu Y.* The use of the proper time in quantum electrodynamics // Progr. Theor. Phys. — 1950. — Vol. 5. — P. 82—94.
5. *Schwinger J.* On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. — 1951. — Vol. 82. — P. 664—679.
6. *DeWitt B. S.* Dynamical Theory of Groups and Fields. — New York : Gordon, Breach, 1965. — P. 1—248.
7. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. I. The canonical theory // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 160. — P. 1113—1148.
8. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. II. The manifestly covariant theory // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 162. — P. 1195—1239.
9. *DeWitt B. S.* Quantum theory of gravity. III. Applications of the covariant theory // Phys. Rev. — 1967. — Vol. 162. — P. 1239—1256.
10. *DeWitt B. S.* Quantum field theory in curved spacetime // Phys. Rep. — 1975. — Vol. 19. — P. 295—357.
11. *Seeley R. T.* Singular integrals and boundary value problems // Am. J. Math. — 1966. — Vol. 88. — P. 781—809.
12. *Seeley R. T.* The resolvent of an elliptic boundary value problem // Am. J. Math. — 1969. — Vol. 91. — P. 889—920.
13. *Seeley R. T.* Complex powers of an elliptic operator // Proc. Sympos. Pure Math. — 1967. — Vol. 10. — P. 288—307.
14. *Gilkey P. B.* The spectral geometry of a Riemannian manifold // J. Differ. Geom. — 1975. — Vol. 10. — P. 601—618.

15. *Schwinger J.* Casimir effect in source theory // Lett. Math. Phys. — 1975. — Vol. 1. — P. 43–47.
16. *Schwinger J.* Casimir effect in source theory II // Lett. Math. Phys. — 1992. — Vol. 24. — P. 59–61.
17. *Schwinger J.* Casimir effect in source theory III // Lett. Math. Phys. — 1992. — Vol. 24. — P. 227–230.
18. *Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V. M.* New developments in the Casimir effect // Phys. Rept. — 2001. — Vol. 353. — P. 1–205.
19. *Ball R. D.* Chiral gauge theory // Phys. Rept. — 1989. — Vol. 182. — P. 1–186.
20. *Fujikawa K.* Path integral for gauge theories with fermions // Phys. Rev. D. — 1980. — Vol. 21. — P. 2848.
21. *Loewe M., Rojas J. C.* Thermal effects and the effective action of quantum electrodynamics // Phys. Rev. D. — 1992. — Vol. 46. — P. 2689.
22. *Bijnens J.* Chiral Lagrangians and Nambu-Jona-Lasinio like models // Phys. Rept. — 1996. — Vol. 265. — P. 370–446.
23. *Callan C., Wilczek F.* On geometric entropy // Phys. Lett. B. — 1994. — Vol. 333. — P. 55–61.
24. *Wipf A., Dürr S.* Gauge theories in a bag // Nucl. Phys. B. — 1995. — Vol. 443. — P. 201–232.
25. *Jack I., Osborn H.* Two-loop background field calculations for arbitrary background fields // Nucl. Phys. B. — 1982. — Vol. 207. — P. 474–504.
26. *Börnsen J. P., van de Ven A. E. M.* Three-loop Yang–Mills β -function via the covariant background field method // Nucl. Phys. B. — 2003. — Vol. 657. — P. 257–303.
27. *Feynman R. P.* Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. — 1948. — Vol. 20. — P. 367–387.
28. *Feynman R. P.* The theory of positrons // Phys. Rev. — 1949. — Vol. 76. — P. 749–759.
29. *Matthias L.* Heat kernels as path integrals. — 2018. — arXiv:1810.07898.

30. *Bastianelli F., Corradini O., Pisani P. A. G.* Worldline approach to quantum field theories on flat manifolds with boundaries // JHEP. — 2007. — Vol. 0702. — P. 059.
31. *Norris J. R.* Path integral formulae for heat kernels and their derivatives // Probab. Theory Relat. Fields. — 1993. — Vol. 94. — P. 525–541.
32. *Тахтаджян Л. А.* Квантовая механика для математиков. — НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2011. — с. 1–496.
33. *Dowker J. S., Critchley R.* Effective Lagrangian and energy momentum tensor in de Sitter space // Phys. Rev. D. — 1976. — Vol. 13. — P. 3224.
34. *Hawking S. W.* Zeta function regularization of path integrals in curved space-time // Commun. Math. Phys. — 1977. — Vol. 55. — P. 133–148.
35. *Atiyah M. F., Bott R., Patodi V. K.* On the heat equation and the index theorem // Invent. Math. — 1973. — Vol. 19. — P. 279–330.
36. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators on compact manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 69. — P. 422–433.
37. *Atiyah M. F., Bott R.* A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: I // Ann. of Math. — 1967. — Vol. 86. — P. 374–407.
38. *Atiyah M. F., Bott R.* A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes: II // Ann. of Math. — 1968. — Vol. 88. — P. 451–491.
39. *Minakshisundaram S., Pleijel A.* Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds // Canadian J. Math. — 1949. — Vol. 1. — P. 242–256.
40. *Patodi V. K.* Curvature and the eigenforms of the Laplace operator // Diff. Geometry. — 1971. — Vol. 5. — P. 233–249.
41. *Gilkey P. B.* Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem. — Boca Raton : CRC Press, 1994. — P. 1–536.
42. *Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry 1 // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1975. — Vol. 77. — P. 43–69.
43. *Adler S. L.* Axial vector vertex in spinor electrodynamics // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 177. — P. 2426–2438.

44. *Bell J. S., Jackiw R.* A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the σ model // Nuovo Cim. A. — 1969. — Vol. 60. — P. 47–61.
45. *Niemi A. J., Semenoff G. W.* Axial anomaly induced fermion fractionization and effective gauge theory actions in odd dimensional space-times // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Vol. 51. — P. 2077–2080.
46. *Redlich A. N.* Parity violation and gauge noninvariance of the effective gauge field action in three-dimensions // Phys. Rev. D. — 1984. — Vol. 29. — P. 2366–2374.
47. *Alvarez-Gaume L., Della Pietra S., Moore G. W.* Anomalies and odd dimensions // Ann. Phys. — 1985. — Vol. 163. — P. 288–317.
48. *Witten E., Yonekura K.* Anomaly inflow and the η -invariant. — 2019. — arXiv:1909.08775 [hep-th].
49. *Witten E.* Fermion path integrals and topological phases // Rev. Mod. Phys. — 2016. — Vol. 88, no. 3. — P. 035001.
50. *Hortacsu M., Rothe K. D., Schroer B.* Zero energy eigenstates for the Dirac boundary problem // Nucl. Phys. B. — 1980. — Vol. 171. — P. 530–542.
51. *Kurkov M., Vassilevich D.* Parity anomaly in four dimensions // Phys. Rev. D. — 2017. — Vol. 96, no. 2. — P. 025011.
52. *Kurkov M., Vassilevich D.* Gravitational parity anomaly with and without boundaries // JHEP. — 2018. — Vol. 1803. — P. 072.
53. *Vassilevich D. V.* Index theorems and domain walls // JHEP. — 2018. — Vol. 1807. — P. 108.
54. *Gilkey P. B.* Asymptotic Formulae in Spectral Geometry. — Boca Raton : CRC Press, 2004. — P. 1–312.
55. *Bordag M., Vassilevich D. V.* Heat kernel expansion for semitransparent boundaries // J. Phys. A. — 1999. — Vol. 32. — P. 8247–8259.
56. *Gaveau B., Schulman L. S.* Explicit time-dependent Schrödinger propagators // J. Phys. A. — 1986. — Vol. 19. — P. 1833–1846.
57. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. — 1961. — т. 137. — с. 1011–1014.

58. *Iochum B., Levy C., Vassilevich D. V.* Spectral action beyond the weak-field approximation // Commun. Math. Phys. — 2012. — Vol. 316. — P. 595–613.
59. *Barvinsky A. O., Mukhanov V. F.* New nonlocal effective action // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66. — P. 065007.
60. Nonperturbative late time asymptotics for heat kernel in gravity theory / A. O. Barvinsky [et al.] // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 68. — P. 105003.
61. *Davies E. B.* Heat Kernels and Spectral Theory. Vol. 92. — Cambridge University Press, 1989. — Cambridge Tracts in Mathematics.
62. *McKean H. P., Singer I. M.* Curvature and the eigenvalues of the Laplacian // J. Differ. Geom. — 1967. — Vol. 1. — P. 43–69.
63. *McAvity D. M., Osborn H.* A DeWitt expansion of the heat kernel for manifolds with a boundary // Class. Quant. Grav. — 1991. — Vol. 8. — P. 603–638.
64. *McAvity D. M., Osborn H.* Asymptotic expansion of the heat kernel for generalized boundary conditions // Class. Quant. Grav. — 1991. — Vol. 8. — P. 1445–1454.
65. *McAvity D. M.* Heat kernel asymptotics for mixed boundary conditions // Class. Quant. Grav. — 1992. — Vol. 9. — P. 1983–1997.
66. *Kirsten K.* Heat kernel asymptotics: more special case calculations // Nucl. Phys. B. — 2002. — Vol. 104. — P. 119–126.
67. *Camporesi R.* Harmonic analysis and propagators on homogeneous spaces // Phys. Rept. — 1990. — Vol. 196. — P. 1–134.
68. *Gilkey P. B., Kirsten K., Vassilevich D. V.* Heat trace asymptotics with transmittal boundary conditions and quantum brane-world scenario // Nucl. Phys. B. — 2001. — Vol. 601. — P. 125–148.
69. *Gilkey P. B., Kirsten K., Vassilevich D. V.* Heat trace asymptotics defined by transfer boundary conditions // Lett. Math. Phys. — 2003. — Vol. 63. — P. 29–37.
70. *Gilkey P. B., Kirsten K.* Heat content asymptotics with transmittal and transmission boundary conditions // J. Lond. Math. Soc. — 2003. — Vol. 68, no. 02. — P. 431–443.

71. *Vassilevich D. V.* Heat kernel expansion: user's manual // Phys. Rep. — 2003. — Vol. 388. — P. 279–360.
72. Quantum fields and extended objects in space-times with constant curvature spatial section / A. A. Bytsenko [et al.] // Phys. Rept. — 1996. — Vol. 266. — P. 1–126.
73. *Amsterdamski P., Berkin A. L., O'Connor D. J.* b_8 'Hamidew' coefficient for a scalar field // Class. Quant. Grav. — 1989. — Vol. 6. — P. 1981–1991.
74. *Avramidi I. G.* The covariant technique for the calculation of the heat kernel asymptotic expansion // Phys. Lett. B. — 1990. — Vol. 238. — P. 92–97.
75. *Avramidi I. G.* A covariant technique for the calculation of the one-loop effective action // Nucl. Phys. B. — 1991. — Vol. 355. — P. 712–754.
76. *van de Ven A. E. M.* Index-free heat kernel coefficients // Class. Quant. Grav. — 1998. — Vol. 15. — P. 2311–2344.
77. *Avramidi I. G.* Heat kernel on homogeneous bundles over symmetric spaces // Commun. Math. Phys. — 2009. — Vol. 288. — P. 963–1006.
78. *Fulling S. A., Kennedy G.* The resolvent parametrix of the general elliptic linear differential operator: a closed form for the intrinsic symbol // Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 310. — P. 583–617.
79. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* Beyond the Schwinger-DeWitt technique: converting loops into trees and in-in currents // Nucl. Phys. B. — 1987. — Vol. 282. — P. 163–188.
80. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms // Nucl. Phys. B. — 1990. — Vol. 333. — P. 471–511.
81. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* Covariant perturbation theory (III). Spectral representations of the third-order form factors // Nucl. Phys. B. — 1990. — Vol. 333. — P. 512–524.
82. Covariant Perturbation Theory (IV). Third Order in the Curvature / A. O. Barvinsky [et al.] // Report of the University of Manitoba. — Winnipeg, 1993. — P. 1–192.
83. *Avramidi I. G.* Heat Kernel and Quantum Gravity. Vol. 64. — New York : Springer, 2000. — P. 1–149.

84. *Moss I. G., Toms D. J.* Invariants of the heat equation for non-minimal operators // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2014. — Vol. 47. — P. 215401.
85. *Dowker J. S., Kirsten K.* Heat kernel coefficients for oblique boundary conditions // *Class. Quant. Grav.* — 1997. — Vol. 14. — P. L169–L175.
86. *Dowker J. S., Kirsten K.* The $a_{3/2}$ heat kernel coefficient for oblique boundary conditions // *Class. Quant. Grav.* — 1999. — Vol. 16. — P. 1917–1936.
87. *Avramidi I. G., Esposito G.* Lack of strong ellipticity in Euclidean quantum gravity // *Class. Quant. Grav.* — 1998. — Vol. 15. — P. 1141–1152.
88. *Avramidi I. G., Esposito G.* New invariants in the 1-loop divergences on manifolds with boundary // *Class. Quant. Grav.* — 1998. — Vol. 15. — P. 281–297.
89. *Fulling S. A.* Systematics of the relationship between vacuum energy calculations and heat kernel coefficients // *J. Phys. A.* — 2003. — Vol. 36. — P. 6857–6873.
90. *Kirsten K., McKane A. J.* Functional determinants in the presence of zero modes // *Quantum field theory under the influence of external conditions.* — Norman, 2003. — P. 146–151.
91. *Fursaev D., Vassilevich D.* *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory.* — Dordrecht : Springer, 2011. — P. 1–304.
92. The Atiyah-Patodi-Singer index and domain-wall fermion Dirac operators / H. Fukaya [et al.] // *Commun. Math. Phys.* — 2020. — Vol. 380. — P. 1295–1311.
93. *Berline N., Getzler E., Vergne M.* *Heat Kernels and Dirac Operators.* — Berlin : Springer, 2004. — P. 1–363.
94. *Bleecker D. D., Boöß-Bavnbek B.* *Index Theory with Applications to Mathematics and Physics.* — Boston : International Press, 2013. — P. 1–698.
95. *Kirsten K.* *Spectral Functions in Mathematics and Physics.* — Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2001. — P. 1–400.
96. *Nakahara M.* *Geometry, Topology and Physics.* — Bristol : IoP, 2003. — P. 1–573.

97. *Shore G. M.* Symmetry restoration and the background field method in gauge theories // *Ann. Phys.* — 1981. — Vol. 137. — P. 262–305.
98. *Lüscher M.* Dimensional regularisation in the presence of large background fields // *Ann. Phys.* — 1982. — Vol. 142. — P. 359–392.
99. *Skagerstam B. K.* A note on the Poincaré gauge // *Am. J. Phys.* — 1983. — Vol. 51. — P. 1148–1149.
100. *Jackson J. D.* From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations // *Am. J. Phys.* — 2002. — Vol. 70. — P. 917–928.
101. *Muller U., Schubert C., van de Ven A. E. M.* A closed formula for the Riemann normal coordinate expansion // *Gen. Relativ. Gravit.* — 1999. — Vol. 31. — P. 1759–1768.
102. *Hatzinikitas A.* A note on Riemann normal coordinates. — 2000. — arXiv:hep-th/0001078.
103. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — с. 1–512.
104. *Moss I. G.* Heat kernel expansions for distributional backgrounds // *Phys. Lett. B.* — 2000. — Vol. 491. — P. 203–206.
105. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* The generalized Schwinger-Dewitt technique in gauge theories and quantum gravity // *Phys. Rept.* — 1985. — Vol. 119. — P. 1–74.
106. *Blecker D. D., Boß-Bavnbek B.* Spectral invariants of operators of Dirac type on partitioned manifolds // *Operator Theory: Advances and Applications.* — 2004. — Vol. 151. — P. 1–130.
107. *Christopher P. H., Huang K.-W., Vassilevich D. V.* Interface conformal anomalies // *JHEP.* — 2020. — Vol. 2020. — P. 132.

Публикации автора по теме диссертации

- A1. *Ivanov A. V.* Notes on functional integration // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — т. 487. — с. 140–150. — Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 26.
- A2. *Иванов А. В.* Диаграмматика теплового ядра ковариантного оператора Лапласа // ТМФ. — 2019. — т. 198, № 1. — с. 100–117.
- A3. *Ivanov A. V., Kharuk N. V.* Non-recursive formula for trace of heat kernel // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2019”. — 2019. — P. 74–77.
- A4. *Иванов А. В., Харук Н. В.* Тепловое ядро: метод собственного времени, калибровка Фока–Швингера, интеграл по путям и линия Вильсона // ТМФ. — 2020. — т. 205. — с. 1456–1472.
- A5. *Ivanov A. V., Vassilevich D. V.* Atiyah–Patodi–Singer index theorem for domain walls // J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — Vol. 53. — P. 305201.
- A6. *Ivanov A. V.* Index theorem for domain walls // J. Phys. A: Math. Theor. — 2021. — Vol. 54. — P. 095203.

Список рисунков

1.1	Первый элемент диаграмматики.	26
1.2	Диаграммная запись формулы (1.19).	27
1.3	Произведение двух диаграмм.	27
1.4	Обозначение для диаграммы на рис. 1.3.	27
1.5	Первая ковариантная производная.	28
1.6	Вторая ковариантная производная.	28
1.7	Первый коэффициент Сили—деВитта.	29
1.8	Первое диаграммное равенство.	30
1.9	Второе диаграммное равенство.	30
1.10	Третье диаграммное равенство.	31
1.11	Теорема Тонелли—Фубини для первой диаграммы.	31
1.12	Теорема Тонелли—Фубини для второй диаграммы.	31
1.13	Диаграммная запись для $a_1(x, y)$	32
1.14	Пример дифференцирования диаграммы.	33
1.15	Коэффициент $a_1(x, y)$	33
1.16	Главный вклад в $a_2(x, y)$ при $x \sim y$	34
3.1	Многообразие M со структурой произведения около Σ	75
3.2	Расширенное многообразие \tilde{M} с цилиндром C	76
3.3	Функция $\chi^\delta(s)$	80
3.4	Семейство функций $\eta^\delta(s)$	82
3.5	График функции $\theta^\sigma(s)$	90
3.6	График функции $\chi_1^\delta(s)$ для различных значений параметра δ	92
3.7	График функции $\chi^\delta(s)$ для различных значений параметра δ	92
3.8	Расширенное многообразие с двумя цилиндрами C_{ε_1} и C_{ε_2}	101