На правах рукописи

Злобина Екатерина Андреевна

# Высокочастотная дифракция на контурах с негладкой кривизной. Некасательное падение

Специальность 1.1.2.
Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Киселев Алексей Прохорович,** доктор физико-математических наук, профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Шанин Андрей Владимирович,** доктор физико-математических наук, доцент кафедры акустики физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждении высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»; |
| | **Цветкова Анна Валерьевна,** кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук |
| **Ведущая организация:** | Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской академии наук, Москва, Троицк |

Защита состоится «____» _____ 2024 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета *24.1.207.02* при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, расположенном по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН и на сайте https://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-24.1.207.02/.

Автореферат разослан «____» _____ 2024 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук Рядовкин К.С.

## Общая характеристика работы

**Актуальность и степень разработанности темы исследования.** Работа относится к математической теории дифракции и посвящена построению формул высокочастотной асимптотики в задачах дифракции на негладких препятствиях.

Простейшее описание волновых процессов дает известная с античных времен геометрическая оптика, которая не учитывает конечность длины волны, и поэтому не может объяснить размытость границы света и тени. Подходы к теоретическому описанию полутеневого поля были впервые предложены в начале XIX века в работах Т. Юнга и О.-Ж. Френеля, рассматривавших задачу о падении плоской волны на плоский экран. Длина волны считалась малой по сравнению с расстоянием до кромки экрана, но ненулевой. В дальнейшем возникли более продвинутые асимптотические методы, такие как лучевой метод, метод параболического уравнения Леонтовича—Фока и геометрическая теория дифракции (ГТД).

В геометрической теории дифракции (ГТД), по-видимому, впервые отчетливо сформулированной Дж.Б. Келлером [1], намечена программа построения главных членов высокочастотных асимптотик решений дифракционных задач. Волны, отраженные от гладких участков границы, описываются лучевым методом, а вклады от точек негладкости границы берутся из решений эталонных задач. Если кусочно-гладкая граница в окрестности особенности может быть смоделирована клином или конусом, то дело сводится к задачам, допускающим, в скалярном случае, точное решение. Для границы с негладкой кривизной точно решаемые эталонные задачи не известны.

Более продвинутые версии ГТД [2; 3] учитывают, что около особых направлений — *предельных лучей*, — где фазы отраженной и дифрагированной волн близки, волновое поле описывается специальными функциями (например, в классической задаче дифракции на полуплоскости — интегралом Френеля). Подобные явления естественно характеризовать как возникновение пограничных слоев, или *переходных зон*, и исследовать с помощью приемов, в совокупности известных как метод пограничного слоя. Под этим понимают технику, основанную на изучении исходной задачи в малой области, окружающей особую точку, обычно с использованием растянутых (масштабированных) переменных. Затем полученное внутреннее разложение сшивается с решением вне окрестности особенности. Погранслойные приемы, начало применению которых в задачах высокочастотной дифракции положено В.А. Фоком [4] и Р. Бачелом и Дж.Б. Келлером [5], развиты и систематически изложены в фундаментальной монографии В.М. Бабича и Н.Я. Кирпичниковой [6]. Для погранслойных задач в высокочастотном случае единственность решения может быть обеспечена аналогом условия излучения; при этом детального построения внешнего разложения (что бывает необходимо при рассмотрении других задач математической физики) не требуется. Под решением (также мы употребляем принятый в этой тематике термин «поле») везде понимается формальное асимптотическое решение (см., например, [7]), т.е.

выражение, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца[1]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)u=0 \tag{1}$$

и граничному условию с невязкой, малой при $k/\varkappa\to\infty$. Здесь $k$ — волновое число, а $\varkappa$ — характеристический геометрический параметр задачи.

В диссертации последовательная погранслойная техника в духе [6] развивается для двумерных эталонных задач высокочастотной дифракции на контурах, кривизна которых гладкая всюду, за исключением точки $O$. Целью работы является построение главного члена асимптотики, описывающего влияние негладкости кривизны на уходящее волновое поле. Рассматриваются следующие типы особенностей:

1. *Скачок кривизны.* В этом случае кривизна контура $æ = æ(s)$ в малой окрестности $O$ имеет вид

$$æ(s)=æ_0+h\theta(s) \tag{2}$$

Здесь $s$ — длина дуги контура, отсчитываемая от точки $O$ (см. Рисунок 1),

$$\theta(s)=\{0,\ \text{при } s<0,\quad 1,\ \text{при } s\geqslant 0\} \tag{3}$$

— функция Хевисайда, а $æ_0$ и $h$ — константы, на знак которых не накладывается никаких ограничений. В частности, $æ_0$ может равняться нулю, однако $h\neq 0$.

2. *Гельдеровская сингулярность кривизны* описывается выражением

$$æ(s)=æ_0+hs^\lambda\theta(s),\quad 0<\lambda<1, \tag{4}$$

см. (3). Здесь $æ_0$ и $h\neq 0$ — константы любого знака.

3. *Негладкость производной кривизны.* В этом случае скачок или гельдеровскую сингулярность имеет производная кривизны порядка $j$, $j=1,2,\ldots$:

$$\frac{d^j}{ds^j}æ(s)=æ_j+hs^\lambda\theta(s),\quad 0\leqslant\lambda<1, \tag{5}$$

где $æ_j$ — константа любого знака.

Константы $æ_0$, $æ_j$ и $h$ в формулах (2), (4) и (5) не зависят от $k$. Предполагается, что падающая волна приходит в особую точку $O$ вдоль некасательного направления (см. Рисунок 1).

Задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной (особенно в случае скачка) привлекали внимание многих исследователей с 60-х годов прошлого века (см., например, [3; 8–17]) не только своими потенциальными приложениями в аэродинамике и радиофизике, но и тем, что для них не существует

[1] Предполагается гармоническая зависимость от времени $t$ вида $e^{-i\omega t}$, где $\omega$ — круговая частота, $\omega=kc$, а $c=const$ — скорость распространения волн, которая принимается равной единице: $c=1$.

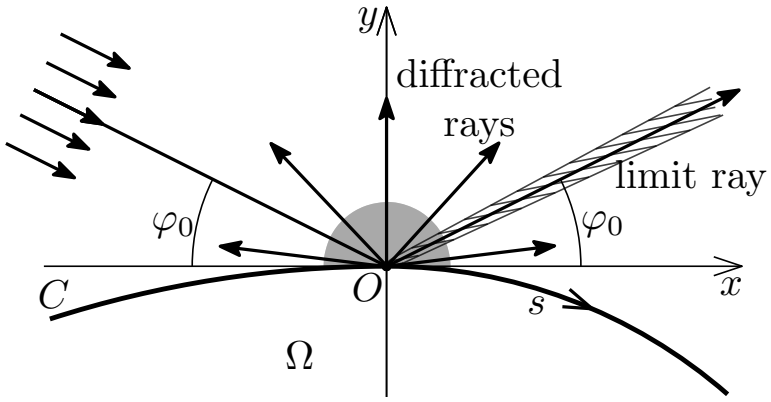


Рисунок 1 — Дифракция плоской волны на контуре с негладкой кривизной. Пограничные слои

точно решаемых эталонных задач. Исследования были основаны на различных версиях эвристического метода Кирхгофа, иногда в комбинации с элементами метода пограничного слоя. В простейшем случае скачка кривизны и идеальных граничных условий (т.е. условий Дирихле или Неймана) [8–10], найдены выражения для дифрагированной волны. В монографии [3] построена асимптотика поля в переходной зоне в виде суммы двух френелевских интегралов. Задачи дифракции на скачке кривизны или ее производной порядка $j = 1, 2, \ldots$ рассматривались в [11] в случае некасательного падения волны на контур с «пассивным» импедансом. С помощью своеобразной версии метода погранслоя построены выражение для дифрагированной волны, однако поле в переходной зоне получено только на предельном луче и только на малых расстояниях от контура. В [13] рассмотрен случай «активного» импеданса, при некоторых значениях которого возникает поверхностная волна. Для скачка кривизны соответствующее поле в переходной зоне подробно изучено методом Кирхгофа. Ряд работ (например, [14–17]) посвящен случаям касательного падения или наблюдения, падению поверхностной волны и т.п. Отметим стоящую особняком работу [12], где с помощью совершенно другой техники исследованы нестационарные задачи дифракции на скачке кривизны или ее производной некоторого порядка, а также затронут случай гельдеровской сингулярности (по-видимому, это единственная работа, где ранее рассматривалась такая особенность). Полученные в [12] выражения для дифрагированных волн согласуются с результатами [11] для стационарного случая. Важного для стационарных задач вопроса об описании поля вблизи предельного луча в нестационарной постановке не возникает.

В перечисленных выше работах в случае скачка кривизны или ее производной некоторого порядка найдены выражения для дифрагированных волн, однако области применимости полученных формул не обсуждались. Поле в переходной зоне исследовалось лишь для скачка кривизны. Вопрос о сшивании формул с геометрически отраженной волной никогда не рассматривался, что не позволяет оценить размеры области пригодности полученного выражения. Случай гельдеровской сингулярности в стационарном случае вообще не был затронут.

**Цели и задачи диссертационной работы.** Целью работы является развитие последовательного метода пограничного слоя в двумерных задачах высокочастотной дифракции на контурах с негладкой кривизной в случае некасательного падения и построение асимптотических формул для дифрагированной волны и для уходящего поля в переходной зоне.

Были решены следующие задачи:

1. Построение внутреннего разложения для поля в малой окрестности точки негладкости контура в случаях скачка кривизны, гельдеровской сингулярности кривизны и негладкости производной кривизны.

2. Построение простых удобных формул для асимптотического описания высокочастотного поля в области слияния двух цилиндрических волн.

3. Сшивание внутреннего разложения с построенными асимптотическими формулами вблизи предельного луча и с лучевой формулой для дифрагированной волны вдали от него.

4. Исследование лучевой формулы для отраженной волны с целью определения областей пригодности полученных выражений.

При этом были преодолены значительные аналитические трудности при решении краевых задач с сингулярными коэффициентами и при анализе лучевых формул.

**Методология и методы исследования.** Исследование выполнено в рамках методологии последовательного погранслойного подхода [6]. В работе использовались асимптотические методы, теория обобщенных функций и теория специальных функций.

**Научная новизна.** В диссертационной работе последовательный метод пограничного слоя впервые развит в задачах высокочастотной дифракции на контурах с негладкой кривизной. Построены удобные простые формулы, пригодные для общего асимптотического описания френелевских переходных зон. Найдены явные представления для дифрагированных волн и выражения для поля в переходных зонах на малых и умеренных расстояниях от контура. Определены области пригодности всех полученных выражений. Основные результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа имеет теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при изучении математических моделей широкого круга волновых процессов.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Последовательный метод пограничного слоя развит для задач высокочастотной дифракции в случае некасательного падения на контур, кривизна или производная кривизны порядка $j$, $j = 1, 2, \ldots$, которого имеет скачок или гельдеровскую сингулярность.

2. Построены высокочастотные асимптотики дифрагированной волны и поля в переходной зоне для каждого типа особенности кривизны.

3. Построены удобные простые формулы для общего асимптотического описания слияния двух высокочастотных цилиндрических волн.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность результатов диссертации обеспечивается использованием проверенных методов и строгими математическими доказательствами. Основные результаты докладывались на семинаре кафедры высшей математики и математической физики СПбГУ, на городском семинаре по вопросам теории распространения волн (ПОМИ РАН), на Санкт-Петербургском акустическом семинаре им. Д.П. Коузова (ИПМаш РАН), на общегородском семинаре по математической физике им. В.И. Смирнова (ПОМИ РАН), на всероссийском семинаре «Математическое моделирование волновых процессов» (РосНОУ, Москва), а также на следующих конференциях:

- международные конференции «Days on Diffraction» (Санкт-Петербург, 2018–2020, 2023);
- Санкт-Петербургские зимние молодежные конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, 2018, 2019, 2021);
- международные конференции «Advanced Problems in Mechanics» (Санкт-Петербург, 2019, 2020);
- Conference on Spectral Theory and Mathematical Physics (Сочи, 2020);
- Конференция международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021);
- III конференция математических центров России (Майкоп, 2023);
- Традиционная сессия МИАН—ПОМИ «Дифференциальные уравнения и динамические системы» (Санкт-Петербург, 2023).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 7 статьях [A1–A7], из них шесть [A2–A7] в рецензируемых научных изданиях, рекомендуемых ВАК, и одна [A1] в журнале, входящем в международные базы данных Web of Science и Scopus. Кроме того, опубликовано 3 заметки [A8–A10] в сборниках трудов международных конференций, индексируемых Scopus. В диссертацию не вошли результаты работ [18; 19], посвященных развитию метода пограничного слоя в задачах с касательным падением.

**Личный вклад автора.** Результаты разделов 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 и главы 6 опубликованы в совместных работах диссертанта с А. П. Киселевым [A1; A3; A5]. Результаты принадлежат соавторам в равной степени. Результаты глав 3 и 4 опубликованы в статье [A6], выполненной в соавторстве с

А. П. Киселевым, который осуществлял общее руководство работой. Результаты разделов 1.3–1.5, 2.3 и главы 5 получены соискателем лично и опубликованы в работах [A2; A4; A7].

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, приложения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 78 страниц текста, включая 18 рисунков. Библиография включает 58 наименований.

## Содержание работы

**Введение** содержит обоснование актуальности темы диссертации, формулировку цели исследований, обзор научной литературы по изучаемой проблеме. Ставятся задачи представляемой работы, сформулированы ее научная новизна и практическая значимость

**В первой главе** волновое поле исследуется в пограничном слое, окружающем точку негладкости $O$: разделы 1.1, 1.2 и 1.3 посвящены случаям скачка кривизны (2), гельдеровской сингулярности кривизны (4) и негладкости производной кривизны (5), соответственно.

Решение уравнения Гельмгольца (1) мы ищем в виде $u = u^{\mathrm{inc}} + u^{\mathrm{out}}$, где

$$u^{\mathrm{inc}} = e^{ik(x\cos\varphi_0 - y\sin\varphi_0)} \tag{6}$$

— падающая плоская волна с углом скольжения $\varphi_0$ (координаты $(x, y)$ введены как показано на Рисунке 1), а $u^{\mathrm{out}}$ — уходящая волна. Падающая волна приходит в точку негладкости контура $O$ вдоль некасательного направления, то есть $\varphi_0 > 0$. Для определенности предполагается, что на контуре выполнено граничное условие Дирихле $u|_C = 0$.

В малой окрестности точки негладкости $O$ задача переписывается в координатах «длина дуги — нормаль» $s$ и $n$. Переход к растянутым переменным

$$S = ks, \quad N = kn \tag{7}$$

приводит к задаче с сингулярными коэффициентами для линейного по амплитуде сингулярности кривизны $h$ члена волнового поля. Отвечающее уходящей волне решение явно выражено через интеграл от быстроосциллирующей функции с сингулярной амплитудой. Асимптотический анализ интеграла дает формулу для дифрагированной волны, а также описание поля вблизи предельного луча на малых расстояниях от контура. Приведем результаты для случая негладкости производной кривизны (5). Чтобы перейти к случаю скачка (2) (соотв., гельдеровской сингулярности (4)) кривизны, следует положить $j = \lambda = 0$ (соотв., $j = 0$).

Вдали от предельного луча, в области, где выполнены условия $kr \to \infty$ и $\sqrt{kr}|\varphi - \varphi_0| \to \infty$, уходящая волна есть сумма геометрически отраженной от гладких частей контура волны (явно описываемой лучевым методом [20])

и дифрагированной точкой негладкости волны: $u^{\rm out} = u^{\rm ref} + u^{\rm dif}$. Полученное нами выражение для дифрагированной волны имеет вид

$$u^{\rm dif} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{h\Gamma(1+\lambda)\sin\varphi_0\sin\varphi\, e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{(j+\lambda)\pi}{2}}}{k^{j+\lambda+1}\left(\cos\varphi-\cos\varphi_0\right)^{j+\lambda+3}}\,\frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}\left(1+O\left(\frac{1}{kr(\varphi-\varphi_0)^2}\right)\right). \quad (8)$$

Здесь $r$ и $\varphi$ — полярные координаты с центром в $O$: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Выражение пригодно как на малых $\varkappa r \to 0$, так и на умеренных $\varkappa r = O(1)$ расстояниях от контура.

Вблизи предельного луча, в области, где выполнены условия $kr \to \infty$ и $(kr)^{1/3}(\varphi-\varphi_0) \to 0$, влияние особенности кривизны на уходящее волновое поле описывается формулой

$$u_h^{\rm out} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{h\Gamma(\lambda+1)}{(\sin\varphi_0)^{j+\lambda+1}}\,\frac{r^{1+\frac{j+\lambda}{2}}}{k^{\frac{j+\lambda}{2}}}\,e^{i\frac{(j+\lambda)\pi}{4}}e^{ikr-i\frac{z^2}{2}}D_{-j-\lambda-3}\left(\sqrt{2}\,ze^{-i\frac{\pi}{4}}\right)(1+o(1)), \quad (9)$$

где $z = \sqrt{kr/2}\,(\varphi-\varphi_0)$, а $D_{-j-\lambda-3}$ — функция параболического цилиндра. Выражение пригодно только на малых расстояниях от контура ($\varkappa r \to 0$). Кроме того, из условия сшивания с отраженной волной вдали от предельного луча следуют ограничения $k\varkappa r^2(\varphi-\varphi_0)^2 \to 0$ и $kh(r|\varphi-\varphi_0|)^{2+j+\lambda} \to 0$.

В разделе 1.4 результаты обобщаются на случай импедансного граничного условия.

В разделе 1.5 кратко обсуждается дифракция цилиндрической волны

$$u^{\rm inc} = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}\left(k\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right), \quad (10)$$

приходящей в точку $O$ под тем же углом скольжения $\varphi_0$. Здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля, а $r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$ — расстояние от $O$ до точки источника, причем $kr_0 \to \infty$. Показано, что главный член асимптотики, описывающий влияние негладкости кривизны на уходящее поле, отличается от найденного в случае падения плоской волны лишь постоянным множителем $-e^{ikr_0+i\pi/4}/2\sqrt{2\pi kr_0}$.

**Во второй главе** задачи дифракции на контурах с негладкой кривизной исследуются в рамках эвристического метода Кирхгофа. Это позволяет угадать вид спецфункций, описывающих поле в переходной зоне на умеренных расстояниях $\varkappa r = O(1)$ от точки негладкости, что непросто сделать в рамках погранслойного подхода. Обоснование асимптотик приведено в 4 главе.

Установлено, что в случае скачка кривизны (2) волновое поле вблизи предельного луча описывается суммой двух интегралов Френеля

$$\Phi(A) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{A} e^{ip^2}dp \quad (11)$$

от разных аргументов, которые зависят от кривизны контура слева и справа от точки $O$. В случаях же гельдеровской сингулярности (4) и негладкости

производной кривизны (5) волновое поле в главном порядке дается лучевой формулой [20], а член, описывающий влияние негладкости кривизны, является поправкой и выражается через функцию параболического цилиндра, аргумент которой зависит от значения кривизны контура в точке $O$.

**В третьей главе** вводится специальное семейство точных решений уравнения Гельмгольца (1), удобных для описания слияния двух цилиндрических волн. Построение основано на разделении переменных в эллиптической системе координат, которая вводится так, чтобы цилиндрические волны расходились из ее фокусов $O$ и $O'$, см. Рисунок 2. Решения выражаются через произведение двух функций Матье. Асимптотику одной из них дает классический метод ВКБ. Исследование второй менее тривиально и вынесено в главу 5. Там ее асимптотика вблизи предельного луча выражена через функцию параболического цилиндра $D_\nu$, где $\nu$ определяется параметром разделения. В результате для функции семейства $u_\nu$ мы получаем аппроксимацию

$$u_\nu = C\sqrt{\frac{a}{r}}\left(\frac{r+2a}{r}\right)^{\frac{\nu}{2}} e^{ik\left(r+a-\frac{ar\widetilde{\varphi}^2}{2(r+2a)}\right)} D_\nu\left(-\sqrt{\frac{2kar}{r+2a}}\,\widetilde{\varphi}e^{-i\pi/4}\right)(1+o(1)). \quad (12)$$

Здесь $2a$ — расстояние между фокусами $O$ и $O'$, $r$ — расстояние до фокуса $O$, $\widetilde{\varphi}$ — угол между предельным лучом и направлением из $O$ на точку наблюдения (см. Рисунок 2), и $\nu < 0$. Аппроксимация (12) пригодна в области, где $kr \to \infty$ и $kr|\widetilde{\varphi}|^\mu \to 0$, $\mu = 2 + 4/(1-3\nu)$.

Выражение (12) описывает слияние двух цилиндрических волн: расходящейся из точки $O$ и присутствующей с обеих сторон от предельного луча волны

$$u_\nu^{(1)} = 2^{\frac{\nu}{2}} C (ka)^{\frac{\nu+1}{2}} \widetilde{\varphi}^\nu e^{ika - i\frac{\pi\nu}{4}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}, \quad (13)$$

и расходящейся из $O'$ и присутствующей лишь ниже предельного луча волны

$$u_\nu^{(2)} = -C\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}\frac{(\widetilde{\varphi}')^{-\nu-1}}{(2ka)^{\frac{\nu}{2}}} e^{-ika + i\frac{\pi(5\nu+1)}{4}} \frac{e^{ikr'}}{\sqrt{kr'}}. \quad (14)$$

Здесь $r'$ — расстояние до фокуса $O'$, $\widetilde{\varphi}'$ — угол между направлением из $O'$ на точку наблюдения и предельным лучом (см. Рисунок 2). Диаграмма $u_\nu^{(1)}$ сингулярна на предельном луче, в то время как диаграмма $u_\nu^{(2)}$ непрерывна.

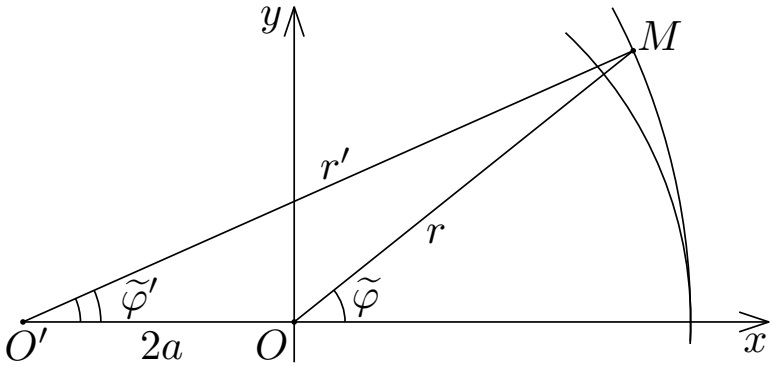


Рисунок 2 — Слияние двух цилиндрических волн

**В четвертой главе** показано, что функции построенного в главе 3 семейства описывают поле в переходной зоне на умеренных расстояниях $\varkappa r = O(1)$ от точки негладкости кривизны контура. Выбор функций (12) подсказывается результатами главы 2. Оценка ширины переходной зоны требует подробного анализа лучевой формулы для отраженной волны, который приведен в главе 6.

В случае скачка кривизны (2) переходная зона описывается условием $(kr)^{1/3}\widetilde{\varphi} \to 0$, там волновое поле дается выражением

$$u^{\text{out}} = \frac{e^{ik(r_0+r)+i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi k(r_0+r)}}\left(\frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{J_+}}}{\sqrt{J_+}}\Phi\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{J_+}}\right) + \frac{e^{-i\frac{\zeta^2}{J_-}}}{\sqrt{J_-}}\Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{J_-}}\right)\right)(1+o(1)). \quad (15)$$

Здесь $\Phi$ — интеграл Френеля, элементарно выражающийся через функцию параболического цилиндра $D_{-1}$ , $\zeta = \sqrt{k\rho/2}\,\widetilde{\varphi}$, $\rho = r_0 r/(r_0+r)$, $\widetilde{\varphi}$ — угол, отсчитываемый от предельного луча, а $J_\pm = 1 + 2æ_\pm\rho/\sin\varphi_0$, $æ_+ = æ_0$, $æ_- = æ_0 + h$.

Влияние гельдеровской сингулярности (4) на уходящее поле описывается формулой

$$u_h^{\text{out}} = \frac{h}{2\pi}\frac{\Gamma(1+\lambda)e^{i\frac{(\lambda+1)\pi}{4}}}{(\sin\varphi_0)^{1+\lambda}}\frac{\rho^{1+\frac{\lambda}{2}}}{k^{\frac{\lambda}{2}}J^{1+\frac{\lambda}{2}}}\frac{e^{ik(r_0+r)-i\frac{\zeta^2}{2J}}}{\sqrt{kJ(r_0+r)}}D_{-3-\lambda}\left(\sqrt{\frac{2}{J}}\zeta\, e^{-i\frac{\pi}{4}}\right), \quad (16)$$

где $J = 1 + æ_0\rho/\sin\varphi_0$. Выражение (16) пригодно в области, характеризующейся условиями $(kr)^{1/3}\widetilde{\varphi} \to 0$ и $kh(r|\widetilde{\varphi}|)^{2+\lambda} \to 0$. Формула, описывающая влияние негладкости производной кривизны (5), отличается от выражения (16) лишь заменой $\lambda$ на $j+\lambda$.

Показано, что при $\varkappa r \to 0$ выражения (15) и (16) переходят в формулы для поля (9) с $j = \lambda = 0$ и (9) с $j = 0$, соответственно.

**В пятой главе** исследуется возникшее в главе 3 уравнение Матье

$$w''(x) + (-iK(2\nu+1) + K^2\sin^2 x)w(x) = 0, \quad (17)$$

где $\nu \leqslant -1$ и $K \to +\infty$. При малых вещественных $x$ строится аппроксимация его решений функциями параболического цилиндра (отметим, что при $\nu \geqslant -1/2$ они допускают равномерное приближение функциями Эйри [21] — нас же интересуют только $\nu \leqslant -1$), что позволяет получить удобные асимптотические формулы (12) для описания слияния двух высокочастотных цилиндрических волн. Доказывается

**Теорема.** Уравнение (17) имеет решение $w(x)$, для которого в малой окрестности $x = 0$ справедливо представление

$$w(x) = D_\nu\left(-\sqrt{2K}xe^{-i\frac{\pi}{4}}\right)(1+\mathcal{E}), \quad (18)$$

причем $\mathcal{E} = O\left(K^{-4\varepsilon}\right)$ в области $-CK^{-\frac{1}{4}-\varepsilon} < x \leqslant 0$ и $\mathcal{E} = O\left(K^{-3(1-\nu)\varepsilon}\right)$ в области $0 \leqslant x < CK^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3(1-\nu)}-\varepsilon}$. Здесь $C > 0$ и $\varepsilon > 0$ — константы, не зависящие от $K$.

**В шестой главе** проводится детальный анализ лучевой формулы для волны, отраженной от контура с особенностью кривизны. Получены упрощенные выражения в малой окрестности точки негладкости и в узкой окрестности предельного луча, что позволяет описать области пригодности асимптотик, построенных в главах 1 и 4.

**В заключении** кратко изложены основные результаты диссертации.

**В приложении** приведены сведения о функциях параболического цилиндра, часто используемые в основном тексте диссертации.

## Заключение

В диссертации последовательный метод пограничного слоя развит для задач высокочастотной дифракции в случае некасательного падения на контур, кривизна или производная кривизны порядка $j$, $j = 1, 2, \ldots$, которого имеет скачок или гельдеровскую сингулярность. Построены высокочастотные асимптотики дифрагированной волны и поля в переходной зоне для каждого типа особенности кривизны. Определены области пригодности всех полученных выражений. Построены удобные простые формулы для общего асимптотического описания слияния двух высокочастотных цилиндрических волн — тем самым предложено общее выражение для поля во френелевских переходных зонах.

Развитый подход может оказаться полезен и в других задачах высокочастотной дифракции.

## Публикации автора по теме диссертации

### Рецензируемые журналы

A1. *Zlobina E. A., Kiselev A. P.* Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature // *Wave Motion.* — 2020. — Vol. 96. — Article ID 102571.

A2. *Злобина Е.А.* Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Погранслойный подход // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2020. — Т. 493. — С. 169–185.

A3. *Злобина Е. А., Киселев А. П.* Дифракция коротких волн на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны // *Алгебра и анализ.* — 2021. — Т. 33, № 2. — С. 35–55.

A4. *Злобина Е. А.* Дифракция коротких волн на контуре с гельдеровской сингулярностью кривизны. Переходная зона // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* — 2021. — Т. 506. — С. 43–56.

A5. *Злобина Е. А., Киселев А. П.* Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод

Кирхгофа и метод пограничного слоя // *Радиотехника и электроника.* — 2022. — Т. 67, № 2. — С. 130–139.

A6. *Злобина Е. А., Киселев А. П.* Френелевские переходные зоны // *Радиотехника и электроника.* — 2023. — Т. 68, № 6. — С. 542–552.

A7. *Злобина Е. А.* Аппроксимация функций Матье функциями параболического цилиндра // *Математические заметки.* — 2023. — Т. 114, № 3. — С. 347–352.

**Материалы конференций**

A8. *Zlobina E. A., Kiselev A. P.* High frequency diffraction by a contour with a jump of curvature // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2018”. — St. Petersburg : IEEE. — 2018. — P. 325–328.

A9. *Zlobina E. A.* High frequency diffraction by a contour with a Hölder discontinuity of curvature // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2019”. — St. Petersburg : IEEE. — 2019. — P. 251–252.

A10. *Zlobina E. A.* Diffraction by a jump of curvature: Wavefield near the limit ray at a moderate distance // Proceedings of the International Conference “Days on Diffraction 2020”. — St. Petersburg : IEEE. — 2020. — P. 128–130.

## Цитированная литература

1. *Keller J. B.* Geometrical theory of diffraction // *J. Opt. Soc. Am.* — 1962. — Vol. 52, no. 5. — P. 116–130.
2. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теория дифракции. — Москва : Связь, 1978.
3. *James G. L.* Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. — London : IEEE Electromagnetic series 1, 1986.
4. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — Москва : Советское радио, 1970.
5. *Buchal R. N., Keller J. B.* Boundary layer problems in diffraction theory // *Comm. Pure Appl. Math.* — 1960. — Vol. 13, no. 1. — P. 85–114.
6. *Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. — Ленинград : Издательство ЛГУ, 1974.
7. *Маслов В. П., Федорюк М. В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — Москва : Наука, 1976.
8. *Weston V. H.* The effect of a discontinuity in curvature in high-frequency scattering // *IRE Trans. AP.* — 1962. — Vol. 10. — P. 775–780.

9. *Weston V. H.* Effect of a discontinuity of curvature in high-frequency scattering. Part II // *IEEE Trans. AP.* — 1965. — Vol. 13. — P. 611–613.

10. *Senior T. B. A.* The diffraction matrix for a discontinuity in curvature // *IEEE Trans. AP.* — 1972. — Vol. 20, no. 3. — P. 326–333.

11. *Kaminetzky L., Keller J. B.* Diffraction coefficients for higher order edges and vertices // *SIAM J. Appl. Math.* — 1972. — Vol. 22, no. 1. — P. 109–134.

12. *Филиппов А. Ф.* Отражение от границы, состоящей из дуг различной кривизны // *Прикл. Мат. Мех. (ПММ).* — 1971. — Т. 34. — С. 1076–1084.

13. *Rogoff Z. M., Kiselev A. P.* Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary // *Wave Motion.* — 2001. — Vol. 33, no. 2. — P. 183–208.

14. *Попов А. В.* Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны // Труды 5 Всес. Симпоз. Дифр. Распр. Волн. — Ленинград : Наука. — 1971. — С. 171–175.

15. *Michaeli A.* Diffraction by a discontinuity in curvature including the effect of creeping wave // *IEEE Trans. AP.* — 1990. — Vol. 38, no. 6. — P. 929–931.

16. *Andronov I. V., Kirpichnikova N., Bouche D., Philippov V.* Creeping wave diffraction by a junction with plane surface // *Ann. Télécommun.* — 1997. — Vol. 52. — P. 483–488.

17. *Kirpichnikova A. S., Philippov V. B.* Diffraction by a line of curvature jump (a special case) // *IEEE Trans. Antennas and Propagation.* — 2001. — Vol. 49, no. 12. — P. 1618–1623.

18. *Злобина Е. А., Киселев А. П.* Дифракция волны шепчущей галереи при скачкообразном распрямлении границы // *Акустический журнал.* — 2023. — Т. 69, № 2. — С. 119–128.

19. *Zlobina E. A., Kiselev A. P.* The Malyuzhinets—Popov diffraction problem revisited // *Wave Motion.* — 2023. — Vol. 121. — Article ID 103172.

20. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — Москва : Наука, 1972.

21. *Dobrokhotov S. Yu., Tsvetkova A. V.* Global asymptotics for functions of parabolic cylinder and solutions of the Schrödinger equation with a potential in the form of a nonsmooth double well // *Russ. J. Math. Phys.* — 2023. — Vol. 30, no. 1. — P. 46–61.