Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Боровицкий Вячеслав Андреевич

Многопараметрические оценки в гармоническом анализе: варианты неравенства Рубио де Франсиа и интерполяция абстрактных пространств типа Харди

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
академик РАН
Кисляков Сергей Витальевич

Санкт–Петербург — 2021

Оглавление

Стр.

Введение

Гармонический анализ изучает различные спектральные представления функций, а также математические методы и результаты, основанные на них. Многие разделы в современном гармоническом анализе опираются на *теорию сингулярных интегральных операторов* или *сингулярных интегралов*.

Классическая теория сингулярных интегральных операторов рассматривает операторы, родственные *преобразованию Гильберта*

$$(\mathcal{H}f)(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = f * \Big(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{\pi\tau}\Big),$$

где “$*$” обозначает свертку, а p. v. символизирует тот факт, что интеграл, который может не сходиться абсолютно, берется в смысле главного значения. Обобщением преобразования Гильберта служит класс операторов вида

$$(Tf)(x) = \mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbb{R}^D} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y, \tag{1}$$

где *ядро* K сингулярно вблизи плоскости $x = y$, и поэтому интеграл берется в смысле главного значения. Когда ядро K ведет себя достаточно хорошо вне диагонали, удается доказать, что оператор T действует ограниченно из пространства Лебега $L^p(\mathbb{R}^D)$ в себя для всех $1 < p < \infty$, причем делается это с помощью техники, очень похожей на технику доказательства ограниченности преобразования Гильберта [38]. От ядра K требуется, чтобы подынтегральное выражение в (1) было абсолютно суммируемым для всех функций f с компактным носителем и значений x вне носителя функции f; требуется, чтобы оператор T был ограничен при каком-то одном показателе $p \in (1,\infty)$, и чтобы

$$\int_{\mathcal{B}(y,2\delta)^c} |K(x,y) - K(x,y')|\,\mathrm{d}x \leqslant C, \qquad\qquad y' \in \mathcal{B}(y,\delta),$$

для всех $y \in \mathbb{R}^D$, $\delta > 0$. Здесь $\mathcal{B}(x,r)$ обозначает шар с центром в точке x радиуса r, а A^c — дополнение множества A.

Стандартными представителями этого класса являются оператор $\mathcal{H}$ и его многомерные обобщения, называемые *преобразованиями Рисса*, $1 \leqslant d \leqslant D$

$$(\mathcal{R}_d f)(x) = \underbrace{\frac{\Gamma((D+1)/2)}{\pi^{(D+1)/2}}}_{c_D}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbb{R}^D} \frac{(x_d - y_d)f(y)}{|x-y|^{D+1}}\,\mathrm{d}y = f * \Big(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{c_D y_d}{|y|^{D+1}}\Big).$$

Преобразования Рисса коммутируют с однопараметрическим семейством растяжений, то есть $(\mathcal{R}_d f(\lambda\cdot))(x) = (\mathcal{R}_d f(\cdot))(\lambda x)$ для всех $\lambda > 0$, поэтому[1] мы будем называть введенное выше общее семейство операторов, их обобщающее, *однопараметрическими сингулярными интегралами (интегральными операторами)*.

Нас же будет в основном интересовать класс *многопараметрических сингулярных интегралов (интегральных операторов)*, стандартными представителями которого являются *кратные преобразования Гильберта*

$$(\mathcal{H}_D f)(x) = \frac{1}{\pi^D}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbb{R}^D} \frac{f(y)}{\prod_{d=1}^{D}(x_d - y_d)}\,\mathrm{d}y = f * \Big(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{\pi^D y_1 \cdot \ldots \cdot y_D}\Big),$$

коммутирующие с многопараметрическим семейством растяжений. Общий класс таких операторов строго описать довольно сложно, поэтому мы не будем вдаваться в подробности, ограничившись замечанием, что это операторы, которые, если зафиксировать все переменные кроме одной, ведут себя подобно однопараметрическим сингулярным интегралам.

Теория многопараметрических сингулярных интегралов значительно сложнее теории однопараметрических. Сравнивая, например, какое-нибудь преобразование Рисса с кратным преобразованиям Гильберта, легко заметить, что сама размерность множества, где ядро имеет сингулярность, у второго больше, чем у первого.

Некоторые вопросы теории сильно упрощаются, когда ядро многопараметрического сингулярного оператора $K(x, y)$ распадается в произведение, то есть представляется в виде $K_1(x_1, y_1) \cdot \ldots \cdot K_D(x_D, y_D)$. К сожалению, многие интересные операторы не обладают такой структурой.

В данной диссертации мы будем рассматривать приложения теории многопараметрических сингулярных операторов, а также ее мартингального варианта к вопросам теории Литлвуда–Пэли, а также задачи, связанные с самой теорией многопараметрических сингулярных операторов, а именно интерполяцию некоторых общих вариантов *двупраметрических пространств Харди*.

Приложения к теории Литлвуда–Пэли. Одним из важных вопросов теории Литлвуда–Пэли является сравнение нормы функции с нормами ее "кусочков", спектры (носители преобразования Фурье) которых лежат в каких-то регулярных множествах.

---

[1] Мы мотивируем терминологию более или менее следуя идеям из классической работы [14].

Рассмотрим абстрактную постановку. Пусть G — локально компактная абелева группа. С помощью меры Хаара тогда определены пространства $L^p(G)$, а также прямое и обратное преобразования Фурье для элементов пространств $L^2(G)$ и $L^2(\widehat{G})$ соответственно, где $\widehat{G}$ — двойственная по Понтрягину группа, также снабженная мерой Хаара. Определим операторы M_I, $I \subseteq \widehat{G}$, формулой $\widehat{M_I f} = \widehat{f}\mathbb{1}_I$, где $\widehat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f, а $\mathbb{1}_I$ — индикатор множества I. Такие операторы называются *мультипликаторами Фурье с символом* $\mathbb{1}_I$. Они "вырезают" из функции f "кусочек" со спектром в I.

Рассмотрим какое-то счетное разбиение $\widehat{G}$ на измеримые подмножества $\{I\}_{I\in\mathcal{I}}$. Тогда, по теореме Планшереля, для любой функции $f \in L^2(G)$

$$\|f\|_{L^2(G)} = \Big\|\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}}|M_I f|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^2(G)} \stackrel{\text{def}}{=} \big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^2(G,\,l^2)}.$$

Такие соотношения весьма удобны, так как позволяют сводить утверждения о норме функции f к утверждениям о нормах функций $M_I f$. Если заменить L^2 нормы на L^p нормы, это равенство, вообще говоря, перестанет быть верным, хотя часто все-таки можно сформулировать нечто похожее. В частности, для $G = \mathbb{R}^D$ знаменитое неравенство Литлвуда–Пэли устанавливает, что

$$c\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\,l^2)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^D)} \leqslant C\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\,l^2)}, \quad 1 < p < \infty, \tag{2}$$

но не для произвольных разбиений $\mathcal{I}$, а для $\mathcal{I}$, в случае $D = 1$, состоящих из интервалов с концами, формирующими лакунарную по Адамару последовательность, а в случае произвольной размерности D, для $\mathcal{I}$, являющихся декартовым произведением таких последовательностей интервалов.

Другие знаменитые неравенства такого рода, называемые неравенствами Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа или просто неравенствами Рубио де Франсиа, обобщают каждое из односторонних неравенств в (2) на значительно более общий класс разбиений, но для ограниченной шкалы показателей p. А именно, для разбиений $\mathcal{I}$ пространства $\mathbb{R}^D$ на произвольные непересекающиеся параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям, верны оценки

$$c\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\,l^2)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^D)}, \qquad 2 \leqslant p < \infty, \tag{3}$$

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^D)} \leqslant C\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\,l^2)}, \qquad 1 < p \leqslant 2. \tag{4}$$

Неравенство (3) было доказано Рубио де Франсиа для $D = 1$ в работе [35] и обобщено на случай произвольной размерности в [23] Журне (более простое доказательство было затем дано Сориа в [36]). Неравенство (4) следует из неравенства (3) по двойственности[2]. Не смотря на то, что из неравенства (3) нельзя вывести аналог неравенства (4) для $p \leqslant 1$, более тонкие методы дают

$$\Big\|\sum_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^D)} \leqslant C\big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp}\widehat{f_I}\subseteq I \text{ для } I\in\mathcal{I}, \quad 0<p\leqslant 2. \tag{5}$$

Уточним, что здесь $\mathcal{I}$, так же как и в неравенствах (3) и (4), является разбиением пространства $\mathbb{R}^D$ на непересекающиеся параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям. Неравенство (5) мы сформулировали без использования операторов M_I: при $p \leqslant 1$ они ведут себя довольно плохо, и такая формулировка позволяет не заострять на этом внимания, в то время как при $1 < p \leqslant 2$ из нее легко получить исходное неравенство (4).

Впервые рассмотрел неравенство (5) Бургейн: в статье [12] он доказал его при $p = 1$ в размерности $D = 1$. Кисляков и Парилов в своей заметке [5] нашли к задаче другой подход, что позволило им обобщить результат Бургейна на случай произвольного p в интервале $0 < p \leqslant 2$. Наконец, Осипов в своих статьях [8] и [9] доказал неравенство (5) при $0 < p \leqslant 2$ в произвольной размерности $D \in \mathbb{N}$. Отметим, что все утверждения остаются верными также и для $G = \mathbb{T}^D$, причем методы доказательства остаются неизменными.

Нас будут интересовать два круга вопросов, связанных с неравенствами Рубио де Франсиа. Во-первых, весовые оценки в случае нескольких переменных. Во-вторых, варианты неравенства Рубио де Франсиа для некоторых групп G, отличных от классических $\mathbb{R}^D$ и $\mathbb{T}^D$.

Весовые оценки интересовали еще Рубио де Франсиа в исходной работе [35]. Там он рассматривал неравенство (3) сразу же в весовом случае: он показал, что если при $p > 2$ в нем вместо L^p рассматривать L^p_w с весом $w \in A_{p/2}$, то неравенство остается верным (A_s — стандартные классы Макенхаупта, см. про них, например, в книге Стейна [38]).

Рассмотрение размерности $D = 1$ для стандартных групп $\mathbb{R}$ и (неявно) $\mathbb{T}$ с весом завершил Кисляков в статье [4], доказав весовой вариант неравенства (5)

[2] Действительно, неравенство (3) можно рассматривать как утверждение об ограниченности оператора, который функцию $f \in L^p(\mathbb{R}^D)$ преобразует в последовательность функций $\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}} \in L^p(\mathbb{R}^D, l^2)$. Из его ограниченности следует ограниченность его сопряженного, который последовательность $\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}} \in L^q(\mathbb{R}^D, l^2)$ преобразует в $\sum_{I\in\mathcal{I}} M_I f_I \in L^q(\mathbb{R}^D)$. Последнее эквивалентно неравенству $\big\|\sum_{I\in\mathcal{I}} M_I f_I\big\|_{L_q} \leqslant C\big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^q(l^2)}$, подставив в которое $f_I = M_I f$ и воспользовавшись соотношением $M_I M_I = M_I$, получим (4).

для показателей $0 < p < 2$:

$$\Big\|\sum\nolimits_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R})} \leqslant C\Big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R},\, l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp}\widehat{f}_I\subseteq I \text{ для } I\in\mathcal{I},$$

причем $\mathcal{I}$ — разбиение $\mathbb{R}$ на произвольные интервалы, а вес w таков, что $w^{-\frac{1}{r-1}}$ удовлетворяет условию Макенхаупта $A_{\frac{r}{2(r-1)}}$ для какого-то r: $\max(1,p) \leqslant r < 2$.

Рубио де Франсиа предвосхитил то, что развитие методов работы с многопараметрическими сингулярными интегральными операторами позволит обобщить его результат на случай $D \neq 1$. Это и произошло в статьях [8; 9; 23], но без оглядки на более общий случай с весом.

В главе 3 мы, пусть и не полностью, ответим на запрос Рубио де Франсиа, рассмотрев весовой случай по крайней мере в размерности $D = 2$ (как для $2 < p < \infty$, так и для $0 < p < 2$). В частности, докажем аналог весового неравенства, доказанного Кисляковым. Для этого мы пользуемся техникой, основанной на теории двупараметрических сингулярных интегральных операторов и атомных разложений в соответствующих пространствах Харди, разработанной Р. Фефферманом, и некоторыми современными ее обобщениями.

Неравенство Рубио де Франсиа для нестандартных групп G, по-видимому, впервые изучалось в работе Осипова [31]. В ней был рассмотрен случай, когда G — диадическая группа. Двойственной к ней группой $\widehat{G}$ является множество функций Уолша с операцией обыкновенного умножения функций, которое естественным образом отождествляется с группой неотрицательных целых чисел с некоторой нестандартной “побитовой” операцией сложения. Такое отождествление порождает понятие интервала (отрезка) на двойственной группе, передавая его по наследству от естественного порядка на $\mathbb{Z}_+$. Эта постановка ассоциирована с “дискретным” преобразованием Фурье–Уолша, имеющим большое количество приложений как в математике, так и в естественных и инженерных науках.

Используя построенную Ганди [22; 26] теорию операторов, отображающих мартингалы в измеримые функции, сходную с теорией однопараметрических сингулярных интегралов, Осипову удалось доказать неравенство (4) для диадической группы. Совсем недавно Целищев [11] обобщил этот результат на случай, когда G принадлежит определенному классу групп Виленкина. Двойственные группы $\widehat{G}$, в таком случае, идентифицируются с системами Виленкина и снабжены естественным понятием интервала, которое также определяется отождествлением с множеством $\mathbb{Z}_+$ с естественным отношением порядка.

В главе 2 мы рассмотрим обобщение этих результатов на многопараметрический случай. Рассматривая произведения произвольного количества ограниченных групп Виленкина и естественное понятие *прямоугольников* на двойственной группе, мы докажем в этой постановке неравенство (4). Основным инструментом будет мартингальный аналог теории многопараметрических сингулярных интегралов, изложенный в работах Вейса [42—45].

Интерполяция абстрактных пространств Харди. Теория пространств Харди является важной частью современного гармонического анализа. Одной из основных тем в ней являются критерии ограниченности операторов, действующих в этих пространствах.

Соответственно, важную роль в этом круге вопросов играют интерполяционные теоремы, такие как теорема Марцинкевича или Рисса–Торина. Последняя, например, утверждает, что если оператор T, заданный на пересечении $L^r \cap L^s$ ограничен в смысле L^r и в смысле L^s, то он автоматически ограничен в смысле L^p при любом p из интервала $r \leqslant p \leqslant s$. Часто значительно удобнее доказать ограниченность оператора для пары "крайних" пространств L^r и L^s, чем делать это для всей шкалы L^p, $r \leqslant p \leqslant s$, сразу.

Интерполяционные свойства шкалы пространств Харди удобно рассматривать с помощью понятия K-замкнутости. Грубо говоря, пара подпространств (Y_1, Y_2) является K-замкнутой в паре пространств (X_1, X_2), если любое разложение элемента $Y_1 + Y_2$ в сумму элементов X_1 и X_2 можно модифицировать, не сильно увеличивая норму, так, что слагаемые будут лежать в Y_1 и Y_2. Как несложно показать [24], при K-замкнутости интерполяционные свойства пары (X_1, X_2) наследуются парой (Y_1, Y_2), по крайней мере если речь идет о вещественной интерполяции. Поэтому вместо непосредственного доказательства интерполяционных теорем для пространств Харди, обычно ставится вопрос об их K-замкнутости в соответствующих пространствах Лебега.

Вопрос K-замкнутости пары $\big(H^r(\mathbb{T}^D), H^s(\mathbb{T}^D)\big)$ в паре $\big(L^r(\mathbb{T}^D), L^s(\mathbb{T}^D)\big)$ для разных размерностей и разных пар показателей $0 < r < s \leqslant \infty$ на данный момент является решенным лишь частично. Тогда как в случае $s \neq \infty$ K-замкнутость установлена для произвольных размерностей, в случае $s = \infty$ K-замкнутость доказана лишь для $D = 1, 2$, а случай $D > 2$ является на данный момент, по-видимому, нерешенной задачей. То же самое справедливо также и для $\mathbb{R}^D$ вместо $\mathbb{T}^D$. История этого вопроса подробно обсуждается в обзоре [24].

Аналогичный вопрос для весовых пространств Харди также представляет интерес. Эта тема отчасти вдохновлена вопросом о справедливости аналога теоремы Гротендика для диск-алгебры, который в размерности $D = 1$ можно разрешить с помощью интерполяции весовых пространств Харди (см. про это в обзоре [6]). В частности, например, известно, что K-замкнутость пары $(H^p_w(\mathbb{T}), H^\infty(\mathbb{T}))$ в паре $(L^p_w(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$, где w — некоторый вес на окружности, эквивалентна условию $\log w \in \mathrm{BMO}$, см. обзор [19].

В соответствии с общей направленностью диссертации, мы включаем в нее результаты автора из работы [47], относящиеся как раз к случаю пары весовых пространств $\big(H^p_w(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2)\big)$ на двумерном торе. Случай отсутствия веса ($w \equiv 1$), как уже упоминалось выше, был исследован давно, см. [7]. После этого, в [28] K-замкнутость такой пары была доказана в случае, когда переменные разделяются: $w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1)b(\xi_2)$, где $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$. В работе автора [47] был разобран более сложный случай окаймленного веса $w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1)u(\xi_1, \xi_2)b(\xi_2)$, где a и b — такие, как выше, а функция u удовлетворяет некоторым специальным условиям. По поводу точной формулировки см. теорему 1 ниже, которая будет доказана в главе 1.

Пространства Харди, обсуждавшиеся только что, определяются через граничные значения аналитических функций, но существуют и другие понятия пространств Харди: например пространства из глав 2 и 3 определяются некоторым альтернативным, чисто вещественным образом. Между разными понятиями, конечно, есть связь, но мы оставим этот вопрос в стороне.

В главе 1 мы рассмотрим некоторое абстрактное обобщение классического понятия пространств Харди граничных значений аналитических функций и соответствующий абстрактный подход к теоремам о K-замкнутости. Эти абстрактные пространства определяются через аксиоматику, моделирующую свойства оператора гармонического сопряжения. Подобная аксимоматическая постановка рассматривалась ранее статьями [3; 27], однако в главе 1 соответствующий аппарат будет развит более глубоко и последовательно. В частности, будет показано, что с помощью простых приемов весовые результаты могут быть включены в те же общие конструкции, что и невесовые, чего не было в цитированных работах.

Отметим, что, прежде чем получить объявленный выше “двумерный” результат в абстрактной форме, в главе 1 развивается достаточно полная теория, моделирующая известные “одномерные” результаты для пространств Харди.

Актуальность. Новые утверждения, установленные в рамках данной диссертации, углубляют общее понимание некоторых вопросов теории Литлвуда–Пэли и теории пространств Харди. Они позволяют получать новые результаты как в рамках этих теорий, так и близких вопросах, что представляет большой интерес, так как теория Литлвуда–Пэли и теория пространств Харди имеют важные приложения к теории уравнений в частных производных, а через нее к физике и другим естественнонаучным дисциплинам.

Целью данной работы является исследование двух вопросов современного гармонического анализа. Во-первых, новых вариантов многопараметрического неравенства Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа: в случае с весом и в случае многопараметрических групп Виленкина. Во-вторых, интерполяции некоторых абстрактных вариантов весовых пространств Харди.

Научная новизна: Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении задач гармонического анализа и смежных теорий. Гармонический анализ, в свою очередь, имеет множество приложений как в математике, так и в других науках.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории многопараметрических синглуярных интегральных операторов, разработанные, в основном, Р. Фефферманом [14; 17; 18], а также смежной теории для операторов на пространствах мартингалов, описанные в работах Ф. Вейса [42—45]. Всё это — вещественные методы гармонического анализа. В контексте вопросов об интерполяции пространств Харди возникают методы теории равномерных алгебр, являющейся частью функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

Во-первых, K-замкнутость весовых пространств Харди на двумерном торе в соответствующих пространствах Лебега.

Теорема 1. *Пусть a, b — такие веса на $\mathbb{T}$, что $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}$. Пусть еще u — вес на $\mathbb{T}^2$, удовлетворяющий условию Макенхаупта A_p при некотором $p \in (1, \infty)$ по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной, причем $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log u(\xi_1, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. Рассмотрим окаймленный вес $w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1)u(\xi_1, \xi_2)b(\xi_2)$. Тогда пара*

$$(H^p_w(\mathbb{T}^2), H^\infty) \qquad K\text{-замкнута в паре} \qquad (L^p_w(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2)).$$

И абстрактный результат (ниже мы приводим развернутую формулировку теоремы 5 из главы 1), из которого в конечном итоге и выводится теорема 1.

Теорема 2. *Рассмотрим пространство с мерой (S, μ), где μ — σ-конечная мера. Рассмотрим еще какую-то w^*-замкнутую подалгебру X с единицей в алгебре $L^\infty(\mu)$, а также w^*-замкнутый модуль $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ над алгеброй X. Предположим, что алгебра X удовлетворяет некоторому условию регулярности (α_μ), определенному в главе 1. Тогда пара $\big(\mathrm{clos}_{L^r(\mu)}(Y \cap L^r(\mu)), Y\big)$ является K-замкнутой в паре $(L^r(\mu), L^\infty(\mu))$ для показателей r: $0 < r < \infty$.*

Во-вторых, неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных многопараметрических систем Виленкина.

Теорема 3. *Пусть $I_k = I_k^1 \times \ldots \times I_k^D \subseteq \mathbb{Z}_+^D$ — счетное семейство непересекающихся прямоугольников, то есть таких множеств, что $I_k^d = [a_k^d, b_k^d) = \big\{n \in \mathbb{Z}_+ \,\big|\, a_k^d \leqslant n < b_k^d\big\}$ — интервалы в $\mathbb{Z}_+$. Пусть $f_k : [0,1)^D \to \mathbb{R}$ — семейство функций, чей спектр Фурье–Виленкина лежит в I_k, то есть*

$$f_k(x) = \sum\nolimits_{(n_1,\ldots,n_D)\in I_k} \langle f_k, v_{n_1} \cdot \ldots \cdot v_{n_D} \rangle v_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot v_{n_D}(x_D),$$

где v_{n_d} — функции Виленкина, соответствующие каким-то ограниченным системам Виленкина, которые могут быть различными для разных d. Тогда

$$\Big\|\sum\nolimits_k f_k\Big\|_{L^p([0,1)^D)} \leqslant C \big\|\{f_k\}\big\|_{L^p([0,1)^D, l^2)}, \qquad 1 < p \leqslant 2,$$

где константа C не зависит от выбора прямоугольников $\{I_k\}$ и функций $\{f_k\}$.

В-третьих, весовое неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франиса для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{I}$ — какое-то разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, а $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — некоторый вес на плоскости, пусть, как обычно, $\widehat{M_I f} = \hat{f}\mathbb{1}_I$. Для показателей p в интервале $2 < p < \infty$ и веса w, удовлетворяющего двупараметрическому условию Макенхаупта с показателем $p/2$, верно неравенство*

$$c\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2,\,l^2)} \leqslant \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)}. \tag{6}$$

Для показателей p в интервале $0 < p < 2$ и веса w, удовлетворяющего некоторому условию $\alpha_{r(p)}$, являющемуся в определенном смысле двойственным к условию Макенхаупта, верно неравенство

$$\Big\|\sum\nolimits_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\Big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2,\,l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp}\hat{f}_I \subseteq I \text{ для } I\in\mathcal{I}. \tag{7}$$

Число $r(p)$ должно удовлетворять условиям $1 < r(p) < 2$ и $r(p) \geqslant p$, а условие $w \in \alpha_r$ обозначает $w^{-\frac{1}{r-1}} \in A_{\frac{r}{2(r-1)}}$.

Достоверность. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами, их доказательства проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Результаты глав 1,3 опубликованы в рецензируемых журналах. Результаты главы 2 обобщают идеи работы автора [49], также опубликованной в рецензируемом издании.

Апробация работы. Результаты работы были доложены в рамках нескольких выступлений на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций.

Личный вклад. Статья [50] написана в соавторстве с С.В. Кисляковым. По мнению соавторов, их вклад в эти работы равный. Все остальные основные новые результаты, изложенные в работах [47—49] и приведённые в диссертации, являются результатами лично диссертанта.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 0 приложений. Полный объём диссертации составляет 118 страниц, включая 2 рисунка и 0 таблиц. Список литературы содержит 50 наименований.

Глава 1. Интерполяция абстрактных пространств типа Харди

В данной главе будет изучаться интерполяционное свойство K-замкнутости (квази-)банаховых пространств. Определим его. Пусть (X_0, X_1) — совместимая пара банаховых пространств, то есть X_0 и X_1 вложены в какое-то общее хаусдорфово топологическое векторное пространство. Пусть Y_0 и Y_1 — замкнутые подпространства в X_0 и X_1, соответственно. Пара (Y_0, Y_1) называется K-замкнутой в паре (X_0, X_1), если найдется такая постоянная C, что для любого разложения $x = x_0 + x_1$, где $x \in Y_0 + Y_1$, а $x_i \in X_i$, найдется другое разложение $x = y_0 + y_1$, где $y_i \in Y_i$ и $\|y_i\|_{Y_i} \leqslant C\|x_i\|_{X_i}$, $i = 0,1$.

Когда мы имеем дело с K-замкнутой подпарой, интерполяционные пространства вещественного метода для нее легко вычисляются, если мы умеем вычислять их для исходной пары, см. про это, например, [24]. В конкретных ситуациях, однако, K-замкнутость интересна сама по себе. Например, в следующей теореме она означает, что любое “грубое” разрезание аналитической функции на два измеримых слагаемых можно сделать и с сохранением аналитичности, причем новые слагаемые будут “примерно того же размера”.

Теорема. *В размерностях $D = 1, 2$ при $1 \leqslant p < \infty$ пара пространств Харди $(H^p(\mathbb{T}^D), H^\infty(\mathbb{T}^D))$ является K-замкнутой в паре $(L^p(\mathbb{T}^D), L^\infty(\mathbb{T}^D))$.*

См. [33] или обзоры [19; 24] про случай $D = 1$ и работу [7] про случай $D = 2$. Неизвестно, сохраняется ли этот результат при $D > 2$.

В размерностях 1 и 2 доступны и некоторые весовые результаты. Не приводя самых общих формулировок, отметим, что K-замкнутость пары $(H^p_w(\mathbb{T}), H^\infty(\mathbb{T}))$ в паре $(L^p_w(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$, где w — некоторый вес на окружности[1] эквивалентна условию $\log w \in \mathrm{BMO}$, см. тот же обзор [19]. В размерности $D = 2$ информация далеко не столь полна, известны лишь достаточные условия на вес w, вероятно, далекие от необходимых. В частности, в [28] было доказано, что K-замкнутость имеет место, если $w(\xi_1, \xi_2) = u_1(\xi_1)u_2(\xi_2)$, где $\log u_1, \log u_2 \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$, а в [47] данный результат был распространен на веса вида $u_1(\xi_1)v(\xi_1, \xi_2)u_2(\xi_2)$, где u_1 и u_2 — такие, как выше, а вес v удовлетворяет подходящим условиям Макенхаупта.

[1] Чтобы избежать вырождения, обычно априори предполагается, что $\log w \in L^1(\mathbb{T})$.

В недавних работах [27] и [3] похожие результаты были получены в рамках абстрактной теории функций, то есть теории равномерных алгебр. В [27] на абстрактную ситуацию был распространен упомянутое выше невесовое утверждение для двумерного тора, а в [3] — некоторые весовые результаты для пространств Харди на окружности. В настоящей главе мы хотим пойти несколько дальше и доказать абстрактный аналог весового результата для двумерного тора из работы [47], где вес Макенхаупта от двух переменных окаймлен двумя весами от одной переменной.

Конструкции из [27] и [3] были навеяны теорией w^*-алгебр Дирихле (см., например, работу [37]), но к ней не сводятся: как в тех работах, так и в настоящей главе "основная мера" не обязательно мультипликативна на алгебре, "гармоническое сопряжение" не обязательно однозначно с точностью до константы и не обязательно удовлетворяет всем привычным оценкам.

План дальнейшего изложения таков. Чтобы справиться с окаймленными весами вида $u_1(\xi_1)v(\xi_1, \xi_2)u_2(\xi_2)$, нужна некая процедура, относящаяся к одной переменной и называемая обычно аналитическим разбиением единицы. Чтобы обосновать ее, нужна дополнительная информация об интерполяции (точнее, о K-замкнутости) для обобщений пространств Харди.

Частично такие интерполяционные теоремы доказывались в [3], но в той работе авторы ограничились лишь утверждениями, необходимыми для доказательства теоремы Гротендика. Для построения аналитического разбиения единицы нужны более общие результаты — им посвящен раздел 1.1. В частности, там будет доказана теорема 2 из введения.

В разделе 1.2 разработанная в разделе 1.1 теория вместе с идеями из работы [27] будут использованы для того, чтобы получить абстрактный вариант теоремы о K-замкнутости, пригодной для установления весовых результатов для двумерного тора. В разделе 1.3 из этой абстрактной теоремы будут выведены утверждения о K-замкнутости для весов двух переменных, удовлетворяющих некоторым условиям Макенхаупта. Наконец, в разделе 1.4 мы займемся непосредственно аналогом теоремы про двумерный тор и окаймленные веса из работы [47], доказав, среди прочего, теорему 1 из введения.

1.1 Интерполяция и разбиение единицы

Пусть μ — положительная σ-конечная мера на некотором множестве S. Далее нам будет удобно пользоваться обозначением $L^p(\mu)$ для пространств Лебега на пространстве (S, μ). Пусть X — w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(\mu)$. Будем предполагать, что X содержит функцию, тождественно равную единице, которую будем обозначать символом $\mathbf{1}$. Пусть $p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$.

Определение: условие $(\alpha_{p,k,\mu})$. Алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,k,\mu})$, если для любой неотрицательной функции $\varphi \in L^p(\mu)$ существует такая последовательность функций $\{u_n\}_{n=0}^\infty \subseteq X$, $u_n \to u$ п.в., что выполнены соотношения

$$\operatorname{Re} u_n \geqslant 0, \qquad \|u_n^k\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^p(\mu)}, \qquad \operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{1/k},$$

причем константа C не зависит от функции φ.

Дальнейшие оценки (в частности, в теоремах о K-замкнутости) будут зависеть от p, k и C. При разных преобразованиях, например при переходе к весовым мерам вида $w\,\mathrm{d}\mu$, эти параметры будут меняться контролируемым образом. Это замечание следует иметь в виду всюду ниже: мы, как правило, опускаем утверждения о равномерности оценок в формулировках.

Условия, подобные условию $(\alpha_{p,k,\mu})$, присутствовали в работах [27] и [3] в более сильной форме: там было $k = 1$, $p \in (1, \infty)$ и требовалось точное равенство $\operatorname{Re} u = \varphi$. Мы будем ссылаться на то условие как на $(\alpha^0_{p,\mu})$.

Отметим, что в случае, когда $kp > 1$, эквивалентная форма условия получилась бы, если бы в $(\alpha_{p,k,\mu})$ мы потребовали лишь слабой сходимости $u_j \to u$ в $L^{kp}(\mu)$: тогда исходная формулировка получилась бы переходом к выпуклым комбинациям и подпоследовательностям (см. подробнее в [27]).

Условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ постулирует некое свойство, типичное для оператора гармонического сопряжения. В [27, лемма 2.2] было показано, что условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ выполнено при любом $p \in (1, \infty)$, если X есть w^*-алгебра Дирихле относительно меры μ.[2] В классическом случае алгебры $H^\infty(\mathbb{T})$ условие $(\alpha^0_{p,m})$, где m — нормированная мера Хаара на окружности $\mathbb{T}$, проверяется совсем просто: достаточно положить $u_n = \varphi * K_n + i\widetilde{\varphi * K_n}$, где K_n — ядра Фейера, а волна обозначает гармоническое сопряжение.

[2] Это предполагает, среди прочего, что мера μ — вероятностная и мультипликативная на X.

В некоторых примерах мера μ, даже будучи конечной, может оказаться не мультипликативной на X. Это типично для весовых ситуаций. Так, в случае $X = H^\infty(\mathbb{T})$ оператор гармонического сопряжения непрерывен в $L^p(w\,\mathrm{d}m)$, $1 < p < \infty$, тогда и только тогда, когда вес w удовлетворяет условию Макенхаупта A_p. Для таких весов описанная простая конструкция гарантирует условие $(\alpha^0_{p,w\,\mathrm{d}m})$. Полезно отметить, что условие $(\alpha^0_{p,w\,\mathrm{d}m})$ при некоторых показателях $r < p$ вызывает сомнения — по крайней мере, описанное выше рассуждение теряет силу. Мы увидим вскоре, что более свободное условие (α_p, k, μ) ведет себя иначе.

Константа C, возникающая в оценках в дальнейшем тексте, может иметь разные значения в разных выражениях. Тем не менее, иногда, чтобы подчеркнуть различие констант, мы будет также использовать символы C', C'', $\widetilde{C}$.

Займемся теперь вопросом об изменении параметров в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$.

1.1.1 Изменение параметров в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$

Сначала сделаем замечание о действии аналитических функций на элемент алгебры X. Пусть K — пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $L^\infty(\mu)$. Канонический изоморфизм между $L^\infty(\mu)$ и $C(K)$, то есть преобразование Гельфанда, сохраняет комплексное сопряжение и отношение порядка для вещественных функций. Поскольку каждый ненулевой линейный мультипликативный функционал на X представляется некоторой вероятностной мерой на K, видим, что если $f \in X$ и $\operatorname{Re} f \geqslant 0$, то спектр функции $\delta + f$ (как элемента алгебры X) лежит в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geqslant \delta\}$. Таким образом, $(\delta + f)^\rho \in X$ при $\rho \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ (имеется в виду главная ветвь степени).

При $\rho < 0$ и $\operatorname{Re} f \geqslant 0$ также справедливо неравенство

$$\|(\delta + f)^\rho\|_X = \|(\delta + f)^\rho\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant \delta^\rho.$$

Если же $\rho > 0$, то получаем даже что $f^\rho \in X$. Действительно, имеет место поточечная сходимость $\lim_{\delta\to 0}(\delta + f)^\rho = f^\rho$ (главная ветвь положительной степени непрерывна в $\{\operatorname{Re} z \geqslant 0\}$), а сходимость п.в. с ограниченными нормами влечет сходимость в w^*-топологии пространства $L^\infty(\mu)$.

Лемма 1. *Условие* $(\alpha_{p,k,\mu})$ *влечет условие* $(\alpha_{p,l,\mu})$ *при любом* $l > k$. *При этом константа* C *меняется контролируемым образом. Более того, соответствующие функции* u_n *из условия* $(\alpha_{p,l,\mu})$ *можно выбрать так, чтобы выполнялось поточечное неравенство* $|\mathrm{Im}\, u_n| \leqslant \mathrm{tg}\big(\frac{\pi k}{2l}\big)|\mathrm{Re}\, u_n|$.

Доказательство. Возьмем функции u_n, предоставляемые условием $(\alpha_{p,k,\mu})$. Тогда функции $v_n = u_n^{k/l}\cos\big(\frac{\pi k}{2l}\big)^{-1}$ обслуживают условие $(\alpha_{p,l,\mu})$. Действительно, поскольку $k/l < 1$, видим, что $\mathrm{Re}\, v_n \geqslant 0$. Более того, значения функций v_n лежат в угле раствора $\pi k/l$ с положительной вещественной полуосью в качестве биссектрисы, так что

$$|\mathrm{Im}\, v_n| \leqslant \mathrm{tg}({}^{\pi k}\!/\!_{2l})|\mathrm{Re}\, v_n|, \qquad \mathrm{Re}\, v_n \leqslant |v_n| \leqslant (\cos({}^{\pi k}\!/\!_{2l}))^{-1}\,\mathrm{Re}\, v_n. \tag{1.1}$$

Отсюда, если $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ в смысле сходимости почти всюду, то

$$\mathrm{Re}\, v \geqslant |v|\cos({}^{\pi k}\!/\!_{2l}) = |u|^{k/l} \geqslant (\mathrm{Re}\, u)^{k/l} \geqslant \varphi^{1/l}.$$

Кроме того,

$$\big\|v_n^l\big\|^p_{L^p(\mu)} = \int_S |u_n|^{kp}\cos\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^{-lp} \mathrm{d}\mu \leqslant C^p\cos\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^{-lp}\|\varphi\|^p_{L^p(\mu)}$$

Это доказывает лемму. □

Замечание. Константу $\mathrm{tg}({}^{\pi k}\!/\!_{2l})$ можно сделать сколь угодно малой за счет выбора числа l. Кроме того, из рассуждения видно, что при проверке условия $(\alpha_{p,k,\mu})$ если, как это обычно бывает, конкретное значение k не важно, достаточно обеспечить неравенство $|u| \geqslant \varphi^{1/k}$ вместо $\mathrm{Re}\, u \geqslant \varphi^{1/k}$. Действительно, исходное условие восстановится при любом увеличении числа k.

Покажем, что в каком-то смысле условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ не зависит от p.

Лемма 2. *Если выполнено условие* $(\alpha_{p,k,\mu})$, *то для каждого* $s \in (0,\infty)$ *существует число* $l \in \mathbb{N}$ *такое, что выполнено условие* $(\alpha_{s,l,\mu})$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant \varphi \in L^s(\mu)$. Допустим сначала, что $s > p$. Применим условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ к функции $\varphi^{s/p} \in L^p(\mu)$ получим последовательность функций $u_n \in X$, для которых $\mathrm{Re}\, u_n \geqslant 0$, а также $\|u_n^k\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|\varphi^{s/p}\|_{L^p(\mu)}$

и $\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{s/pk}$ для $u \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} u_n$. Функции $v_n = u_n^{p/s}\widetilde{C}$, где $\widetilde{C} \overset{\text{def}}{=} \cos(\pi p/2s)^{-1}$ будут искомыми. Действительно, $\operatorname{Re} v_n \geqslant 0$ так как $p/s < 1$. Далее,

$$\begin{aligned}\left\|v_n^k\right\|_{L^s(\mu)}^s &= \widetilde{C}^{ks}\int_S |u_n|^{kp}\,\mathrm{d}\mu = \widetilde{C}^{ks}\left\|u_n^k\right\|_{L^p(\mu)}^p \\ &\leqslant \widetilde{C}^{ks}C^p\left\|\varphi^{s/p}\right\|_{L^p(\mu)}^p = \widetilde{C}^{ks}C^p\left\|\varphi\right\|_{L^s(\mu)}^s.\end{aligned}$$

Кроме того, если $v \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} v_n$, то

$$\operatorname{Re} v \geqslant \cos(\pi p/2s)|v| = |u|^{p/s} \geqslant \varphi^{1/k}.$$

Значит выполнено условие $(\alpha_{s,k,\mu})$ с тем же k, но другой постоянной C.

Пусть теперь $s < p$ и пусть l — наименьшее целое число, для которого $p_0 = ls > p$. По первой части доказательства, выполнено условие $(\alpha_{p_0,k,\mu})$. Взяв функцию $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in L^s(\mu)$, применим это условие к функции $\varphi^{s/p_0} \in L^{p_0}(\mu)$. Получим функции u_n, удовлетворяющие соотношениям

$$\operatorname{Re} u_n \geqslant 0, \qquad \|u_n^k\|_{L^{p_0}(\mu)} \leqslant C\|\varphi^{s/p_0}\|_{L^{p_0}(\mu)}, \qquad \operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{s/p_0k},\ u \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Так как $|u_n|^{kp_0} = |u_n^{lk}|^s$, то

$$\left\|u_n^{lk}\right\|_{L^s(\mu)} \leqslant C^{p_0/s}\left\|\varphi^{s/p_0}\right\|_{L^{p_0}(\mu)}^{p_0/s} = C^{p_0/s}\|\varphi\|_{L^s(\mu)}.$$

Кроме того, $\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{s/p_0k} = \varphi^{1/lk}$. Таким образом, выполнено условие $(\alpha_{s,lk,\mu})$. □

Приведем один “учебный” пример. Рассмотрим алгебру таких функций $f \in L^\infty(\mathbb{T}\times[0,1])$, что $f(\cdot,t) \in H^\infty(\mathbb{T})$ при почти всех $t \in [0,1/2]$. Для этой алгебры все вопросы, рассматриваемые в этой главе, не представляют проблемы, а условие $(\alpha^0_{p,\mu})$, разумеется, выполнено при всех $p \in (1,\infty)$. Однако операция гармонического сопряжения, соответствующая этой алгебре, является при этом сильно неоднозначной.

Замечание. В дальнейшем нам часто будут неважны конкретные значения параметров p и k в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$, поэтому мы будем говорить об условии (α_μ) и иметь в виду выполнение $(\alpha_{p,k,\mu})$ для каких-нибудь $0 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N}$. Также, допуская некоторую неточность в обозначениях, иногда мы будем писать (α^0_μ), имея в виду условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ для какого-то показателя $1 < p < \infty$, который неважен в данном контексте.

1.1.2 Принцип максимума и K-замкнутость

Пусть, кроме алгебры X, задано еще одно w^*-замкнутое подпространство $Y \subseteq L^\infty(\mu)$, являющееся модулем над X. Пусть $0 < r < \infty$ и $Y^{r,\mu}$ — замыкание пространства $Y \cap L^r(\mu)$ в топологии нормы пространства $L^r(\mu)$. Для единообразия положим $Y^{\infty,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} Y$. Когда мера μ ясна из контекста, будем писать Y^r вместо $Y^{r,\mu}$. Мы собираемся доказать следующую интерполяционную теорему.

Теорема 5. *Пусть w^*-замкнутая алгебра $X \subseteq L^\infty(\mu)$ удовлетворяет условию (α_μ), а $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ — w^*-замкнутый модуль над алгеброй X. Тогда пара (Y^r, Y) является K-замкнутой в паре $(L^r(\mu), L^\infty(\mu))$ при любом значении показателя $0 < r < \infty$.*

Позже мы выясним, что условие (α_μ) переносится на некоторые весовые меры $w\,d\mu$, благодаря чему из теоремы 5 будет следовать множество ее весовых аналогов.

Рассуждения, доказывающие теорему 5, следуют некоторым построениям из работ [3; 27]. Однако то, что условие (α_μ) несколько более свободно, чем $(\alpha^0_{p,\mu})$, влечет изменения в деталях. Еще некоторые изменения вызваны тем, что в работах [27] и [3] мера μ предполагалась конечной. Почему мы будем описывать конструкции подробно, по крайней мере на первых порах.

Кроме теоремы 5, полезно знать аналог граничного принципа максимума из классической теории пространств Харди ($H^s(\mathbb{T}) \cap L^t(\mathbb{T}) = H^t(\mathbb{T})$, $t < s$). Сформулируем его. Пусть $\mathcal{H}^Y = \cup_{s>0}(Y^s + Y)$. Если рассматриваемый модуль Y ясен из контекста, будем писать $\mathcal{H}$ вместо $\mathcal{H}^Y$.

Теорема 6. *Пусть алгебра X удовлетворяет условию (α_μ), а $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ — w^*-замкнутый модуль над алгеброй X. Пусть $0 < r \leqslant \infty$ и пространства $\mathcal{H}$ и Y^r определены как выше. Тогда*

(а) $L^r(\mu) \cap \mathcal{H} = Y^r$ *с равенством норм.*

(б) $(L^r(\mu) + L^\infty(\mu)) \cap \mathcal{H} = Y^r + Y$ *с эквивалентностью норм.*

Далее, после некоторой подготовки, мы докажем теоремы 5 и 6.

Срезающие функции

Мы начнем с технической подготовки.

Лемма 3 (ср. с леммой 3 из [3]). *Пусть функции $u_n + iv_n \in X$ сходятся п.в. к функции $u + iv$, причем u_n, v_n вещественны, $u_n \geqslant 0$. Если $\delta > 0$, то $(\delta + u + iv)^{-1} \in X$ и $\left\|(\delta + u + iv)^{-1}\right\|_X \leqslant \delta^{-1}$.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что $\left\|(\delta + u_n + iv_n)^{-1}\right\|_X \leqslant \delta^{-1}$. С другой стороны, функции $(\delta + u_n + iv_n)^{-1}$ сходятся п.в., а следовательно, благодаря ограниченности норм, и в w^*-топологии, к $(\delta + u + iv)^{-1}$. □

Замечание. Поскольку пространство Y тоже w^*-замкнуто, оно также выдерживает предельный переход п.в. по ограниченным последовательностям своих элементов. Это пригодится в дальнейшем.

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in L^s(\mu)$, $\varphi \geqslant 0$, а число $l \in \mathbb{N}$ таково, что выполнено условие $(\alpha_{s,l,\mu})$. Пусть $\gamma \in \mathbb{N}$. Тогда найдется функция $\Phi \in X$, что*

1) $\|1 - \Phi\|_{L^s(\mu)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^s(\mu)}$,

2) $|\Phi| \leqslant C/\left(1 + \varphi^{1/l}\right)^{l\gamma}$.

Для удобства сразу же условимся, что, если иное специально не оговорено, мы будем всегда пользоваться этой леммой с $\gamma = 1$.

Доказательство. Применим условие $(\alpha_{s,l,\mu})$ к функциям φ, получим последовательность $u_n \in X$, $\operatorname{Re} u_n \geqslant 0$, $u_n \to u$ п.в., $\left\|u_n^l\right\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^p(\mu)}$ и $\operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{1/l}$. Положим $\Psi = \frac{1}{(1+u)^\gamma}$, тогда, пользуясь леммой 3, получаем $\Psi \in X$ и $\|\Psi\|_X \leqslant 1$. Кроме того,

$$|\Psi| = \frac{1}{|1+u|^\gamma} \leqslant \frac{1}{(1 + \operatorname{Re} u)^\gamma} \leqslant \frac{1}{\left(1 + \varphi^{1/l}\right)^\gamma}.$$

Наконец, пусть $\Phi = 1 - (1 - \Psi^l)^l$. Ясно, что $|\Phi| \leqslant C|\Psi|^l$, откуда получается оценка 2. Ясно также, что $|1 - \Phi| \leqslant C|1 - \Psi|^l$. Из выкладки

$$|1 - \Psi| \leqslant C\left|\frac{1}{1+u} - 1\right| = \frac{C|u|}{|1+u|} \leqslant C|u|$$

сразу же следует оценка 1. □

Доказательство теорем 5 и 6

Удобно сначала проверить утверждение (а) теоремы 6. После этого мы сформулируем и докажем теорему $1'$, совместное обобщение теоремы 5 и утверждения (б) теоремы 6.

Итак, пусть $f \in L^r(\mu) \cap \mathcal{H}$, т.е. $f \in L^r(\mu)$ и $f = g + h$, где $g \in Y^s$ для некоторого $s > 0$ и $h \in Y$. Если $s = \infty$, сразу получаем $f \in Y \cap L^r(\mu) \subseteq Y^r$, так что считаем впредь, что $s < \infty$.

Пусть сначала $r = \infty$. Мы должны доказать, что $g = f - h \in Y$. В случае конечной меры μ это было сделано в лемме 5 в [3]. В общем случае отличия минимальны, но мы приведем рассуждение ради полноты.

Без потери общности считаем, что $\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant 1/2$. Выберем $l \in \mathbb{N}$ так, что выполнено условие $(\alpha_{s,l,\mu})$. Пусть $g_n \in Y$, $\|g - g_n\|_{L^s(\mu)} \to 0$. Продемонстрируем, что $\left\|\chi_{|g_n|>1} g_n\right\|_{L^s(\mu)} \to 0$. Действительно, если $|g_n(x)| > 1$, то в силу неравенства $|g(x)| \leqslant 1/2$ имеем

$$|g_n(x)|^s \leqslant 2^s(|g_n(x)| - |g(x)|)^s \leqslant 2^s|g_n(x) - g(x)|^s,$$

и осталось проинтегрировать это неравенство по множеству $\{x : |g_n(x)| > 1\}$.

Положим теперь $\varphi_n = \left(\max(|g_n|, 1)^{1/l} - 1\right)^l$ и применим к этим функциям лемму 4, получив функции $\Phi_n \in X$. Поскольку $\Phi_n \in X$, имеем $g_n\Phi_n \in Y$, более того, в силу оценки 2 из леммы 4,

$$|g_n\Phi_n| \leqslant \frac{C|g_n|}{\left(1 + \varphi_n^{1/l}\right)^l} = \frac{C|g_n|}{\max(|g_n|, 1)} \leqslant C.$$

Между тем, из оценки 1 вытекает, что

$$\|1 - \Phi_n\|^s_{L^s(\mu)} \leqslant C \int_{|g_n| \geqslant 1} |g_n|^s \, d\mu \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно, некая подпоследовательность Φ_{n_j} последовательности Φ_n стремится к $\mathbf{1}$ п.в. Можно считать, что и $g_{n_j} \to g$ п.в., тогда $g_{n_j}\Phi_{n_j} \to g$ п.в., откуда $g \in Y$ по замечанию после леммы 3.

Рассмотрим теперь случай, когда $r < \infty$. Снова пользуемся равенством $f = g + h$, где $g \in Y^s$, $h \in Y$. Для произвольного $t > 0$ построим по функциям $\varphi_t = \left(\max(t^{-1}|g|, 1)^{1/l} - 1\right)^l$ функции Φ_t как в лемме 4. Все эти функции равномерно ограничены, кроме того,

$$|g\Phi_t| \leqslant \frac{C|g|}{|1+\varphi_t^{1/l}|^l} = \frac{C|g|}{\max(t^{-1}|g|, 1)} \leqslant Ct,$$

так что $g\Phi_t \in Y$ по первой части доказательства (поскольку, очевидно, выполнено включение $g\Phi_t \in Y^s$). В то же время лемма 4 показывает, что

$$\|1-\Phi_t\|^s_{L^s(\mu)} \leqslant C \int_{|g|\geqslant t} (|g|/t)^s \, d\mu \leqslant Ct^{-s}\|g\|^s_{L^s(\mu)}.$$

Таким образом, $\Phi_{t_n} \to 1$ п.в. для некоторой последовательности $t_n \to \infty$. Далее $f\Phi_{t_n} = g\Phi_{t_n} + h\Phi_{t_n} \in Y$ и, очевидно, $f\Phi_{t_n} \to f$ п.в. По теореме Лебега о мажорированной сходимости, эти функции сходятся к f также и в $L^r(\mu)$, откуда $f \in Y^r$.

Замечание. Попутно получилось следующее: если $f \in Y^s$, $0 < s < \infty$, то существуют функции $f_k \in Y$ такие, что $|f_k| \leqslant C|f|$ и $f_k \to f$ п.в.

Как уже отмечалось, утверждение (б) теоремы 6 удобно доказывать вместе с теоремой 5. Сформулируем усиление обоих этих утверждений.

Теорема 1′. *Пусть $f \in \mathcal{H}$ и $|f| \leqslant u + v$, где $u, v \geqslant 0$, $u \in L^r(\mu)$, $0 < r < \infty$, $v \in L^\infty(\mu)$. Тогда найдутся такие функции $g \in Y^r$ и $h \in Y$, что $f = g + h$, причем $\|g\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|u\|_{L^r(\mu)}$ и $\|h\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant C\|v\|_{L^\infty(\mu)}$.*

Доказательство. Мы будем пользоваться уже доказанным пунктом (а) теоремы 6. Пусть $0 < t = 2\|v\|_{L^\infty(\mu)}$ и пусть $e = \{x : |f(x)| > t\}$. Если $x \in e$, то $u(x) \geqslant |f(x)| - v(x) \geqslant |f(x)| - t/2 \geqslant 1/2|f(x)|$, так что $\|f\chi_e\|_{L^r(\mu)} \leqslant 2\|u\|_{L^r(\mu)}$.

Воспользуемся тем, что условие $(\alpha_{r,l,\mu})$ выполнено с некоторым l и применим лемму 4 с этими параметрами к функции $\varphi = t^{-1}|f|\chi_e \in L^r(\mu)$. Покажем, что с помощью полученной в результате функции Φ искомое разложение для f дается функциями $g = (1-\Phi)f$ и $h = \Phi f$.

Обе эти функции, очевидно, лежат в $\mathcal{H}$. В силу доказанного пункта (а) теоремы 6 достаточно проверить лишь, что выполняются оценки для норм $\|h\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant Ct$ и $\|g\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|u\|_{L^r(\mu)}$. Первое неравенство следует из

$$\begin{aligned} &|h(x)| \leqslant C|f(x)| \leqslant Ct, && t \notin e, \\ &|h(x)| \leqslant \frac{C|f(x)|}{(1+\varphi(x)^{1/l})^l} \leqslant \frac{C|f(x)|}{\varphi(x)} \leqslant Ct, && t \in e. \end{aligned}$$

Докажем второе. Для этого напишем $|(1-\Phi)f| \leqslant |(1-\Phi)f\chi_e| + t|1-\Phi|$. Первое слагаемое подчиняется нужной оценке в $L^r(\mu)$, так как $|f\chi_e| \leqslant 2u$. Что касается второго, просто применяем утверждение 1 леммы 4:

$$\|1-\Phi\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^r(\mu)} = Ct^{-1}\|f\chi_e\|_{L^r(\mu)} \leqslant C't^{-1}\|u\|_{L^r(\mu)}.$$

□

Замечание. Поскольку $|\Phi| \leqslant C$ и $g = (1-\Phi)f$, $h = \Phi f$, выполнены неравенства $|g|, |h| \leqslant C|f|$. Поэтому мы можем несколько усилить предыдущее замечание и заключить, что даже при более свободных требованиях теоремы $1'$ все равно найдутся такие функции $f_n \in Y$, что $f_n \to f$ п.в. и $|f_n| \leqslant C|f|$.

1.1.3 Регулярные веса

Мы переходим к весовым аналогам теоремы 5. Под весом понимается любая измеримая строго положительная и п.в. конечная функция на множестве S. Нас будет интересовать мера $w\,d\mu$ вместо μ. Переход к такой мере меняет пространства L^p с $p < +\infty$, но не L^∞. Несколько позже мы модифицируем также и это последнее пространство, но пока оставим его в прежнем виде.

Во введении уже сообщалось, что в классическом случае пространств $H^p_w(\mathbb{T})$ интерполяционные теоремы сохраняются, если $\log w \in \mathrm{BMO}$. Здесь мы будем моделировать следующее описание класса BMO (см., например, [24]).

Предложение 1. *Пусть w — положительная измеримая функция на $\mathbb{T}$ с суммируемым логарифмом. Следующие условия эквивалентны.*

1) $\log w \in \mathrm{BMO}$.

2) Существуют константы $C, \delta > 0$ и функция u такие, что выполнены неравенства $C^{-1}w^\delta \leqslant u \leqslant Cw^\delta$ и $|\widetilde{u}| \leqslant Cu$, где волна означает гармоническое сопряжение.

Из доказательства в [24] видно, что особых проблем с определением гармонически сопряженной функции $\widetilde{u}$ здесь не возникает. Подробнее мы на этом не останавливаемся. Напомним, что мы имеем дело с w^*-замкнутой подалгеброй X в $L^\infty(\mu)$. Поскольку она — модуль над собой, имеют смысл введенные для модулей обозначения X^r, $0 < r \leqslant \infty$, $X^\infty = X$ и $\mathcal{H}^X$.

Нам еще понадобятся множество $\mathcal{L}_+$ неотрицательных функций из объединения $\cup_{s>0}(L^s(\mu) + L^\infty(\mu))$. Обозначим $L^r_+(\mu) = \{f \in L^r(\mu) : f \geqslant 0\}$, тогда ясно, что $\mathcal{L}_+ = \cup_{s>0}(L^s_+(\mu) + L^\infty_+(\mu))$, причем множества $L^s_+(\mu) + L^\infty_+(\mu)$ расширяются с убыванием величины s.

Определение. Вес w называется регулярным, если $w \in \mathcal{L}_+$ и найдутся константы $C > 0$, $\delta > 0$ и $r \in (0, \infty)$ такие, что выполнено следующее: существуют функции $U_n \in X$, сходящиеся п.в. к некоторой функции U, для которых

$$\sup_n \|U_n\|_{L^r(\mu)+L^\infty(\mu)} = \sup_n \inf_{U_n = f+g} \big(\|f\|_{L^r(\mu)} + \|g\|_{L^\infty(\mu)}\big) < \infty,$$

функции $u_n = \operatorname{Re} U_n$ неотрицательны и $C^{-1} w^\delta \leqslant |U| \leqslant C w^\delta$.

Мы будем говорить о (δ, C, r)-регулярных весах, если нужно упомянуть параметры явно. Довольно легко понять, что параметр r всегда можно уменьшить, не меняя C и δ. Кроме того, нетрудно проследить, что при описанных ниже преобразованиях весов новые значения параметров зависят только от старых и, может быть, от чего-то еще, не связанного с весом, но не от самих весов. Впредь мы не будем акцентировать на этом внимания.

Придадим понятию регулярности сходство с условием 2 предложения 1.

Лемма 5. *Пусть w — (δ, C, r)-регулярный вес, тогда он будет $(\delta_1, C(\delta_1), r)$-регулярным при любом $\delta_1 < \delta$. Более того, функции U_n, соответствующие новой тройке параметров, можно выбрать так, что*

$$|\operatorname{Im} U_n| \leqslant \operatorname{tg}(^{\alpha\pi}/_2) \operatorname{Re} U_n, \qquad |U_n| \leqslant (\cos(\alpha\pi/2))^{-1} \operatorname{Re} U_n, \qquad \alpha = \delta_1/\delta. \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассуждения почти те же, что и при проверке леммы 1 (см. неравенства (1.1)). Пусть V_n — функция из определения регулярного веса для исходных параметров. Достаточно положить $U_n = V_n^\alpha \cos(\alpha\pi/2)^{-1}$ (берется главная ветвь степени) и воспользоваться тем, что $\alpha < 1$. В таком случае видно, что $C(\delta_1) = C^\alpha \cos(\alpha\pi/2)^{-1}$. □

Следующие несколько лемм помогут нам убедиться, что регулярных весов довольно много.

Лемма 6. *Если w_0 и w_1 — регулярные веса, то $w_0 w_1$ и $w_0 + w_1$ — тоже регулярные веса.*

Доказательство. В силу леммы 5 мы можем считать, что параметр δ один и тот же для w_0 и w_1. Пусть U_n^0 и U_n^1 — функции из определения регулярности, соответственно, для w_0 и w_1. Еще несколько уменьшая, при необходимости, число δ, можем считать, что, например, $\left|\operatorname{Im} U_n^j\right| \leqslant 10^{-1} \operatorname{Re} U_n^j$, $j = 0, 1$ и $n \in \mathbb{N}$.

Пусть в дальнейшем $f \asymp g$ означает существование константы $C > 0$, что $C^{-1} f \leqslant g \leqslant C f$. Функции $U_n^0 U_n^1$ имеют неотрицательную вещественную часть и ясно, что $(w_0 w_1)^\delta \asymp \left|U^0\right|\left|U^1\right|$, где $U^j = \lim_{n\to\infty} U_n^j$, $j = 0, 1$ п.в. Более того, в нашей ситуации сразу можно сказать, что даже $(w_0 w_1)^\delta \asymp \operatorname{Re} U^0 U^1$. Простыми рассуждениями с привлечением неравенства Гельдера доказывается, что функции $U_n^0 U_n^1$ ограничены в $L^s(\mu) + L^\infty(\mu)$ равномерно по n при некотором s.

Для суммы $w_0 + w_1$ достаточно заметить, что $(w_0 + w_1)^\delta \asymp w_0^\delta + w_1^\delta$. □

Замечание. Непосредственно из определения видно, что веса w и w^β, $\beta > 0$ регулярны или нет одновременно. Для $\beta < 0$ можно отметить следующее.

Лемма 7. *Если w — регулярный и $w^{-1} \in \mathcal{L}_+$, то вес w^{-1} тоже регулярный.*

Доказательство. Пусть $U_n \in X$ — функции из определения регулярности для w, т.е. $\operatorname{Re} U_n \geqslant 0$, $U_n \to U$ п.в., $w^\delta \asymp |U|$ и $\sup \|U_n\|_{L^r(\mu)+L^\infty(\mu)} < \infty$ для некоторого r. Пусть $\varepsilon > 0$ — малое число. Тогда $V_n^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon + U_n)^{-1} \in X$ и $|V_n^\varepsilon| \leqslant \varepsilon^{-1}$. Кроме того, $\lim_{n\to\infty} V_n^\varepsilon = (\varepsilon + U)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} V^\varepsilon$, причем $V^\varepsilon \in X$. Разумеется, $\operatorname{Re} V^\varepsilon \geqslant 0$ и $V^\varepsilon \to U^{-1}$ п.в. при $\varepsilon \to 0$. Так как $|V^\varepsilon| \leqslant |U|^{-1}$, видно, что функции V^ε ограничены в $L^\sigma(\mu) + L^\infty(\mu)$ при некотором σ. Наконец, соотношение $|U|^{-1} \asymp w^{-\delta}$ очевидно. □

Замечание. Если w — регулярный вес и $w^{-1} \in \mathcal{L}_+$, то применив только что описанную конструкцию к w^{-1}, заключаем, что функции U_n из определения регулярности можно подчинить условию $|U_n| \leqslant C w^\delta$.

Лемма 8. *Если w — регулярный вес, то веса $w_1 = \min(w, \mathbf{1})$ и $w_2 = \max(w, \mathbf{1})$ регулярные.*

Доказательство. Для максимума воспользуемся тем, что $w_2 \asymp w + \mathbf{1}$, а для минимума — тем, что $w_1 \asymp \frac{w}{w+\mathbf{1}}$, причем вес $(w+\mathbf{1})^{-1}$ регулярен по лемме 7. □

Замечание. Ясно, что вес w_2^{-1} тоже регулярен, поскольку $w_2^{-1} \in L^\infty(\mu)$.

Лемма 9. *Для всякого веса w из $\mathcal{L}_+$ существует регулярный вес $v \geqslant w$ со следующими свойствами:*

1) *если $w \in L^r(\mu)$, $r \in (0, \infty]$, то $v \in L^r(\mu)$ и $\|v\|_{L^r(\mu)} \leqslant C\|w\|_{L^r(\mu)}$;*
2) *если $w \in L^r(\mu) + L^\infty(\mu)$, то v лежит в том же пространстве и удовлетворяет подобной же оценке нормы.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Для показателя $r = \infty$ положим просто $U_n = U = \|w\|_{L^\infty(\mu)}\mathbf{1}$. При $r < \infty$ достаточно применить условие $(\alpha_{r,l,\mu})$ к функции $w \in L^r(\mu)$.

Докажем теперь утверждение 2. Напишем $w = w_0 + w_1$, где $w_0 \in L^r_+(\mu)$, $w_1 \in L^\infty_+(\mu)$, и заметим, что $(w_0 + \|w_1\|_{L^\infty(\mu)}\mathbf{1})^\delta \asymp w_0^\delta + \|w_1\|^\delta_{L^\infty(\mu)}\mathbf{1}$. Это соотношение показывает, что достаточно применить уже доказанный пункт 1 по отдельности к w_0 и w_1. □

Сформулируем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 7. *Пусть алгебра X удовлетворяет условию (α_μ), а w — регулярный вес. Тогда алгебра X удовлетворяет и условию $(\alpha_{w\,d\mu})$.*

Доказательство. Пусть δ — число из определения регулярности для веса w. В силу леммы 2 алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,k,\mu})$ с $p = \delta^{-1}$ и каким-нибудь $k \in \mathbb{N}$. Проверим условие $(\alpha_{t,1,w\,d\mu})$ для какого-нибудь t. Выберем число t достаточно большим; насколько, — будет видно позже, но, во всяком случае, должно быть $t > p$.

Пусть $f \in L^t(w\,d\mu)$, тогда, очевидно, $\left\|f^{t/p}w^{1/p}\right\|^p_{L^p(\mu)} = \|f\|^t_{L^t(w\,d\mu)}$. Применив условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ к функции $f^{t/p}w^{1/p}$, найдем такие функции $\Phi_n \in X$, $\Phi_n \to \Phi$ п. в, что:

$$\operatorname{Re}\Phi_n \geqslant 0, \qquad \left\|\Phi_n^k\right\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\left\|f^{t/p}w^{1/p}\right\|_{L^p(\mu)}, \qquad \operatorname{Re}\Phi \geqslant f^{t/(kp)}w^{1/(kp)}.$$

Далее, пусть $U_n \in X$ — функции из определения регулярности веса w: $U_n \to U$ п.в., $|U| \asymp w^{1/p}$ (напомним, что $\delta = 1/p$), $\operatorname{Re} U_n \geqslant 0$ и функции U_n равномерно ограничены в $L^s(\mu) + L^\infty(\mu)$ при некотором $s > 0$. Отметим, что $(\rho + U)^{-1} \in X$ при каждом $\rho > 0$. Рассмотрим теперь функции

$$h_n = \Phi_n^{\frac{kp}{t}}/(n^{-1} + U)^{p/t}.$$

Число t выберем так, чтобы оба показателя степени были настолько малы, чтобы значения и числителя, и знаменателя лежали в угле достаточно малого раствора с положительной вещественной полуосью в качестве биссектрисы. Тогда окажется, что $\operatorname{Re} h_n \geqslant 0$ и $|h_n| \leqslant K \operatorname{Re} h_n$. Кроме того, очевидно, $h_n \in X$.

Функции h_n удовлетворяют нужной равномерной оценке в $L^t(w\,\mathrm{d}\mu)$:

$$\|h_n\|^t_{L^t(w\,\mathrm{d}\mu)} = \int_S \frac{|\Phi_n|^{kp}}{|n^{-1}+U|^p} w\,\mathrm{d}\mu \leqslant C \Big\| f^{t/p} w^{1/p} \Big\|^p_{L^p(\mu)} = C\|f\|^t_{L^t(w\,\mathrm{d}\mu)}.$$

С другой стороны, $h_n \to \Phi^{\frac{kp}{t}}/U^{p/t}$ при $n \to \infty$ п.в., при этом

$$\operatorname{Re} \frac{\Phi^{\frac{kp}{t}}}{U^{p/t}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} h_n \geqslant K^{-1} \lim_{n\to\infty} |h_n| = K^{-1} \frac{|\Phi|^{\frac{kp}{t}}}{|U|^{p/t}} \geqslant C \frac{f w^{1/t}}{w^{1/t}} = Cf.$$

Теорема доказана (избавиться от константы C справа не составляет труда). $\square$

Следствие 1. *Если w — регулярный вес, $0 < s < \infty$, то пара $(Y^{s,w\,\mathrm{d}\mu}, Y)$ является K-замкнутой в $(L^s(w\,\mathrm{d}\mu), L^\infty(w\,\mathrm{d}\mu))$. Здесь $L^\infty(w\,\mathrm{d}\mu) = L^\infty(\mu)$.*

1.1.4 Пространство $L^\infty_w(\mu)$

Пространство $L^\infty_w(\mu)$ состоит из тех функций f, для которых $fw^{-1} \in L^\infty(\mu)$, норма функции f в нем есть по определению $\|fw^{-1}\|_{L^\infty(\mu)}$. Здесь w — некоторый вес, то есть положительная измеримая функция.

В дальнейшем часто будет удобно даже и для весовых пространств задавать двойственность невесовой билинейной формой $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_S \varphi\psi\,\mathrm{d}\mu$. Легко видеть, что $\big(L^1(w\,\mathrm{d}\mu)\big)^* = L^\infty_w(\mu)$ относительно этой двойственности.

Пусть теперь снова $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ — $*$-замкнутый модуль над $*$-замкнутой алгеброй $X \subseteq L^\infty(\mu)$ с единицей. Положим

$$Y(w) = \mathcal{H}^Y \cap L^\infty_w(\mu) = \big\{ f \in \mathcal{H}^Y : |f| \leqslant Cw \big\}.$$

Лемма 10. *Если пространство $L^1(\mu)$ сепарабельно, то пространство $Y(w)$ замкнуто в $*$-слабой топологии пространства $L^\infty_w(\mu)$ при $w \in \mathcal{L}_+$.*

Доказательство. Топология $\sigma\big(L^\infty_w(\mu), L^1(w\,\mathrm{d}\mu)\big)$ метризуема на единичном шаре. Поэтому по теореме Крейна–Шмульяна достаточно доказать, что шар пространства $Y(w)$ содержит пределы всех $*$-слабо сходящихся последовательностей своих элементов.

Пусть $Y(w) \ni f_n \to f \in L^\infty_w(\mu)$ в смысле $*$-слабой топологии пространства $L^\infty_w(\mu)$ и $\|f_n\|_{L^\infty_w(\mu)} \leqslant 1$. Рассмотрим вес $u = w^{-1}h$, где $h \in L^1(\mu)$, $h > 0$: такая функция h существует благодаря предположению о σ-конечности меры. Покажем, что сходимость $f_n \to f$ имеет место и в слабой топологии пространства $L^1(u\,d\mu)$. Действительно, для любой $g \in L^\infty_w(\mu)$ выполняется

$$\|g\|_{L^1(u\,d\mu)} = \int_S |g|w^{-1}h\,d\mu \leqslant \left\|gw^{-1}\right\|_{L^\infty(\mu)}\|h\|_{L^1(\mu)} = C_h\|g\|_{L^\infty_w(\mu)}.$$

Аналогично, для $g \in L^\infty_u(\mu)$ выполнено $\|g\|_{L^1(w\,d\mu)} \leqslant C_h\|g\|_{L^\infty_u(\mu)}$. Отсюда очевидна вышеупомянутая сходимость.

Тогда некоторая последовательность выпуклых комбинаций функций f_n сходится к f п.в. Считаем, чтобы не менять обозначений, что таковы сами f_n. Теперь включение $f \in \mathcal{H}^Y$ следует из того, что $|f_n| \leqslant w \in \mathcal{L}_+$. $\square$

В дальнейшем мы, наряду с σ-конечностью, будем молчаливо предполагать, что основная мера μ сепарабельна, то есть, что сепарабельно пространство $L^1(\mu)$. Дополним теорему 7 следующим утверждением.

Теорема 8. *Пусть w_0 и w_1 — два регулярных веса, а Y, как всегда, есть $*$-слабо замкнутый модуль над основной алгеброй X, удовлетворяющей условию $(\alpha_{r,k,\mu})$. Тогда пара $(Y^{p,w_0\,d\mu}, Y(w_1))$ является K-замкнутой в паре $(L^p(w_0\,d\mu), L^\infty_{w_1}(\mu))$ при любом $0 < p < \infty$. Константы в условиях K-замкнутости зависят лишь от r, k, p и соответствующих констант из условий регулярности весов.*

Доказательство. За константами несложно будет проследить, мы не будем заострять на этом внимания. Рассмотрим в $L^\infty(\mu)$ подпространство

$$Z = \{f/w_1 : f \in Y(w_1)\} \subseteq L^\infty(\mu).$$

По лемме 10, это $*$-слабо замкнутый модуль. Поэтому определены пространства $Z^{p,\nu}$ для разных показателей p и мер ν. Определим оператор

$$Tg = g/w_1, \qquad T : L^p(w_0\,d\mu) + L^\infty_{w_1}(\mu) \to L^p(w_0 w_1^p\,d\mu) + L^\infty(\mu).$$

Легко видеть, что оператор T биективен, а также переводит $L^\infty_{w_1}(\mu)$ на $L^\infty(\mu)$ и $L^p(w_0\,d\mu)$ на $L^p(w_0 w_1^p\,d\mu)$ изометрически. Кроме того, непосредственно из определения Z видно, что $T(Y(w_1)) = Z$. Справедлив следующий факт.

Лемма. $T(Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}) = Z^{p,w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$.

Это позволяет свести теорему к вопросу о K-замкнутости пары пространств $(Z^{p,w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu}, Z)$ в паре $(L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu), L^\infty(\mu))$. Она, в свою очередь, сразу следует из того, что вес $w_0 w_1^p$ регулярен (см. лемму 6 и замечание после нее), и из теорем 5 и 7. Поэтому остается лишь проверить лемму.

Доказательство леммы. Пусть $f \in Z^{p,w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$, покажем, что $f w_1 \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$. По определению, существуют функции вида φ_n / w_1 такие, что $\varphi_n \in \mathcal{H}^Y$ и выполнено соотношение $\|f - \varphi_n w_1^{-1}\|_{L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Это в точности означает, что $\|f w_1 - \varphi_n\|_{L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Значит $\varphi_n \in L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu) \cap \mathcal{H}^Y$. По замечанию после доказательства теоремы $1'$ существуют функции $\alpha_{n,j} \in Y$ такие, что $\alpha_{n,j} \to \varphi_n$ п.в. и $|\alpha_{n,j}| \leqslant C|\varphi_n|$. Тогда по принципу максимума, то есть по теореме 6, $\alpha_{n,j} \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, значит $\varphi_n \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, а тогда и $f w_1 \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$.

Докажем теперь обратное. Пусть $\varphi \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, тогда найдутся функции $\varphi_n \in Y \cap L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$ такие, что $\|\varphi - \varphi_n\|_{L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Разумеется, это эквивалентно соотношению $\|\varphi w_1^{-1} - \varphi_n w_1^{-1}\|_{L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$, поэтому достаточно доказать, что $\varphi_n w_1^{-1} \in Z^{p,w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$ при любом n.

Воспользуемся условием $(\alpha_{p,l,w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu})$, которое выполнено с некоторым параметром $l \in \mathbb{N}$ по теореме 7 и лемме 2. Для фиксированного n и $k \in \mathbb{N}$ положим $\lambda_k = (\max(|\varphi_n|/k w_1, 1)^l - 1)^{1/l}$. Поскольку $\varphi_n w_1^{-1} \in L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu)$, видно, что $\lim_{k\to\infty} \|\lambda_k\|_{L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} = 0$. Применим к функциям λ_k лемму 4 с весовой мерой $w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu$. Получатся функции $\Phi_k \in X$ такие, что

$$\|1 - \Phi_k\|_{L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu)} \to 0, \qquad\qquad |\Phi_k| \leqslant C/\big(1 + \lambda_k^{1/l}\big)^l.$$

В силу первого соотношения мы можем, перейдя к подпоследовательности, считать, что $\Phi_k \to 1$ п.в. Второе соотношение показывает, что $|\Phi_k| \leqslant C$. Отсюда $\Phi_k \varphi_n w_1^{-1} \to \varphi_n w_1^{-1}$ в $L^p(w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu)$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Наконец, $\Phi_k \varphi_n \in Y$ и $|\Phi_k \varphi_n| \leqslant k w_1$, откуда $\Phi_k \varphi_n \in Y(w_1)$ и, сразу же, $\Phi_k \varphi_n w_1^{-1} \in Z$, а значит $\varphi_n w_1^{-1} \in Z^{p,w_0 w_1^p\,\mathrm{d}\mu}$. $\square$

На этом закончено и доказательство теоремы. $\square$

Похожим образом доказывается еще одно утверждение, которое мы приведем, хоть оно напрямую и не понадобится нам в дальнейшем.

Лемма 11. *Пусть w_0 и w_1 — два регулярных веса, а $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ — w^*-замкнутый модуль над X в $L^\infty(\mu)$. Пусть $0 < p < \infty$, тогда пересечение пространств $Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$ и $Y^{p,w_1\,\mathrm{d}\mu}$ плотно в каждом из них.*

Доказательство. Выберем строго положительную функцию h из пространства $L^1((w_0+w_1)\,\mathrm{d}\mu)$, это возможно благодаря σ-конечности меры μ. В силу леммы 9 и теоремы 7 можно без ограничения общности считать h регулярным весом. Тогда $w_0, w_1 \in L^1(h\,\mathrm{d}\mu)$. Пусть число l таково, что алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,l,w_0h\,\mathrm{d}\mu})$, оно существует благодаря регулярности веса w_0h, теореме 7 и лемме 2. Пусть $\alpha_k = (\max({}^{w_1}\!/_{kw_0}, 1)^{1/(lp)} - 1)^l$.

Так как $\|\alpha_k\|_{L^p(w_0h\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant {}^1\!/_k \int w_1 h\,\mathrm{d}\mu$, то $\|\alpha_k\|_{L^p(w_0h\,\mathrm{d}\mu)} \to 0$. Применим к функциям α_k лемму 4, получатся функции $\Phi_k \in X$ такие, что

$$\|1-\Phi_k\|_{L^p(w_0h\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C\|\alpha_k\|_{L^p(w_0h\,\mathrm{d}\mu)}, \qquad |\Phi_k| \leqslant C/\big(1+\alpha_k^{1/l}\big)^l.$$

Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\Phi_k \to 1$ п.в. Вторая оценка показывает, что $|\Phi_k| \leqslant C$ всюду и $\Phi_k \leqslant C({}^{kw_0}\!/_{w_1})^{1/p}$.

Предположим, что $f \in Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu}$. Мы хотим приблизить функцию f функциями из пересечения $Y^{p,w_0\,\mathrm{d}\mu} \cap Y^{p,w_1\,\mathrm{d}\mu}$. Естественно, можно считать, что $f \in Y \cap L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$. Положим $f_k = f\Phi_k$, тогда $\int_S |f_k|^p w_1\,\mathrm{d}\mu \leqslant Ck\int_S |f|^p w_0\,\mathrm{d}\mu$, так что $f_k \in Y \cap L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu) \cap L^p(w_1\,\mathrm{d}\mu)$. Кроме того, $f_k \to f$ в $L^p(w_0\,\mathrm{d}\mu)$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. □

1.1.5 Аннуляторы

Пусть опять Y — w^*-замкнутый модуль над алгеброй X в $L^\infty(\mu)$ и пусть w — регулярный вес. Для дальнейших шагов в теории интерполяции нам понадобится аннулятор $Y(w)_\perp$ пространства $Y(w) \subseteq L^\infty_w(\mu)$ в преддвойственном пространстве $L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$:

$$Y(w)_\perp = \Big\{ g \in L^1(w\,\mathrm{d}\mu) : \int_S gf\,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ при } f \in Y(w) \Big\}.$$

Рассмотрим также аннулятор

$$E = \big(Y^{1,\mu}\big)^\perp = \Big\{ \varphi \in L^\infty(\mu) : \int_S \varphi u\,\mathrm{d}\mu = 0 \text{ при } u \in Y^{1,\mu} \Big\}. \tag{1.3}$$

Очевидным образом, E — w^*-замкнутый модуль над алгеброй X в пространстве $L^\infty(\mu)$. Следующая лемма позволяет включать аннуляторы $Y(w)_\perp$ в доказанные ранее интерполяционные утверждения.

Лемма 12. *Пусть для алгебры X выполнено условие (α_μ). Тогда имеет место равенство $Y(w)_\perp = E^{1,w\,d\mu}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $E^{1,w\,d\mu} \subseteq Y(w)_\perp$. Для этого достаточно проверить, что $E \cap L^1(w) \subseteq Y(w)_\perp$. Пусть $\varphi \in E \cap L^1(w)$, $f \in Y(w)$. Мы должны доказать, что $\int \varphi f\, d\mu = 0$. В силу замечания после доказательства теоремы $1'$, найдутся функции $f_n \in Y$ такие, что $f_n \to f$ п.в. и $|f_n| \leqslant C|f|$. Если мы проверим, что $\int_S \varphi f_n\, d\mu = 0$ для всех n, мы придем к нужному соотношению в силу теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Так как $\varphi \in E$, соотношение $\int \varphi u\, d\mu = 0$ верно для всех u из $Y \cap L^1(\mu)$, а значит нам достаточно правильным образом приблизить каждую функцию f_n какими-то функциями из $Y \cap L^1(\mu)$.

Найдем какую-нибудь положительную п.в. функцию α из $L^1(w\,d\mu)$ и применим лемму 4 к функциям $k\alpha$, $k \in \mathbb{N}$. Получатся функции $\Phi_k \in X$ со следующими свойствами:

$$\|1-\Phi_k\|_{L^1(w\,d\mu)} \leqslant Ck\|\alpha\|_{L^1(w\,d\mu)}, \qquad |\Phi_k| \leqslant C/(1+(k\alpha)^{1/l})^l.$$

Первое условие показывает, что $\Psi_k = 1-\Phi_k \in L^1(w\,d\mu)$ при всех k, причем $\Psi_k \in X$, потому что $\mathbf{1} \in X$. Второе условие показывает, что функции Ψ_k равномерно ограничены и стремятся к 1 п.в. при $k \to \infty$.

Теперь $\Psi_k f_n \in Y$, так как Y — модуль над X. Далее, $\Psi_k f_n \in L^1(\mu)$ так как $|f_n| \leqslant Cw$ и $\Psi_k \in L^1(w\,d\mu)$. Поэтому $\int_S \varphi\Psi_k f_n\, d\mu = 0$. Перейти к пределу по k при фиксированном n можно, поскольку $|\varphi\Psi_k f_n| \leqslant C|\varphi|w \in L^1(\mu)$.

Осталось доказать обратное включение $E^{1,w\,d\mu} \supseteq Y(w)_\perp$. Допустим, что $f \in Y(w)_\perp$. Тогда $f \in L^1(w)$ и, так как вес w регулярен, выполнено условие $(\alpha_{1,l,w\,d\mu})$ для какого-то $l \in \mathbb{N}$. Значит можно применить лемму 4 к функциям $\varphi_n = \big(\max(n^{-1}|f|,1)^{1/l}-1\big)^l$, получив $\Phi_n \in X$ со свойствами:

$$\|1-\Phi_n\|_{L^1(w\,d\mu)} \leqslant C\|\varphi_n\|_{L^1(w\,d\mu)} \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$
$$|\Phi_n| \leqslant C/\big(1+\varphi_n^{1/l}\big)^l = C/\max(n^{-1}|f|,1) \leqslant Cn/|f|.$$

Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, получаем сходимость $f\Phi_n \to f$ п.в. и в $L^1(w)$, причем $f\Phi_n \in Y(w)_\perp$ и $f\Phi_n \in L^\infty(\mu)$.

Для завершения доказательства достаточно проверить, что $f\Phi_n \in E$, то есть что $f\Phi_n \perp Y^{1,\mu}$. Благодаря плотности можно доказать лишь то, что $f\Phi_n \perp \big(Y \cap L^1(\mu)\big)$. Знаем, что условие $(\alpha_{1,r,w\,\mathrm{d}\mu})$ для алгебры X выполнено для какого-то $r \in \mathbb{N}$. Пусть $g \in Y \cap L^1(\mu)$ и пусть $\psi_k = \big(\max(|g|/kw, 1)^{1/r} - 1\big)^r$. Легко видеть, что $\psi_k \in L^1(w\,\mathrm{d}\mu)$. Поэтому лемма 4 дает функции $\Psi_k \in X$, для которых

$$\|1 - \Psi_k\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C\|\psi_k\|_{L^1(w\,\mathrm{d}\mu)} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$
$$|\Psi_k| \leqslant C/\big(1 + \psi_k^{1/r}\big)^r = C/\max(|g|/kw, 1) \leqslant Ckw/|g|.$$

Переходя, при необходимости, к подпоследовательности, получаем $g\Psi_k \to g$ п.в. и в $L^1(\mu)$, причем $g\Psi_k \in Y \cap L^1(\mu)$ и $g\Psi_k \in L^\infty_w(\mu)$. Выходит, что $g\Psi_k \in Y(w)$, а значит $\int_S f\Phi_n g\Psi_k\,\mathrm{d}\mu = 0$. Наконец, переход к пределу при $k \to \infty$ показывает, что $\int_S f\Phi_n g\,\mathrm{d}\mu = 0$, и завершает доказательство. □

1.1.6 Еще одна интерполяционная теорема и аналог аналитического разбиения единицы

Теорема 9. *Пусть $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ — w^*-замкнутый модуль над алгеброй X, которая удовлетворяет условию (α_μ). Пусть w_0 и w_1 — регулярные веса. Тогда пара $(Y(w_0), Y(w_1))$ является K-замкнутой в паре $(L^\infty_{w_0}(\mu), L^\infty_{w_1}(\mu))$.*

Доказательство. Из общих соображений, связанных с двойственностью (см. [33], [24]), утверждение теоремы эквивалентно K-замкнутости пары аннуляторов $(Y(w_0)_\perp, Y(w_1)_\perp)$ в паре $(L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu), L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu))$. Пусть $E \subseteq L^\infty(\mu)$ — модуль, определенный формулой (1.3). Тогда упомянутая пара аннуляторов есть $\big(E^{1,w_0\,\mathrm{d}\mu}, E^{1,w_1\,\mathrm{d}\mu}\big)$ по лемме 12.

Пусть $f \in \mathcal{H}^E$ и $f = g + h$, где $g \in L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu)$, $h \in L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)$. Найдем у функции $|h|$ регулярную мажоранту $\widetilde{h}$ в пространстве $L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)$ с контролем нормы (см. теорему 7 и лемму 9). Тогда на указанное выше разложение можно смотреть как на разложение в сумме $L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu) + L^\infty_{\widetilde{h}}(\mu)$. Отметим, что норма слагаемого h во втором из этих пространств теперь не больше 1. Теорема 8 дает $f = \varphi + \psi$, где $\varphi \in E^{1,w_0\,\mathrm{d}\mu}$, $\psi \in \mathcal{H}^E$, $\|\varphi\|_{E^{1,w_0\,\mathrm{d}\mu}} \leqslant C\|g\|_{L^1(w_0\,\mathrm{d}\mu)}$, $\|\psi\|_{L^\infty_{\widetilde{h}}(\mu)} \leqslant C$. Тогда $|\psi| \leqslant C|\widetilde{h}|$, поэтому $\|\psi\|_{L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C\|\widetilde{h}\|_{L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)} \leqslant C'\|h\|_{L^1(w_1\,\mathrm{d}\mu)}$, в частности $\psi \in E^{1,w_1\,\mathrm{d}\mu}$. □

Доказанную только что теорему 9 можно несколько усилить.

Следствие 2. *Рассмотрим регулярные веса w_0 и w_1. Пусть $f \in \mathcal{H}^Y$ и предположим, что $|f| \leqslant w_0+w_1$. Тогда $f = \varphi+\psi$, где $\varphi \in Y(w_0)$, $\psi \in Y(w_1)$, причем $|\varphi| \leqslant Cw_0$, $|\psi| \leqslant Cw_1$ и константа C зависит не от функций f, w_0, w_1, а лишь от констант регулярности весов w_0, w_1 и констант в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$.*

Набросок доказательства. Предыдущую теорему можно было бы применить, если бы выполнялось включение $f \in Y(w_0) + Y(w_1)$. Это препятствие можно обойти, приблизив f поточечно некоторой последовательностью функций f_n из Y таких, что $|f_n| \leqslant C|f|$ и $f_n \in Y(\min(w_0, w_1))$, что возможно по замечанию после теоремы $1'$. Тогда, разложив каждую функцию f_n в соответствии с теоремой 9, можно будет получить искомое разложение функции f, перейдя к w^*-сходящимся подпоследовательностям. □

Наконец, докажем теорему о разбиении единицы, о которой мы упоминали еще во введении. Она понадобится нам в следующем разделе.

Теорема 10. *Пусть $X \subseteq L^\infty(\mu)$ — w^*-замкнутая алгебра, удовлетворяющая условию $(\alpha_{p,k,\mu})$ для каких-то $0 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N}$. Пусть w — регулярный вес. Тогда найдутся функции $\varphi_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}$, такие что*

1) $|\varphi_n|^{1/8} w \leqslant c2^n$, $n \in \mathbb{Z}$,

2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi_n|^{1/8} 2^n \leqslant cw$,

3) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi_n|^{1/8} \leqslant c$,

4) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n = 1$.

Замечание. Показатель $1/8$ здесь не очень существенен и появляется по аналогии с работой [25], рассуждение из которой мы можем сейчас смоделировать в нашей общей ситуации.

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$. Из леммы 8 следует регулярность пары весов $w_0 = \min((w/\lambda)^{16}, 1)$ и $w_1 = \min((\lambda/w)^8, 1)$. Случай веса w_1, впрочем, требует пояснений: вес $1/w_1$ регулярен по лемме 8 и больше либо равен единицы всюду, а тогда вес w_1 тоже регулярен в силу леммы 7.

Кроме того, легко проследить, что константы δ и C из определения регулярного веса можно выбрать не зависящими от λ для w_0 и w_1. Основное соображение здесь таково: они одинаковы для весов w и λw.

Ясно, что $1 \leqslant w_0 + w_1$. Поскольку $\mathbf{1} \in X$, можем применить следствие 2 и получить представление $\mathbf{1} = g + h$, где $g, h \in X$, $|g| \leqslant Cw_0$, $|h| \leqslant Cw_1$ с константой C, зависящей лишь от параметров регулярности w и констант в условии (α_μ) для алгебры X.

Возьмем $\lambda = 2^n$, $n \in \mathbb{Z}$, и обозначим соответствующие функции g и h через g_n и h_n. Положим $\varphi_n = g_n - g_{n+1} = h_{n+1} - h_n$ и покажем, что эти функции удовлетворяют требованиям теоремы.

Ясно, что $\varphi_n \in X$ и

$$|\varphi_n| \leqslant C \min\bigl((2^{-n}w)^{16}, (2^n w^{-1})^8\bigr).$$

Свойство 1 вытекает отсюда сразу. Далее,

$$\sum_{k \leqslant j \leqslant l} \varphi_j = 1 - h_k - g_{l+1} \longrightarrow 1 \text{ п.в.}$$

Действительно, $|g_{l+1}| \leqslant C(2^{-l-1}w)^{16}$ и $|h_k| \leqslant C(2^k w^{-1})^8$, поэтому $g_{l+1} \to 0$ при $l \to \infty$ и $h_k \to 0$ при $k \to -\infty$ почти всюду. Значит выполнено свойство 4. Из дальнейшего будет видно, что сходимость ряда — абсолютная.

Проверим теперь свойства 2 и 3. Пусть $e_k = \bigl\{x : 2^k \leqslant w(x) \leqslant 2^{k+1}\bigr\}$, $k \in \mathbb{Z}$, тогда

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n |\varphi_n|^{1/8} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\sum_{k\leqslant n} |\varphi_n|^{1/8} \chi_{e_k} + \sum_{k>n} |\varphi_n|^{1/8} \chi_{e_k} \right) \\
&\leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \left(\sum_{k\leqslant n} 2^{-2n} 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k>n} 2^n 2^{-k} \chi_{e_k} \right) \\
&= C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\geqslant k} 2^{-n} \right) 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n<k} 2^{2n} \right) 2^{-k} \chi_{e_k} \right) \\
&\leqslant C' \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \chi_{e_k} \leqslant C'' w,
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi_n|^{1/8} &\leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\leqslant n} 2^{-2n} 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k>n} 2^n 2^{-k} \chi_{e_k} \right) \\
&= C \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n\geqslant k} 2^{-2n} \right) 2^{2k} \chi_{e_k} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n<k} 2^{n} \right) 2^{-k} \chi_{e_k} \right) \\
&\leqslant C' \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{e_k} \leqslant C'.
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство. $\square$

Для дальнейшего нужно будет подобное утверждение, в котором функции φ_n заменены произведениями $g_n h_n$, где $g_n, h_n \in X$, причем последовательности $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$ должны удовлетворять условиям наподобие условий 1–3 предыдущей теоремы. В [25] и ранее это делалось с помощью внешне-внутренней факторизации, но ответ на вопрос о похожей процедуре в нашей общей ситуации как минимум не очевиден. Нужный вариант теоремы 10 мы получим другим приемом, сродни конструкции из заключительной части статьи [25].

Следствие 3. *Для всякого регулярного веса w существуют такие функции $\varphi_n, \psi_n \in X$, $n \in \mathbb{Z}$, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n\psi_n = 1$ и для каждой из систем $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ выполнены условия* 1–3 *теоремы* 10.

Доказательство. Прежде всего, тем же способом, что и выше, можно получить вариант теоремы 10 с заменой показателя $1/8$ на $1/16$. После этого возведем равенство 4 в куб: $\mathbf{1} = \sum_{i\leqslant j\leqslant k} c_{ijk}\varphi_i\varphi_j\varphi_k = \sum_j \varphi_j\psi_j$, где $\psi_j = \sum_{i\leqslant j\leqslant k} c_{ijk}\varphi_i\varphi_k$ при каждом $j \in \mathbb{Z}$, а $c_{ijk} \leqslant 100$ при любых индексах. Поскольку одновременно

$$|\psi_j| \leqslant C\sum_{i\leqslant j}|\varphi_i|, \qquad\qquad |\psi_j| \leqslant C\sum_{k\geqslant j}|\varphi_k|,$$

можем написать аналоги условий 1 и 2 для функций ψ_j с показателем $1/16$:

$$|\psi_j|^{1/16}w \leqslant C\sum_{i\leqslant j}|\varphi_i|^{1/16}w \leqslant C'\sum_{i\leqslant j}2^i \leqslant C''2^j,$$

$$\sum_j|\psi_j|^{1/16}2^j \leqslant C\sum_j\sum_{k\geqslant j}|\varphi_k|^{1/16}2^j = C\sum_k\Big(\sum_{j\leqslant k}2^j\Big)|\varphi_k|^{1/16} \leqslant C'w.$$

Далее, аналог условия 3 с показателем $1/8$ получается из выкладки

$$\sum_j|\psi_j|^{1/8}w = \sum_j|\psi_j|^{1/16}\Big(|\psi_j|^{1/16}w\Big) \leqslant C\sum_j|\psi_j|^{1/16}2^j \leqslant C'w.$$

Отсюда следует соотношение $|\psi_j| \leqslant C$, откуда сразу же $|\psi_j|^{1/8} \leqslant C'|\psi_j|^{1/16}$ и, как следствие,

$$|\psi_j|^{1/8}w \leqslant C2^j, \qquad\qquad \sum_j|\psi_j|^{1/8}2^j \leqslant Cw.$$

Аналогичным же образом из условий 1–3 для φ_j с показателем $1/16$ получаются их аналоги с показателем $1/8$. Это завершает доказательство. $\square$

1.2 K-замкнутость пересечения модулей

Вопросы K-замкнутости для пересечения модулей над алгебрами, удовлетворяющими условию (α^0_μ) в случае конечной меры μ, подробно рассматривались в статье [27]. В данном разделе мы напомним об этих результатах и отметим, что они остаются верными при замене условия (α^0_μ) на введенное нами ранее условие (α_μ), а также для σ-конечных сепарабельных мер μ.

Пусть, как раньше, (S,μ) — пространство с σ-конечной сепарабельной мерой, X_0 и X_1 — две w^*-замкнутые подалгебры с единицей в $L^\infty(\mu)$, а Y_0 и Y_1 — w^*-замкнутые подпространства в $L^\infty(\mu)$, являющиеся модулями, соответственно, над X_0 и X_1. Сформулируем основную теорему статьи [27].

Теорема из [27]. *Если мера μ — конечная и выполнены условия регулярности, которые мы определим несколько позже, то пара $(Y^p_0 \cap Y^p_1, Y_0 \cap Y_1)$ является K-замкнутой в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$ для $1 < p < \infty$.*

Условия регулярности таковы. Во-первых, предполагалось, что алгебры X_0 и X_1 удовлетворяют условию $(\alpha^0_{p,\mu})$. Во-вторых, на модуль Y_0 накладывалось некоторое новое условие (β_p), а затем, в-третьих, на пару модулей Y_0, Y_1 накладывалось некоторое условие взаимосвязи (γ_p).

Определим модули E_i так же, как мы определяли модуль E в разделе 1.1.5: положим $E_i \stackrel{\text{def}}{=} (Y^1_i)^\perp$. Пусть q — сопряженный с p показатель, то есть такой, что ${}^1\!/_p + {}^1\!/_q = 1$. Условие (β_p) требует существования сюръективного ограниченного проектора $P : L^q(\mu) \to E^q_0$, обладающего слабым типом $(1,1)$:

$$\mu\{x \in S : |Pf(x)| > \lambda\} \leqslant C\|f\|_{L^1(\mu)}/\lambda, \qquad f \in L^1(\mu) \cap L^q(\mu), \qquad \lambda > 0.$$

Условие связи (γ_p) требует включения $P(E^q_1) \subseteq E^q_1$.

Отметим на всякий случай то очевидное обстоятельство, что из этой теоремы вытекает упомянутое во введении утверждение о пространствах Харди на двумерном торе: в качестве $X_0 = Y_0$ нужно взять пространство существенно ограниченных функций на $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, лежащих в $H^\infty(\mathbb{T})$ по первой переменной, а в качестве $X_1 = Y_1$ — по второй.

Чуть позже мы увидим, что даже в случае тора сформулированная теорема дает еще и подобные же весовые результаты, а пока прокомментируем то, как, ввиду изложенной выше теории, ее можно обобщить. Мы утверждаем, что условие конечности меры можно отбросить (оставив условие σ-конечности и сепарабельности меры), а условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ можно заменить на условие (α_μ).

Несложно проследить, что в нашем более общем случае рассуждения из [27], в основном, остаются применимыми. Поэтому мы лишь сформулируем теорему и остановимся на деталях, требующих каких-то изменений.

Теорема 11. *Если алгебры X_0 и X_1 удовлетворяют условию (α_μ), модуль Y_0 удовлетворяет условию (β_p), а пара модулей Y_0, Y_1 удовлетворяет условию взаимосвязи (γ_p), то пара $(Y_0^p \cap Y_1^p, Y_0 \cap Y_1)$ является K-замкнутой в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$.*

Набросок доказательства. Пользуясь техникой срезающих функций, уже не раз возникавшей в наших рассуждениях, несложно доказать соотношение $(Y_i^p)_\perp = E_i^q$. Аналогично можно показать, что $E_i^1 \cap E_i^q$ плотно в E_i^1 и E_i^q. (Ср. с леммой 11.) Поэтому, переходя по двойственности к аннуляторам как в доказательстве теоремы 9, видим, что достаточно проверить K-замкнутость

$$\text{пары} \qquad \big(\mathrm{clos}(E_0^1 + E_1^1), \mathrm{clos}(E_0^q + E_1^q)\big) \qquad \text{в паре} \qquad (L^1(\mu), L^q(\mu)).$$

Суммы $E_0^1 + E_1^1$ и $E_0^q + E_1^q$, разумеется, не обязательно замкнуты в $L^1(\mu)$ и $L^q(\mu)$, соответственно. Однако K-замкнутость достаточно проверять на плотном множестве (с контролем за постоянными в оценках), поэтому мы можем в предположении, что $f \in (E_0^1 \cap E_0^q) + (E_1^1 \cap E_1^q)$, а также

$$f = g + h, \qquad g \in L^1(\mu), \qquad h \in L^q(\mu), \tag{1.4}$$

найти функции $g_1 \in E_0^1 + E_1^1$ и $h_1 \in E_0^q + E_1^q$ такие, что

$$f = g_1 + h_1, \qquad \|g_1\|_{E_0^1+E_1^1} \leqslant C\|g\|_{L^1(\mu)}, \qquad \|h_1\|_{E_0^q+E_1^q} \leqslant C\|h\|_{L^q(\mu)}, \tag{1.5}$$

где C не зависит от g и h.

Все дальнейшие рассуждения в работе [27] основываются на применении двух лемм из той работы, леммы 3.1 и и вытекающей из нее леммы 3.2. Из нашей леммы 4 легко вывести обобщенный вариант первой из них. Заметим, что это — единственное место, где мы используем параметр γ в лемме 4; он нужен нам сейчас, поскольку аналогичный параметр присутствует в лемме 3.1 в [27]. Чтобы избежать двусмысленности в обозначениях, переименуем "φ", фигурирующую в этой лемме, в ψ. Итак, пусть $\psi \geqslant 1$, $\psi - 1 \in L^p(\mu)$.[3] Пусть еще для алгебры

[3] В случае конечной меры μ условие $\psi - 1 \in L^p(\mu)$ эквивалентно условию $\psi \in L^p(\mu)$, использующемуся в лемме из [27], однако для бесконечных мер последнее условие бессмысленно.

$X \subseteq L^\infty(\mu)$ с единицей выполнено условие (α_μ), а значит и условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ для какого-то $k \in \mathbb{N}$. Подставляя в лемму 4 функцию $0 \leqslant \varphi = (\psi^{1/k} - 1)^k \leqslant \psi - 1 \in L^p(\mu)$ и требуемое γ, видим, что существует такой элемент $\Phi \in X$, что

$$\|1 - \Phi\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|1 - \psi\|_{L^p(\mu)}, \qquad |\Phi| \leqslant C/\psi^\gamma.$$

Итак, без требования конечности меры μ и с более слабым условием (α_μ) вместо $(\alpha^0_{p,\mu})$ нам удалось установить аналог леммы 3.1 из [27] с одной лишь оговоркой, что в поточечной оценке появилась ни на что существенным образом не влияющая константа, вообще говоря, отличная от единицы.

Условие $(\alpha^0_{p,\mu})$ в дальнейших рассуждениях работы [27] всегда используется опосредованно, через лемму 3.2, поэтому единственное отличие теперь состоит в том, что меру мы не предполагаем конечной. Оказывается, однако, что дальнейшие выкладки работы [27] верны и без этого предположения. Избегая повторения, мы считаем обобщенную теорему доказанной. □

1.3 Модельные примеры

Один из способов, которым может быть реализовано требование (γ_p) про проекторы, — это когда все происходит на пространстве-произведении, а принадлежность пространствам X_0, Y_0 (соответственно X_1, Y_1) определяется условиями, наложенными по разным переменным. Заметим, однако, что в [27] разработан и случай иной природы; здесь мы его не рассматриваем.

Пусть, например, $S = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, m_2 — нормированная мера Хаара на двумерном торе $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, и пусть $\mu = w\,\mathrm{d}m_2$, где w — некоторый вес на $S = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$.

Обозначим через X_0 и X_1 подпространства в $L^\infty(m_2)$, состоящие из функций, которые принадлежат пространству $H^\infty(\mathbb{T})$, соответственно, по первой и второй переменной. В силу предложения 1 регулярность веса w относительно каждой из алгебр X_0 и X_1 обеспечивается условием

$$\operatorname{ess\,sup}_{\xi_2}\|\log w(\cdot, \xi_2)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty, \qquad \operatorname{ess\,sup}_{\xi_1}\|\log w(\xi_1, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty, \tag{1.6}$$

где ess sup — существенный супремум. Будем считать его выполненным.

Для простоты возьмем $Y_0 = X_0$ и $Y_1 = X_1$. Сейчас наша “основная” мера есть $w\,\mathrm{d}m_2$, а значит мы пользуемся двойственностью $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{T}^2} fgw\,\mathrm{d}m_2$.

Тогда аннулятор пространства X_0 в $L^1(w\,\mathrm{d}m_2)$ (соответственно, в $L^q(w\,\mathrm{d}m_2)$) будет состоять из функций $f \in L^1(w\,\mathrm{d}m_2)$ (соответственно, $f \in L^q(w\,\mathrm{d}m_2)$), имеющих вид $f(\xi_1,\xi_2) = \xi_1 h(\xi_1,\xi_2)/w(\xi_1,\xi_2)$, где h — граничное значение функции, аналитической в бидиске по первой переменной (на самом деле, лежащей в классе В. И. Смирнова). Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место и для X_1.

Пусть $\mathcal{P}_0$ — аналог проектора Рисса, отображающий пространство $L^2(\mathbb{T})$ на состоящее из функций с нулевым средним подпространство $H_0^2(\mathbb{T})$ пространства Харди $H^2(\mathbb{T})$. Пусть $\mathcal{Q}$ — соответствующий проектор на торе $\mathbb{T}^2$, действующий по первой переменной, то есть $(\mathcal{Q}f)(\xi_1,\xi_2) = (\mathcal{P}_0 f(\,\cdot\,,\xi_2))(\xi_1)$. Покажем, что роль проектора P из условий (β_p) и (γ_p) может играть оператор, который отображает функцию g на $\mathbb{T}^2$ в функцию $Pg = (\mathcal{Q}gw)/w$. Проверим сначала условие (γ_p). Если $g \in L^q(w\,\mathrm{d}\mu)$ лежит в аннуляторе пространства X_1, то $g(\xi_1,\xi_2) = \xi_2 h(\xi_1,\xi_2)/w(\xi_1,\xi_2)$, где функция h “аналитична” по второй переменной. Тогда $(Pg)(\xi_1,\xi_2) = \xi_2(\mathcal{P}_0 g(\cdot,\xi_2))(\xi_1)/w(\xi_1,\xi_2)$ также лежит в аннуляторе пространства X_1, так как действие оператора $\mathcal{P}_0$ по первой переменной не разрушает “аналитичности” по второй.

Сюръективность оператора P очевидна. Таким образом, чтобы сослаться на теорему 11, достаточно обеспечить два условия:

(а) оператор P ограничен из $L^q(w\,\mathrm{d}m_2)$ в себя,

(б) оператор P имеет слабый тип $(1,1)$ на пространстве $L^1(w\,\mathrm{d}m_2)$.

Обозначим через m нормированную меру Хаара на окружности $\mathbb{T}$. Оператор $\mathcal{P}_0$ ограничен в $L^q(u\,\mathrm{d}m)$ тогда и только тогда, когда u принадлежит классу Макенхаупта A_q. Про классы Макенхаупта см. [38]; вместо “принадлежит классу Макенхаупта” еще пишут $u \in A_q$ и говорят “удовлетворяет условию Макенхаупта”. Поэтому условие (а) эквивалентно принадлежности веса w^{1-q} классу Макенхаупта A_q по первой переменной, причем с константой, не зависящей от второй переменной. Из общей теории весов Макенхаупта следует, что это то же самое, что и выполнение условия A_p по первой переменной для веса w с константой, не зависящей от второй переменной. Заметим, что это условие влечет также и первое из неравенств (1.6).

Что касается условия (б), мы сейчас объясним, что оно также гарантируется требованием $w \in A_p$ по первой переменной с не зависящей от второй переменной константой. Сформулируем более общий результат.

Лемма 13. *Пусть a и b — два веса на окружности $\mathbb{T}$, и $u = ab^{-1}$. Для того, чтобы оператор $R : f \to u^{-1}\mathcal{P}_0(uf)$ имел слабый тип $(1,1)$ на пространстве $L^1(a\,\mathrm{d}m)$, достаточно включений $b \in A_1$ и $a \in A_r$ при каком-нибудь $r \geqslant 1$.*

Доказательство. По поводу доказательства см. [1, теорема 4].

□

Условие (б) выше получается из леммы при $a = w$, $b \equiv 1$.

Следствие 4. *Если w — вес на двумерном торе, лежащий в A_p при некотором $p \in (1,\infty)$ по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной, причем $\sup_{\xi_1} \|\log w(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$, то пара*

$$(X_0^{p,w\,\mathrm{d}m_2} \cap X_1^{p,w\,\mathrm{d}m_2}, X_0 \cap X_1) \quad K\text{-замкнута в} \quad (L^p(w\,\mathrm{d}m_2), L^\infty(w\,\mathrm{d}m_2)).$$

Отметим, что здесь $L^\infty(w\,\mathrm{d}m_2) = L^\infty(m_2)$.

Замечание. Асимметрия условий вызвана отсутствием более совершенных методов. Разумеется, роли переменных ξ_1 и ξ_2 можно поменять.

Можно еще несколько усилить приведенное следствие. Пусть w_0 — еще один вес от двух переменных; пока не будем накладывать условие (1.6) ни на w, ни на w_0. Нас будут интересовать модули $X_0(w_0)$ и $X_1(w_0)$, определенные как в разделе 1.1.4, точнее нас будет интересовать K-замкнутость пары

$$(X_0^{p,w\,\mathrm{d}m_2} \cap X_1^{p,w\,\mathrm{d}m_2}, X_0(w_0) \cap X_1(w_0)) \quad \text{в паре} \quad (L^p(w\,\mathrm{d}m_2), L^\infty_{w_0}(m_2)). \tag{1.7}$$

Как в доказательстве теоремы 8, введем подпространства

$$Z_j = \{f/w_0 : f \in X_j(w_0)\} \subseteq L^\infty(m_2),$$

являющиеся модулями над X_j. Тогда наша задача сводится к вопросу о K-замкнутости пары

$$(Z_0^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2} \cap Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}, Z_0 \cap Z_1) \quad \text{в паре} \quad (L^p(ww_0^p\,\mathrm{d}m_2), L^\infty(m_2)). \tag{1.8}$$

Ситуация аналогична предыдущей, надо только учесть, что теперь модули Z_0 и Z_1 не состоят из граничных значений аналитических функций. За “основную” меру примем $ww_0^p\,\mathrm{d}m_2$. Соответственно, двойственность будет весовой с этой мерой. Ввиду общей теории, естественно наложить условие (1.6) на вес ww_0^p.

Легко понять, что кандидатом в проекторы P из условий (β_p) и (γ_p) будет теперь оператор

$$Pg = \frac{(\mathcal{Q}gww_0^{p-1})}{ww_0^{p-1}}.$$

Его непрерывность в указанном ниже смысле доказывается в следующем абзаце; когда она установлена, несложно проверить, что P действительно является проектором пространства $L^q(ww_0^p\,\mathrm{d}m_2)$ на $\big(Z_0^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}\big)_\perp$, для которого $P\big(\big(Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}\big)_\perp\big) \subseteq \big(Z_1^{p,ww_0^p\,\mathrm{d}m_2}\big)_\perp$, а значит выполнено и условие (γ_p).

Нам нужно, чтобы этот оператор был ограничен в $L^q(ww_0^p\,\mathrm{d}m_2)$ и имел слабый тип $(1,1)$ относительно меры $ww_0^p\,\mathrm{d}m_2$. Первое из этих двух условий равносильно тому, что $A_q \ni w^{-q}w_0^{-q(p-1)}ww_0^p = w^{1-q}$ или, что то же самое, $w \in A_p$, причем, как и раньше, условие Макенхаупта должно выполняться по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменой. Для слабого типа $(1,1)$ воспользуемся леммой 13. Нам нужны веса a и b такие, что $ww_0^{p-1} = ab^{-1}$ и $ww_0^p = a$. Значит $b = w_0$. Таким образом, нужно предположить, что $w_0 \in A_1$ и $ww_0^p \in A_r$ при каком-нибудь $r \geqslant 1$, где условия Макенхаупта, конечно, должны выполняться по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменой. Итак, мы установили следующий факт.

Следствие 5. *Пусть w и w_0 — веса на $\mathbb{T}^2$, причем $w \in A_p$, $w_0 \in A_1$ и $ww_0^p \in A_r$ при каком-нибудь $r \geqslant 1$ (все включения — по первой переменной, равномерно по второй). Если еще $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1}\|\log w(\xi_1,\cdot)w_0^p(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$, то имеет место K-замкнутость (1.7).*

1.4 Алгебры на произведениях пространств

Из рассуждений предыдущего раздела видно, что весовые следствия теоремы 11 в случае тора происходят из теории сингулярных интегральных операторов на окружности. В абстрактной же ситуации не очень понятно, откуда эти весовые результаты брать — не просматриваются аналоги условий Макенхаупта A_p.

Тем не менее, следующий результат мы сформулируем в абстрактном виде. Нам придется постулировать какую-то весовую теорему о K-замкнутости в случае двух переменных, а после этого мы расширим класс допустимых весов, окаймляя их регулярными весами от одной переменной.

Итак, пусть (E, ρ) и (F, λ) — два пространства с σ-конечными сепарабельными мерами. Пусть $X_0 \subseteq L^\infty(\rho)$ и $X_1 \subseteq L^\infty(\lambda)$ — w^*-замкнутые подалгебры, для которых выполнены условия, соответственно, (α_ρ) и (α_λ).

Рассмотрим на произведении $S = E \times F$ меру μ, абсолютно непрерывную относительно произведения мер $\rho \otimes \lambda$. Пусть $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{X}_1$ — алгебры функций на S, зависящих лишь от одной переменной (соответственно, первой и второй) и по этой переменной лежащих в X_0 или X_0. Конечно, это w^*-замкнутые подалгебры в $L^\infty(\mu)$.

Далее, пусть $0 < p < \infty$, U — замкнутое подпространство в $L^p(\mu)$, а V — w^*-замкнутое подпространство в $L^\infty(\mu)$, причем известно, что пара (U, V) является K-замкнутой в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$. Предположим, что каждое из пространств U и V является модулем над обеими алгебрами $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{X}_1$.

Пусть a и b — регулярные веса, соответственно, на E и F. Составим вес $a \otimes b$ на S, задающийся соотношением $(a \otimes b)(x, y) = a(x)b(y)$ и определим множество $U_0 = U \cap L^p(a \otimes b \, \mathrm{d}\mu)$.

Теорема 12. *При сделанных предположениях пара* $(\mathrm{clos}_{L^p(a \otimes b \, \mathrm{d}\mu)} U_0, V)$ *является K-замкнутой в паре* $(L^p(a \otimes b \, \mathrm{d}\mu), L^\infty(\mu))$.

Замечание. В применениях, модули U и V возникают из примеров предыдущего раздела. За этим скрывается некая дополнительная структура. В частности, помимо $\widetilde{X}_0$ и $\widetilde{X}_1$ будут неявно вовлечены еще и алгебры из предыдущего раздела, состоящие из функций, для которых не исключается зависимость от второй переменной.

Доказательство теоремы 12. Пусть выполнены соотношения

$$U_0 + V \ni f = g + h, \qquad g \in L^p(a \otimes b \, \mathrm{d}\mu), \qquad h \in L^\infty(\mu).$$

Мы предполагаем, что $f \in U_0 + V$ вместо $f \in \mathrm{clos}_{L^p(a \otimes b \, \mathrm{d}\mu)} U_0 + V$, пользуясь тем, что K-замкнутость можно проверять на плотном множестве.

Обозначим для краткости нормы функций g и h в указанных пространствах символами s и t. Нам нужно представить функцию f в виде суммы двух слагаемых из $\operatorname{clos}_{L^p(a\otimes b\,\mathrm{d}\mu)} U_0$ и V примерно с такими же нормами.

Применим к весам a и b следствие 3. Получатся функции φ_n и ψ_n на E, α_n и β_n на F, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $\sum_n \varphi_n\psi_n = 1$, $\sum_n \alpha_n\beta_n = 1$ и выполнены аналоги неравенств 1-3 теоремы 10, которые для удобства мы будем называть свойствами разбиения единицы.

Напишем $f = \sum_{k,j} f\varphi_k\psi_k\alpha_j\beta_j = \sum_{k,j} f_{kj}\varphi_k\alpha_j$, где $f_{kj} = f\psi_k\beta_j$. Положим $g_{kj} = g\psi_k\beta_j$ и $h_{kj} = h\psi_k\beta_j$, тогда $f_{kj} = g_{kj} + h_{kj}$.

Из свойства 3 разбиения единицы сразу же следует, что $\|h_{kj}\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant Ct$. Покажем, что $g_{kj} \in L^p(\mu)$. Пользуясь условием 2 разбиения единицы, напишем

$$\begin{aligned}\int_S |g_{kj}(x,y)|^p \,\mathrm{d}\mu(x,y) &= \int_S |g(x,y)|^p|\psi_k(x)|^p|\beta_j(y)|^p \,\mathrm{d}\mu(x,y)\\ &\leqslant C2^{-k}2^{-j}\int_S |g(x,y)|^p 2^k|\psi_k(x)|^{1/8}2^j|\beta_j(y)|^{1/8}\,\mathrm{d}\mu(x,y)\\ &\leqslant C2^{-k}2^{-j}\int_S |g(x,y)|^p a(x)b(y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) = C2^{-k}2^{-j}s^p\end{aligned}$$

Стоит заметить, что эта мажоранта для нормы дальше не используется. Нас интересует лишь выключение $g_{kj} \in L^p(\mu)$.

Так как мы предположили K-замкнутость (U,V) в паре $(L^p(\mu), L^\infty(\mu))$, можем найти функции $u_{kj} \in U$, $v_{kj} \in V$ такие, что $f_{kj} = u_{kj} + v_{kj}$ и выполнено $\|u_{kj}\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|g_{kj}\|_{L^p(\mu)}$, $\|v_{kj}\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant Ct$. Возвращаясь к исходному разбиению функции f, можем теперь написать $f = u + v$, где

$$u = \sum_{k,j} u_{kj}\varphi_k\alpha_j, \qquad\qquad v = \sum_{k,j} v_{kj}\varphi_k\alpha_j.$$

Покажем, что это и есть искомое разложение. Ясно, что

$$|v| \leqslant \sum_{k,j}|\varphi_j||\alpha_k||v_{kj}| \leqslant C\sum_{k,j}|\varphi_j|^{1/8}|\alpha_k|^{1/8}|v_{kj}| \leqslant Ct.$$

Заодно из этой оценки следует, что $v \in V$: все члены ряда лежат в V, модуль V является w^*-замкнутым, ряд сходится абсолютно, а значит и в смысле w^*-топологии. Аналогичным образом следующая выкладка показывает, что u лежит в замыкании $\operatorname{clos}_{L^p(a\otimes b\,\mathrm{d}\mu)} U_0$, а также дает нужную оценку для нормы функции u:

$$\begin{aligned}
&\int_S |u(x,y)|^p a(x)b(y)\,\mathrm{d}\mu(x,y)\\
&\leqslant \int_S \Big(\sum_{k,j}|u_{kj}(x,y)|^p|\varphi_k|^{p/8}|\alpha_j|^{p/8}\Big)\Big(\sum_{k,j}|\varphi_k|^{7q/8}|\alpha_j|^{7q/8}\Big)^{p/q} a(x)b(y)\,\mathrm{d}\mu(x,y)\\
&\leqslant C\sum_{k,j}\int_S |u_{kj}(x,y)|^p|\varphi_k(x)|^{1/8}|\alpha_j(y)|^{1/8}a(x)b(y)\,\mathrm{d}\mu(x,y)\\
&\leqslant C\sum_{k,j}\|u_{k,j}\|^p_{L^p(\mu)}2^{k+j}\leqslant C\sum_{k,j}\|g_{k,j}\|^p_{L^p(\mu)}2^{k+j}\\
&\leqslant C\sum_{k,j}\int_S |g(x,y)|^p|\psi_k(x)|^{1/8}|\beta_j(y)|^{1/8}2^{k+j}\,\mathrm{d}\mu(x,y)\\
&\leqslant C\int_S |g(x,y)|^p a(x)b(y)\,\mathrm{d}\mu(x,y) = Cs^p.
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. □

Отсюда сразу же следует заявленная во введении теорема.

Теорема 1. *Пусть a, b — такие веса на $\mathbb{T}$, что $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}$. Пусть еще u — вес на $\mathbb{T}^2$, удовлетворяющий условию Макенхаупта A_p при некотором $p \in (1,\infty)$ по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной, причем $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1}\|\log u(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. Рассмотрим окаймленный вес $w(\xi_1,\xi_2) = a(\xi_1)u(\xi_1,\xi_2)b(\xi_2)$. Тогда пара*

$$(H^p_w(\mathbb{T}^2), H^\infty) \qquad K\text{-замкнута в паре} \qquad (L^p_w(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2)).$$

Замечание. По поводу тонкостей, связанных с определением весовых пространств Харди $H^p_w(\mathbb{T}^2)$ на двумерном торе см. работу [47].

Как в предыдущем разделе, рассмотрим еще один случай. Пусть u_0 — вес на $\mathbb{T}^2$. Также рассмотрим веса a_0, b_0 на $\mathbb{T}$ и соответствующий им окаймленный вес w_0, заданный соотношением $w_0(\xi_1,\xi_2) = a_0(\xi_1)u_0(\xi_1,\xi_2)b_0(\xi_2)$. Разберем вопрос K-замкнутости соответствующей пары (1.7).

Как было показано в предыдущем разделе, этот вопрос сводится к вопросу о K-замкнутости пары (1.8), который уже был разрешен для случая, когда $a \equiv b \equiv a_0 \equiv b_0 \equiv 1$. Общий же случай можно теперь получить, применяя теорему 12 к пространствам $U = Z_0^{p,uu_0^p\,\mathrm{d}m_2} \cap Z_1^{p,uu_0^p\,\mathrm{d}m_2}$, $V = Z_0 \cap Z_1$ с весами aa_0^p и bb_0^p в качестве a и b, соответственно. Не останавливаясь подробно на всех возникающих деталях, сформулируем следующий результат.

Следствие 6. *Пусть* a, b, a_0, b_0 *— веса на* $\mathbb{T}$, $\log a, \log b, \log a_0, \log b_0 \in \mathrm{BMO}$, *и пусть* u, u_0 *— веса на* $\mathbb{T}^2$, *причем* $u \in A_p$, $u_0 \in A_1$ *и* $uu_0^p \in A_r$ *при каких-нибудь* $p, r \in (1, \infty)$. *Условия Макенхаупта предполагаются выполненными по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной. Пусть еще* $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log u(\xi_1, \cdot) u_0^p(\xi_1, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. *Рассмотрим веса* $w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1) u(\xi_1, \xi_2) b(\xi_2)$ *и* $w_0(\xi_1, \xi_2) = a_0(\xi_1) u_0(\xi_1, \xi_2) b_0(\xi_2)$. *Тогда*

$$\text{пара} \qquad (H^p_w(\mathbb{T}^2), H^\infty_{w_0}(\mathbb{T}^2)) \qquad K\text{-замкнута в паре} \qquad (L^p_w(\mathbb{T}^2), L^\infty_{w_0}(\mathbb{T}^2)).$$

Замечание. По поводу тонкостей, связанных с определением весовых пространств Харди мы снова отсылаем читателя к статье [47].

Отметим наконец, что получившиеся формулировки покрывают все, что было было упомянуто во введении.

Глава 2. Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для многопараметрических систем Виленкина

В этой главе мы докажем теорему 3, то есть вариант неравенства Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных многопараметрических систем Виленкина. Мы установим некоторые вспомогательные результаты, среди которых особенно примечателен многопараметрический вариант теоремы Ганди (теорема 17), дающей весьма удобный критерий ограниченности операторов, отображающих мартингалы в измеримые функции — результат, имеющий самостоятельный интерес. Кроме того, в конце мы рассмотрим некоторые следствия и варианты основной теоремы.

Напомним формулировку основного результата данной главы.

Теорема 3. *Пусть* $I_k = I_k^1 \times \ldots \times I_k^D \subseteq \mathbb{Z}_+^D$ *— счетное семейство непересекающихся прямоугольников, то есть таких множеств, что* $I_k^d = [a_k^d, b_k^d) = \{n \in \mathbb{Z}_+ \mid a_k^d \leqslant n < b_k^d\}$ *— интервалы в* $\mathbb{Z}_+$. *Пусть* $f_k : [0,1)^D \to \mathbb{R}$ *— семейство функций, чей спектр Фурье–Виленкина лежит в* I_k, *то есть*

$$f_k(x) = \sum\nolimits_{(n_1,\ldots,n_D)\in I_k} \langle f_k, v_{n_1} \cdot \ldots \cdot v_{n_D} \rangle v_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot v_{n_D}(x_D),$$

где v_{n_d} *— функции Виленкина, соответствующие каким-то ограниченным системам Виленкина, которые могут быть различными для разных* d. *Тогда*

$$\big\|\sum\nolimits_k f_k\big\|_{L^p([0,1)^D)} \leqslant C \big\|\{f_k\}\big\|_{L^p([0,1)^D,\, l^2)}, \qquad 1 < p \leqslant 2,$$

где константа C *не зависит от выбора прямоугольников* $\{I_k\}$ *и функций* $\{f_k\}$.

Все понятия, фигурирующие в этой теореме, будут строго введены несколько позже, в разделе 2.1

Идея доказательства. Обобщая геометрическую конструкцию Целищева из [11][1] на случай произведения групп Виленкина, снабженного соответствующим понятием *прямоугольников* на двойственной группе, нам удается свести

[1] Она, в свою очередь, (далеко не тривиальным образом!) обобщает геометрическую конструкцию Осипова из [31], предназначенную для диадической группы и преобразования Фурье–Уолша, на случай группы Виленкина и преобразования Фурье–Виленкина.

основную теорему данной главы к вопросу об ограниченности некоторого семейства операторов, похожих по духу на многопараметрические сингулярные интегралы, но имеющих дискретную природу. Пользуясь теорией многопараметрических мартингальных пространств Харди (атомные разложения, интерполяция), описанной Ф. Вейсом [44], мы доказываем многопараметрический аналог теоремы Ганди об ограниченности операторов, отображающих мартингалы в измеримые функции (теорема 17). Наконец, несложное следствие этой теоремы, а также отождествление элементов пространств Лебега с мартингалами позволяют нам доказать ограниченность вышеупомянутого семейства операторов.

Структура главы. Очередность дальнейшего изложения не следует наброску доказательства. Сначала, в разделе 2.1 мы определяем необходимые понятия, а также кратко описываем существующую теорию многопараметрических мартингальных пространств Харди и пространств Лебега. После этого, в разделе 2.2 мы доказываем вариант теоремы Ганди и некоторое его следствие, более удобное для дальнейших рассуждений. В разделе 2.3 мы используем это следствие для того, чтобы доказать ограниченность двух ключевых для доказательства основной теоремы операторов. Затем, в разделе 2.4, мы напоминаем геометрическую конструкцию Целищева, позволяющую разбить произвольный интервал на кусочки, ведущие себя определенным образом при сдвигах. Мы пользуемся этой конструкцией, двумя леммами из раздела 2.3 и некоторыми дополнительными комбинаторными соображениями, чтобы доказать основную теорему в разделе 2.5. Наконец, в разделе 2.6 мы обсуждаем некоторые следствия и варианты основной теоремы, в том числе ослабленную версию неравенства для случая $0 < p \leqslant 1$ и версию однопараметрического неравенства Рубио де Франсиа для системы Уолша и некоторого экзотического понятия интервала. Кроме того, там же мы обсудим невозможность распространения рассматриваемого неравенства на случай произвольных разбиений множества $\mathbb{Z}_+^D$.

Обозначения. Под символом Z_+ мы будем понимать $\mathbb{N}\cup\{0\}$ (мы предполагаем, что $0 \notin \mathbb{N}$). Прямоугольниками в $\mathbb{Z}_+^D$ мы называем произведения интервалов из Z_+, которые определяются соотношением $[a, b) = \{x \in \mathbb{Z}_+ \,|\, a \leqslant x < b\}$ — исключение правого конца делается из соображений удобства и не несет никакой сутевой нагрузки. Когда мартингал $f = \{f_n\}$ порожден функцией g в смысле

$f_n = \mathbb{E}_n g$, где $\mathbb{E}_n$ — условное математическое ожидание, мы часто отождествляем f и g и используем один и тот же символ для обозначения как функции, так и мартингала. Обозначение $a \lesssim b$ означает $a \leqslant Cb$ для какой-то положительной константы C, значение которой не важно в определенном контексте. Для $n, m \in Z_+^D$ мы пишем $n \leqslant m$ $(n < m)$, когда $n_d \leqslant m_d$ $(n_d < m_d)$ для всех $1 \leqslant d \leqslant D$. Мы используем каллиграфическое написание, чтобы различать мартингальные пространства Лебега и пространства Харди от соответствующих пространств (классов эквивалентности) функций, то есть $\mathcal{H}^p$ и $\mathcal{L}^p$ — мартингальные пространства Харди и Лебега, а H^p и L^p — обыкновенные пространства Харди и Лебега, состоящие из (классов эквивалентности) функций или обобщенных функций. Символы $\mathcal{H}^p$, $\mathcal{L}^p$ (соотв. H^p, L^p) обозначают пространства мартингалов (соотв. функций) на $[0,1)$ или $[0,1)^D$, в зависимости от контекста. Наконец отметим, что термин *интервал* мы будем использовать применительно к интервалам (a, b), полуинтервалам $[a, b)$ или $(a, b]$ и даже к отрезкам $[a, b]$.

2.1 Предварительные сведения

Здесь мы описываем теорию, используемую для формулировки и доказательства результатов данной главы. Вначале мы обсудим многопараметрические системы Виленкина. Затем определим соответствующие мартингальные пространства Лебега и Харди и опишем теорию, позволяющую проверять ограниченность некоторого класса операторов в этих пространствах. Эта теория понадобится нам для того, чтобы доказать многопараметрическую версию теоремы Ганди, из которой впоследствии будут выведены ключевые для доказательства основного результата леммы.

2.1.1 Система Виленкина

Системы Виленкина это ортонормированные базисы в пространстве $L^2([0,1))$, обобщающие классическую систему Уолша [2; 41]. Так же как система Уолша, системы Виленкина соответствуют некоторой процедуре деления интервала [0,1). Система Уолша соответствует процедуре последовательного деления интервалов надвое, а системы Виленкина возникают из процедуры, в которой на шаге с номером n интервалы делятся на $p_n \geqslant 2$ равных подынтервалов. Каждой последовательности $\boldsymbol{p} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p_n \geqslant 2$, таким образом, соответствует система Виленкина, а система Виленкина, соответствующая последовательности $p_n \equiv 2$, есть система Уолша. В дальнейшем мы будем предполагать, что зафиксирована какая-то конкретная последовательность $\boldsymbol{p}$, и будем обозначать $P_n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, $P_0 = 1$.

Системы счисления с переменным основанием Последовательность $\boldsymbol{p}$, определяющая процедуру деления интервала, также определяет и некоторую *систему счисления с переменным основанием.* Это означает, что любые числа $x \in [0,1)$ и $n \in Z_+$ представляются в следующем виде:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/P_k, \qquad 0 \leqslant x_k < p_k, \qquad x_k \text{ — целые}, \tag{2.1}$$

$$n = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \cdot P_{k-1}, \qquad 0 \leqslant n_k < p_k, \qquad n_k \text{ — целые}. \tag{2.2}$$

Мы будем называть x_k (соответственно, n_k) *цифрами* числа x (соответственно, n) в системе счисления с переменным основанием $\boldsymbol{p}$. Отметим, что представление (2.1) не единственно.[2] Однако если в случаях, когда представление не единственно, рассматривать лишь то, в котором $x_k \to 0$, единственности можно добиться [44]. Поэтому, не умаляя общности, далее мы будем предполагать единственность таких разложений.

Функции Виленкина Теперь мы готовы определить обобщенные функции Радемахера — “кирпичики”, из которых строятся функции Виленкина.

Определение. *Обобщенная функция Радемахера* $r_n : [0,1) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, задается соотношением

$$r_n(x) = \exp(2\pi i x_n/p_n), \tag{2.3}$$

где x_n — цифры числа x в системе счисления с переменным основанием $\boldsymbol{p}$.

Теперь мы наконец готовы определить функции Виленкина.

[2]Ситуация здесь абсолютно аналогична представлению вещественного числа в виде бесконечной десятичной дроби. Более того, десятичное представление — частный случай формулы (2.1) с $p_n \equiv 10$.

Определение. *Функция Виленкина* $v_n : [0,1) \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, задается соотношением

$$v_n(x) = \prod_{k=1}^{\infty} r_k(x)^{n_k}, \tag{2.4}$$

где n_k — цифры числа n в системе счисления с переменным основанием $\boldsymbol{p}$.

Система Виленкина $\{v_n\}_{n \in Z_+}$ это ортонормированный базис в пространстве $L^2([0,1))$ [2]. Если $p_n \equiv 2$, то функции v_n называются *функциями Уолша*, а семейство $\{v_n\}_{n \in Z_+}$ — *системой Уолша*.

Групповая структура Системы Виленкина возникают также как характеры определенных топологических групп, называемых *группами Виленкина*.

Определение. Множество $G_{\boldsymbol{p}}$ таких последовательностей $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что $x_k \in \mathbb{Z}_+$ и $0 \leqslant x_k < p_k$, вместе с операцией $\bullet_{\boldsymbol{p}} : G_{\boldsymbol{p}} \times G_{\boldsymbol{p}} \to G_{\boldsymbol{p}}$ побитового сложения по модулю $\boldsymbol{p}$, которая формально определяется соотношением

$$\{x \bullet_{\boldsymbol{p}} y\}_k = x_k + y_k \bmod p_k,$$

называется *группой Виленкина*.

Замечание. Определение выше, конечно же, эквивалентно определению группы Виленкина как бесконечного прямого произведения циклических групп:

$$G_{\boldsymbol{p}} = \prod_{k=1}^{\infty} (\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z}).$$

Если снабдить циклические группы дискретной топологией, то группа Виленкина станет топологической группой с топологией прямого произведения.

С помощью представления (2.1) элементы группы $G_{\boldsymbol{p}}$ могут быть отождествлены с числами из интервала $[0,1)$. Более того, отождествление можно произвести с помощью отображения, которое переводит меру Хаара группы $G_{\boldsymbol{p}}$ в меру Лебега на интервале $[0,1)$, см. по этому поводу, например, [2].

Характеры группы G_p, если мыслить их как функции на интервале $[0,1)$, являются не чем иным, как функциями Виленкина. Более того, так как характеры группы являются группой, на функциях Виленкина можно ввести естественную групповую структуру. Если функции Виленкина v_n идентифицировать со своими номерами $n \in Z_+$, то групповая операция $\dot{+} : Z_+ \times Z_+ \to Z_+$ будет задаваться соотношением

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_k\Big) \dot{+} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k P_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k \bmod p_k) P_k.$$

Это означает, что для $n, m \in Z_+$ имеет место соотношение $v_n(x) v_m(x) = v_{n \dot{+} m}(x)$. Как группа, функции Виленкина изоморфны прямой сумме (не произведению!) циклических групп $\bigoplus_{k=1}^{\infty} (\mathbb{Z}/p_k\mathbb{Z})$. Подробности и доказательства, касающиеся сведений в данном подразделе, можно найти в [2; 44].

2.1.2 Многопараметрические системы Виленкина

Мы будем называть *D-параметрическими системами Виленкина* произведения D (разных) систем Виленкина. Дадим формальное определение.

Определение. Рассмотрим D систем Виленкина $\{v_n^{(d)}\}_{n \in Z_+}$, $d = 1, \ldots, D$ соответствующих (возможно разным) последовательностям $\boldsymbol{p}_d$. Тогда D-параметрическое семейство функций $\{v_n\}_{n \in Z_+^D}$, где $v_n : [0,1)^D \to \mathbb{C}$ определены соотношением

$$v_n(x) = v_{n_1}^{(1)}(x_1) \cdot \ldots \cdot v_{n_D}^{(D)}(x_D),$$

называется *D-параметрической системой Виленкина.*

D-параметрическая система Виленкина является группой. Если мы отождествим v_n с их индексами из $\mathbb{Z}_+^D$, то групповая операция для пары индексов $n, m \in \mathbb{Z}_+^D$ будет определяться соотношением

$$n \dot{+} m = (n_1 \dot{+} m_1, n_2 \dot{+} m_2, \ldots, n_D \dot{+} m_D).$$

С таким определением мы имеем $v_n(x) v_m(x) = v_{n \dot{+} m}(x)$ аналогично однопараметрическому случаю.

Ряд Фурье–Виленкина Многопараметрическая система Виленкина всегда является ортонормированным базисом в $L^2([0,1)^D)$. Благодаря этому, любая функция $g \in L^2([0,1)^D)$ может быть представлена *рядом Фурье–Виленкина*.

$$g(x) = \sum\nolimits_{l \in \mathbb{Z}_+^D} c_l \cdot v_l(x) \qquad \text{с коэффициентами } c_l = \langle g, v_l \rangle_{L^2([0,1)^D)}.$$

Числа c_l справедливо называть *коэффициентами Фурье–Виленкина*, а множество $\operatorname{spec} g \stackrel{def}{=} \{l \in \mathbb{Z}_+^D \mid c_l \neq 0\}$ — *спектром Фурье–Виленкина*.

Изоморфный тип D-параметрическая система Виленкина всегда, как группа, изоморфна однопараметрической системе Виленкина, например системе с

$$\boldsymbol{p} = (p_1^{(1)}, \ldots, p_1^{(D)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_2^{(D)}, \ldots).$$

Это не означает, тем не менее, что каждый результат для D-параметрических систем Виленкина тривиально следует из аналогичного результата для однопараметрическим систем. Неравенство Рубио де Франсиа является примером этого: оно не описывается полностью лишь структурой группы, понятие интервала/прямоугольника (или частичного порядка) является не менее важным. Данное соображение, напротив, позволяет получать из D-параметрических результатов любопытные однопараметрические результаты. Мы обсудим эту связь подробнее в разделе 2.6.

2.1.3 Многопараметрические мартингалы Виленкина

Набор последовательностей $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_D$ определяет *обобщенную фильтрацию*, глубоко связанную с D-параметрической системой Виленкина.

Определение. Мы будем называть *D-параметрической фильтрацией Виленкина*, соответствующей набору последовательностей $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_D$, такое семейство σ-алгебр $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+^D}$, что

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left\{\left[\frac{l_1}{P_{n_1}^{(1)}}, \frac{l_1+1}{P_{n_1}^{(1)}}\right) \times \ldots \times \left[\frac{l_D}{P_{n_D}^{(D)}}, \frac{l_D+1}{P_{n_D}^{(D)}}\right) : 0 \leqslant l_d < P_{n_d}^{(d)}\right\}\right),$$

где $\sigma(\mathcal{H})$ обозначает σ-алгебру, порожденную элементами множества $\mathcal{H}$.

Мы будем называть $\left[l_d/P_{n_d}^{(d)}, (l_d+1)/P_{n_d}^{(d)}\right) \subseteq [0,1)$ *интервалами Виленкина*, а их произведения, являющиеся подмножествами в $[0,1)^D$, *прямоугольниками Виленкина* по аналогии с диадическими интервалами и прямоугольниками.

Обозначим символом $\mathbb{E}_n$ оператор условного математического ожидания относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ и условимся писать $n \leqslant m$ для $n, m \in \mathbb{Z}_+^D$, когда $n_d \leqslant m_d$ для всех $d = 1, \ldots, D$.

Определение. Семейство $f = \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+^D}$ интегрируемых функций на $[0,1)^D$ является *D-параметрическим мартингалом Виленкина*, если

1) f_n измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+^D$,
2) $E_n f_m = f_n$ для любых n, m, для которых $n \leqslant m$.

Отметим сразу, что любая интегрируемая функция $g : [0,1)^D \to \mathbb{C}$ определяет мартингал $f = \{\mathbb{E}_n\, g\}_{n \in \mathbb{Z}_+^D}$.

Мартингальные разности Чтобы определить мартингальные разности относительно обобщенной фильтрации, нам будет удобно заметить, что оператор $\mathbb{E}_n$ может быть представлен как композиция $\mathbb{E}_n = \mathbb{E}^1_{n_1}\, \mathbb{E}^2_{n_2} \ldots \mathbb{E}^D_{n_D}$ своих однопараметрических аналогов $\mathbb{E}^d_{n_d}$. Здесь $\mathbb{E}^d_{n_d}$ может быть формально определен как проекция на σ-алгебру $\mathcal{F}^d_{n_d} = \cup_{k \in \mathbb{Z}_+^D, k_d = n_d} \mathcal{F}_k$. Оператор мартингальной разности Δ_n, примененный к интегрируемой функции g, определяется соотношением

$$\Delta_n g = \Delta^1_{n_1} \Delta^2_{n_2} \ldots \Delta^D_{n_D} g, \quad \text{где} \quad \Delta^d_{n_d} = \mathbb{E}^d_{n_d} - \mathbb{E}^d_{n_d - 1}$$

и где для $n_d - 1 = -1$ мы полагаем $\mathbb{E}^d_{n_d - 1} = 0$. Если раскрыть это выражение, можно также получить представление

$$\Delta_n g = \sum\nolimits_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_D \in \{0,1\}} (-1)^{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_D} \mathbb{E}_{n_1 - \varepsilon_1, \ldots, n_D - \varepsilon_D} g, \tag{2.5}$$

где, аналогично, слагаемые с индексом $n_d - 1 = -1$ полагаются равными нулю. В частности, для $d = 2$ мы получаем

$$\begin{aligned} \Delta_n g :&= (\mathbb{E}^1_{n_1} - \mathbb{E}^1_{n_1 - 1})(\mathbb{E}^2_{n_2} - \mathbb{E}^2_{n_2 - 1}) g \\ &= \mathbb{E}_{n_1, n_2} g - \mathbb{E}_{n_1 - 1, n_2} g - \mathbb{E}_{n_1, n_2 - 1} g + \mathbb{E}_{n_1 - 1, n_2 - 1} g. \end{aligned}$$

Действие операторов $\mathbb{E}_n$ и Δ_n можно распространить на мартингалы, полагая $\mathbb{E}_n\, g = g_n$ и воспринимая формулу (2.5) как определение функции $\Delta_n g$. Мы имеем $\mathbb{E}_n\, g = \sum_{m \leqslant n} \Delta_m g$ как для функций, так и для мартингалов.

Связь с системой Виленкина D-параметрические мартингалы Виленкина и D-параметрическая система Виленкина связаны следующими двумя соотношениями [44]:

$$\big(\mathbb{E}_n f\big)(x) = \sum_{l_1=0}^{P_{n_1}^{(1)}-1} \dots \sum_{l_D=0}^{P_{n_D}^{(D)}-1} \langle f_m, v_l(\cdot)\rangle\, v_l(x), \qquad m \geqslant n, \tag{2.6}$$

$$(\Delta_n f)(x) = \sum_{l\in\delta_n} \langle f_m, v_l(\cdot)\rangle\, v_l(x), \qquad m \geqslant n, \tag{2.7}$$

где f — D-параметрический мартингал Виленкина, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L^2([0,1)^D)$ и $\delta_n = [P_{n_1-1}^{(1)}, P_{n_1}^{(1)}) \times \ldots \times [P_{n_D-1}^{(D)}, P_{n_D}^{(D)}) \subseteq \mathbb{Z}_+^D$, где $P_{-1}^{(d)} = 0$.

2.1.4 Пространства Лебега и Харди мартингалов Виленкина

Здесь мы определяем пространства Лебега и пространства Харди D-параметрических мартингалов Виленкина и обсуждаем их свойства.

Ограниченные системы Виленкина В рамках этого и последующих разделов мы рассматриваем лишь *ограниченные системы Виленкина*, то есть те, которые соответствуют последовательностям $\boldsymbol{p} = \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, для которых $p_n \leqslant C_{\boldsymbol{p}}$, где $C_{\boldsymbol{p}} > 0$ — какая-то абсолютная константа. Ограниченные системы Виленкина соответствуют *регулярным* (обобщенным) фильтрациям, то есть таким фильтрациям, для которых существует такая абсолютная константа $C > 0$, что, в однопараметрическом случае, для любого мартингала f выполняется соотношение $f_n \leqslant C f_{n-1}$ или, в многопараметрическом случае, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} f_{n_1,n_2,\dots,n_D} &\leqslant C f_{n_1-1,n_2,\dots,n_D},\\ f_{n_1,n_2,\dots,n_D} &\leqslant C f_{n_1,n_2-1,\dots,n_D},\\ &\dots\\ f_{n_1,n_2,\dots,n_D} &\leqslant C f_{n_1,n_2,\dots,n_D-1}. \end{aligned}$$

Регулярность фильтрации является важным техническим условием в атомной теории мартингальных пространств Харди, которую мы кратко обозреваем в разделе 2.1.5.

Пространства Лебега Будем говорить, что мартингал f лежит в пространстве Лебега $\mathcal{L}^p$, $0 < p \leqslant \infty$, и писать $f \in \mathcal{L}^p$, если $f_n \in L^p$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+^D$ и

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{Z}_+^D} \|f_n\|_{L^p} < \infty.$$

Как уже упоминалось выше, каждая интегрируемая функции порождает мартингал. Для мартингалов $f \in \mathcal{L}^p$, $1 < p < \infty$, верно также и обратное: существует такая функция $g \in L^p$, что $f_n = \mathbb{E}_n g$ и

$$\lim_{\min(n_1,\ldots,n_D)\to\infty} \|f_n - g\|_{L^p} = 0, \qquad \|f\|_{\mathcal{L}^p} = \|g\|_{L^p}.$$

Следуя распространенной практике, мы во многих случаях будем идентифицировать мартингал f с порождающей его функцией g и использовать тот же символ f, когда речь идет о функции g, интерпретируя этот символ как функцию или как мартингал в зависимости от контекста.

Пространства Харди Существует множество разных определений мартингальных пространств Харди. Вообще говоря, они порождают разные объекты, но когда рассматриваемая фильтрация регулярна, множество определений оказываются эквивалентными [43; 44]. Мы будем использовать определение, которое наиболее удобно для дальнейшего изложения. Сначала определим *мартингальную квадратичную функцию Литлвуда–Пэли* S, положив

$$S(f) = \Big(\sum\nolimits_{n \in \mathbb{Z}_+^D} |\Delta_n f|^2\Big)^{1/2}.$$

Она определяет *мартингальные пространства Харди* $\mathcal{H}^p$, $0 < p \leqslant \infty$ как пространства мартингалов f, для которых $\|f\|_{\mathcal{H}^p} \stackrel{\text{def}}{=} \|Sf\|_{L^p} < \infty$.

Для $1 < p < \infty$ выполняется соотношение $\|S(u)\|_{L^p} \sim \|u\|_{\mathcal{L}^p}$ (см. [44]). Поэтому, для $1 < p < \infty$ пространство Лебега $\mathcal{L}^p$ совпадает с пространством Харди $\mathcal{H}^p$. Для $p \leqslant 1$ это не так. Пространства Харди служат, в контексте интерполяции пространств, естественным продолжением шкалы лебеговых пространств для показателей $p \leqslant 1$. В частности, возможно доказать [44], что если оператор T действует ограниченно между $\mathcal{H}^{p_0}$ и L^{p_0}, а также между $\mathcal{L}^{p_1}$ и L^{p_1}, для каких-то $p_0 \leqslant 1 < p_1$, то T ограничен между $\mathcal{L}^p$ и L^p для $1 < p \leqslant p_1$.

Это является эффективным инструментом для доказательства ограниченности операторов во всех $\mathcal{L}^p$ с $1 < p \leqslant 2$ одновременно, сводя такое утверждение к ограниченности между $\mathcal{L}^2$ и L^2, проверить которую обычно весьма просто, и к вопросу об ограниченности между $\mathcal{H}^{p_0}$ и L^{p_0} для какого-нибудь одного $p_0 \leqslant 1$.

Так как доказательство ограниченности определенного семейства операторов для L^p с показателем p из интервала $1 < p \leqslant 2$ будет занимать центральное место в доказательстве основного результата и так как инструменты для доказательства ограниченности между $\mathcal{L}^2$ и L^2 являются классическими и достаточно простыми, мы переходим к описанию теории, которая помогает доказывать ограниченность операторов между $\mathcal{H}^{p_0}$ и L^{p_0}.

2.1.5 Атомные разложения и ограниченность операторов

Здесь обсуждаются атомные разложения в многопараметрических пространствах Харди и формулируется ключевой для нас результат об ограниченности некоторого класса операторов, действующих из мартингальных пространств Харди в пространства Лебега.

Атомное разложение Элементы мартингальных пространств Харди могут быть представлены как (бесконечные) линейные комбинации некоторых специальных мартингалов, называемых *атомами.*

Теорема 13 (Атомное разложение)**.** *Мартингал f лежит в $\mathcal{H}^p$ $(0 < p \leqslant 1)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательность a_m сравнительно простых мартингалов, называемых p-атомами (будут определены позже), и последовательность μ_m вещественных чисел такие, что $f = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m a_m$. Более формально,*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m \mathbb{E}_n a_m \overset{\text{п.в.}}{=} \mathbb{E}_n f \quad \text{для всех } n, \qquad\qquad \sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m|^p < \infty.$$

Кроме того, $\|f\|_{\mathcal{H}^p} \sim \inf(\sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m|^p)^{1/p}$, где инфимум берется по всем представлениям мартингала f в форме выше.

Доказательство. Теоремы 1.14 и 1.16 из [44]. □

Даже не зная определения атомов, легко показать, что поведение оператора на них определяет его ограниченность в пространствах Харди.

Предложение 2. *Пусть B — банахово пространство. Линейный оператор $T : \mathcal{H}^p \to B$ ограничен тогда и только тогда, когда для любого атома a выполнено $\|Ta\|_B \leqslant C$, где C — константа, не зависящая от a.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\|Ta\|_B \leqslant C$ для любого атома a. Рассмотрим атомное разложение $f = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m a_m$. Так как $p \leqslant 1$, выполняется неравенство $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$, так что

$$\|Tf\|_B^p \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m|^p \|Ta_m\|_B^p \leqslant C^p \sum_{m=0}^{\infty} |\mu_m|^p.$$

Выбирая с самого начала разложение f со значением $(\sum_{m=0}^{\infty}|\mu_m|^p)^{1/p}$ близким к инфимуму, получаем $\|Tf\|_B \leqslant C\|f\|_{\mathcal{H}^p}$.

Предположим теперь, что T ограничен. Так как атомы лежат в $\mathcal{H}^p$, для любого атома a имеем $\|Ta\|_B \lesssim \|a\|_{\mathcal{H}^p}$. Из соотношения $\|f\|_{\mathcal{H}^p} \sim \inf(\sum_{m=0}^{\infty}|\mu_m|^p)^{1/p}$ очевидным образом следует, что норма всех атомов ограничена константой. Отсюда получается обратное утверждение. $\square$

Грубо говоря, атомы формируют некий каркас пространств Харди. Поэтому неудивительно, что с усложнением пространств Харди (при увеличение количества параметров D), атомы также усложняются. В однопараметрическом случае атомы определяются следующим образом.

Определение. Функция $a \in L^2([0,1))$ (воспринимаемая как мартингал) является однопараметрическим p-атомом если выполнено следующее:

1) $\operatorname{supp} a \subseteq I$ для какого-то интервала Виленкина $I \subseteq [0,1)$,
2) $\|a\|_{L^2} \leqslant |I|^{1/2-1/p}$,
3) $\int_{[0,1)} a(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

В случае двух и более параметров атомы устроены значительно сложнее.

Определение. Пусть $D \geqslant 2$. Функция $a \in L^2[0,1)^D$ (воспринимаемая как мартингал) является D-параметрическим p-атомом, если выполнено следующее.

1) $\operatorname{supp} a \subseteq F$ для какого-то открытого множества $F \subseteq [0,1)^D$.
2) $\|a\|_{L^2} \leqslant |F|^{1/2-1/p}$.
3) Функция a может быть представлена в виде суммы $a = \sum_{R\in\mathcal{M}(F)} a_R$ более простых функций $a_R \in L^2$, называемых *элементарными частицами*, носители которых — максимальные прямоугольники Виленкина

внутри множества F (множество таких прямоугольников обозначается символом $\mathcal{M}(F)$), и для которых выполнены условия

а) $\operatorname{supp} a_R \subseteq R \subseteq F$, где $R \in \mathcal{M}(F)$,

б) для всех $1 \leqslant d \leqslant D$ и $x_1, \ldots, x_{d-1}, x_{d+1}, \ldots, x_D \in [0,1)$ выполнено равенство

$$\int_{[0,1)} a_R(x_1, \ldots, x_d, \ldots, x_D) \, \mathrm{d}x_d = 0,$$

в) для любого разбиения $\{\mathcal{P}_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ множества $\mathcal{M}(F)$

$$\Big(\sum_l \big\| \sum_{R \in \mathcal{P}_l} a_R \big\|_{L^2}^2 \Big)^{1/2} \leqslant |F|^{1/2 - 1/p}.$$

В однопараметрическом случае доказывать ограниченность операторов посредством проверки условия $\|Ta\| \leqslant C$ для всех атомов является достаточно эффективных подходом, однако в многопараметрическом случае аналогичный подход сильно затруднен сложностью атомов. К счастью, существуют более простые достаточные условия ограниченности операторов, основанные на идеях атомных разложений. Эти условия мотивированы одним из наиболее фундаментальных результатов классической теории сингулярных интегралов, а именно следующим.

Теорема 14. *Если $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ является ограниченным линейным оператором и для любой функции a с носителем на интервале I, удовлетворяющей условию $\int_{\mathbb{R}} a(x) \, \mathrm{d}x = 0$, выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R} \setminus I^{(r)}} |Ta|(x) \, \mathrm{d}x \lesssim \|a\|,$$

то оператор T ограничен между L^p и L^p для $1 < p \leqslant 2$. Здесь $I^{(r)}$ — интервал длины $2^r|I|$ с тем же центром, что и интервал I.

Это теорема, классическое доказательство которой элементарно, является также простым следствием (немартингального) атомного разложения. Р. Фефферман [18] обнаружил, что близкий аналог данного утверждения продолжает выполняться в двупараметрическом (немартингальном) случае, а Ф. Вейс [42; 44] доказал мартингальный аналог этого утверждения.

Перед тем как сформулировать соответствующий критерий для двупараметрических мартингалов Виленкина, нам нужно определить аналог множеств $I^{(r)}$ для интервалов и прямоугольников Виленкина. Для интервала Виленкина $I \subseteq [0,1)$ мы можем определить такой минимальный интервал Виленкина $I^{(1)}$ что $I \subseteq I^{(1)}$ и $I \neq I^{(1)}$ (левые концы интервалов I и $I^{(1)}$ совпадут). Определим $I^{(r)}$ как интервал Виленкина, полученный применением этой процедуры r раз. Для прямоугольника Виленкина $R = R^1 \times \ldots \times R^D$ положим $R^{(r)} = (R^1)^{(r)} \times \ldots \times (R^D)^{(r)}$.

Теорема 15. *Если $T : \mathcal{L}^2[0,1)^2 \to L^2[0,1)^2$ — ограниченный линейный оператор и для какого-то $p_0 \leqslant 1$ существует такое число $\eta > 0$, что для любой функции a с носителем на прямоугольнике Виленкина R, удовлетворяющей соотношениям $\|a\|_{L^2} \leqslant |R|^{1/2-1/p_0}$ и $\int_0^1 a(x_d)\,\mathrm{d}x_d = 0$ для $d = 1,2$, для всех $r \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\int_{[0,1)^2\setminus R^{(r)}} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r}, \tag{2.8}$$

тогда оператор T ограничен между $\mathcal{H}^p$ и L^p для $p_0 \leqslant p \leqslant 2$, а также, для $1 < p \leqslant 2$, между $\mathcal{L}^p$ и L^p, благодаря совпадению пространств $\mathcal{H}^p$ и $\mathcal{L}^p$.

Доказательство. Формальное утверждение для ограниченных систем Виленкина дано в [45, Теорема 13], правда, без явного доказательства. Теорема 1.41 в книге [44] содержит доказательство для системы Уолша, которое, в данном случае, аналогично доказательству для ограниченных систем Виленкина. □

Доказательство таких двупраметрических результатов основано на лемме Журне о покрытиях, которая претерпевает значительные изменения, когда параметров становится больше двух. Поэтому, к сожалению, теорема 15 не обобщается прямым образом на случай $D \geqslant 3$ [44]. Вместо нее существует более сложный критерий, основанный на обобщении леммы Журне, предложенном Пайфер [32]. Перед тем, как его описать, рассмотрим переформулировку двупараметрического критерия. Если $R = I \times J$, тогда вместо неравенства (2.8) мы, можем потребовать (обозначая $(I^{(r)})^c = [0,1) \setminus I^{(r)}$ и $(J^{(r)})^c = [0,1) \setminus J^{(r)}$), чтобы

$$\int_{(I^{(r)})^c\times[0,1)} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r} \quad \text{и} \quad \int_{[0,1)\times(J^r)^c} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r}.$$

Или даже потребовать следующий набор условий

$$\begin{aligned} &\int_{(I^{(r)})^c\times J} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r}, && \int_{I\times(J^{(r)})^c} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r}, \\ &\int_{(I^{(r)})^c\times J^c} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r}, && \int_{I^c\times(J^{(r)})^c} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C2^{\eta r}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Общий многопараметрический критерий будет обобщать эту форму условия (2.8). Сформулируем наконец это утверждение.

Теорема 16. *Рассмотрим какое-то число* $D \geqslant 2$. *Пусть* T *— ограниченный между* $\mathcal{L}^2([0,1)^D)$ *и* $L^2([0,1)^D)$ *линейный оператор и существуют такие* $\eta_1, \ldots, \eta_d > 0$, *что для любого* p_0-предатома a *(будет определен позже) выполняется следующее. Если* a *(с точностью до переименования аргументов) имеет носитель во множестве* $I_1 \times \ldots \times I_j \times A$, *где* $I_i \subseteq [0,1)$ *— интервалы Виленкина, а* $A \subseteq [0,1)^{D-j}$ *— произвольное измеримое множество, то для всех* $r_1, \ldots, r_D \in \mathbb{N}$

$$\int_{\left(I_1^{(r_1)}\right)^c \times \ldots \times \left(I_j^{(r_j)}\right)^c \times A} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C 2^{-\eta_1 r_1} \cdot \ldots \cdot 2^{-\eta_j r_j}. \tag{2.10}$$

Если $j = D-1$ *и* $A = I_D$ *является интервалом Виленкина, то также*

$$\int_{\left(I_1^{(r_1)}\right)^c \times \ldots \times \left(I_{D-1}^{(r_{D-1})}\right)^c \times \left(I_D^{(r_D)}\right)^c} |Ta|^{p_0}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C 2^{-\eta_1 r_1} \cdot \ldots \cdot 2^{-\eta_{D-1} r_{D-1}}. \tag{2.11}$$

Тогда оператор T *ограничен между* $\mathcal{H}^p$ *и* L^p *для* $p_0 \leqslant p \leqslant 2$, *а также, для* $1 < p \leqslant 2$, *между* $\mathcal{L}^p$ *и* L^p, *благодаря совпадению пространств* $\mathcal{H}^p$ *и* $\mathcal{L}^p$.

Доказательство. Теорема 1.45 из [44] содержит доказательство для системы Уолша и $D = 3$, доказательство для ограниченных систем Виленкина с $D \geqslant 3$ аналогично. Формальное утверждение для ограниченных систем Виленкина и $D \geqslant 3$ можно найти в [45, Теорема 14], правда без явного доказательства.

Естественно, если $D = 2$, неравенства (2.10) и (2.11), расписанные для каждой перестановки аргументов, дают неравенства (2.9). Поэтому случай $D = 2$ следует из теоремы 15 и мы можем говорить, что данное утверждение обобщает двупараметрическое. □

Определим теперь предатомы, упоминающиеся в теореме.

Определение. Функция $a \in L^2[0,1)^D$, $D \geqslant 2$ (воспринимаемая как мартингал) называется *p-предатомом* если существуют такой набор интервалов Виленкина $I_i \subseteq [0,1)$, $i = 1, \ldots, j$ для какого-то $1 \leqslant j \leqslant D-1$, что выполнены условия

- $\operatorname{supp} a \subseteq I_1 \times \ldots \times I_j \times A$ для измеримого множества $A \subseteq [0,1)^{D-j}$,
- $\|a\|_{L^2} \leqslant (|I_1| \cdot \ldots \cdot |I_j||A|)^{1/2-1/p}$,
- $\int_{I_i} a(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_D)\,\mathrm{d}x_i = \int_A a(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_D)\,\mathrm{d}x_{j+1} \ldots \mathrm{d}x_D = 0$ для всех $i = 1, \ldots, j$.

Функция, для которой условия выше выполняются после перенумерации переменных, также называется p-предатомом.

Операторы, удовлетворяющие условиям теоремы 16, называются H^{p_0}*-квазилокальными операторами.*

2.1.6 l^2-значный случай

Когда функции и мартингалы становятся l^2-значными, мы просто меняем $|\cdot|$ на $\|\cdot\|_{l^2}$ во всех определениях и утверждениях. Как это обычно бывает, доказательства утверждений не меняются. Таким образом, мы можем определить пространства $L^p(l^2)$, $\mathcal{L}^p(l^2)$ и пространства $H^p(l^2)$, $\mathcal{H}^p(l^2)$. В частности, $\mathcal{H}^p(l^2_{\mathbb{Z}})$ состоит из $l^2_{\mathbb{Z}}$-значных мартингалов $f = \{f_{n,l}\}_{n\in Z_+^D, l\in\mathbb{Z}}$ с

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(l^2_{\mathbb{Z}})} = \|S(f)\|_{L^p} = \left\|\left(\sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}_+^D}\|\Delta_n f\|^2_{l^2_{\mathbb{Z}}}\right)^{1/2}\right\|_{L^p} < \infty.$$

Выражение (2.10) для операторов $T : \mathcal{L}^2(l^2) \to L^2$ не меняется (но предатомы становятся l^2-значными), а для операторов $T : \mathcal{L}^2 \to L^2(l^2)$ оно превращается в

$$\int_{\left(I_1^{(r_1)}\right)^c\times\ldots\times\left(I_j^{(r_j)}\right)^c\times A}\|Ta\|^{p_0}_{l^2}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant C_{p_0}2^{-\eta_1 r_1}\cdot\ldots\cdot 2^{-\eta_j r_j}.$$

Выражение (2.11) преобразуется аналогичным образом. В таком же духе все понятия и результаты разделов 2.1.2–2.1.5 могут быть перенесены на l^2-значный случай, который понадобится нам в дальнейшем.

2.2 Многопараметрическая теорема Ганди для ограниченных мартингалов Виленкина

Теорема 16 из предыдущего раздела позволит нам доказать многопараметрическую версию теоремы Ганди об ограниченности операторов, отображающих мартингалы в измеримые функции [21; 22] (в формулировке из более поздней работы Кислякова [26]). Эта теорема дает очень простые и удобные для проверки достаточные условия для ограниченности операторов, и поэтому она может представлять некоторый самостоятельный интерес.

Теорема 17. *Рассмотрим число $D \geqslant 2$ и линейный оператор V, который переводит D-параметрические мартингалы Виленкина в измеримые функции. Системы Виленкина, как обычно, предполагаются ограниченными. Пусть выполняются следующие условия.*

1) Оператор $V : \mathcal{L}^2 \to L^2$ ограничен.

2) Для любого D-параметрического мартингала f, у которого $f_0 = 0$ и

$$\Delta_n f = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_n f, \quad \text{где } e_n \in \mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}, \quad (n-\mathbf{1})_d \stackrel{\text{def}}{=} \max(n_d - 1, 0), \tag{2.12}$$

выполняется соотношение $\{|Vf| > 0\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+^D \setminus \{0\}} e_n$.

Тогда оператор $V : \mathcal{H}^p \to L^p$ ограничен для всех $p \leqslant 1$ и, кроме того, оператор $V : \mathcal{L}^r \to L^r$ ограничен для всех $1 < r \leqslant 2$.

Доказательство. Мы покажем, что V является H^p-квазилокальным, какое бы ни было $p \leqslant 1$. Для этого мы проверим условия (2.10) и (2.11) для предатомов и воспользуемся теоремой 16. Мы позволим себе не рассматривать произвольные переименования переменных, как того требует теорема 16: как будет видно, наши рассуждения окажутся "симметричными" относительно такой операции.

Рассмотрим предатом a с носителем на множестве $I_1 \times \ldots \times I_j \times A$, где I_d — интервалы Виленкина, а A — какое-то измеримое множество. Обозначим $S = I_1 \times \ldots \times I_j \times [0,1)^{D-j}$ и найдем такой индекс $N \in \mathbb{Z}_+^D$, что S является атомом σ-алгебры $\mathcal{F}_N$. Такое число N существует потому, что S — произведение интервалов Виленкина: это минимальное N, для которого $S \in \mathcal{F}_N$. Заметим также, что $N_{j+1} = \ldots = N_D = 0$. Мы утверждаем следующее:

$$\Delta_n a = \mathbb{1}_{I_1 \times \ldots \times I_j \times [0,1)^{D-j}} \Delta_n a, \qquad \text{если } n_d > N_d \text{ для всех } 1 \leqslant d \leqslant j, \tag{2.13}$$

$$\Delta_n a = \mathbb{1}_{\varnothing} \Delta_n a, \qquad \text{в противном случае.} \tag{2.14}$$

Отложим на время проверку этих соотношений и предположим, что они выполнены. Имеем $\Delta_n f = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_n f$ для $e_n = I_1 \times \ldots \times I_j \times [0,1)^{D-j}$ или $e_n = \varnothing$, в зависимости от n. Первый случай соответствует таким n, что $n_d > N_d$ для всех $1 \leqslant d \leqslant j$. Поэтому, так как $e_n \subseteq \mathcal{F}_N$ и $N \leqslant n - \mathbf{1}$, выполняется включение $e_n \subseteq \mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}$. Во втором случае соотношение $e_n \subseteq \mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}$ тривиально, так как $\varnothing$ является элементом любой σ-алгебры. Отсюда следует, что равенство (2.12) выполняется для $f = a$ (вследствие соотношения (2.14) имеем $a_0 = \Delta_0 a = 0$). Отсюда, по предположению, выполняется включение $\{|Va| > 0\} \subseteq I_1 \times \ldots \times I_j \times [0{,}1)^{D-j}$. Поэтому мы можем написать

$$\int_{\left(I_1^{(r_1)}\right)^c \times \ldots \times \left(I_j^{(r_j)}\right)^c} \int_A |Va|^p \leqslant \int_{\{(Va)>0\}^c} |Va|^p = 0 \leqslant C2^{-\eta_1 r_1 - \ldots - \eta_j r_j},$$

для каких угодно $\eta_1, \ldots, \eta_D > 0$, ведь множество, по которому производится интегрирование, не пересекается с носителем интегрируемого выражения.

Если $j = D-1$ и $A = I_D \subseteq [0{,}1)$ — интервал Виленкина, нам нужно еще проверить условие (2.11) теоремы 16. В этом случае соотношение (2.13) выполнено с заменой индикатора $\mathbb{1}_{I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times [0,1)}$ на индикатор $\mathbb{1}_{I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times I_D}$, что мы отдельно отметим при доказательстве формул (2.13) и (2.14) ниже. По предположению имеем $\{(Va) > 0\} \subseteq I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times I_D$, поэтому выполнено

$$\int_{\left(I_1^{(r_1)}\right)^c \times \ldots \times \left(I_D^{(r_D)}\right)^c} |Va|^p \leqslant \int_{\{(Va)>0\}^c} |Va|^p = 0 \leqslant C2^{-\eta_1 r_1 - \ldots - \eta_{D-1} r_{D-1}},$$

какие бы ни были $\eta_1, \ldots, \eta_D > 0$, $r \in \mathbb{N}^D$, по тем же соображениям, что и выше.

Для завершения доказательства нам нужно проверить соотношения (2.13) и (2.14). Для этого рассмотрим носитель функции $\mathbb{E}_n a$ для разных значений $n \in \mathbb{Z}_+^D$. Так как функция $\mathbb{E}_n a$ постоянна на каждом множестве B, являющимся атомом σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, и равна на нем $1/|B| \int_B a(x)\,\mathrm{d}x$, нам достаточно описать такие B, что $(\mathbb{E}_n a)\big|_B \neq 0$.

Сначала рассмотрим n, для которых $n_d > N_d$, $1 \leqslant d \leqslant j$. Так как $n_d \geqslant 0 = N_d$ для всех $d > j$, имеем $n \geqslant N$, а значит либо $B \subseteq S$, либо $B \cap S = \varnothing$. В последнем случае B не пересекается с носителем предатома a, и поэтому $(\mathbb{E}_n a)\big|_B = 1/|B| \int_B a(x) = 0$. Значит, $\operatorname{supp}(\mathbb{E}_n a) \subseteq S$. Заметим, что когда a имеет носитель $I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times I_D$, мы можем взять $S = I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times I_D$ вместо $S = I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times [0{,}1)$ и провести то же рассуждение, доказывая, что $\operatorname{supp}(\mathbb{E}_n a) \subseteq S = I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times I_D$ для $n > N$.

Теперь рассмотрим такие n, что условие $n_d > N_d$, $1 \leqslant d \leqslant j$, не выполнено. Тогда существует такой индекс $1 \leqslant d \leqslant D-j$, что $n_d \leqslant N_d$. Значит для любого атома $B = B_1 \times \ldots \times B_D$ из σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ либо $I_d \subseteq B_d$, либо $I_d \cap B_d = \varnothing$. Обозначая $\widetilde{B} = B_1 \times \ldots \times B_{d-1} \times B_{d+1} \times \ldots \times B_D$, напишем

$$(\mathbb{E}_n a)\big|_B = \frac{1}{|B|} \int_B a(x) = \frac{1}{|B|} \int_{\widetilde{B}} \left(\int_{B_d} a(x)\,\mathrm{d}x_d \right) \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_{d-1}\,\mathrm{d}x_{d+1} \ldots \mathrm{d}x_D = 0,$$

где мы сперва воспользовались теоремой Фубини для того, чтобы поменять порядок интегрирования, а потом, чтобы показать, что внутренний интеграл обнуляется, воспользовались либо соотношением $\operatorname{supp} a(\ldots, x_{d-1}, \cdot, x_d, \ldots) \subseteq I_d$, либо соотношением $\int a(x)\,\mathrm{d}x_d = 0$, когда $I_d \cap B_d = \varnothing$ или $I_d \subseteq B_d$ соответственно. Отсюда $\operatorname{supp}(\mathbb{E}_n\, a) \subseteq \varnothing$.

Так как $\Delta_n a = \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_D \in \{0,1\}} (-1)^{\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_D}\, \mathbb{E}_{n_1-\varepsilon_1,\ldots,n_D-\varepsilon_D}\, a$ (см. соотношение (2.5)), имеем $\operatorname{supp}(\Delta_n a) \subseteq \cup_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_D \in \{0,1\}} \operatorname{supp}(\mathbb{E}_{n_1-\varepsilon_1,\ldots,n_D-\varepsilon_D}\, a)$. Поэтому для индексов n, для которых $n_d > N_d$, $1 \leqslant d \leqslant j$, выполняется соотношение $\operatorname{supp}(\Delta_n a) \subseteq I_1 \times \ldots \times I_j \times [0,1)^{D-j}$, более того, $\operatorname{supp}(\Delta_n a) \subseteq I_1 \times \ldots \times I_{D-1} \times I_D$, когда $j = D-1$ и $A = I_D$ — интервал Виленкина. Когда условие $n_d > N_d \leqslant d \leqslant j$ не выполняется, имеем $\operatorname{supp}(\Delta_n a) \subseteq \varnothing$, так как множество $\operatorname{supp}(\mathbb{E}_{n_1-\varepsilon_1,\ldots,n_D-\varepsilon_D}\, a)$ пустое. Это доказывает соотношения (2.13), (2.14) и завершает доказательство теоремы. □

Полезное следствие Определим *модифицированные операторы мартингальных разностей* следующим образом.

$$\Delta_{n,l} f = \sum_{k \in \delta_{n,l}} \langle f, v_k(\cdot) \rangle\, v_k(x),$$

с обозначениями аналогичными (2.7), а также $l = (l_1, \ldots, l_D)$ с $1 \leqslant l_d < p^{(d)}_{n_d}$ и

$$\begin{aligned} \delta_{n,l} = & [l_1 P^{(1)}_{n_1-1}, (l_1+1) P^{(1)}_{n_1-1}) \\ & \times [l_2 P^{(2)}_{n_2-1}, (l_2+1) P^{(2)}_{n_2-1}) \\ & \ldots \\ & \times [l_D P^{(D)}_{n_D-1}, (l_D+1) P^{(D)}_{n_D-1}) \subseteq \mathbb{Z}^D_+. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Для системы Уолша всегда выполняется $l_d = 1$ и эти операторы совпадают с Δ_n, но для других систем Виленкина они оказываются весьма полезны, благодаря тому, что интервалы $\delta_{n,l}$ лучше ведут себя при сдвигах, индуцированных операцией $\dot{+}$, чем интервалы δ_n. Мы будем пользоваться этим в геометрической части доказательства основного результата.

Отметим, что каждое измерение $\delta_{n,l}$ состоит из чисел, у которых l_d является цифрой с номером n_d (и старшим разрядом) в системе счисления с переменным показателем, соответствующей $\boldsymbol{p}_d$. Далее мы докажем, что теорема 17 выполняется, если в условии операторы Δ_n заменить на операторы $\Delta_{n,l}$.

Следствие 7. *Рассмотрим $D \geqslant 2$ и линейный оператор V, переводящий D-параметрические мартингалы Виленкина в измеримые функции. Предположим, что выполнено следующее.*

1) $V : \mathcal{L}^2 \to L^2$ ограничен.

2) Для любого D-параметрического мартингала f с $f_0 = 0$ и

$$\Delta_{n,l} f = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_{n,l} f, \qquad \text{где } e_n \in \mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}, \qquad (n-\mathbf{1})_d = \max(n_d - 1, 0),$$

выполняется соотношение $\{|Vf| > 0\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+^D \setminus \{0\}} e_n$.

Тогда оператор $V : \mathcal{H}^p \to L^p$ ограничен для всех $p \leqslant 1$ и, кроме того, оператор $V : \mathcal{L}^r \to L^r$ ограничен для всех $1 < r \leqslant 2$.

Доказательство. Рассмотрим мартингал f, для которого $f_0 = 0$ и

$$\Delta_n f = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_n f, \qquad\qquad \text{где } e_n \in \mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}.$$

Мы утверждаем, что $\Delta_{n,l} f = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_{n,l} f$. Если это действительно так, то прямое применение теоремы 17 доказывает следствие. Для того, чтобы доказать это соотношение, мы покажем, что для $l \neq s$ функции $\Delta_{n,l} f$ и $\Delta_{n,s} f$ являются L^2-ортогональными на атомах σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}$. Для любого атома B из σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}$, для которого $B \cap e_n = \varnothing$, выполняется соотношение $\Delta_n f\big|_B = 0$, поэтому, представляя $\Delta_n f = \sum_l \Delta_{n,l} f$ и пользуясь ортогональностью, получим $\Delta_{n,l} f\big|_B = 0$, откуда, в свою очередь, $\Delta_{n,l} f = \mathbb{1}_{e_n} \Delta_{n,l} f$.

Докажем ортогональность. Рассмотрим атом $B = B_1 \times \ldots \times B_D \in \mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}$ и пару индексов $l \neq s$. Покажем, что $\int_B (\Delta_{n,l} f)(x)(\Delta_{n,s} f)(x)\, \mathrm{d}x = 0$. Найдем такой индекс d, что $l_d \neq s_d$. Тогда $n_d > 0$, так как для $n_d = 0$ не существует пары различных индексов $1 \leqslant l_d, s_d \leqslant p_0^{(d)} = 1$ (в этом случае существует только один оператор $\Delta_{n_d, l_d} = \Delta_{n_d}$). Пусть, без ограничения общности, $d = 1$, тогда

$$(\Delta_{n,l} f)(x_1, \ldots, x_D) = \sum\nolimits_{k = l_1 P^{(1)}_{n_1 - 1}}^{(l_1+1) P^{(1)}_{n_1-1} - 1} a_k(x_2, \ldots, x_D) v_k(x_1),$$
$$(\Delta_{n,s} f)(x_1, \ldots, x_D) = \sum\nolimits_{k = s_1 P^{(1)}_{n_1 - 1}}^{(s_1+1) P^{(1)}_{n_1-1} - 1} b_k(x_2, \ldots, x_D) v_k(x_1),$$

где v_k — однопараметрические функции Виленкина, соответствующие последовательности $\boldsymbol{p}_1$. Для того, чтобы доказать ортогональность функций $\Delta_{n,l} f$ и $\Delta_{n,s} f$ на атоме B, достаточно показать ортогональность функций $v_k\big|_{B_1}$ и $v_m\big|_{B_1}$ для k, лежащих в множестве $[l_1 P^{(1)}_{n_1-1}, (l_1+1) P^{(1)}_{n_1-1} - 1]$, и m, лежащих в множестве $[s_1 P^{(1)}_{n_1-1}, (s_1+1) P^{(1)}_{n_1-1} - 1]$. Для этого напишем

$$v_k(x_1) = r_1^{\alpha_1}(x_1) r_2^{\alpha_2}(x_1) \cdot \ldots \cdot r_{n_1-1}^{\alpha_{n_1-1}}(x_1) r_{n_1}^{l_1}(x_1)$$
$$v_m(x_1) = r_1^{\beta_1}(x_1) r_2^{\beta 2}(x_1) \cdot \ldots \cdot r_{n_1-1}^{\beta_{n_1-1}}(x_1) r_{n_1}^{s_1}(x_1),$$

где r_i — однопараметрические обобщенные функции Радемахера (см. (2.3)). Функции $r_i, 1 \leqslant i < n_1$, постоянны на B, а $r_{n_1}^{l_1}$ и $r_{n_1}^{s_1}$ ортогональны потому, что

$$\int_{B_1} r_{n_1}^{l_1}(x_1)\overline{r_{n_1}^{s_1}(x_1)}\,\mathrm{d}x_1 = \int_{B_1} r_{n_1}^{l_1-s_1}(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{P_{n_1}^{(1)}} \sum_{r=0}^{p_{n_1}^{(d)}-1} e^{\frac{2\pi i(l_1-s_1)r}{p_{n_1}^{(d)}}} = 0.$$

Это доказывает следствие. □

Замечание. Конечно, и терема 17, и следствие 7 также выполняются и для операторов, отображающих l^2-значные мартингалы в измеримые функции, или для операторов, переводящих l^2-значные мартингалы в l^2-значные функции. Доказательства при этом не меняются.

2.3 Ограниченность двух вспомогательных операторов

Здесь мы введем вариант квадратичной функции Литлвуда–Пэли, ассоциированной с операторами $\Delta_{n,l}$ вместо операторов Δ_n, а также вспомогательные операторы G, к ограниченности которых впоследствии сведется доказательство основного результата данной главы. Операторы G обобщают на случай D-параметрических систем Виленкина вспомогательные операторы, использовавшиеся Осиповым [31] в доказательстве неравенства Рубио де Франсиа для системы Уолша. Ограниченность варианта квадратичной функции и операторов G — предмет двух важных лемм, которые мы докажем в данном разделе.

Вариант квадратичной функции. Определим версию квадратичной функции Литлвуда–Пэли, связанную с операторами $\Delta_{n,l}$ вместо Δ_n.

Определение. Оператор S_m, отображающий (возможно, l^2-значные) мартингалы Виленкина или измеримые функции в измеримые функции по закону

$$S_m f = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+^D} \sum_{1 \leqslant l < p_n} |\Delta_{n,l} f|^2 \right)^{1/2},$$

мы будем называть *модифицированной квадратичной функцией*.

Лемма 14. *Модифицированная квадратичная функция S_m ограничена между $\mathcal{L}^p$ и L^p для $1 < p \leqslant 2$. То же выполнено, если S_m рассматривать как оператор из L^p в себя. Кроме того, S_m ограничена между $\mathcal{H}^p$ и L^p для $p \leqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\widetilde{S}_m$, отображающий мартингалы в $l^2_{\mathbb{Z}_+^D \times \mathbb{N}^D}$-значные функции, который задается следующим образом:

$$\{\widetilde{S}_m f\}_{n,l} = \begin{cases} \Delta_{n,l} f, & \text{для } n \in \mathbb{Z}_+^D \text{ и } 1 \leqslant l < p_n, \\ 0, & \text{для } n \in \mathbb{Z}_+^D \text{ и } l \in \mathbb{N}^D, \text{для которых не выполняется } l < p_n. \end{cases}$$

Тогда ограниченность оператора S_m между $\mathcal{L}^p$ и L^p (соответственно, для $p \leqslant 1$, между $\mathcal{H}^p$ и L^p) следует из ограниченности оператора $\widetilde{S}_m$ между $\mathcal{L}^p$ и $L^p(l^2_{\mathbb{Z}_+^D \times \mathbb{N}^D})$ (соответственно, для $p \leqslant 1$, ограниченности оператора $\widetilde{S}_m$ между $\mathcal{H}^p$ и $L^p(l^2_{\mathbb{Z}_+^D \times \mathbb{N}^D})$). Оператор $\widetilde{S}_m$ линейный, поэтому его ограниченность легко получить из следствия 7. Ограниченность оператора S_m между L^p и L^p следует из взаимно однозначного соответствия между мартингалами и измеримыми функциями для $1 < p \leqslant 2$. $\square$

Вспомогательный оператор. Рассмотрим семейство мультииндексов $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+^D$. Будем обозначать элементы множества $\mathcal{A}$ парами (k, n), $k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}_+^D$. Рассмотрим еще семейство индексов $\{a_{k,n}\}_{(k,n)\in\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{Z}_+^D$ и семейство множеств $\{\Lambda_{k,n}\}_{(k,n)\in\mathcal{A}}$ такие, что $\Lambda_{k,n} \subseteq [1, p_n^{(1)}) \times \ldots \times [1, p_n^{(D)})$ и $\{a_{k,n} \dot{+} \delta_{n,l}\}_{(k,n)\in\mathcal{A}, l\in\Lambda_{k,n}}$ является набором попарно непересекающихся подмножеств множества $\mathbb{Z}_+^D$.

Лемма 15. *Определим оператор G. Он отображает функцию $h = \{h_{k,n}\}_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}_+^D}$ из $L^p(l^2_{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}_+^D})$, $1 < p \leqslant 2$, в*

$$(Gh)(x_1, \ldots, x_D) = \sum_{(k,n)\in\mathcal{A}, l\in\Lambda_{k,n}} v_{a_{k,n}}(x_1, \ldots, x_D)(\Delta_{n,l} h_{k,n})(x_1, \ldots, x_D).$$

Тогда $\|Gh\|_{L^p} \leqslant C\|h\|_{L^p(l^2)}$. Кроме того, для $p \leqslant 1$ имеем $\|Gh\|_{L^p} \leqslant C\|h\|_{\mathcal{H}^p(l^2)}$. C зависит от p, от последовательности $\boldsymbol{p}$ и количества параметров D.

Доказательство. Благодаря взаимно однозначному соответствию между мартингалами и функциями из L^p для $1 < p \leqslant 2$, оператор G можно рассматривать как оператор, отображающий $l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+^D)$-значные мартингалы в измеримые функции. Докажем, что G удовлетворяет версии следствия 7 для $l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+^D)$-значных мартингалов.

Для начала, отображение G, очевидно, линейно. Теорема Планшереля и то, что $\{a_{k,n}\dot{+}\delta_{n,l}\}_{(k,n)\in\mathcal{A},l\in\Lambda_{k,n}}$ является набором попарно непересекающихся подмножеств множества $\mathbb{Z}_+^D$, дают ограниченность оператора G в L^2.

Рассмотрим $l^2(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}_+^D)$-значный мартингал f, для которого $\Delta_0 f = 0$ и $\Delta_{n,l}f = \mathbb{1}_{e_n}\Delta_{n,l}f$, где $e_n\in\mathcal{F}_{n-\mathbf{1}}$. Проверим, что $\{|Gf|>0\}\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+^D\setminus\{0\}}e_n$. Для этого напишем

$$\begin{aligned}\{|Gf|>0\} &\subseteq \bigcup_{\substack{(k,n)\in\mathcal{A},\\ l\in\Lambda_{k,n}}}\left\{\left|v_{a_{k,n}}\Delta_{n,l}f_{k,n}\right|>0\right\} = \bigcup_{\substack{(k,n)\in\mathcal{A},\\ l\in\Lambda_{k,n}}}\{|\Delta_{n,l}f_{k,n}|>0\}\\ &= \bigcup_{\substack{(k,n)\in\mathcal{A},\\ l\in\Lambda_{k,n}}}\{|\mathbb{1}_{e_n}\Delta_{n,l}f_{k,n}|>0\}\subseteq\bigcup_{(k,n)\in\mathcal{A}}\{|\mathbb{1}_{e_n}|>0\}\\ &\subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+^D\setminus\{0\}}e_n.\end{aligned}$$

Это доказывает лемму. □

2.4 Разбиение интервала

Здесь мы опишем способ разбиения интервала $[a,b)\subseteq\mathbb{Z}_+$ на подынтервалы, которые хорошо себя ведут при сдвигах, соответствующих операции $\dot{+}$, определенной в разделе 2.1.1. Этот метод, предложенный Целищевым в [11] — ключевой комбинаторный компонент доказательства основной теоремы.

На протяжении этого раздела мы будет работать исключительно в однопараметрической ситуации и будет предполагать зафиксированную систему счисления с переменным основанием $\boldsymbol{p}=\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Рассмотрим интервал $I=[a,b)\subseteq\mathbb{Z}_+$. Мы построим разбиение

$$I=\left(\tilde{J}_0\cup\dots\cup\tilde{J}_t\right)\cup\left(J_1\cup\dots\cup J_{t-1}\right),\qquad \text{где} \tag{2.16}$$

$$\tilde{J}_j\dot{-}a=\cup_{l\in\Lambda(\tilde{J}_j)}\delta_{j,l},\qquad J_j\dot{-}b=\cup_{l\in\Lambda(J_j)}\delta_{j,l}. \tag{2.17}$$

Здесь операция $\dot{-}$ соответствует операции $\dot{+}$ так же, как обычное вычитание соответствует обычному сложению. Когда один из операндов является множеством, операция $\dot{-}$ применяется поэлементно, возвращая новое множество. Интервалы $\delta_{j,l}$ были определены в (2.15), а конкретные множества индексов

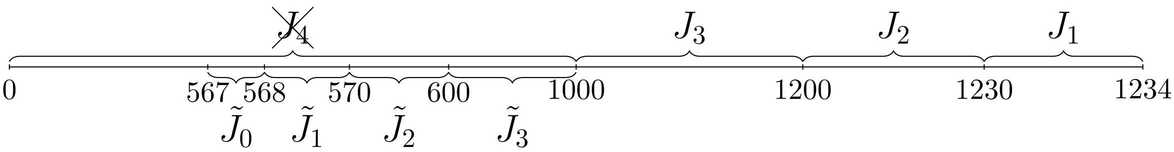

Рисунок 2.1 — Разбиение интервала $[a, b) = [567, 1234)$ по отношению к системе Виленкина с $p_n \equiv 10$. Сначала мы разбиваем интервал $[0, 1234)$ в объединение $[1230, 1234) \cup [1200, 1230) \cup [1000, 1200) \cup [0, 1000)$. Потом, так как $a = 567 \in [0, 1000)$, мы дополнительно разбиваем интервал $[567, 1000)$ в объединение $\{567\} \cup [568, 570) \cup [570, 600) \cup [600, 1000)$. Несложно заметить, что данное разложение имеет "поразрядный" характер.

$\Lambda(\tilde{J}_j)$ и $\Lambda(J_j)$, хоть и не важны для дальнейших рассуждений, будут описаны во время построения разбиения.

Рассмотрим представления чисел a и b в системе счисления $\boldsymbol{p}$:

$$a = \alpha_{k+1} \cdot P_k + \alpha_k P_{k-1} + \dots + \alpha_2 P_1 + \alpha_1,$$
$$b = \beta_{k+1} \cdot P_k + \beta_k P_{k-1} + \dots + \beta_2 P_1 + \beta_1,$$

где α_j, β_j — целые числа с $0 \leqslant \alpha_k, \beta_k < p_k$, причем $\beta_{k+1} > 0$, так что β_{k+1} — старший разряд числа b. Обозначим число b с зануленными j младшими разрядами символом $b_j = \beta_{k+1} P_k + \ldots + \beta_{j+1} P_j$, $0 \leqslant j \leqslant k+1$. Определим величины a_j аналогично. Начнем с разбиения интервала $[0, b)$:

$$[0, b) = \bigcup_{j=1}^{k+1} J_j, \quad \text{где } J_j = [b_j, b_{j-1}). \tag{2.18}$$

Отметим, что $|J_j| = \beta_j P_{j-1}$ и что J_j состоит из чисел, для которых цифра γ_j, стоящая в разряде номер j, лежит в интервале $0 \leqslant \gamma_j < \beta_j$, а более младшие разряды могут быть произвольными. Существует $1 \leqslant t \leqslant k+1$ такое, что $a \in J_t$. Отсюда $\alpha_j = \beta_j$ для $t+1 \leqslant j \leqslant k+1$ и $\alpha_t < \beta_t$. Теперь разобьем интервал $[a, +\infty) \cap J_t$:

$$[a, +\infty) \cap J_t = \bigcup_{j=0}^{t} \tilde{J}_j, \quad \text{где} \tag{2.19}$$
$$\tilde{J}_j = [a_j + (\alpha_j + 1) P_{j-1}, a_j + p_j P_{j-1}) \qquad \text{для } 1 \leqslant j \leqslant t-1, \tag{2.20}$$
$$\tilde{J}_t = [a_t + (\alpha_t + 1) P_{t-1}, a_t + \beta_t P_{t-1}), \qquad \tilde{J}_0 = \{a\}. \tag{2.21}$$

Интервалы $\tilde{J}_j$ состоят из чисел, у которых цифры γ_j в разряде номер j, удовлетворяют условиям $\alpha_j < \gamma_j < p_j$ для $1 \leqslant j \leqslant t-1$ или $\alpha_j < \gamma_j < \beta_j$ для $j = t$, чьи более младшие разряды произвольны, а более старшие совпадают с соответствующими разрядами числа a. Отметим, что J_j и $\tilde{J}_j$ могут быть пустыми.

Совмещая разбиение интервала $[0, b)$ в (2.18) с разбиением множества $[a, +\infty) \cap J_t$ в (2.19), получаем, наконец, разбиение интервала $[a, b)$ в (2.16), где соотношения (2.17) проверяются прямым вычислением. Описанный только что процесс разбиение проиллюстрирован на рис. 2.1.

2.5 Доказательство основной теоремы

В данном разделе мы наконец докажем основной результат данной главы.

Теорема 3. *Пусть $I_k = I_k^1 \times \ldots \times I_k^D \subseteq \mathbb{Z}_+^D$ — счетное семейство непересекающихся прямоугольников, то есть таких множеств, что $I_k^d = [a_k^d, b_k^d) = \{n \in \mathbb{Z}_+ \mid a_k^d \leqslant n < b_k^d\}$ — интервалы в $\mathbb{Z}_+$. Пусть $f_k : [0,1)^D \to \mathbb{R}$ — семейство функций, чей спектр Фурье–Виленкина лежит в I_k, то есть*

$$f_k(x) = \sum\nolimits_{(n_1,\ldots,n_D)\in I_k} \langle f_k, v_{n_1} \cdot \ldots \cdot v_{n_D} \rangle v_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot v_{n_D}(x_D),$$

где v_{n_d} — функции Виленкина, соответствующие каким-то ограниченным системам Виленкина, которые могут быть различными для разных d. Тогда

$$\Big\|\sum\nolimits_k f_k\Big\|_{L^p([0,1)^D)} \leqslant C \Big\|\{f_k\}\Big\|_{L^p([0,1)^D, l^2)}, \qquad 1 < p \leqslant 2,$$

где константа C не зависит от выбора прямоугольников $\{I_k\}$ и функций $\{f_k\}$.

Доказательство. В доказательстве будем считать, что $D = 2$. Хотя в зависимости от того, равняется D двум или строго больше двух, сильно меняется техника, необходимая для доказательства леммы 15 (см. обсуждение в разделе 2.1.5), значение D совершенно не влияет на характер приводимого далее комбинаторного рассуждения. Другими словами, все сложности, связанные со случаем $D \geqslant 3$, уже включены в лемму 15. Отметим, что в этом доказательстве мы будем использовать символ D в ином значении, никак не связанном с количеством параметров.

Следуя идее из работы [31], мы разбиваем прямоугольники I_k на фрагменты, которые хорошо себя ведут под действием сдвигов, порожденных операцией $\dot{+}$. Это, а также с леммы 14 и 15 будут основным инструментами дальнейшего доказательства. Пусть

$$I_k = I_k^1 \times I_k^2 = [a_k^{(1)}, b_k^{(1)} - 1] \times [a_k^{(2)}, b_k^{(2)} - 1].$$

Мы разобьем каждый прямоугольник I_k, разбивая его стороны I_k^1 и I_k^2 как в разделе 2.4 и рассматривая декартовы произведения соответствующих фрагментов сторон. Более формально, для прямоугольника $I = I^1 \times I^2 = [a^{(1)}, b^{(1)}) \times [a^{(2)}, b^{(2)}) \subseteq \mathbb{Z}_+^2$ мы разбиваем его стороны I^i в объединение интервалов $\tilde{J}_j^{(i)}$ и $J_j^{(i)}$ как в разделе 2.4 и рассматриваем все попарные произведения, получая

$$I = \left(\bigcup_j A_j\right) \cup \left(\bigcup_j B_j\right) \cup \left(\bigcup_j C_j\right) \cup \left(\bigcup_j D_j\right),$$

где

$$\begin{aligned} A_j &= \tilde{J}_{j^{(1)}}^{(1)} \times \tilde{J}_{j^{(2)}}^{(2)}, &\qquad B_j &= J_{j^{(1)}}^{(1)} \times J_{j^{(2)}}^{(2)}, \\ C_j &= J_{j^{(1)}}^{(1)} \times \tilde{J}_{j^{(2)}}^{(2)}, &\qquad D_j &= \tilde{J}_{j^{(1)}}^{(1)} \times J_{j^{(2)}}^{(2)}, \end{aligned}$$

причем верхний индекс отвечает за то, к разбиению какой из сторон принадлежит индексируемый объект. Главным свойством прямоугольников A_j, B_j, C_j, D_j является то, что конечным (зависящим только от числа параметров) количеством сдвигов их можно превратить в объединения прямоугольников $\delta_{k,l}$. Пусть a, b, c, d обозначают вершины прямоугольника I, то есть

$$a = (a^{(1)}, a^{(2)}),\ \ b = (b^{(1)}, b^{(2)}),\ \ c = (b^{(1)}, a^{(2)}),\ \ d = (a^{(1)}, b^{(2)}),$$

тогда, определяя множества (с обозначениями $\Lambda(\tilde{J}_j^{(i)})$ и $\Lambda(J_j^{(i)})$ из раздела 2.4)

$$\begin{aligned} \Lambda(A_j) &= \Lambda(\tilde{J}_j^{(1)}) \times \Lambda(\tilde{J}_j^{(2)}), &\qquad \Lambda(B_j) &= \Lambda(J_j^{(1)}) \times \Lambda(J_j^{(2)}), \\ \Lambda(C_j) &= \Lambda(J_j^{(1)}) \times \Lambda(\tilde{J}_j^{(2)}), &\qquad \Lambda(D_j) &= \Lambda(\tilde{J}_j^{(1)}) \times \Lambda(J_j^{(2)}), \end{aligned}$$

имеем, обозначая $\operatorname{spec} f = \{n \in \mathbb{Z}_+^2 \mid \langle f, v_n \rangle \neq 0\}$,

$$\textstyle\sum_{l \in \Lambda(A_j)} \Delta_{j,l} v_a^{-1} f = v_a^{-1} f, \quad \text{если} \ \operatorname{spec} f \subseteq A_j, \tag{2.22}$$

$$\textstyle\sum_{l \in \Lambda(B_j)} \Delta_{j,l} v_b^{-1} f = v_b^{-1} f, \quad \text{если} \ \operatorname{spec} f \subseteq B_j, \tag{2.23}$$

$$\textstyle\sum_{l \in \Lambda(C_j)} \Delta_{j,l} v_c^{-1} f = v_c^{-1} f, \quad \text{если} \ \operatorname{spec} f \subseteq C_j, \tag{2.24}$$

$$\textstyle\sum_{l \in \Lambda(D_j)} \Delta_{j,l} v_d^{-1} f = v_d^{-1} f, \quad \text{если} \ \operatorname{spec} f \subseteq D_j. \tag{2.25}$$

Это то самое “хороше” поведение при сдвигах, которое нам понадобится.

Разобьем аналогичным образом каждый прямоугольник I_k, добавляя дополнительный индекс k ко всем объектам, которые возникают из этого построения. Тогда функции f_k можно представить как суммы

$$f_k = \sum_j f^A_{k,j} + \sum_j f^B_{k,j} + \sum_j f^C_{k,j} + \sum_j f^D_{k,j},$$

где $\operatorname{spec} f^A_{k,j} \subseteq A_{k,j}$, $\operatorname{spec} f^B_{k,j} \subseteq B_{k,j}$, $\operatorname{spec} f^C_{k,j} \subseteq C_{k,j}$, $\operatorname{spec} f^D_{k,j} \subseteq D_{k,j}$. Определим

$$g^A_{k,j} = v^{-1}_{a_k} f^A_{k,j}, \quad g^B_{k,j} = v^{-1}_{b_k} f^B_{k,j}, \quad g^C_{k,j} = v^{-1}_{c_k} f^C_{k,j}, \quad g^D_{k,j} = v^{-1}_{d_k} f^D_{k,j}.$$

Тогда f_k можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} f_k =& v_{a_k} \sum_j \sum_{l \in \Lambda(A_{k,j})} \Delta_{j,l} g^A_{k,j} + v_{b_k} \sum_j \sum_{l \in \Lambda(B_{k,j})} \Delta_{j,l} g^B_{k,j} \\ &+ v_{c_k} \sum_j \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} \Delta_{j,l} g^C_{k,j} + v_{d_k} \sum_j \sum_{l \in \Lambda(D_{k,j})} \Delta_{j,l} g^D_{k,j}. \end{aligned}$$

Полагая $h_{k,n} = g^{S(n)}_{k,j(n)}$, $\Lambda_{k,n} = \Lambda(S(n)_{k,j(n)})$ и $a_{k,n} = s(n)_k$ с подходящей нумерацией $j(n) \in \mathbb{Z}^2_+$, $S(n) \in \{A, B, C, D\}$ и $s(n) \in \{a, b, c, d\}$, видим, что $\sum_k f_k = G\big(\{h_{k,n}\}_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}^2_+}\big)$ и предположения леммы 15 выполнены (благодаря тем самым свойствам (2.22)–(2.25)). Применяя эту лемму, а затем неравенство треугольника, мы получаем

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^p} \lesssim \Bigg\| \Bigg(\sum_k \Big(\sum_j |g^A_{k,j}|^2 + \sum_j |g^B_{k,j}|^2 + \sum_j |g^C_{k,j}|^2 + \sum_j |g^D_{k,j}|^2 \Big) \Bigg)^{\frac12} \Bigg\|_{L^p} \tag{2.26}$$

$$\lesssim \Bigg\| \Bigg(\sum_{k,j} \sum_{l \in \Lambda(A_{k,j})} |\Delta_{j,l} g^A_{k,j}|^2 \Bigg)^{\frac12} \Bigg\|_{L^p} + \Bigg\| \Bigg(\sum_{k,j} \sum_{l \in \Lambda(B_{k,j})} |\Delta_{j,l} g^B_{k,j}|^2 \Bigg)^{\frac12} \Bigg\|_{L^p} \tag{2.27}$$

$$+ \Bigg\| \Bigg(\sum_{k,j} \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} |\Delta_{j,l} g^C_{k,j}|^2 \Bigg)^{\frac12} \Bigg\|_{L^p} + \Bigg\| \Bigg(\sum_{k,j} \sum_{l \in \Lambda(D_{k,j})} |\Delta_{j,l} g^D_{k,j}|^2 \Bigg)^{\frac12} \Bigg\|_{L^p}. \tag{2.28}$$

Так как оператор G ограничен между $\mathcal{H}^p$ и L^p для $p \leqslant 1$, мы имеем в этом случае неравенство, аналогичное формуле (2.26), только с $\mathcal{H}^p(l^2_{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^2_+})$-нормой вместо $L^p(l^2_{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^2_+})$-нормы последовательности $\{h_{k,n}\}$ справа. Замечая, что благодаря свойствам (2.22)–(2.25) эта $\mathcal{H}^p$-норма совпадает с L^p-нормой, мы видим, что формулы (2.26)–(2.28) остаются верными также и при $p \leqslant 1$.

Следующий шаг это оценка каждого слагаемого в сумме (2.27)–(2.28) отдельно. Рассмотрим, например, третье слагаемое. Напишем

$$v_{c_k}^{-1} f_k = v_{a_k \dot{-} c_k} \sum_j g_{k,j}^A + v_{b_k \dot{-} c_k} \sum_j g_{k,j}^B + \sum_j g_{k,j}^C + v_{d_k \dot{-} c_k} \sum_j g_{k,j}^D$$
$$= v_{a_k \dot{-} c_k} \sum_j g_{k,j}^A + v_{b_k \dot{-} c_k} \sum_j g_{k,j}^B + \sum_j \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} \Delta_{j,l} g_{k,j}^C + v_{d_k \dot{-} c_k} \sum_j g_{k,j}^D.$$

Заметим, что $\Delta_{j,l} v_{c_k}^{-1} f_k = \Delta_{j,l} g_{k,j}^C$, а значит в разложении

$$v_{c_k}^{-1} f_k = \sum\nolimits_{n \in \mathbb{Z}_+^2} \sum\nolimits_{\mathbf{1} \leqslant l \leqslant p_n} \Delta_{n,l} v_{c_k}^{-1} f_k,$$

все функции $\Delta_{j,l} g_{k,j}^C$ встречаются среди слагаемых правой части. Отсюда

$$\sum_j \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} \left|\Delta_{j,l} g_{k,j}^C\right|^2 \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^2} \sum_{\mathbf{1} \leqslant l \leqslant p_n} \left|\Delta_{n,l} v_{c_k}^{-1} f_k\right|^2 = \Big(S_m(w_{c_k} f_k)\Big)^2,$$

где S_m это модифицированная квадратичная функция, определенная в разделе 2.3. Пользуясь l^2-значным аналогом леммы 14, получаем

$$\Big\| \Big(\sum_k \sum_j \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} \left|\Delta_{j,l} g_{k,j}^C\right|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \tag{2.29}$$
$$\leqslant \Big\| \Big(\sum_k \sum_{n \in \mathbb{Z}_+^2} \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} \left|\Delta_{n,l} v_{c_k}^{-1} f_k\right|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} = \left\| S_m\big(\{v_{c_k}^{-1} f_k\}_{k \in \mathbb{N}}\big) \right\|_{L^p} \tag{2.30}$$
$$\lesssim \Big\| \Big(\sum_k |v_{c_k}^{-1} f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} = \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p}. \tag{2.31}$$

Для $p \leqslant 1$ соотношения (2.29)–(2.30) остаются справедливыми, но так как квадратичная функция S_m ограничена лишь как оператор между $\mathcal{H}^p$ и L^p, мы не можем получить оценку (2.29)–(2.31). Вместо этого, для $p \leqslant 1$ мы получаем

$$\Big\| \Big(\sum_k \sum_j \sum_{l \in \Lambda(C_{k,j})} \left|\Delta_{j,l} g_{k,j}^C\right|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p} \leqslant \Big\| \big\{ v_{c_k}^{-1} f_k \big\}_{k \in \mathbb{N}} \Big\|_{\mathcal{H}^p(l^2_{\mathbb{N}})}.$$

Аналогично соотношениям (2.29)–(2.31) мы можем оценить каждое из четырех слагаемых в (2.27) и (2.28). Собирая эти оценки вместе, мы наконец получаем

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^p} \lesssim \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p},$$

что завершает доказательство. □

2.6 Некоторые следствия и обобщения

В данном разделе мы обсудим некоторые следствия и варианты основного результата (теоремы 3).

2.6.1 Однопараметрическое неравенство Рубио де Франсиа для системы Уолша с нестандартным определением интервала

Как уже упоминалось во введении, на неравенство Рубио де Франсиа можно смотреть очень общим образом в терминах абстрактного гармонического анализа. Рассмотрим локально компактную абелеву группу G, обозначим группу, двойственную к ней по Понтрягину, символом $\widehat{G}$ и рассмотрим какой-то частичный порядок $\leqslant_{\widehat{G}}$ на $\widehat{G}$. Тогда

1) пространства Лебега $L^p(G)$ определены посредством меры Хаара на G,
2) операторы M_I для множеств $I \subseteq \widehat{G}$ можно определить как абстрактные мультипликаторы с символом $\mathbb{1}_I$,
3) обобщенные интервалы можно определить через соотношение

$$I = [a, b] = \{x \in \widehat{G} \,|\, a \leqslant_{\widehat{G}} x \leqslant_{\widehat{G}} b\}.$$

Подставляя эти объекты в неравенство (3), можно сформулировать соотношение, которое естественно назвать неравенством Рубио де Франсиа на группе G с порядком $\leqslant_{\widehat{G}}$ на двойственной группе. Справедливо ли это неравенство для тех или иных групп G и порядков на них, — нетривиальный вопрос, но его постановка, разумеется имеет смысл.

В рамках такого абстрактного взгляда может сперва показаться, что раз многопараметрическая группа Виленкина всегда изоморфна однопараметрической группе Виленкина, мы можем вывести неравенство Рубио де Франсиа на первой из неравенства Рубио де Франсиа на второй. Так действительно можно было бы попытаться сделать, но это нетривиально, так как групповой изоморфизм должен сохранять структуру интервалов (через порядок на двойственной группе). Такого рода подход мы оставляем за рамками обсуждения. Однако мы хотим отметить, что в обратном направлении мы можем получить неравенство

Рубио де Франсиа для однопараметрических систем Виленкина с разными экзотическими понятиями интервала. Продемонстрируем это на одном простом примере.

Рассмотрим диадическую группу и обозначим ее символом C. Это группа Виленкина, соответствующая последовательности $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ с $p_n \equiv 2$. Соответственно, это компактная абелева группа. Более того, как уже отмечалось, она можжет быть отождествлена с интервалом $[0,1)$ с помощью отображения, сохраняющего меру. Поэтому мы можем рассмотреть характеры этой группы, то есть элементы $\widehat{C}$, как функции на интервале $[0,1)$. Это будут функции Уолша, которые являются частным случаем функций Виленкина. Как отмечалось в разделе 2.1.1, функции Уолша можно занумеровать неотрицательными целыми числами и упорядочить соответствующим образом. Такая постановка приводит к неравенству Рубио де Франсиа для однопараметрической системы Уолша, доказанному в [31].

Рассмотрим теперь квадрат диадической группы $C \times C$ и отождествим его с квадратом $[0,1) \times [0,1)$ с помощью отображения, сохраняющего меру. Характеры этой группы можно тогда отождествить с двупараметрическими функциями Уолша, занумерованными $\mathbb{Z}_+ \times Z_+$ и снабженными частичным порядком $(n,m) \leqslant_{\mathbb{Z}_+\times Z_+} (k,l) \iff n \leqslant k \ \& \ m \leqslant l$, обобщенные интервалы в котором соотвествуют прямоугольникам в $\mathbb{Z}_+ \times Z_+$. Неравенство Рубио де Франсиа в такой постановке является частым случаем теоремы 3.

Рассмотрим изоморфизм $\Phi : C \times C \to C$, заданный соотношением

$$\Phi((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots).$$

Легко проверить, что Φ действительно сохраняет групповую структуру, топологическую структуру и меру. Он также порождает изоморфизм между двойственными группами: характер $w_{n,m}(x_1, x_2)$ группы $C \times C$ сопоставляется характеру $w_{\Psi(n,m)}(\Phi(x_1, x_2))$ группы C. Несложно проверить, что

$$\Psi(n,m) = \Psi\Big(\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} n_k \cdot 2^{k-1}, \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} m_k \cdot 2^{k-1}\Big) = \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} l_k \cdot 2^{k-1},$$

где $l_k = n_k$ для нечетных k и $l_k = m_k$ для четных k.

Этот изоморфизм переводит естественный частичный порядок на $\mathbb{Z}_+ \times Z_+$ в экзотический порядок на $\mathbb{Z}_+$.. Таким образом, из двупраметрического неравенства Рубио де Франсиа следует однопараметрическое неравенство с интервалами, замененными на некоторые обобщенные интервалы. К примеру, множество $\{5, 16, 17, 20\}$ будет одним из таких обобщенных интервалов, так как является образом прямоугольника $[(3,0),(6,0)] = [3,6] \times \{0\} \subseteq \mathbb{Z}_+^2$ под действием изоморфизма Ψ.

Несмотря на то, что мы привели здесь лишь этот конкретный пример, ясно, что аналогичным образом можно установить много разных экзотических неравенств.

2.6.2 Невозможность неравенства для произвольных разбиений множества $\mathbb{Z}_+^D$

Достаточно просто увидеть, что оригинальное неравенство Рубио де Франсиа, в том виде как оно было сформулировано в выражении (3) во введении, нельзя распространить на произвольные разбиения плоскости или пространства. Для этого достаточно рассмотреть разбиение $\mathcal{I} = \{\mathcal{B}, \mathbb{R}^D \setminus \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ — единичный шар пространства $\mathbb{R}^D$, $D > 1$. Неравенство (3) для такого $\mathcal{I}$ не может быть справедливо хотя бы потому, что, как показал Ч. Фефферман в [16], мультипликатор шара $M_{\mathcal{B}}$, фигурирующий в левой части неравенства, будет неограничен в пространствах L^p для $p \neq 2$.

С другой стороны, для неравенства (5) из введения, двойственного оригинальному неравенству Рубио де Франсиа, но сформулированного без явного упоминания мультипликаторов Фурье, разбиение $\mathcal{I} = \{\mathcal{B}, \mathbb{R}^D \setminus \mathcal{B}\}$ не представляет никакой сложности, как и любые другие конечные разбиения множества $\mathbb{R}^D$.[3] Некоторые результаты в такой постановке можно сформулировать и для бесконечных разбиений, если, в частности, их элементы имеют примерно одинаковый "размер". Один такой результат будет доказан в разделе 3.7.

Отсюда естественным образом вытекает вопрос о возможности обобщения неравенства (5) на случай произвольных разбиений множеств $\mathbb{R}^D$ или $\mathbb{T}^D$, а также аналогичный вопрос про произвольные разбиения множества $\mathbb{Z}_+^D$ в случае ограниченных групп Виленкина. Последним вопросом мы и займемся в далее.

Для простоты рассмотрим лишь случай системы Уолша. Рассуждение, дающее отрицательный ответ на этот вопрос, будет основано на соображениях

[3]Конечно, с константой, зависящей от количества элементов в разбиении.

раздела 2.6.1 и на рассуждении Тао о произвольных разбиениях множества $\mathbb{T}^D$ (не опубликовано в рецензируемых изданиях но доступно в [40]).

Рассмотрим какой-нибудь показатель $1 < p < 2$ и предположим, что

$$\left\|\sum\nolimits_k f_k\right\|_{L^p([0,1)^D)} \leqslant C_D \left\|\{f_k\}\right\|_{L^p([0,1)^D,\, l^2)}$$

для всевозможных функций f_k со спектрами Фурье–Уолша в произвольных множествах $I_k \subseteq Z_+^D$, разбивающих множество Z_+^D.

Подставляя в качестве I_k множества вида $I_k = I_k^0 \times Z_+^{D-1}$, получим однопараметрическое неравенство для функций Уолша и для произвольных разбиений множества $\mathbb{Z}_+$. Поэтому, без ограничения общности, можно полагать $D = 1$.

Благодаря соображениям из раздела 2.6.1, из такого неравенства следует "честное" неравенство Рубио де Франсиа для произвольных прямоугольников в Z_+^D с той же константой C_1, вне зависимости от размерности D: прямоугольники в $\mathbb{Z}_+^D$ будут соответствовать каким-то экзотическим интервалам в $\mathbb{Z}_+$, а для них неравенство будет верно по предположению.

Покажем, что отсюда, в свою очередь, следует неравенство Рубио де Франсиа для однопараметрической системы Уолша с константой $C_1 = 1$. Это достаточно проверить в предположении, что количество (ненулевых) функций f_k конечно. Каждая из них — конечная линейная комбинация функций Уолша (аналог тригонометрического полинома), а спектры функций f_k — отрезки в $\mathbb{Z}_+$.

Обозначим количество (ненулевых) f_k символом N и предположим, без ограничения общности, что k пробегает множество $1, \ldots, N$. Рассмотрим функции $f_{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{k} \in \{1, \ldots, N\}^D$, где $f_{\boldsymbol{k}}(x_1, \ldots, x_D) = f_{\boldsymbol{k}_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{\boldsymbol{k}_D}(x_D)$. Спектры Фурье–Уолша функций $f_{\boldsymbol{k}}$, естественно, — непересекающиеся прямоугольники. Подставляя эти функции в то самое "честное" неравенство Рубио де Франсиа для произвольных прямоугольников в Z_+^D с константой C_1 и пользуясь тем, что

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\{1,\ldots,N\}^D} f_{\boldsymbol{k}}(x_1, \ldots, x_D) = \left(\sum_{k_1=1}^N f_k(x_1)\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_D=1}^N f_k(x_D)\right),$$

$$\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\{1,\ldots,N\}^D} |f_{\boldsymbol{k}}(x_1, \ldots, x_D)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k_1=1}^N |f_k(x_1)|^2\right)^{1/2} \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_D=1}^N |f_k(x_D)|^2\right)^{1/2},$$

для преобразования левой и правой части неравенства, соответственно, видим

$$\left\|\sum\nolimits_k f_k\right\|^D_{L^p([0,1))} \leqslant C_1 \left\|\{f_k\}\right\|^D_{L^p([0,1),\, l^2)}.$$

Отсюда очевидным образом следует, что $C_1 \leqslant 1$.

Противоречие теперь возникает из-за того, что неравенство Рубио де Франсиа и даже неравенство Литлвуда–Пэли для системы Уолша не могут выполняться с константой $C_1 \leqslant 1$. Действительно, точные константы для неравенства Литлвуда–Пэли в случае системы Уолша просто-напросто известны. См. про это, например, в книге [30, Theorem 8.8]. Отметим, что неравенство $C_1 \leqslant 1$ можно опровергнуть и элементарными методами, без привлечения нетривиальных утверждений о точных константах, как это и сделано в рассуждении Тао [40].

2.6.3 Случай показателей $p \leqslant 1$

Посредством замечаний, сделанных при доказательстве основной теоремы в разделе 2.5, следующая более слабая версия неравенства Рубио де Франсиа была доказана для показателей $p \leqslant 1$.

Теорема 18. *Пусть $I_k = I_k^1 \times \ldots \times I_k^D$ семейство непересекающихся прямоугольников в $\mathbb{Z}_+^D$. Пусть $f_k : [0,1)^D \to \mathbb{R}$ функции со спектром Фурье–Виленкина в I_k, где v_{n_d} — функции Виленкина из какой-то ограниченной системы Виленкина (возможно, разной для разных d). Тогда*

$$\Big\|\sum\nolimits_k f_k\Big\|_{L^p} \leqslant C \sum_{a=1}^{2^D} \Big\| \Big\{ v_{\tau_{a,k}}^{-1} f_k \Big\}_{k\in\mathbb{N}} \Big\|_{\mathcal{H}^p(l^2_{\mathbb{N}})}, \qquad 1 < p \leqslant 2,$$

где $\tau_{a,k}$ это a-ая вершина прямоугольника I_k, константа C не зависит от прямоугольников $\{I_k\}$ или функций $\{f_k\}$, а $\mathcal{H}^p$ это мартингальное пространство Харди, определенное в разделе 2.1.4.

Остается неизвестным, является ли соответствующий результат с лебеговой нормой справа справедливым при $p \leqslant 1$. Несмотря на то, что аналогичное утверждение для тригонометрических рядов Фурье (или преобразования Фурье) известны уже достаточно давно [5; 8; 9], насколько нам известно, даже случай однопараметрической системы Уолша остается до сих пор нерешенной задачей.

Глава 3. Весовое неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$

В данной главе мы докажем теорему 4, устанавливающую весовые аналоги односторонних неравенств Рубио де Франсиа в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{I}$ — какое-то разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, а $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — некоторый вес на плоскости, пусть, как обычно, $\widehat{M_I f} = \widehat{f}\mathbb{1}_I$. Для показателей p в интервале $2 < p < \infty$ и веса w, удовлетворяющего двупараметрическому условию Макенхаупта с показателем $p/2$, верно неравенство*

$$c\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2,\,l^2)} \leqslant \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)}. \tag{6}$$

Для показателей p в интервале $0 < p < 2$ и веса w, удовлетворяющего некоторому условию $\alpha_{r(p)}$, являющемуся в определенном смысле двойственным к условию Макенхаупта, верно неравенство

$$\Big\|\sum\nolimits_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)} \leqslant C\Big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2,\,l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp}\widehat{f_I} \subseteq I \text{ для } I\in\mathcal{I}. \tag{7}$$

Число $r(p)$ должно удовлетворять условиям $1 < r(p) < 2$ и $r(p) \geqslant p$, а условие $w \in \alpha_r$ обозначает $w^{-\frac{1}{r-1}} \in A_{\frac{r}{2(r-1)}}$.

Последнее неравенство обобщает соответствующий безвесовой результат Осипова, полученный в 2010 году, а первое — безвесовой результат Журне, полученный в 1985 году. Используемая техника основывается на теории двупараметрических сингулярных интегральных операторов и соответствующих пространств Харди, разработанной Р. Фефферманом, и на некоторых современных ее обобщениях на весовой случай.

Условие α_r может показаться, на первый взгляд, громоздким и неестественным, но это не так: в случае $1 < p < 2$ оно возникает “двойственным” образом из условия $w \in A_{p/2}$ при переходе от неравенства (6). Подробней это будет обсуждаться после формулировки основной теоремы в разделе 3.3.

На пути к еще более общему случаю, включающему размерности $D > 2$, основным препятствием является отсутствие, по-видимому, подходящей теории многопараметрических весовых сингулярных интегральных операторов и чрезвычайная техническая громоздкость соответствующей безвесовой теории (описанной Кэрбери и Сигером в [13]), делающая весьма затруднительным ее обобщение на весовой случай.

Идея доказательства. Используя метод, придуманный Кисляковым–Париловым в [5], а затем обобщенный Осиповым [8] на случай двух параметров, мы сводим неравенства Рубио де Франсиа к вопросу об ограниченности пары двупараметрических сингулярных интегральных операторов. Мы доказываем их ограниченность, используя атомную теорию двупараметрических пространств Харди, предложенную Р. Фефферманом [17; 18] и обобщенную на случай с весом Ли [29], а также весовые критерии ограниченности операторов в пространствах Лебега, выраженные через двупараметрические варианты средней осцилляции.

Содержание. Данная глава организована следующим образом. В разделе 3.1 мы кратко обсуждаем связи наших основных результатов с соответствующими безвесовыми результатами, а также говорим о трудностях, с которыми мы сталкиваемся при переходе к весовому случаю. Далее, в разделе 3.2, описываются необходимые предварительные сведения. В разделе 3.3 формулируется основная теорема (фактически, неравенство (7)) и ее доказательство сводится к проверке ограниченности двух специальных операторов. Их ограниченность проверяется в разделе 3.4, в котором сосредоточены оценки для $p > 1$, и в разделе 3.5, в котором рассматриваются показатели $0 < p \leqslant 1$. В разделе 3.6 неравенства (6) и (7) формально выводятся из основной теоремы. В разделе 3.7 описывается дополнительный результат данной главы: модификация неравенства (7) на случай, когда разбиение плоскости $\mathcal{I}$ состоит из произвольных измеримых множеств примерно одинакового размера.

3.1 О связи основных результатов главы с соответствующим безвесовым результатом

Общий план доказательства похож на схему рассуждений из статьи Осипова [8], в которой доказывается соответствующий безвесовой результат. И здесь, и в [8] в основе лежит проверка ограниченности некоторых многопараметрических сингулярных интегральных операторов, в обоих случаях используются сходные теоретические результаты и геометрические идей из статьи Кислякова–Парилова [5]. Тем не менее, отличия существенны, и здесь мы хотели бы описать несколько примеров, иллюстрирующих сложности, с которыми нам пришлось столкнуться при переходе к весовому случаю.

Нам, как и Осипову в [8], для доказательства ограниченности операторов в пространствах Харди требуется сперва проверить их ограниченность в каком-нибудь пространстве Лебега.

В случае статьи [8], это не представляет никаких трудностей: во-первых, безвесовая L^2-оценка очевидным образом следует из теоремы Планшереля, во-вторых, оценки во всех пространствах Лебега сразу же следуют из неравенства (3), доказанного в работе [23]. В нашем случае это оказывается нетривиальной задачей.

Весовая L^2_w-оценка здесь не только не является очевидной, она является самой сложной среди всех L^p_w оценок. Например, в работе [35], в которой Рубио де Франсиа в одномерном случае удалось установить весовые оценки при $p > 2$, соответствующее весовое неравенство для $p = 2$ было сформулировано лишь в виде гипотезы. Весового обобщения неравенства (3) в двумерном случае, по-видимому, еще никто не публиковал. Нам удается получить необходимые L^p_w-оценки для возникающих из схемы Кислякова–Парилова операторов, попутно устанавливая весовое обобщение неравенства (3) в двумерном случае, но для этого мы пользуемся нетривиальной теорией Р. Феффермана и проводим весьма техническое доказательство на ее основе (этому, фактически, посвящен весь раздел 3.4).

Мы, как и Осипов в [8], активно пользуемся теорией двупараметрических пространств Харди: требуется атомное разложение в таких пространствах, утверждение, которое позволяет получить ограниченность операторов, проверяя некий двупараметрический аналог (1,1)-слабого типа (соответствует в нашем тексте теореме 19), а также какое-то утверждение о связи вещественных пространств Харди, определяющихся ограниченностью на них некоторых сингулярных интегральных операторов, с пространствами Харди граничных значений аналитических функций (соответствует лемме 16).

В более общей весовой ситуации оказывается значительно сложнее найти в литературе необходимые результаты. Например, теорему 19 и весовое атомное разложение нам приходится формулировать в более общем виде, чем тот, в котором они установлены в литературе. Причем соответствующие доказательства более общих результатов бессмысленно расписывать: они получаются абсолютно аналогичными уже существующим, и при этом довольно громоздкими. Другой пример: в лемме 16 нам приходится самостоятельно устанавливать необходимую связь между вещественными пространствами Харди и пространствами Харди аналитических функций. Такого рода нетривиальные результаты, по-видимому, совсем не представлены в литературе.

Не обходится и без некоторого технического усложнения в основных оценках. Здесь мы обойдемся без подробностей, отсылая читателя непосредственно к доказательству в разделе 3.5.

3.2 Предварительные сведения

Определим двупараметрические весовые пространства Харди

$$H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R}), \quad p>0.$$

Пусть функция ψ из пространства $C^\infty(\mathbb{R})$ такова, что

$$\operatorname{supp}\psi \subseteq [-1,1] \quad \text{и} \quad \int\limits_{-1}^{1}\psi(y)dy = 0.$$

Для $y\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$ обозначим $\psi_t(y) = (1/t)\psi(y/t)$. Для $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$, $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2_+$, осознанно допуская некоторую неточность обозначений, положим $\psi_t(y)=\psi_{t_1}(y_1)\psi_{t_2}(y_2)$. Через $\Gamma(x)=\Gamma(x_1)\times\Gamma(x_2)$ будем обозначать произведение конусов $\Gamma(x_i) = \{(y_i,t_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \,|\, |y_i-x_i|<t_i\}$. Будем говорить, что ограниченное (см. определение в [38, глава III]) распределение f лежит в $H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, если выполнено соотношение

$$\mathbf{S}(f)(\bullet) := \sqrt{\iint\limits_{\Gamma(\bullet)} |f*\psi_t(y)|^2\frac{dydt}{t_1^2t_2^2}} \;\in\; L^p_w(\mathbb{R}^2).$$

Нам понадобятся также пространства $H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ функций, принимающих значения в гильбертовых пространствах. Они определяются совершенно аналогично: в определении величины $\mathbf{S}(f)$ нужно лишь заменить $|f*\psi_t(y)|^2$ на $\|f*\psi_t(y)\|^2_H$, где $\|\cdot\|_H$ — норма рассматриваемого гильбертова пространства.

3.2.1 Ограниченность операторов в двупараметрических весовых пространствах Харди

Важные для нас вопросы теории весовых пространств Харди на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ рассматривались в недавней статье [29], обобщающей на случай с весом результаты классической работы Р. Феффермана [18]. Отметим, что в работе [29], во-первых, не рассматриваются пространства функций со значениями в гильбертовых пространствах, и во-вторых, атомное разложение доказывается только в одну сторону: не доказано, что весовой атом обязан лежать в $H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Тем не менее, доказательство, представленное в [29], проходит в векторнозначном случае (так мы будем называть случай с функциями, принимающими значения в гильбертовых пространствах) практически без изменений, поэтому мы позволим себе ссылаться на скалярные результаты из [29] в векторнозначном контексте. Кроме того, утверждение о принадлежности весового атома пространству $H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ нам не понадобится: мы будем использовать лишь следующее (не совсем явно) доказанное в статье [29] утверждение.

Утверждение 1. *Пусть оператор T действует из $L^2_w(\mathbb{R}^2)$ в $L^2_w(\mathbb{R}^2)$. Пусть $1/2 < p \leqslant 1$, вес w удовлетворяет двупараметрическому условию Макенхаупта A_2 (определено ниже), и для любого весового p-предатома α, сосредоточенного на прямоугольнике Δ, выполняется оценка*

$$\iint\limits_{(\gamma\cdot\Delta)^c} |(T\alpha)(x_1,x_2)w(x_1,x_2)|dx_1dx_2 \leqslant C\gamma^{-\delta}$$

при фиксированном $\delta>0$ и при любом $\gamma\geqslant 2$. Тогда оператор T действует ограниченно из $H^p_w(\mathbb{R}^2)$ в $L^p_w(\mathbb{R}^2)$. Под "весовыми p-предатомами" понимаются функции α из $L^2_w(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие условиям:

(i) $\operatorname{supp}\alpha\subseteq\Delta$, *где $\Delta = I\times J$ — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат,*

(ii) $\|\alpha\|_{L^2_w(\mathbb{R}^2)} \leqslant w(\Delta)^{1/2-1/p}$,

(iii) $\int_I \alpha(x_1, x_2^0)dx_1 = \int_J \alpha(x_1^0, x_2)dx_2 = 0$ *для любых* $x_1^0 \in I$, $x_2^0 \in J$.

Пусть $1 < r < \infty$. Здесь и далее в этой главе мы будем говорить, что вес $w : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$ удовлетворяет *двупараметрическому условию Макенхаупта* A_r или, по-другому, *условию* A_r *по прямоугольникам*, если оценка

$$\left(\frac{1}{|R|}\int_R w(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)\left(\frac{1}{|R|}\int_R w(x_1,x_2)^{-1/(r-1)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right)^{r-1} \leqslant C$$

выполняется для каждого прямоугольника $R \subseteq \mathbb{R}^2$ со сторонами, параллельными координатным осям. Здесь $|R|$ – площадь прямоугольника R. Если требовать выполнение оценки выше лишь для квадратов, получится однопараметрическое условие Макенхаупта. Далее практически всегда нам будет нужно именно двупараметрическое условие, поэтому мы будем почти всегда опускать слово “двупараметрическое” и писать просто $w \in A_r$, рассчитывая на контекст. Мы также будем писать $w \in A_\infty$, когда $w \in A_r$ хоть для какого-то $1 < r < \infty$.

Если весовые p-предатомы заменить весовыми (N, p)-предатомами, которые определяются аналогично, но с заменой условия (iii) на

$$\int\limits_I \alpha(x_1, x_2^0)x_1^k dx_1 = \int\limits_J \alpha(x_1^0, x_2)x_2^k dx_2 = 0 \quad \forall\ x_1^0 \in I,\ x_2^0 \in J,\ 0 \leqslant k \leqslant N,$$

и если, кроме того, сделать все функции и пространства l^2-значными и потребовать от оператора T ограниченность в L^r_w вместо L^2_w-ограниченности, то можно сформулировать следующую теорему, которой мы на самом деле и будем пользоваться (доказываться она будет совершенно аналогично результату из [29]).

Теорема 19. *Пусть оператор* T *действует из* $L^r_w(\mathbb{R}^2, l^2)$ *в* $L^r_w(\mathbb{R}^2, l^2)$ *для* $1 < r < 2$ *и* $w \in A_r$. *Пусть* $0 < p \leqslant 1$, *и для любого* l^2*-значного весового* (N, p)*-предатома* α, *сосредоточенного на прямоугольнике* Δ, *выполняется оценка*

$$\iint\limits_{(\gamma\cdot\Delta)^c} |(T\alpha)(x_1,x_2)w(x_1,x_2)|dx_1dx_2 \leqslant C\gamma^{-\delta}$$

при фиксированном $\delta > 0$ *и при любом* $\gamma \geqslant 2$. *Тогда оператор* T *действует ограниченно из* $H^p_w(\mathbb{R}^2, l^2)$ *в* $L^p_w(\mathbb{R}^2, l^2)$.

Эта теорема позволит нам доказывать оценки вида $\|Tf\|_{L^p_w} \leqslant C\|f\|_{H^p_w}$, $p \leqslant 1$, нам же нужны будут оценки вида $\|Tf\|_{L^p_w} \leqslant C\|f\|_{L^p_w}$, но для “хороших” функций f. Эту проблему можно решить следующим утверждением.

Лемма 16. *Пусть есть такая последовательность* $f = \{f_k\}$, *что для каждого* k *выполнено* $f_k \in L^1(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} \widehat{f_k} \subseteq \Delta_k \subseteq \mathbb{R}^2_+$, *где* Δ_k *— некоторый прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Тогда для* $0 < p \leqslant 1$, $w \in A_\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *выполнено неравенство* $\|\mathbf{S}f\|_{L^p_w(l^2)} \leqslant C\|f\|_{L^p_w(l^2)}$, *то есть, что то же самое,* $\|f\|_{H^p_w(l^2)} \leqslant C\|f\|_{L^p_w(l^2)}$.

Доказательство. Доказательство будет более или менее следовать рассуждениям в [9, стр. 92–95] но будет проще, благодаря дополнительным условиям, которые мы сразу наложили на f. Так же как и в [9], мы сосредоточимся на случае, когда f — функция, а не последовательность функций, так как по существу это не изменит доказательства и сильно упростит обозначения.

Пусть f как в условии. Напомним, что функция $\mathbf{S}f$, норму которой в пространстве L^p_w нам нужно оценить, выражается следующим образом:

$$(\mathbf{S}f)(x_1, x_2) = \sqrt{\iint\limits_{\Gamma(x_1)\times\Gamma(x_2)} |(f * \psi_t)(y)|^2 \frac{dydt}{t_1^2 t_2^2}}.$$

Основная идея последующего рассуждения состоит в том, чтобы, воспользовавшись структурой функции $\mathbf{S}f$, свести двупараметрическую задачу к двум однопараметрическим.

Введем несколько вспомогательных гильбертовых пространств:

$$\mathcal{H}_{y_1,t_1} = L^2\left(\Gamma(0), \frac{dy_1dt_1}{t_1^2}\right), \quad \mathcal{H}_{y_2,t_2} = L^2\left(\Gamma(0), \frac{dy_2dt_2}{t_2^2}\right)$$

и

$$\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2} = L^2\left(\Gamma(0) \times \Gamma(0), \frac{dy_1dy_2dt_1dt_2}{t_1^2 t_2^2}\right).$$

Зафиксировав x_1, определим функцию g_{x_1} со значениями в пространстве $\mathcal{H}_{y_1,t_1}$ по формуле $g_{x_1}(x_2) := (f(\,\cdot\,, x_2) * \psi_{t_1})(x_1 - y_1)$. Также введем $\mathcal{H}_{y_2,t_2}$-значное ядро $K_2(x_2) = \psi_{t_2}(x_2 - y_2)$ (строго говоря, ядро K_2 принимает значения в пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{y_1,t_1}, \mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2})$ линейных операторов, действующих из пространства $\mathcal{H}_{y_1,t_1}$ в пространство $\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2}$, но в нашем случае этот факт вполне можно игнорировать). Заметим, что тогда

$$\|\mathbf{S}(f)\|^p_{L^p_w} = \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \|(g_{x_1} * K_2)(x_2)\|^p_{\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2}} w(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$$

и подынтегральное выражение можно рассматривать как результат действия сингулярного интегрального оператора с ядром K_2, причем этот оператор одномерный (действует только по переменной x_2), но векторнозначный. Далее нам бы хотелось воспользоваться его ограниченностью в каком-нибудь подходящем смысле. Несмотря на то, что это довольно естественный и ожидаемый результат, найти подходящий источник для ссылок не так просто: теория векторнозначных сингулярных интегральных операторов даже в одномерных пространствах Харди с весом нигде, по-видимому, систематически не изложена. Поэтому мы воспользуемся результатом сформулированной ниже теоремы 20, которая не совсем явно доказана в [4].

Для того, чтобы записать условие теоремы 20, нам понадобится ввести в рассмотрение новый объект. Пусть $0 < p \leqslant 1$ и пусть E — некоторое сепарабельное гильбертово пространство. Символом $\mathfrak{H}^p_w(E)$ мы будем обозначать пространство Харди E-значных голоморфных функций одной комплексной переменной на верхней полуплоскости, а точнее, их граничных значений. Более точно, функция $f : \mathbb{R} \to E$ лежит в $\mathfrak{H}^p_w(E)$, если $f(x) = \lim_{t\to 0+} F(x+it)$ для почти всех x из $\mathbb{R}$, где F — некоторая голоморфная E-значная функция на верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$, и выполняется условие

$$\|f\|_{\mathfrak{H}^p_w(E)} := \sup_{t>0} \left(\int\limits_R \|F(x+it)\|^p_E w(x) dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Мы отсылаем читателя к [4, стр. 183], где такие пространства вводятся и обсуждаются подробнее (правда, только в случае $E = l^2$, что, по сути, не имеет значения). Отметим, что для таких пространств остается справедливой большая часть теории из [20].

Теорема 20. *Пусть E, F — какие-то сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $T : L^2(E) \to L^2(F)$ — сингулярный интегральный оператор, ядро $K(x,y)$ которого допускает при каждом $n \geqslant 0$ стандартную оценку (и такую же оценку с заменой ролей переменных)*

$$\|K(x,y) - p_I(x,y)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \frac{c_n |I|^{n+1}}{|x-y_0|^{n+2}}, \quad y \in I, \quad x \notin 2I,$$

где I — произвольный конечный интервал в $\mathbb{R}$, y_0 — его центр, а $p_I(x,y)$ — некоторая функция со значениями в $\mathcal{L}(E,F)$, являющаяся полиномом степени не выше n по y. Тогда T действует из $L^r_u(E)$ в $L^r_u(F)$ при любом $r > 1$ и любом $u \in A_r$, а также из $\mathfrak{H}^p_u(E)$ в $L^p_u(F)$ при $0 < p \leqslant 1$.

Проверим условие этого утверждения для оператора свертки с ядром K_2. Зафиксируем $n \geqslant 1$, $I \subseteq \mathbb{R}$, пусть u_0 — центр отрезка I, P_{x-u_0} — n-й полином

Тейлора для $K_2(\,\cdot\,)$ с центром в точке $x-u_0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|K_2(x-u)-p_I(x,u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{y_1,t_1},\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2})} &= \|K_2(x-u)-p_I(x,u)\|_{\mathcal{H}_{y_2,t_2}}\\ &= \left\|\frac{|u-u_0|^{n+1}}{(n-1)!}K_2^{(n+1)}(\theta)\right\|_{\mathcal{H}_{y_2,t_2}},\end{aligned}$$

где θ — некоторое число между $x-u_0$ и $x-u$. Хорошо известно, что для ядер вида K_2 выполнены условия гладкости вида

$$\left\|\left(K_2^{(r)}\right)(\theta)\right\|_{\mathcal{H}_{y_2,t_2}} \leqslant C_r\frac{1}{|\theta|^{r+1}}.$$

Вспоминая, что $u\in I$, u_0 центр отрезка I, а $x\notin 2I$, получаем соотношение $|x-u|\leqslant|x-u_0|\leqslant 2|x-u|$, откуда для θ, находящихся между $x-u_0$ и $x-u$, выводится $\frac{1}{|\theta|}\leqslant\frac{c}{|x-u_0|}$. Теперь можем продолжить оценку

$$\begin{aligned}&|K_2(x-u)-p_I(x,u)|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_{y_1,t_1},\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2})}\\ &\qquad\leqslant \left\|\frac{|u-u_0|^{n+1}}{(n-1)!}K_2^{(n+1)}(\theta)\right\|_{\mathcal{H}_{y_2,t_2}}\\ &\qquad\leqslant C_n\frac{|u-u_0|^{n+1}}{|\theta|^{n+2}}\leqslant C_n\frac{|u-u_0|^{n+1}}{|x-u_0|^{n+2}}\leqslant C_n\frac{|I|^{n+1}}{|x-u_0|^{n+2}},\end{aligned}$$

где последний переход оправдан тем, что u и u_0 лежат в I.

Из только что доказанной оценки после применения теоремы получаем, что оператор свертки с ядром K_2 ограниченно действует из $\mathfrak{H}^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathcal{H}_{y_1,t_1})$ в $L^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathbb{R},\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2})$, где, напомним, $\mathfrak{H}^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathcal{H}_{y_1,t_1})$ — пространство граничных значений $\mathcal{H}_{y_1,t_1}$-значных аналитических функций. В следующих выкладках мы пользуемся ограниченностью этого оператора, а также тем, что $g_{x_1}(\,\cdot\,)\in\mathfrak{H}^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}$ и оценкой

$$\|g_{x_1}(\,\cdot\,)\|^p_{\mathfrak{H}^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathcal{H}_{y_1,t_1})}\leqslant C\|g_{x_1}(\,\cdot\,)\|^p_{L^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathbb{R},\mathcal{H}_{y_1,t_1})},$$

которые получаются из несложного обобщения леммы 1 статьи [4] со случая l^2-значных аналитических функций на случай $\mathcal{H}_{y_1,t_1}$-значных аналитических функций (подробности мы здесь опускаем). Отметим, что именно здесь мы пользуемся тем, что носитель преобразования Фурье функции f лежит в прямоугольнике — без этого воспользоваться леммой 1 статьи [4] не получилось бы. Итак,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{S}(f)\|^p_{L^p_w} &= \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |(g_{x_1} * K_2)(x_2)|^p_{\mathcal{H}_{y_1,y_2,t_1,t_2}} w(x_1,x_2)dx_2dx_1 \\ &\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}} \|g_{x_1}(\,\cdot\,)\|^p_{H^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathbb{R},\mathcal{H}_{y_1,t_1})} dx_1 \\ &\leqslant C\int\limits_{\mathbb{R}} \|g_{x_1}(\,\cdot\,)\|^p_{L^p_{w(x_1,\,\cdot\,)}(\mathbb{R},\mathcal{H}_{y_1,t_1})} dx_1 \\ &= C\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |g_{x_1}(x_2)|^p_{\mathcal{H}_{y_1,t_1}} w(x_1,x_2)dx_2dx_1.\end{aligned}$$

Далее, можно представить $g_{x_1}(x_2)$ как свертку f с ядром

$$K_1(x_1) = \psi_{t_1}(x_1 - y_1),$$

поменять порядок интегрирования и, воспользовавшись той же самой теорией, доказать наконец оценку

$$\|\mathbf{S}(f)\|^p_{L^p_w} \leqslant \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_2dx_1.$$

□

3.3 Формулировка основной теоремы и ее сведение к ограниченности вспомогательных операторов S и R

Основная теорема. *Пусть задана последовательность функций f_k такая, что $f_k \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\operatorname{supp}\widehat{f_k} \subseteq \Delta_k$, где Δ_k — непересекающиеся прямоугольники в $\mathbb{R}^2$ со сторонами, параллельными осям координат. Пусть r число в интервале (1,2), а w — вес, удовлетворяющий условию α_r:*

$$\sup_R \left(\frac{1}{|R|}\int_R w^{-\frac{1}{r-1}}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{|R|}\int_R w^{\frac{2}{2-r}}\right)^{\frac{2-r}{2}} < \infty, \qquad (\alpha_r)$$

где верхняя грань берется по всем прямоугольникам (не только квадратам!) $R \subseteq \mathbb{R}^2$ со сторонами, параллельными координатным осям. Тогда при $0 < p \leqslant r$ выполняется неравенство

$$\Big\|\sum\nolimits_k f_k\Big\|_{L^p_w} \leqslant C_{p,w}\|\{f_k\}_k\|_{L^p_w(l^2)}.$$

Замечание. Это точная формулировка неравенства (7) из введения.

Замечание. Напомним, что условие α_r достаточно естественно, так как является в некотором смысле двойственным к условию $A_{s/2}$. Действительно, в размерности $n = 1$ условие $b \in A_{s/2}$ при $s > 2$, как показал Рубио де Франсиа, достаточно для того, чтобы выполнялся весовой аналог неравенства (3). Нетрудно проследить, что из этого, по двойственности, следует справедливость весового аналога неравенства (4) как раз при условии α_r, где r — сопряженный с s индекс, то есть $1/r + 1/s = 1$.

Далее следует сведение основной теоремы к вопросу об ограниченности некоторых специальных операторов. Это делается абсолютно аналогично безвесовому случаю, так что оставшаяся часть раздела будет практически дословно повторять §4 статьи [8]. Мы приводим эти рассуждения для полноты и для фиксации обозначений.

Так как все наши оценки не будут зависеть от числа прямоугольников Δ_m, то мы можем считать, что их множество конечно. Вначале рассмотрим частный случай, когда все прямоугольники Δ_m могут быть получены из некоторых диадических путем увеличения длин сторон в 8 раз с сохранением координат левой нижней вершины. То есть каждому прямоугольнику Δ_m мы можем сопоставить такой мультииндекс

$$(k, j) = (k_1, k_2, j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^4,$$

что

$$\Delta_m = \left[j_1 2^{k_1}, (j_1 + 8)2^{k_1}\right] \times \left[j_2 2^{k_2}, (j_2 + 8)2^{k_2}\right].$$

Также предположим, что $\operatorname{supp} \widehat{f}_m \subseteq \frac{3}{4}\Delta_m$.

Теперь докажем теорему для описанного частного случая. Пусть $\mathcal{A}$ — это множество мультииндексов, соответствующих прямоугольникам Δ_m. Пусть

$$h = \{h_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4} \in L^2(\mathbb{R}^2, l^2).$$

Нам потребуется оператор S (не путать с квадратичной функцией $\mathbf{S}$!), который задается формулой

$$S(h)(x_1, x_2) = \sum_{(k,j)\in\mathcal{A}} e^{2\pi i j_1 2^{k_1} x_1} e^{2\pi i j_2 2^{k_2} x_2} (\Phi_k * h_{k,j})(x_1, x_2),$$

где $\Phi_k(x_1,x_2) = \varphi_{k_1}(x_1)\varphi_{k_2}(x_2)$, а функции φ_n, в свою очередь, определяются так: пусть φ — такая функция из класса Шварца на $\mathbb{R}$, что ее преобразование Фурье неотрицательно и равно нулю вне отрезка $[0,8]$ и единице на отрезке $[1,7]$, тогда $\varphi_n(t) = 2^n\varphi(2^n t)$.

Лемма 17. *Пусть $w \in \alpha_r$ для $1 < r < 2$, тогда оператор S действует ограниченно из $H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, l^2)$ в $L^p_w(\mathbb{R}^2)$ для $0 < p \leqslant r$, причем оценочная постоянная зависит только от p и веса w.*

Доказательство этой леммы мы временно отложим. Покажем, что если она верна, то наша теорема доказана для описанного частного случая. Пусть $g_{k,j} \equiv 0$, если $(k,j) \notin \mathcal{A}$, и

$$g_{k,j}(x_1,x_2) = e^{-2\pi i j_1 2^{k_1} x_1} e^{-2\pi i j_2 2^{k_2} x_2} f_m(x_1,x_2),$$

если мультииндекс $(k,j) \in \mathcal{A}$ соответствует прямоугольнику Δ_m. Заметим, что носители преобразований Фурье ненулевых функций $g_{k,j}$ лежат в прямоугольниках

$$\frac{3}{4}\cdot\Delta_m - \big(j_1 2^{k_1}, j_2 2^{k_2}\big) = \big[2^{k_1}, 7\cdot 2^{k_1}\big] \times \big[2^{k_2}, 7\cdot 2^{k_2}\big].$$

Отсюда по теореме Планшереля следует, что $g_{k,j} = \Phi_k * g_{k,j}$. Обозначим $g = \{g_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4}$. Учитывая только что сказанное и, пользуясь леммой 16 и леммой 17, получаем

$$\Big\|\sum\nolimits_m f_m\Big\|_{L^p_w} = |S(g)|_{L^p_w} \leqslant C_p |g|_{H^p_w(l^2)} \leqslant C'_p |g|_{L^p_w(l^2)} = C'_p |\{f_m\}|_{L^p_w(l^2)}.$$

Таким образом, выполняется нужная оценка.

Теперь сведем теорему к рассмотренному частному случаю. Нам потребуется еще один вспомогательный оператор. Пусть ψ — функция из класса Шварца на $\mathbb{R}$ такая, что $\widehat{\psi} \geqslant 0$ и $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subseteq [A^{-1}, A]$, где $A > 1$. Положим $\psi_n(t) = A^n\psi(A^n t)$, $n \geqslant 0$. Заметим, что $\operatorname{supp}\psi_n \subset \big[A^{n-1}, A^{n+1}\big]$. Пусть $\Psi_{k_1,k_2}(x_1,x_2) = \psi_{k_1}(x_1)\psi_{k_2}(x_2)$ и $\{h_m\} \in L^2\big(\mathbb{R}^2, l^2\big)$, тогда нужный нам оператор R будет задаваться формулой

$$R(h_1,h_2,\dots) = (r(h_1), r(h_2), \dots),$$

где

$$r(h_m) = \{h_m * \Psi_{k_1,k_2}\}_{k_1,k_2=0}^{L}.$$

Лемма 18. *Пусть $w \in \alpha_r$ для $1 < r < 2$, тогда оператор R действует ограниченно из $H^p_w(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, l^2)$ в $L^p_w(\mathbb{R}^2, l^2)$ для $0 < p \leqslant r$, причем оценочная постоянная не зависит от L.*

Доказательство этой леммы мы также отложим. Покажем, как, используя оператор R, перейти к частному случаю, рассмотренному ранее. Для начала заметим, что растяжением можно добиться (без потери общности) того, чтобы длины отрезков, произведениями которых являются прямоугольники Δ_m, были не меньше 1. Зафиксируем число A, достаточно близкое к единице, а функцию ψ выберем так, чтобы $\sum_{n\geqslant 0}\widehat{\psi}_n(t) = 1$, при $t \geqslant 1$. Обозначив $\theta = (1{,}1)$, введем функции

$$g_m(x) = e^{-2\pi i\langle a_m-\theta, x\rangle} f_m(x),$$

где a_m — левые нижние вершины прямоугольников Δ_m. "Измельчив" носители функций g_m с помощью оператора R и сместив их обратно, получим функции

$$f_{m,k_1,k_2}(x) = e^{2\pi i\langle a_m-\theta, x\rangle}(g_m * \Psi_{k_1,k_2})(x),$$

причем $f_m = \sum_{k_1,k_2} f_{m,k_1,k_2}$ (при каждом m суммирование обрывается на конечном числе слагаемых — когда носитель функции $\widehat{\Psi}_{k_1,k_2}$ покидает прямоугольник Δ_m). Рассматривая тройную последовательность $\{f_{m,k_1,k_2}\}$ как функцию из пространства $L^p_w\big(\mathbb{R}^2, l^2\big)$ и пользуясь леммами 16 и 18, получаем

$$\begin{aligned}|\{f_{m,k_1,k_2}\}|_{L^p_w(l^2)} &= |R(\{g_m\})|_{L^p_w(l^2)} \\ &\leqslant C_{p,A}|\{g_m\}|_{H^p_w(l^2)} \leqslant C'_{p,A}|\{g_m\}|_{L^p_w(l^2)} = C'_{p,A}|\{f_m\}|_{L^p_w(l^2)}.\end{aligned}$$

Далее, пусть M — фиксированное достаточно большое натуральное число (например, $M = 100$). Разобьем последовательность $\{f_{m,k_1,k_2}\}$ на N^2 подпоследовательностей — в соответствии с остатками от деления индексов k_1 и k_2 на N в каждой группе (то есть при одном значении m). Учитывая сказанное выше, теорему достаточно доказать отдельно для каждой подпоследовательности. Если в такой подпоследовательности из каждой группы исключить функции, у которых максимален один из индексов k_1 или k_2, то носители оставшихся функций можно поместить в непересекающиеся прямоугольники, соответствующие частному случаю, описанному выше (если выбрать число A достаточно близким к единице). Для того чтобы разобраться с оставшимися функциями, разобьем их носители еще раз, сместив правые верхние вершины соответствующих прямоугольников в точку $(-1, -1)$. Далее применим технику, описанную выше (но работая с функциями, антианалитическими по двум переменным).

3.4 Доказательство основной теоремы: ограниченность операторов S и R в L^p_w, $1<p<2$

Оператор R есть тензорное произведение своих одномерных аналогов, так что его ограниченность получить весьма просто (весовая ограниченность одномерных аналогов оператора R была доказана в статье [4]). Поэтому мы сосредоточимся на операторе S.

Оператор S действует из $L^2(\mathbb{R}^2, l^2_{\mathbb{Z}^4})$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ — это простое следствие теоремы Планшереля. Рассмотрим оператор S^*, сопряженный с оператором S. Если мы докажем, что S^* действует из $L^q_w(\mathbb{R}^2)$ в $L^q_w(\mathbb{R}^2, l^2_{\mathbb{Z}^4})$ при $q>2$ и при $w\in A^{q/2}$, то, по двойственности, получим

$$S : L^p_u(\mathbb{R}^2, l^2_{\mathbb{Z}^4}) \to L^p_u(\mathbb{R}^2) \ \text{ при } \ 1<p<2 \ \text{ и } \ u \in \alpha_p.$$

В одномерном случае ограниченность оператора S^* из $L^q_w(\mathbb{R}^2)$ в $L^q_w(\mathbb{R}^2, l^2_{\mathbb{Z}^2})$ проверяется так. Доказывается поточечная оценка

$$(S^* f)^{\#}(x) \leqslant (M|f|^2)^{1/2}(x),$$

здесь M — максимальная функция Харди–Литлвуда, а символом “ # ” обозначается так называемая *максимальная функция Фефферманa–Стейна*, которая определяется формулой

$$h^{\#}(x) = \sup_{I\ni x} \frac{1}{|I|}\int\limits_I \|h(\,\cdot\,) - h_I\|, \qquad h_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I h(\,\cdot\,),$$

где супремум берется по всевозможным отрезкам, содержащим точку x. Из нее стандартным образом получается, что

$$\left\|(S^* f)^{\#}\right\|_{L^q_w} \leqslant \left\|(M|f|^2)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q_w} \leqslant \|f\|_{L^q_w}$$

для тех весов, для которых ограниченно действует $(M|f|^2)^{1/2}$. То, что для любой функции h, ее L^q_w-норма сравнима с L^q_w-нормой функции $h^{\#}(\,\cdot\,)$, дает в итоге нужную оценку.

В двумерном случае такая цепочка рассуждений априори была бы невозможна: утверждение о сравнимости L^q_w-нормы $h(\,\cdot\,)$ с L^q_w-нормой функции $h^{\#}(\,\cdot\,)$ здесь неверно [17] (не говоря уже о том, что саму *максимальную функцию Фефферманa–Стейна* можно определять несколькими способами). Тем не менее, что-то подобное нам все же удастся сделать. Пусть

$$\operatorname{osc}_R(f) = \inf_{f_1, f_2} \left(\frac{1}{|R|} \iint\limits_R |f(x_1,x_2) - f_1(x_1) - f_2(x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2}.$$

В [17] доказано, что если оператор T ограничен в L^2 без веса, и если существует такое $\delta > 0$, что для любой функции f с носителем вне растянутого в γ раз прямоугольника R выполняется оценка

$$\operatorname{osc}_R(Tf) \leqslant \gamma^{-\delta} (M_s f^2)^{1/2}(x) \quad \text{для любого } x \in R,$$

то оператор T ограничен в L^q_u для $2 < q < \infty$ и для $u \in A^{q/2}$. Здесь M_s — *сильный максимальный оператор*, который определяется формулой

$$M_s(f)(x_1, x_2) = \sup_{R \ni (x_1, x_2)} \frac{1}{|R|} \int\limits_R |f(y_1, y_2)| dy_1 dy_2,$$

где супремум берется по всевозможным прямоугольникам (не только квадратам!), содержащим точку (x_1, x_2) (см. подробнее, например, в [17]). Эту оценку мы и будем проверять.

Пусть $R = I \times J$. Отметим, для начала, что любую функцию f с носителем вне γR можно представить в виде $f = f_1 + f_2 + f_3$, где

$$\operatorname{supp} f_1 \subseteq (\gamma I)^c \times (\gamma J)^c, \quad \operatorname{supp} f_2 \subseteq (\gamma I)^c \times \gamma J, \quad \operatorname{supp} f_3 \subseteq \gamma I \times (\gamma J)^c,$$

а соотношение $\operatorname{osc}_R(Tf) \leqslant \gamma^{-\delta} (M_s f^2)^{1/2}(x)$, конечно, достаточно доказать для каждой f_i по отдельности, как мы и поступим.

Итак, имеем оператор $S^* : L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, l^2_{\mathbb{Z}^4})$, действующий на $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ следующим образом:

$$\begin{aligned}(S^* f)&(x_1, x_2) \\ &= \left\{ \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k, j) \Big(\Phi_{k_1,k_2}(\bullet_1, \bullet_2) * \Big(e^{-2\pi i (j_1 2^{k_1} \bullet_1 + j_2 2^{k_2} \bullet_2)} f(\bullet_1, \bullet_2) \Big) \Big)(x_1, x_2) \right\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^4},\end{aligned}$$

ядром которого является

$$\begin{aligned}K_{S^*}&(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ &= \left\{ \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k, j) \Phi_{k_1,k_2}(x_1 - y_1, x_2 - y_2) e^{-2\pi i (j_1 2^{k_1} y_1 + j_2 2^{k_2} y_2)} \right\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^4}.\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала f_1. Для упрощения обозначений, вместо f_1 будем писать просто f, считая, что носитель этой функции лежит в $(\gamma I)^c \times (\gamma J)^c$. Кроме того, без ограничения общности, будем предполагать, что $\gamma = 2^a$ и введем обозначения $I_s = 2^{s+1}I \setminus 2^s I$, $J_s = 2^{s+1}J \setminus 2^s J$. Пусть x_1^0 и x_2^0 — центры отрезков I и J соответственно. Тогда

$$\operatorname{osc}_R(S^*f) \leqslant \frac{1}{|I|^{1/2}} \frac{1}{|J|^{1/2}} \Big(\int\limits_I \int\limits_J \big\| (S^*f)(x_1, x_2) - (S^*f)(x_1^0, x_2) \\ - (S^*f)(x_1, x_2^0) + (S^*f)(x_1^0, x_2^0) \big\|^2_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} dx_2 dx_1 \Big)^{1/2} = \dots .$$

Заметим, что под знаком нормы оказался некий оператор $\widetilde{S^*}$ с ядром

$$K_{\widetilde{S^*}}(x_1, x_2, y_1, y_2) \\ = \Big\{ \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k,j) \widetilde{\Phi}_{k_1,k_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) e^{-2\pi i j_1 2^{k_1} y_1} e^{-2\pi i j_2 2^{k_2} y_2} \Big\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4},$$

где

$$\widetilde{\Phi}_{k_1,k_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \Phi_{k_1,k_2}(x_1 - y_1, x_2 - y_2) - \Phi_{k_1,k_2}(x_1^0 - y_1, x_2 - y_2) \\ - \Phi_{k_1,k_2}(x_1 - y_1, x_2^0 - y_2) + \Phi_{k_1,k_2}(x_1^0 - y_1, x_2^0 - y_2).$$

При этом, если вспомнить, что

$$\Phi_{k_1,k_2}(x_1 - y_1, x_2 - y_2) = \varphi_{k_1}(x_1 - y_1)\varphi_{k_2}(x_2 - y_2),$$

то $\widetilde{\Phi}_{k_1,k_2}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ перепишется следующим образом:

$$\widetilde{\Phi}_{k_1,k_2}(x_1, y_1, x_2, y_2) = (\varphi_{k_1}(x_1 - y_1) - \varphi_{k_1}(x_1^0 - y_1))(\varphi_{k_2}(x_2 - y_2) - \varphi_{k_2}(x_2^0 - y_2)).$$

Это позволит нам в дальнейшем два раза последовательно применить "одномерную" лемму 4 из [8].

Распишем $L^2(I \times J)$-норму по двойственности:

$$\dots = \frac{1}{|I|^{1/2}} \frac{1}{|J|^{1/2}} \sup_{g \in L^2(I\times J, l^2_{\mathbb{Z}^4});\, \|g\| \leqslant 1} \int\limits_I \int\limits_J \big\langle g(x_1, x_2), (\widetilde{S^*}f)(x_1, x_2) \big\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} dx_2 dx_1.$$

Чтобы упростить обозначения, рассмотрим лишь выражение, следующее после супремума. Раскроем в нем определение $\widetilde{S^*}f$, вытащим появившиеся интегралы по $(\gamma I)^c$ и по $(\gamma J)^c$ за скалярное произведение и распишем их как суммы интегралов по I_s и J_s. Получится

$$\int\limits_I \int\limits_J \sum_{s_1=a}^{\infty} \sum_{s_2=a}^{\infty} \int\limits_{I_{s_1}} \int\limits_{J_{s_2}} \big\langle g(x_1, x_2), K_{\widetilde{S^*}}(x_1, x_2, y_1, y_2) \big\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} \\ \times \overline{f(y_1, y_2)} dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 \leqslant \dots .$$

Применим к внутреннему двойному интегралу неравенство Гёльдера:

$$\ldots \leqslant \int\limits_I \int\limits_J \sum_{s_1=a}^{\infty} \sum_{s_2=a}^{\infty} \Biggl(\int\limits_{I_{s_1}} \int\limits_{J_{s_2}} \Bigl| \langle g(x_1,x_2), K_{\widetilde{S^*}}(x_1,x_2,y_1,y_2) \rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} \Bigr|^2 dy_2 dy_1 \Biggr)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \Biggl(\int\limits_{I_{s_1}} \int\limits_{J_{s_2}} |f(y_1,y_2)|^2 dy_2 dy_1 \Biggr)^{\frac{1}{2}} dx_2 dx_1 \leqslant \ldots .$$

Заметим, что величина $\langle g(x_1,x_2), K_{\widetilde{S^*}}(x_1,x_2,y_1,y_2) \rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^4}}$ равняется

$$\sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4} g_{k,j}(x_1,x_2) \overline{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k,j) \widetilde{\Phi}_{k_1,k_2}(x_1,y_1,x_2,y_2) e^{-2\pi i (j_1 2^{k_1} y_1 + j_2 2^{k_2} y_2)}}$$

$$= \sum_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} (\varphi_{k_1}(x_1-y_1) - \varphi_{k_1}(x_1^0 - y_1)) e^{2\pi i j_1 2^{k_1} y_1} \overline{\widetilde{g}_{k_1,j_1}(x_1,x_2,y_1,y_2)}$$

$$= \Bigl\langle \Bigl\{ (\varphi_{k_1}(x_1-y_1) - \varphi_{k_1}(x_1^0 - y_1)) e^{2\pi i j_1 2^{k_1} y_1} \Bigr\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2},$$

$$\{\widetilde{g}_{k_1,j_1}(x_1,x_2,y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \Bigr\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^2}},$$

где $\widetilde{g}_{k_1,j_1}(x_1,x_2,y_1,y_2)$ — это

$$\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2} \overline{g_{k,j}(x_1,x_2)}\, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k,j) (\varphi_{k_2}(x_2-y_2) - \varphi_{k_2}(x_2^0 - y_2)) e^{-2\pi i j_2 2^{k_2} y_2}$$

$$= \Bigl\langle \Bigl\{ (\varphi_{k_2}(x_2-y_2) - \varphi_{k_2}(x_2^0 - y_2)) e^{-2\pi i j_2 2^{k_2} y_2} \Bigr\}_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2},$$

$$\Bigl\{ \overline{g_{k_1,k_2,j_1,j_2}(x_1,x_2,y_1,y_2)}\, \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,j_1,j_2) \Bigr\}_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2} \Bigr\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^2}}.$$

Из выведенного выше представления ясно, что, дважды воспользовавшись леммой 4 из [8], можно получить

$$\ldots \leqslant \int\limits_I \int\limits_J \sum_{s_1=a}^{\infty} \sum_{s_2=a}^{\infty} C_0^2 2^{-B_0(s_1+s_2)} |I|^{-1/2} |J|^{-1/2} |g(x_1,x_2)|_{l^2_{\mathbb{Z}^4}}$$

$$\times \Biggl(\int\limits_{I_{s_1}} \int\limits_{J_{s_2}} |f(y_1,y_2)|^2 dy_2 dy_1 \Biggr)^{\frac{1}{2}} dx_2 dx_1.$$

Отметим, что нам в дальнейшем понадобится условие $B_0 > 1/2$, которое, если заглянуть в само рассуждение из [8], не выполняется. Это не является реальной проблемой, так как в статье [10] (см. в ней лемму 6.4) посредством более тонкой оценки был получен аналог леммы 4 из [8] с $B_0 = 3/2$.

Итак, благодаря неравенству $\|g\|_{L^2(I\times J)} \leqslant 1$, имеем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{osc}_R(S^*f)\\
&\leqslant \frac{1}{|I|^{1/2}}\frac{1}{|J|^{1/2}}\sum_{s_1=a}^{\infty}\sum_{s_2=a}^{\infty} C_0^2 2^{-B_0(s_1+s_2)}\Bigl(\int\limits_{I_{s_1}}\int\limits_{J_{s_2}} |f(y_1,y_2)|^2 dy_2dy_1\Bigr)^{\frac12}\\
&\leqslant C\sum_{s_1=a}^{\infty}\sum_{s_2=a}^{\infty} 2^{-(B_0-1/2)(s_1+s_2)}\\
&\qquad\times\Bigl(\frac{1}{2^{s_1+1}|I|}\frac{1}{2^{s_2+1}|J|}\int\limits_{|y_1-y_1^0|<2^{s_1}|I|}\ \int\limits_{|y_2-y_2^0|<2^{s_2}|J|} |f(y_1,y_2)|^2dy_2dy_1\Bigr)^{\frac12}\\
&\leqslant C2^{-(B_0-1/2)2a}(M_sf^2)^{\frac12}(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2}) = C\gamma^{-\delta}\bigl(M_sf^2\bigr)^{\frac12}(\widetilde{y_1},\widetilde{y_2}),
\end{aligned}
$$

где y_1^0 и y_2^0 — центры отрезков I и J, а $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ произвольные точки из I и из J. Утверждение доказано.

Перейдем к рассмотрению f_2. Сохраним те же обозначения и соглашения, которые мы установили перед рассмотрением f_1. Теперь, соответственно, будем считать, что носитель f лежит в $\boldsymbol{\gamma} I\times(\boldsymbol{\gamma} J)^c$. Пусть x_2^0 — центр отрезка J. Тогда

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{osc}_R(S^*f)\\
&\leqslant \frac{1}{|I|^{1/2}}\frac{1}{|J|^{1/2}}\Bigl(\int\limits_{I}\int\limits_{J}\bigl\|(S^*f)(x_1,x_2)-(S^*f)(x_1,x_2^0)\bigr\|^2_{l^2_{\mathbb{Z}^4}}dx_2dx_1\Bigr)^{1/2} = \dots .
\end{aligned}
$$

Распишем $L^2(I\times J)$-норму по двойственности.

$$
\begin{aligned}
\dots = \frac{1}{|I|^{1/2}}\frac{1}{|J|^{1/2}}\sup_{g\in L^2(I\times J,l^2_{\mathbb{Z}^4});\,\|g\|\leqslant 1}\int\limits_{I}\int\limits_{J}\Bigl\langle g(x_1,x_2),&\\
(S^*f)(x_1,x_2)-(S^*f)(x_1,x_2^0)\Bigr\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^4}}&dx_2dx_1.
\end{aligned}
$$

Чтобы упростить обозначения, рассмотрим лишь выражение, следующее после супремума. Раскроем в нем определение функции S^*f, вытащим появившиеся интегралы по $\boldsymbol{\gamma} I$ и по $(\boldsymbol{\gamma} J)^c$ за скалярное произведение и распишем последний как сумму интегралов по J_s. Получится

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=a}^{\infty}\int\limits_{\gamma I}\int\limits_{J_s}\Bigl(\int\limits_{I}\int\limits_{J}\langle g(x_1,x_2), K_{S^*}(x_1,x_2,y_1,y_2)&\\
-K_{S^*}(x_1,x_2^0,y_1,y_2)\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^4}}dx_2dx_1\Bigr)&\overline{f(y_1,y_2)}dy_2dy_1 = \dots .
\end{aligned}
$$

Пусть $h = \{h_{k_1,j_1}\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}$, определим вспомогательные операторы S_{k_2,j_2}:

$$(S_{k_2,j_2}h)(x_1) = \sum_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(k_1,k_2,j_1,j_2)e^{-2\pi i 2^{k_1}j_1x_1}(\varphi_{k_1} * h_{k_1,j_1})(x_1).$$

Заметим, что при фиксированных индексах k_2, j_2 у прямоугольников

$$\Delta_m = I_m \times J_m,$$

соответствующих мультииндексам $(k_1,k_2,j_1,j_2)\in\mathcal{A}$, будут совпадать отрезки $J_m = [j_2 2^{k_2}, (j_2+8)2^{k_2}]$, а значит, отрезки $I_m = [j_1 2^{k_1}, (j_1+8)2^{k_1}]$ будут попарно не пересекающимися (так как Δ_m попарно не пересекающиеся прямоугольники). Отсюда по теореме Планшереля получаем, что операторы S_{k_2,j_2} ограничены в L^2. Введем также обозначения

$$\kappa(x,y) = \left\{e^{2\pi i 2^k jx}\varphi_k(x-y)\right\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2} \tag{3.1}$$

и

$$\xi(x_2,y_1) = \left\{S_{k_2,j_2}(\{g_{k_1,k_2,j_1,j_2}(\,\cdot\,,x_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2})(y_1)\right\}_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}. \tag{3.2}$$

Теперь можем переписать оцениваемое выражение в следующем виде.

$$\cdots = \sum_{s=a}^{\infty} \int\limits_{\gamma I}\int\limits_{J_s}\left(\int\limits_{J}\left\langle \kappa(y_2,x_2)-\kappa(y_2,x_2^0),\xi(x_2,y_1)\right\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^2}} dx_2\right) \times \overline{f(y_1,y_2)}dy_2dy_1 \leqslant \ldots .$$

Поменяем местами интегралы и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\ldots \leqslant \sum_{s=a}^{\infty} \int\limits_{\gamma I}\int\limits_{J}\left(\int\limits_{J_s}\left|\langle \kappa(y_2,x_2)-\kappa(y_2,x_2^0),\xi(x_2,y_1)\rangle_{l^2_{\mathbb{Z}^2}}\right|^2 dy_2\right)^{\frac12} \times \left(\int\limits_{J_s}|f(y_1,y_2)|^2dy_2\right)^{\frac12}dx_2dy_1 \leqslant \ldots .$$

Воспользовавшись леммой 4 из [8] (с той же оговоркой, которую мы делали при рассмотрении f_1), получим

$$\ldots \leqslant \sum_{s=a}^{\infty} \int\limits_{\gamma I}\int\limits_{J} C_0 2^{-sB_0}|J|^{-1/2}|\xi(x_2,y_1)|_{l^2_{\mathbb{Z}^2}}\left(\int\limits_{J_s}|f(y_1,y_2)|^2dy_2\right)^{\frac12}dx_2dy_1$$

$$= \sum_{s=a}^{\infty} C_0 2^{-sB_0}|J|^{-1/2}\int\limits_{\gamma I}\left(\int\limits_{J}|\xi(x_2,y_1)|_{l^2_{\mathbb{Z}^2}}dx_2\right)\left(\int\limits_{J_s}|f(y_1,y_2)|^2dy_2\right)^{\frac12}dy_1 \leqslant \ldots .$$

Снова применим неравенство Гёльдера и внесем норму под знак интеграла

$$\ldots \leqslant \sum_{s=a}^{\infty} C_0 2^{-sB_0} |J|^{-1/2} \int\limits_J \Bigg(\int\limits_{\gamma I} |\xi(x_2, y_1)|^2_{l^2_{\mathbb{Z}^2}} dy_1 \Bigg)^{\frac{1}{2}} dx_2$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{\gamma I} \int\limits_{J_s} |f(y_1, y_2)|^2 dy_2 dy_1 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant \ldots .$$

Вспоминая определение $\xi(x_2, y_1)$, пользуясь ограниченностью S_{k_2,j_2} в L^2 и неравенством Гёльдера, получаем

$$\ldots \leqslant \sum_{s=a}^{\infty} C_0 2^{-sB_0} |J|^{-1/2} |J|^{1/2} \Bigg(\int\limits_I \int\limits_J |g(y_1, x_2)|^2_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} dx_2 dy_1 \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{\gamma I} \int\limits_{J_s} |f(y_1, y_2)|^2 dy_2 dy_1 \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, благодаря неравенству $\|g\|_{L^2(I\times J)} \leqslant 1$, выполняется оценка

$$\begin{aligned}
&\mathrm{osc}_R(S^* f) \\
&\leqslant \frac{1}{|I|^{1/2}} \frac{1}{|J|^{1/2}} \sum_{s=a}^{\infty} C_0 2^{-sB_0} \Bigg(\int\limits_{\gamma I} \int\limits_{J_s} |f(y_1, y_2)|^2 dy_2 dy_1 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C \sum_{s=a}^{\infty} 2^{-(B_0-1/2)(s)} \Bigg(\frac{1}{|\gamma I|} \frac{1}{2^{s+1}|J|} \int\limits_{\gamma I} \int\limits_{|y_2-y_2^0|<2^s|J|} |f(y_1, y_2)|^2 dy_2 dy_1 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C 2^{-(B_0-1/2)k} \big(M_s f^2\big)^{\frac{1}{2}} (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}) = C\gamma^{-\delta} \big(M_s f^2\big)^{\frac{1}{2}} (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}),
\end{aligned}$$

где снова y_1^0 и y_2^0 — центры отрезков I и J, а $\widetilde{y_1}$ и $\widetilde{y_2}$ произвольные точки из I и из J. Утверждение доказано.

Функция f_3 рассматривается абсолютно аналогично функции f_2 (надо лишь поменять названия переменных).

Совмещая все доказанные соотношения и пользуясь теоремой Феффермана, получаем, что оператор S ограничен в L^p_w при $w \in \alpha_p$, $1 < p < 2$.

3.5 Доказательство основной теоремы: ограниченность операторов S и R из H^p_w в L^p_w, $p \leqslant 1$

Пусть $1 < r < 2$ и $w \in \alpha_r$. Только что мы доказали, что в таких условиях операторы S и R ограничены в L^r_w. Сейчас мы докажем, что в этих же условиях операторы S и R действуют ограниченно из H^p_w в L^p_w для $p \leqslant 1$. Впоследствии, воспользовавшись правильной интерполяционной теоремой, из этих двух фактов мы получим ограниченность операторов S и R и для L^s_w при $1 < s < r$.

Здесь мы опять сосредоточимся на операторе S, так как ограниченность оператора R можно доказать похожим образом, но проще. Делать мы это будем, проверяя условие теоремы 19 из раздела 3.2.

Сформулируем весовой аналог леммы 4 из [8].

Лемма 19. *Пусть $w \in \alpha_r$, тогда в предположениях леммы 4 из [8], верна оценка (функция $\kappa(\cdot,\cdot)$ была определена в формуле (3.1))*

$$\left(\int\limits_{I_s} |\langle \kappa(x_1,y_1) - p_I(x_1,y_1), \xi\rangle_{l^2}|^r w(x_1,x_2)dx_1\right)^{1/r}$$
$$\leqslant C_N \gamma^{-sB_N}|I|^{-1}\left(\int\limits_I w(x_1,x_2)dx_1\right)^{1/r}|\xi|_{l^2},$$

причем $B_N \to \infty$ при $N \to \infty$. Здесь $I_s = \gamma^{s+1}I \setminus \gamma^s I$, а p_I — некоторая l^2-значная функция, являющаяся полиномом степени не выше N по y_1. И, конечно, верен симметричный результат по второй переменной.

Доказательство. Эта лемма фактически была доказана в [4]. □

Пусть $0 < p < 1$. Пусть $\alpha = \{\alpha_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4}$ (здесь $(k,j) = (k_1,k_2,j_1,j_2)$) — произвольный l^2-значный w-весовой (N,p)-предатом (N достаточно большое), сосредоточенный на прямоугольнике $\Delta = I \times J$. Без ограничения общности будем считать, что Δ — с центром в нуле. Разобьем множество $(\gamma\Delta)^c$ на три части:

$$A_1 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \in \gamma I, x_2 \notin \gamma J\},$$
$$A_2 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \notin \gamma I, x_2 \in \gamma J\},$$
$$A_3 = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \notin \gamma I, x_2 \notin \gamma J\}.$$

Будем интегрировать по каждому множеству по-отдельности. Сначала по A_1. Напомним, что $I_s = \gamma^{s+1}I \setminus \gamma^s I$ и $J_s = \gamma^{s+1}J \setminus \gamma^s J$. Имеем:

$$\iint\limits_{A_1} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma I} \int\limits_{J_s} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_2dx_1 \leqslant \dots .$$

Используем неравенство Гёльдера с показателями $\frac{r}{p}$ и $\frac{r}{r-p}$, обозначаем $\int_A w(x_1,x_2)dx_2$ через $w_{x_1}(A)$:

$$\dots \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma I} w_{x_1}(J_s)^{1-p/r} \left(\int\limits_{J_s} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^r w(x_1,x_2)dx_2 \right)^{p/r} dx_1.$$

Рассмотрим теперь только внутренний интеграл:

$$\left(\int\limits_{J_s} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^r w(x_1,x_2)dx_2 \right)^{1/r}$$
$$= \left(\int\limits_{J_s} \left| \int\limits_{J} \langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(y_2,x_1) \rangle dy_2 \right|^r w(x_1,x_2)dx_2 \right)^{1/r} \leqslant \dots$$

и оценим его, пользуясь тем, что норма интеграла меньше интеграла нормы:

$$\dots \leqslant \int\limits_{J} \left(\int\limits_{J_s} |\langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(y_2,x_1) \rangle|^r w(x_1,x_2)dx_2 \right)^{1/r} dy_2 \leqslant \dots .$$

Далее применим оценку из леммы 19:

$$\dots \leqslant C_N \gamma^{-sB_N} |J|^{-1} w_{x_1}(J)^{1/r} \int\limits_{J} |\xi(y_2,x_1)|_{l^2} dy_2 \leqslant \dots .$$

Теперь из того, что $w(x_1,\cdot\,) \in A_r$ равномерно по x_1, имеем

$$\int\limits_{J} |\xi(y_2,x_1)|_{l^2} dy_2 \leqslant C|J| w_{x_1}(J)^{-1/r} \left(\int\limits_{J} |\xi(y_2,x_1)|_{l^2}^r w(x_1,y_2)dy_2 \right)^{\frac{1}{r}},$$

пользуясь этим, продолжаем предыдущую оценку:

$$\dots \leqslant C_N \gamma^{-sB_N} \left(\int\limits_{J} |\xi(y_2,x_1)|_{l^2}^r w(x_1,y_2)dy_2 \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Пользуясь доказанной только что оценкой на внутренний интеграл, получаем

$$\iint\limits_{A_1} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$\leqslant C_{N,p}\sum_{s=1}^{\infty}\gamma^{-spB_N}\int\limits_{\gamma I} w_{x_1}(J_s)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_J |\xi(y_2,x_1)|^r_{l^2} w(x_1,y_2)dy_2\Bigg)^{p/r} dx_1.$$

Рассмотрим теперь только следующий интеграл.

$$\int\limits_{\gamma I} w_{x_1}(J_s)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_J |\xi(y_2,x_1)|^r_{l^2} w(x_1,y_2)dy_2\Bigg)^{p/r} dx_1 \leqslant \ldots .$$

Используем неравенство Гёльдера с показателями $\frac{r}{p}$ и $\frac{r}{r-p}$, продолжаем оценку:

$$\ldots \leqslant \Bigg(\int\limits_{\gamma I} w_{x_1}(J_s)dx_1\Bigg)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_{\gamma I}\int\limits_J |\xi(y_2,x_1)|^r_{l^2} w(x_1,y_2)dy_2dx_1\Bigg)^{p/r}$$
$$= w(\gamma I\times J_s)^{1-p/r}\cdot\Bigg(\int\limits_J\int\limits_{\gamma I}\Bigg(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}\Big|S_{k_2,j_2}\big(\{\alpha_{k,j}(\,\cdot\,,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\big)(x_1)\Big|^2_{l^2}\Bigg)^{\frac{r}{2}}$$
$$\times\, w(x_1,y_2)\,dx_1dy_2\Bigg)^{p/r} \leqslant \ldots .$$

Предыдущее выражение нам хотелось бы оценить через

$$w(\gamma I\times J_s)^{1-p/r}$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigg(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}\Big|\{\alpha_{k_1,k_2,j_1,j_2}(x_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\Big|^2_{l_2}\Bigg)^{\frac{r}{2}} w(x_1,y_2)dx_1dy_2\Bigg)^{p/r}.$$

Для того, чтобы показать, что это возможно, определим оператор U следующим образом:

$$U\Big(\{h_{k,j}(\,\cdot\,)\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4}\Big)(x) = \{(S_{k_2,j_2}\{h_{k_1,k_2,j_1,j_2}(\,\cdot\,)\}_{k_1,j_1\in\mathbb{Z}^2})(x)\}_{k_2,j_2\in\mathbb{Z}^2}.$$

Оказывается, что он ограничен как оператор из $L^r_w(l^2_{\mathbb{Z}^4})$ в $L^r_w(l^2_{\mathbb{Z}^2})$. Действительно, рассуждением, аналогичным рассуждению из предыдущего параграфа, только проще (подробности мы здесь опускаем), можно показать, что для сопряженного с U оператора U^* выполняется неравенство

$$(U^*f)^\# \leqslant C(Mf^2)^{1/2}$$

(здесь M — обыкновенный максимальный оператор Харди–Литлвуда), откуда такая ограниченность следует стандартным образом. Из ограниченности оператора U между $L^r_w(l^2_{\mathbb{Z}^4})$ и $L^r_w(l^2_{\mathbb{Z}^2})$, в свою очередь, следует искомая оценка.

Итак, мы действительно можем оценить нужное выражение величиной

$$\begin{aligned}\ldots \leqslant w(\gamma I \times J_s)^{1-p/r}&\\ \times \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\bigg(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}\big|\{\alpha_{k_1,k_2,j_1,j_2}(x_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\big|^2_{l_2}\bigg)^{\frac{r}{2}} w(x_1,y_2)dx_1dy_2\Bigg)^{p/r}&\\ = w(\gamma I \times J_s)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_J\int\limits_I |\alpha(x_1,y_2)|^r_{l_2} w(x_1,y_2)dx_1dy_2\Bigg)^{p/r} \leqslant \ldots .&\end{aligned}$$

Используем неравенство Гёльдера с показателями $\frac{2}{r}$ и $\frac{2}{2-r}$, получаем:

$$\ldots \leqslant w(\gamma I \times J_s)^{1-p/r} w(I \times J)^{p/r-p/2}\Bigg(\int\limits_J\int\limits_I |\alpha(x_1,y_2)|^2_{l_2} w(x_1,y_2)dx_1dy_2\Bigg)^{p/2} \leqslant \ldots .$$

Теперь пользуемся определением весового предатома:

$$\ldots \leqslant w(\gamma I \times J_s)^{1-p/r} w(I \times J)^{p/r-p/2} w(I \times J)^{p/2-1} \leqslant \ldots .$$

Пользуясь оценкой $w(\gamma I \times J_s) \leqslant C\gamma^{2(s+2)} w(I \times J)$, наконец завершаем оценку:

$$\begin{aligned}\ldots \leqslant C_{p,r}\gamma^{2(s+2)(1-p/r)} w(I \times J)^{1-p/r} w(I \times J)^{p/r-p/2} w(I \times J)^{p/2-1}&\\ = C_{p,r}\gamma^{2(s+2)(1-p/r)}.&\end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в сумму, получаем, что

$$\begin{aligned}\iint\limits_{A_1} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_1dx_2&\\ \leqslant C_{N,p,r}\sum_{s=1}^{\infty}\gamma^{-spB_N}\gamma^{2(s+2)(1-p/r)} = C_{N,p,r}\gamma^{4(1-p/r)}\sum_{s=1}^{\infty}\gamma^{s(2-p(B_N+2/r))}.&\end{aligned}$$

Выбираем N, чтобы B_N было большим, тогда

$$\iint\limits_{A_1} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_1dx_2 \leqslant C_{p,r}\gamma^{-\delta}.$$

Что и требовалось доказать.

Интеграл по множеству A_2 рассматривается аналогично, так что перейдем сразу к интегралу по множеству A_3.

Введем несколько обозначений. Пусть $\widetilde{\alpha}$ такой l^2-значный (N,p)-предатом, что те его компоненты, индекс которых принадлежит множеству $\mathcal{A}$, совпадают с соответствующими компонентами предатома α, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Введем последовательность функций ξ формулой

$$\begin{aligned}&\xi(x_1,y_1,y_2)\\&\quad= \big\{\langle \kappa(x_1,y_1)-p_I(x_1,y_1), \{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\rangle\big\}_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}.\end{aligned}$$

Для определенных таким образом функций $\xi(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ будет справедливо соотношение

$$S(\alpha)(x_1,x_2) = \int\limits_J\int\limits_I \langle \kappa(x_2,y_2)-p_J(x_2,y_2), \xi(x_1,y_1,y_2)\rangle dy_1dy_2.$$

Переходим к оценке. Используем сначала неравенство Гёльдера с показателями $\frac{r}{p}$ и $\frac{r}{r-p}$

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{A_3} |(S\alpha)(x_1,x_2)|^p w(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&\quad\leqslant \sum_{s_1,s_2\geqslant 1} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_{J_{s_2}}\int\limits_{I_{s_1}}\Bigg|\int\limits_J\int\limits_I \langle \kappa(x_2,y_2)-p_J(x_2,y_2),\\&\qquad\qquad \xi(x_1,y_1,y_2)\rangle dy_1dy_2\Bigg|^r w(x_1,x_2)\,dx_1dx_2\Bigg)^{p/r} \leqslant \ldots .\end{aligned}$$

Используем то, что норма интеграла меньше интеграла нормы:

$$\begin{aligned}\ldots\leqslant \sum_{s_1,s_2\geqslant 1} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_J\int\limits_I\Big(\int\limits_{I_{s_1}}\int\limits_{J_{s_2}} |\langle \kappa(x_2,y_2)-p_J(x_2,y_2),\\ \xi(x_1,y_1,y_2)\rangle|^r w(x_1,x_2)dx_2dx_1\Big)^{1/r}dy_1dy_2\Bigg)^p.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь только внутренний интеграл и оценим его в соответствии с леммой:

$$\left(\int\limits_{I_{s_1}}\int\limits_{J_{s_2}}\langle|\kappa(x_2,y_2)-p_J(x_2,y_2),\xi(x_1,y_1,y_2)\rangle|^r w(x_1,x_2)dx_2dx_1\right)^{1/r}$$

$$\leqslant C_N\gamma^{-s_2B_N}|J|^{-1}\left(\int\limits_{I_{s_1}} w_{x_1}(J)|\xi(x_1,y_1,y_2)|^r_{l^2}dx_1\right)^{1/r}$$

$$= C_N\gamma^{-s_2B_N}|J|^{-1}\left(\int\limits_{I_{s_1}} w_{x_1}(J)\left(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}|\langle\kappa(x_1,y_1)-p_I(x_1,y_1),\right.\right.$$

$$\left.\left.\{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\rangle|^2\right)^{\frac{r}{2}}dx_1\right)^{1/r}.$$

Проанализируем отдельно величину

$$\int\limits_{I_{s_1}} w_{x_1}(J)\left(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}|\langle\kappa(x_1,y_1)-p_I(x_1,y_1),\right.$$

$$\left.\{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\rangle|^2\right)^{\frac{r}{2}}dx_1$$

$$=\int\limits_{J}\int\limits_{I_{s_1}}\left(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}|\langle\kappa(x_1,y_1)-p_I(x_1,y_1),\right.$$

$$\left.\{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\rangle|^2\right)^{\frac{r}{2}}w(x_1,x_2)dx_1dx_2\leqslant\ldots.$$

Пусть r_{k_2,j_2} — перенумерованные индексами из $\mathbb{Z}^2$ функции Радемахера. Воспользуемся неравенством Хинчина и продолжим оценку:

$$\ldots\leqslant C\int\limits_{J}\int\limits_{I_{s_1}}\int\limits_0^1\left|\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}r_{k_2,j_2}(t)\left\langle\kappa(x_1,y_1)-p_I(x_1,y_1),\right.\right.$$

$$\left.\left.\{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\right\rangle\right|^r dtw(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$=C\int\limits_0^1\int\limits_{J}\int\limits_{I_{s_1}}\left|\left\langle\kappa(x_1,y_1)-p_I(x_1,y_1),\right.\right.$$

$$\left.\left.\left\{\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2}r_{k_2,j_2}(t)\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\right\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\right\rangle\right|^r w(x_1,x_2)dx_1dx_2dt\leqslant\ldots.$$

Снова используем лемму 19:

$$\ldots \leqslant C_N^r \gamma^{-s_1 r B_N} |I|^{-r} w(I \times J) \times \int\limits_0^1 \Big| \sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2} r_{k_2,j_2}(t) \{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \Big|^r_{l^2_{\mathbb{Z}^2}} dt \leqslant \ldots .$$

Используем неравенство Кахана (см. про него, например, [46]) и продолжим оценку так:

$$\begin{aligned} \ldots &\leqslant C_N^r \gamma^{-s_1 r B_N} |I|^{-r} w(I \times J) \\ &\quad \times \Bigg(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2} \Big| \{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2} \Big|^2_{l^2_{\mathbb{Z}^2}} \Bigg)^{r/2} \\ &= C_N^r \gamma^{-s_1 r B_N} |I|^{-r} w(I \times J) \Big| \{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4} \Big|^r_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} . \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что

$$\begin{aligned} &\Bigg(\int\limits_{I_{s_1}} \int\limits_{J_{s_2}} \langle |\kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(x_1,y_1,y_2)\rangle|^r w(x_1,x_2)dx_2dx_1 \Bigg)^{1/r} \\ &\leqslant C_N \gamma^{-s_2 B_N} |J|^{-1} \Bigg(\int\limits_{I_{s_1}} w_{x_1}(J) \Bigg(\sum_{(k_2,j_2)\in\mathbb{Z}^2} |\langle \kappa(x_1,y_1) - p_I(x_1,y_1), \\ &\qquad \{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k_1,j_1)\in\mathbb{Z}^2}\rangle|^2 \Bigg)^{\frac{r}{2}} dx_1 \Bigg)^{1/r} \\ &\leqslant C_N^2 \gamma^{-(s_1+s_2)B_N} |I|^{-1} |J|^{-1} w(I\times J)^{1/r} \Big| \{\widetilde{\alpha}_{k_1,k_2,j_1,j_2}(y_1,y_2)\}_{(k,j)\in\mathbb{Z}^4} \Big|_{l^2_{\mathbb{Z}^4}} . \end{aligned}$$

Возвращаемся к исходному интегралу

$$\sum_{s_1,s_2\geqslant 1} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{1-p/r} \Bigg(\int\limits_J \int\limits_I \Bigg(\int\limits_{I_{s_1}} \int\limits_{J_{s_2}} |\langle \kappa(x_2,y_2) - p_J(x_2,y_2), \xi(x_1,y_1,y_2)\rangle|^r w(x_1,x_2)dx_2dx_1 \Bigg)^{1/r} dy_1dy_2 \Bigg)^p \leqslant \ldots .$$

Используем полученную только что оценку:

$$\ldots \leqslant \sum_{s_1,s_2\geqslant 1} C_{N,p} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{\frac{r-p}{r}} \gamma^{-p(s_1+s_2)B_N} |I|^{-p} |J|^{-p} w(I\times J)^{p/r} \times \Bigg(\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2} dy_1dy_2 \Bigg)^p \leqslant \ldots .$$

Отдельно рассмотрим оставшийся интеграл $\int_J \int_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2} dy_1 dy_2$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2} dy_1 dy_2 \\ \leqslant \Big(\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|^2_{l^2} w(y_1,y_2) dy_1 dy_2\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_J \int\limits_I w(x_1,x_2)^{-1} dy_1 dy_2\Big)^{1/2}.$$

Из $w \in A_2$ следует, что $\big(\int_J \int_I w(x_1,x_2)^{-1} dy_1 dy_2\big)^{1/2} \leqslant C|I||J|w(I\times J)^{-1/2}$, так что

$$\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2} dy_1 dy_2 \\ \leqslant C\Big(\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|^2_{l^2} w(y_1,y_2) dy_1 dy_2\Big)^{1/2} |I||J|w(I\times J)^{-1/2}.$$

Возвращаемся к сумме

$$\ldots \leqslant \sum_{s_1,s_2\geqslant 1} C_{N,p} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{\frac{r-p}{r}} \gamma^{-p(s_1+s_2)B_N} |I|^{-p}|J|^{-p} w(I\times J)^{p/r} \\ \times \Big(\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|_{l^2} dy_1 dy_2\Big)^p \leqslant \ldots .$$

Используя выведенную только что оценку, получаем

$$\ldots \leqslant \sum_{s_1,s_2\geqslant 1} C_{N,p} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{\frac{r-p}{r}} \gamma^{-p(s_1+s_2)B_N} w(I\times J)^{p/r-p/2} \\ \times \Big(\int\limits_J \int\limits_I |\widetilde{\alpha}(y_1,y_2)|^2_{l^2} w(y_1,y_2) dy_1 dy_2\Big)^{p/2} \leqslant \ldots ;$$

теперь используя свойства предатома, продолжим оценку:

$$\ldots \leqslant \sum_{s_1,s_2\geqslant 1} C_{N,p} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{\frac{r-p}{r}} \gamma^{-p(s_1+s_2)B_N} w(I\times J)^{p/r-p/2} w(I\times J)^{p/2-1}.$$

Возвращаемся к сумме

$$\sum_{s_1,s_2\geqslant 1} C_{N,p} w(I_{s_1}\times J_{s_2})^{\frac{r-p}{r}} \gamma^{-p(s_1+s_2)B_N} w(I\times J)^{p/r-1}$$

— используя оценку $w(I_{s_1} \times J_{s_2}) \leqslant C\gamma^{2(s_1+s_2)} w(I \times J)$, получаем наконец мажоранту

$$\sum_{s_1, s_2 \geqslant 1} C_{N,p} \gamma^{(s_1+s_2)(2-p(2/r+B_N))}.$$

Выбираем N, чтобы B_N было большим, тогда

$$\iint_{A_3} |(S\alpha)(x_1, x_2)|^p w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leqslant C_p \gamma^{-\delta}.$$

Доказательство закончено. □

Подходящую интерполяционную теорему можно найти, например, в статье [34]. Также для того, чтобы уладить все формальности, понадобится утверждение о совпадении пространств H^p_w и L^p_w для $p > 1$ и “хороших” весов w, доказанное в [39], и утверждение о совпадении нескольких определений пространств H^p_w (в [34] используется не такое определение, как у нас), которое можно найти в [15].

Отметим, что, по сути, здесь можно было использовать теорему 5 из статьи автора [47], приложив небольшие усилия для переноса этого результата со случая аналитических пространств Харди на торе на случай вещественных пространств Харди на полупространстве.

3.6 Вывод из основной теоремы неравенств (6) и (7)

Неравенство (7) следует из основной теоремы тривиальным образом. Единственное отличие между ними состоит в том, что в (7) неравенство сформулировано для разбиений плоскости $\mathbb{R}^2$, то есть на Δ_k из основной теоремы наложено дополнительное условие

$$\bigcup_k \Delta_k = \mathbb{R}^2.$$

Пусть $1 < q < 2$, $w \in \alpha_q$ и пусть $\mathcal{I} = \{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — какое-то разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ на непересекающиеся прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям. Пусть $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — произвольная последовательность функций из $L^q_w(l^2)$. Утверждение основной теоремы для функций $f_k = M_{\Delta_k} g_k$ дает

$$\Big\| \sum_k M_{\Delta_k} g_k \Big\|_{L^q_w} \leqslant C_{q,w} \| \{M_{\Delta_k} g_k\}_k \|_{L^q_w(l^2)}.$$

Правую часть этого неравенства можно представить как композицию трех модуляций (сдвигов спектров), чередующихся с двумя применениями двумерного проектора Рисса. Из этого представления и из того, что $w \in \alpha_q$ влечет $w \in A_q$ (это было доказано в одномерном случае в [4], в двумерном доказательство не отличается), получаем

$$\|\{M_{\Delta_k} g_k\}_k\|_{L^q_w(l^2)} \leqslant C_{q,w} \|\{g_k\}_k\|_{L^q_w(l^2)},$$

откуда

$$\Big\|\sum_k M_{\Delta_k} g_k\Big\|_{L^q_w} \leqslant C_{q,w} \|\{g_k\}_k\|_{L^q_w(l^2)}.$$

Последнее неравенство является непосредственно двойственным к неравенству (6) и, таким образом, его доказывает. Условие $w \in \alpha_q$, как мы уже замечали после формулировки основной теоремы, переходит в “двойственное” условие $w \in A_{p/2}$.

3.7 Геометрическое замечание

Пусть $\mathcal{I}$ — разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ на непересекающиеся множества. Пусть заданы числа $0 < a < A < \infty$ и для любого множества $I \in \mathcal{I}$ выполнено $s \subseteq I \subseteq S$, где s и S — квадраты со сторонами a и A соответственно. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема 21. *Пусть* $1 < r < 2$ *и вес* $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *удовлетворяет условию* α_r. *Тогда для любого* $p \in (0,r]$ *справедливо неравенство*

$$\Big\|\sum_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)} \leqslant D_{p,w,A/a} \Big\|\Big(\sum_{I\in\mathcal{I}} |f_I|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)},$$

где $\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}$ *последовательность функций из* $L^1(\mathbb{R}^2)$, *для которой* $\operatorname{supp}\widehat{f_I} \subseteq I$.

Замечание. Константа $D_{p,w,A/a}$ здесь зависит от A/a, то есть от отношения величин параметров, контролирующих максимальный и минимальный размер $I \in \mathcal{I}$. При $A/a \to \infty$ в нашем утверждении будет выполняться $D_{p,w,A/a} \to \infty$.

Замечание. В доказательстве мы не будем пользоваться основной теоремой во всей ее общности: достаточно будет аналога для функций с носителями в квадратах одинакового размера, а не в произвольных прямоугольниках.

Доказательство. Мы покажем, что множество $\mathcal{I}$ можно разделить на конечное количество подмножеств

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_{R(A/a)}$$

так, что для каждого множества $\mathcal{I}_i$ все его элементы можно было бы поместить в непересекающиеся прямоугольники со сторонами, параллельными координатным осям.

Если это будет сделано, то для каждого $\mathcal{I}_i$ можно будет применить неравенство (7), ведь носители $\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}_i}$ будут лежать уже в непересекающихся прямоугольниках. Полученные таким образом $R(A/a)$ неравенств можно будет совместить, увеличив при этом константу (отсюда и возникает зависимость константы от A/a).

Перейдем к разбиению множества $\mathcal{I}$ в объединение $\mathcal{I}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_{R(A/a)}$. Для каждого $I \in \mathcal{I}$ зафиксируем какой-нибудь квадрат $S(I)$ со стороной A, содержащий множество I (если таких квадратов больше одного — возьмем произвольный). Рассмотрим на плоскости квадратную сетку со стороной A. С каждой ячейкой L этой сетки свяжем те множества $I \in \mathcal{I}$, для которых площадь пересечения $S(I) \cap L$ наибольшая. Несложно понять, что множества I, связанные с ячейкой L обязательно лежат в квадрате $2L$.

Раскрасим сетку в четыре цвета, как на рисунке 3.1. Из приведенных выше соображений следует, что (для выбранного способа раскраски сетки) множества $I \in \mathcal{I}$, связанные с разными квадратами одного цвета, не пересекаются.

Ясно также, что с одной ячейкой сетки могли оказаться связанными не более $4(A/a)^2$ прямоугольников: как мы уже замечали, все связанные с какой-то ячейкой L множества обязаны лежать внутри $2L$, квадрата со стороной $2A$, но внутри каждого из этих множеств содержится квадрат со стороной a.

Пусть $K = \lceil 4(A/a)^2 \rceil$. Произвольным образом занумеруем множества, связанные с каждой ячейкой числами от 1 до K (если таких множеств оказалось меньше — прекратим нумерацию раньше). Разделим $\mathcal{I}$ на подмножества следующим образом:

$$\mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{4} \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{I}_{i,k},$$

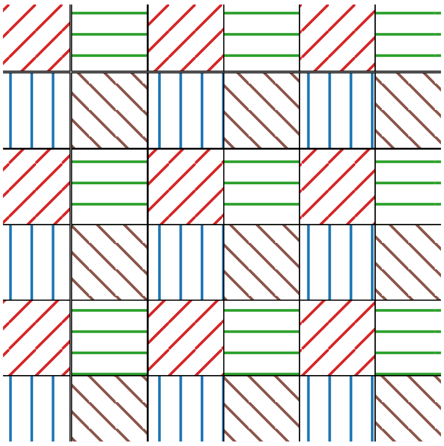

Рисунок 3.1 — Раскраска квадратной сетки в четыре цвета. Каждый цвет дополнительно выделен отдельным видом штриховки.

где в $\mathcal{I}_{i,k}$ попадают те множества $I \in \mathcal{I}$, которые оказались связаны с ячейкой цвета i и занумерованные внутри ячейки числом k. Легко видеть, что элементы $\mathcal{I}_{i,k}$ содержатся в семействе непересекающихся прямоугольников, а общее число множеств $\mathcal{I}_{i,k}$ не превышает $16\lceil (A/a)^2 \rceil$. Это завершает доказательство. $\square$

Насколько нам известно, такой вариант неравенства (7) раньше не отмечался, даже в случае без веса и при $1 < p < 2$.

Заключение

В заключение подведём итоги диссертации. В главе 1 была доказана K-замкнутость весовых пространств Харди на двумерном торе в соответствующих пространствах Лебега: для этого мы рассмотрели абстрактный аналог пространств Харди граничных значений аналитических функций и соответствующий абстрактный подход к теоремам о K-замкнутости. Далее, в главе 2 было установлено неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для многопараметрических систем Виленкина и произвольных прямоугольников в $\mathbb{Z}_+^D$. Было описано несколько интересных вспомогательных результатов, а также следствий и вариантов основной теоремы. Наконец, в главе 3 неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ было обобщено на случай с весом, а соответствующее двойственное неравенство, в том числе для показателей $p \leqslant 1$, было обобщено для весов, в некотором смысле двойственных весам Макенхаупта.

Эти результаты лежат в рамках теории многопараметрических сингулярных интегральных операторов и ее приложений. Они представляются актуальными в контексте современного гармонического анализа.

Благодарности

В первую очередь я выражаю свою искреннюю благодарность моему научному руководителю Сергею Витальевичу Кислякову, который, согласившись взять меня в свои ученики еще на втором курсе университета, сейчас, спустя восемь лет, привел меня к защите этой диссертации. Я также очень признателен своим коллегам и соавторам Николаю Осипову и Антону Целищеву, оказывавшим непосредственную поддержку в моей работе над диссертацией.

Пользуясь возможностью, я хочу поблагодарить также и тех людей, которые хоть и связаны с этой диссертацией лишь косвенно, сыграли не меньшую роль в моей научной работе в последние несколько лет.

Я благодарен замечательному коллективу лаборатории им. П. Л. Чебышева и всего Факультета математики и компьютерных наук СПБГУ, окружавшему меня в эти годы. В особенности я благодарен Сергею Борисовичу Тихомирову, которого я могу без преувеличения назвать своим ментором, и который оказал решающее влияние на развитие моих научных и жизненных интересов. Я очень благодарен Михаилу Анатольевичу Лифшицу за его поддержку и веру в меня, за его ценные, всегда прямолинейные, советы.

Я благодарен своим товарищам Александру Теренину и Петру Мостовскому, вместе с которыми мы многого добились за пределами чистой математики.

Конечно, я благодарен своей семье. Сложно выразить словами насколько была, и до сих пор остается, важна для меня постоянная поддержка моей жены Екатерины Носковой и матери Наталии Владимировны Боровицкой! Энергичность моей бабушки Киры Константиновны Тумановой и моего дяди Михаила Юрьевича Макова всегда служила для меня примером и вдохновляла меня. Наконец, я безмерно благодарен своему отцу, Андрею Ефимовичу Боровицкому, который оказал, наверное, наиболее сильное влияние на то, каким человеком я сейчас являюсь, и которому, увы, уже не суждено прочитать эти строки.

Я благодарен не меньше и всем тем, кто, не смотря на свою важную роль, не был упомянут до сих пор. Каким-либо успехам я обязан всем без исключения!

Вячеслав Андреевич Боровицкий
Октябрь 2021

Список литературы

1. *Анисимов Д. С., Кисляков С. В.* Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление // Алгебра и анализ. — 2004. — Т. 16, № 5. — С. 1—33.
2. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1947. — Т. 11, № 4. — С. 363—400.
3. *Злотников И. К., Кисляков С. В.* Теорема Гротендика для некоторых алгебр и модулей над ними // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2019. — Т. 480. — С. 108—121.
4. *Кисляков С. В.* Теорема Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2008. — Т. 355. — С. 180—198.
5. *Кисляков С. В., Парилов Д. В.* О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 327. — С. 98—114.
6. *Кисляков С. В.* Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре // Алгебра и анализ. — 1991. — Т. 3, № 4. — С. 1—77.
7. *Кисляков С. В., Шу К.* Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы // Алгебра и анализ. — 1996. — Т. 8, № 4. — С. 75—109.
8. *Осипов Н. Н.* Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ при $0 < p \leqslant 2$ // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 2. — С. 164—184.
9. *Осипов Н. Н.* Одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в $\mathbb{R}^n$ для $0 < p \leqslant 2$ // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — Т. 376. — С. 88—115.
10. *Осипов Н. Н.* Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа в пространствах Мори–Кампанато // Математический сборник. — 2014. — Т. 205, № 7. — С. 95—114.
11. *Целищев А. С.* Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина // Математический сборник. — 2021. — Т. 212, № 10. — С. 152—164.

12. *Bourgain J.* On square functions on the trigonometric system // Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B. — 1985. — Vol. 37, no. 1. — P. 20—26.

13. *Carbery A.*, *Seeger A.* H^p- and L^p-variants of multiparameter Calderón-Zygmund theory // Transactions of the American Mathematical Society. — 1992. — Vol. 334, no. 2. — P. 719—747.

14. *Chang S.-Y. A.*, *Fefferman R.* Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 12, no. 1. — P. 1—43.

15. *Ding Y.*, *Han Y.*, *Lu G.*, *Wu X.* Boundedness of Singular Integrals on Multiparameter Weighted Hardy Spaces $H^p_w(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ // Potential Anal. — 2012. — Vol. 37. — P. 31—56.

16. *Fefferman C.* The multiplier problem for the ball // Annals of Mathematics. — 1971. — Vol. 94, no. 2. — P. 330—336.

17. *Fefferman R.* Harmonic analysis on product spaces // Annals of Mathematics. — 1987. — Vol. 126, no. 1. — P. 109—130.

18. *Fefferman R.* Calderón–Zygmund theory for product domains: H^p spaces // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1986. — Vol. 83, no. 4. — P. 840—843.

19. *Gamelin T. W.*, *Kislyakov S. V.* Uniform Algebras as Banach Spaces // Handbook of the geometry of Banach spaces. — 2001. — Vol. 1. — P. 671—706.

20. *García-Cuerva J.* Weighted H^p spaces. — 1979.

21. *Gundy R. F.* Inégalités pour martingales à un et deux indices: L'espace H^p // Ecole d'eté de probabilités de saint-flour VIII-1978. — Springer, 1980. — P. 251-334.

22. *Gundy R. F.* A Decomposition for L^1-Bounded Martingales // The Annals of Mathematical Statistics. — 1968. — Vol. 39, no. 1. — P. 134—138.

23. *Journé J.-L.* Calderón-Zygmund operators on product spaces // Revista Matemática Iberoamericana. — 1985. — Vol. 1, no. 3. — P. 55—91.

24. *Kisliakov S. V.* Interpolation of H^p-spaces: some recent developments // Function Spaces, Interpolation Spaces, and Related Topics (Haifa, 1995), Israel Mathematical Conference Proceedings. Vol. 13. — 1999. — P. 102—140.

25. *Kislyakov S.* Bourgain's Analytic Projection Revisited // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1998. — Vol. 126, no. 11. — P. 3307—3314.

26. *Kislyakov S. V.* Martingale transforms and uniformly convergent orthogonal series // Journal of Soviet Mathematics. — 1987. — Vol. 37, no. 5. — P. 1276—1287.

27. *Kislyakov S. V.*, *Zlotnikov I. K.* Interpolation for intersections of Hardy-type spaces // Israel Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 239. — P. 21—38.

28. *Kislyakov S.* Interpolation Involving Bounded Bianalytic Functions // Complex Analysis, Operators, and Related Topics. — Springer, 2000. — P. 135—149.

29. *Lee M.-Y.* Boundedness of Calderón-Zygmund operators on weighted product Hardy spaces // Journal of Operator Theory. — 2014. — Vol. 72, no. 1. — P. 115—133.

30. *Osękowski A.* Sharp Martingale and Semimartingale Inequalities. Vol. 72. — Springer, 2012.

31. *Osipov N.* Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system // St. Petersburg Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 28, no. 5. — P. 719—726.

32. *Pipher J.* Journé's covering lemma and its extension to higher dimensions // Duke Mathematical Journal. — 1986. — Vol. 53, no. 3. — P. 683—690.

33. *Pisier G.* Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations. I // Pacific Journal of Mathematics. — 1992. — Vol. 155, no. 2. — P. 341—368.

34. *Ruan Z. P.* The Calderón-Zygmund decomposition and interpolation on weighted Hardy spaces // Acta Mathematica Sinica, English Series. — 2011. — Vol. 27, no. 10. — P. 1967—1978.

35. *Rubio de Francia J. L.* A Littlewood-Paley Inequality for Arbitrary Intervals // Revista Matematica Iberoamericana. — 1985. — Vol. 1, no. 2. — P. 1—14.

36. *Soria F.* A Note on a Littlewood–Paley Inequality for Arbitrary Intervals in $\mathbb{R}^2$ // Journal of the London Mathematical Society. — 1987. — Vol. s2—36, no. 1. — P. 137—142.

37. *Srinivasan T. P., Wang J.-k.* Weak*-Dirichlet algebras, Function Algebras // Function Algebras (Proc. Internat. Sympos., Tulane Univ., 1965), Scott-Foresman, Chicago, IL. — 1966. — P. 216—249.

38. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. — Princeton University Press, 1993.

39. *Strömberg J.-O., Wheeden R. L.* Relations between H^p_u and L^p_u in a product space // Transactions of the American Mathematical Society. — 1989. — Vol. 315, no. 2. — P. 769—797.

40. *Tao T.* MathOverflow answer to “A generalization of Rubio de Francia’s inequality” [Электронный ресурс]. — 07/30/2021. — URL: https://mathoverflow.net/a/400694.

41. *Walsh J. L.* A Closed Set of Normal Orthogonal Functions // American Journal of Mathematics. — 1923. — Vol. 45, no. 1. — P. 5—24.

42. *Weisz F.* Cesaro Summability of Two-Dimensional Walsh–Fourier Series // Journal of Approximation Theory. — 1997. — Vol. 88, no. 2. — P. 168—192.

43. *Weisz F.* Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. — Springer, 2006.

44. *Weisz F.* Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Spaces. — Springer, 2013.

45. *Weisz F.* Summation of Fourier series // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis. — 2004. — Vol. 20. — P. 239—266.

46. *Wojtaszczyk P.* Banach spaces for analysts. — Cambridge University Press, 1996.

Публикации автора по теме диссертации

47. *Боровицкий В. А.* K-замкнутость для весовых пространств Харди на торе $\mathbb{T}^2$ // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — Т. 456, вып. 3. — С. 25—36.
48. *Боровицкий В. А.* Весовое неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 6. — С. 24—57.
49. *Боровицкий В. А.* Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для двупараметрической системы Уолша // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 491. — С. 27—42.
50. *Боровицкий В. А.*, *Кисляков С. В.* Интерполяция абстрактных пространств типа Харди // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2021. — Т. 503. — С. 22—56.