Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

ЗАТИЦКИЙ Павел Борисович

Масштабирующая энтропийная последовательность как метрический инвариант динамических систем

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физ.-мат. наук
Петров Федор Владимирович

Санкт-Петербург – 2014

Оглавление

Введение

Основная цель данной работы — изучение свойств масштабирующей энтропийной последовательности — метрического инварианта динамических систем.

Под динамической системой обычно понимается пара (X, T), где X — некоторое пространство, а T — отображение из X в себя. Изучается динамика, задаваемая отображением T на пространстве X, то есть действие на X последовательности отображений T^n, $n \in \mathbb{N}$. Если отображение T обратимо в том или ином смысле, также рассматриваются отрицательные степени отображения T — T^n, при $n \in \mathbb{Z}, n < 0$. Кроме того, изучаются действия групп преобразований. Представляют интерес динамические системы в разных категориях, то есть на пространстве X заводится некоторая дополнительная структура, а на отображение T накладываются условия сохранения этой структуры. Так, например, изучаются динамические системы в категории пространств с мерой, в категории топологических пространств, гладкие динамические системы.

Эргодическая теория изучает динамические системы в категории пространств с мерой. Объектами в данной категории являются пространства с мерой (X, μ), а на отображение T накладывается условие измеримости и сохранения меры. Две метрические динамические системы (X_1, μ_1, T_1) и (X_2, μ_2, T_2) называются метрически изоморфными, если существует изоморфизм пространств с мерой $S\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$, переводящий одну динамическую систему в другую, то есть такой, что $S \circ T_1 = T_2 \circ S$. По сути, изоморфные динамические системы имеют одинаковые свойства. Оказывается, динамические системы, имеющие совершенно разную природу, зачастую оказываются изоморфны друг другу.

Одним из центральных вопросов эргодической теории является проблема изоморфизма: как по двум данным динамическим системам, возможно совершенно разной природы, понять, изоморфны они или нет? Ответ на этот вопрос дают так называемые инварианты. Инвариантом динамической системы называется та или иная ее характеристика, не изменяющаяся при изоморфизмах. Таким образом, для того, чтобы получить отрицательный ответ на вопрос изоморфизма, достаточно предъявить некий инвариант, который различен у двух данных динамических систем. Система инвариантов называется полной, если их совпадение у двух динамических систем гарантирует изоморфность этих систем.

Задача о поиске полной системы метрических инвариантов динамических систем исключительно сложна, и, по-видимому, не допускает сколько-нибудь удовлетворительного ответа. Несмотря на это, для некоторых классов динамических систем специального вида найдены полные системы инвариантов.

Спектральные инварианты. В начале 30-х годов 20 века в фундаментальных работах Дж. фон Неймана и Б. Купмана были предложены спектральные инварианты, основанные на спектральной теории унитарных операторов в гильбертовом пространстве. Автоморфизму T пространства с мерой (X, μ) каноническим образом ставится в соответствие унитарный оператор U_T гильбертова пространства $L^2(X, \mu)$, который каждой функции f сопоставляет функцию $U_T f$, заданную формулой $(U_T f)(x) = f(T(x))$. Спектральные характеристики (спектральная мера и функция кратности) оператора U_T приписываются динамической системе (X, μ, T). Построенные таким образом унитарные операторы U_{T_1} и U_{T_2}, действующие в пространсвах $L^2(X_1, \mu_1)$ и $L^2(X_2, \mu_2)$, соответствующие метрически изоморфным динамическим системам (X_1, μ_1, T_1) и (X_2, μ_2, T_2), являются унитарно эквивалентными, то есть существует унитарный оператор $U\colon L^2(X_1, \mu_1) \to L^2(X_2, \mu_2)$, такой что $U \circ U_1 = U_2 \circ U$. Но спектральные характеристики являются унитарными инвариантами операторов. Отсюда следует, что определенные таким образом спектральные характеристики являются метрическими инвариантами динамических систем.

Однако, система спектральных инвариантов довольно сложна для вычислений, и в то же время не является полной. Так, спектры всех сдвигов Бернулли оказываются одинаковыми. Сдвигом Бернулли называется следующая динамическая система. Пусть $(A, \mathfrak{A}_0, \nu)$ — некоторое вероятностное пространство. Рассмотрим пространство $X = A^{\mathbb{Z}}$ всевозможных двусторонних последовательностей элементов множества A, занумерованных целыми числами. На нем задается сигма-алгебра произведения $\mathfrak{A}$, бернуллиевская продакт-мера μ. Оператор $T\colon X \to X$ — левый сдвиг последовательности. Динамическая система (X, μ, T) называется сдвигом Бернулли с базовым пространством $(A, \mathfrak{A}_0, \nu)$. Бернуллиевские динамические системы являются, с одной стороны, наиболее просто устроенными, с другой стороны, чрезвычайно важными примерами символических динамических систем.

Метрическая энтропия. Энтропия в качестве метрического инварианта динамических систем появилась в фундаментальных работах А. Н. Колмогорова [4, 5] 1958-59 гг. Важным инструментом для построения энтропийной теории послужила теория измеримых разбиений, разработанная В. А. Рохлиным в 40-е годы (см. [6]). Тут мы приведем необходимые определения для случая стандартного вероятностного пространства (X, μ) с непрерывной мерой, то есть пространства, изоморфного отрезку $[0, 1]$ с мерой Лебега. Разбиение ξ пространства (X, μ) на конечное или бесконечное количество непересекающихся элементов называется измеримым, если найдется измеримая функция $f\colon (X, \mu) \to \mathbb{R}$, такая что любой элемент разбиения ξ суть полный прообраз $f^{-1}(y)$ какой-то точки $y \in \mathbb{R}$. Энтропией разбиения ξ называется число $H(\xi) = -\sum \mu(A_i) \log \mu(A_i)$, если найдутся попарно дизъюнктные элементы разбиения $\{A_1, A_2, \dots\}$, такие что $\mu(\cup A_i) = 1$. В противном случае полагают

$H(\xi) = +\infty$.

Наиболее удобная форма определения энтропии динамических систем была предложена Я. Г. Синаем в работе [7] 1959 года. Пусть (X, μ, T) — метрическая динамическая система. Сдвигом $T^{-1}\xi$ измеримого разбиения ξ называется измеримое разбиение, элементы которого суть полные прообразы элементов разбиения ξ под действием отображения T. Произведением $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \xi_i$ конечного числа измеримых разбиений называется измеримое разбиение, элементы которого суть пересечения элементов разбиений ξ_i. Информационной энтропией измеримого разбиения ξ под действием отображения T называется число

$$h_\mu(T, \xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee T^{-2}\xi \vee \cdots \vee T^{-n+1}\xi).$$

Метрической (колмогоровской) энтропией динамической системы (X, μ, T) называется точная верхняя грань этих чисел, взятая по всевозможным измеримым разбиениям с конечной энтропией:

$$h_\mu(T) = \sup_{\xi} h_\mu(T, \xi).$$

Из этого определения очевидно, что энтропия является метрическим инвариантом. Замечательная теорема Колмогорова–Синая (см. работу [7] 1959 года) утверждает, что если разбиение ξ порождающее (то есть его сдвиги $T^n\xi, n \in \mathbb{Z}$, в совокупности порождают всю сигма-алгебру $\mathfrak{A}$ пространства (X, μ)), то энтропия динамической системы (X, μ, T) вычисляется по формуле $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$. Эта теорема позволяет в значительной степени упростить вычисление энтропии в конкретных примерах. В работе [8] В. А. Рохлина подробно освещены эти и другие вопросы теории.

Оказалось, что колмогоровская энтропия сдвига Бернулли совпадает с энтропией базового пространства (говоря в терминах разбиений, равна энтропии разбиения на точки базового пространства). Таким образом, энтропия смогла сделать то, что не могли сделать спектральные инварианты — различить бернуллиевские сдвиги. Более того, как было показано Д. Орнстейном в серии работ начала 70-х, колмогоровская энтропия является полным инвариантом сдвигов Бернулли.

Во многих последующих работах В. А. Рохлина, Я. Г. Синая, А. М. Вершика, Л. М. Абрамова, М. С. Пинскера, Д. Орнстейна, А. Б. Катка и др. изучались свойства метрической энтропии автоморфизмов и потоков, приводились формулы для энтропии конкретных автоморфизмов, изучалась аксиоматика энтропии, ее связи со спектральной теорией, изучались обобщения понятия энтропии на действия различных групп и др. Стоит отметить недавний цикл работ Л. Боуэна (2010-2012), в которых понятие энтропии переносится на действие софических групп.

Топологическая энтропия. Важно упомянуть, что параллельно развивалась теория топологической энтропии динамических систем. Объектами категории являются топологические пространства, а на отображения накладывается условие непрерывности. Р. Адлером, А. Конхеймом и М. МакЭндрю в работе [9] 1965 года был введен схожий инвариант для топологических динамических систем — топологическая энтропия. Независимо Р. Боуэном в работе [10] и Е. И. Динабургом в работе [11] 1971 года было введено иное, более удобное, но по сути эквивалентное определение топологической энтропии динамической системы. Для этого использовались понятия ε-энтропий метрических компактов. Пусть X — компактное топологическое пространство, а $T\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим произвольную метрику ρ на пространстве X, задающую ту же топологию. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество точек из X называется ε-сетью в метрическом пространстве (X, ρ), если шары в метрике ρ с центрами в этих точках радиуса ε покрывают все пространство X. В силу компактности пространства X, для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть. Размер наименьшей по количеству ε-сети обозначим $N_\varepsilon(X,\rho)$. Для $n \in \mathbb{N}$ определим теперь метрику ρ^n на X следующим образом:

$$\rho^n(x,y) = \max_{0\le i\le n-1} \rho(T^i(x), T^i(y)),$$

которая показывает, насколько далеко за n первых итераций преобразования T точки x и y “отдалялись” друг от друга. Измерим теперь ε-энтропию пространства X с метрикой ρ^n. Оказывается, что она экспоненциально растет с ростом n. Величина, определенная по формуле

$$h_{top}(T) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log N_\varepsilon(X,\rho^n)}{n},$$

называется топологической энтропией динамической системы. Эта величина не зависит от выбранной метрики ρ, задающей исходную топологию.

Е. И. Динабург отмечал, что идея связи топологической энтропии, введенной Р. Адлером, А. Конхеймом и М. МакЭндрю, с ε-энтропией метрических компактов принадлежит А. Н. Колмогорову.

Масштабирующая энтропийная последовательность. Хотя для случая сдвигов Бернулли энтропия является полным инвариантом, для динамических систем общего вида вопрос о других инвариантах энтропийного типа открыт. Для метрической классификации динамических систем с нулевой энтропией Вершиком (см., например, [12], [13], [14],[15]) было предложено ввести иной инвариант, нежели энтропия Колмогорова, названный им масштабирующей энтропийной последовательностью. Это понятие основано на динамике полуметрик на фиксированном пространстве с мерой (X,μ) и сочетает в себе идеи колмогоровской метрической и топологической энтропии. Стоит отметить, что схожие инварианты изучались в работах Ференци и Катка–Тувено (см., например, [16], [17]).

Пусть (X,μ,ρ) — полуметрическая тройка, то есть пространство X с согласованными структурами полуметрики ρ и меры μ. Для положительного числа ε назовем ε-энтропией метрической тройки $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)$ величину

$\log k$, где k — наименьшее возможное натуральное число, такое что найдутся точки $x_1, \ldots, x_k \in X$, шары радиуса ε в метрики ρ с центрами в которых покрывают все множество X за исключением, возможно, множества μ-меры не более ε. Это понятие схоже, с одной стороны, с понятием ε-энтропии метрического компакта, обсуждаемого выше, с другой стороны, оно учитывает меру μ. Определим теперь динамику метрик следующим образом. Для $n > 0$ определим усредненную под действием T полуметрику $T_{av}^n \rho(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(T^i(x), T^i(y))$. Последовательность чисел h_n называется масштабирующей для полуметрики ρ и динамической системы (X, μ, T), если при достаточно малых $\varepsilon > 0$ найдутся две положительные константы $C_1(\varepsilon), C_2(\varepsilon)$, такие что

$$C_1(\varepsilon) h_n \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_n) \leq C_2(\varepsilon) h_n$$

при всех n.

Основная цель данной диссертации — изучить свойства масштабирующей энтропийной последовательности, показать, что она в некотором классе не зависит от полуметрики ρ, и, следовательно, является метрическим инвариантом динамической системы.

Структура диссертации. В первой главе настоящей диссертации изучаются свойства допустимых полуметрик на фиксированном стандартном вероятностном пространстве (X, μ). В разделе 1.1 определены базовые понятия — полуметрическая тройка, допустимая полуметрика, почти метрика и т. д. Полуметрика на вероятностном пространстве (X, μ) называется допустимой, если она сепарабельна на некотором подмножестве полной меры. Почти метрикой называется функция, которая удовлетворяет свойствам полуметрики лишь почти всюду. Такие функции возникают естественным образом при предельном переходе. В разделе 1.2 доказывается теорема об исправлении, которая утверждает, что почти метрика на стандартном вероятностном пространстве всегда может быть исправлена до полуметрики. В разделе 1.3 доказываются теоремы о борелевских сигма-алгебрах, порожденных допустимыми полуметриками. В разделе 1.4 приводятся определение ε-энтропии полуметрической тройки, некоторые оценки ε-энтропии, критерии допустимости полуметрики. В разделе 1.5 на подпространстве пространства $L^1(X^2, \mu^2)$ вводится специальная норма, названная m-нормой, которая позволяет контролировать ε-энтропии полуметрик. Там же изучаются простые свойства этой нормы, пространства $\mathbb{M}$ функций с конечной m-нормой, конуса суммируемых допустимых полуметрик. В разделе 1.6 обсуждается связь сходимости последовательности допустимых полуметрик в пространствах $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$ и $L^1(X^2, \mu^2)$. Кроме того, там же доказывается, что допустимая полуметрика может быть аппроксимирована своими срезками в m-норме. В разделе 1.7 приводятся критерии предкомпактности семейства допустимых полуметрик в пространствах $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$ и $L^1(X^2, \mu^2)$.

Во второй главе изучается динамика допустимых полуметрик в пространстве $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$, заданная автоморфизмом T пространства (X, μ). В разделе 2.1 вводится понятие масштабирующей последовательности полуметрики и, основываясь на результатах главы 1, доказывается основная теорема, утверждающая, что масштабирующая последовательность не зависит от выбора полуметрики в классе суммируемых допустимых полуметрик, что позволяет рассматривать масштабирующую энтропийную последовательность в качестве метрического инварианта динамической системы. В разделе 2.2 приводится критерий, дающий характеризацию динамических систем с чисто точечным спектром в терминах масштабирующей энтропийной последовательности, приводится оценка масштабирующей энтропийной последовательности через последовательностную энтропию Кушниренко. В разделе 2.3 приводится пример вычисления масштабирующей энтропийной последовательности для подстановочных динамических систем, отвечающих подстановкам постоянной длины. В качестве элементарного следствия доказанных в разделах 2.2 и 2.3 теорем получен критерий, описывающий подстановочные динамические системы с чисто точечными спектрами, доказанный ранее в работах [18, 19], однако сформулированный несколько иначе.

Основные результаты, представленные в работе, изложены в работах [1], [2], [3] и докладывались на Санкт-Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам, на коллоквиуме лаборатории Чебышева СПбГУ.

Глава 1

Геометрия пространства допустимых полуметрик

1.1. Основные определения и обозначения

На протяжении всей работы все встречающиеся пространства с мерой по умолчанию будут стандартными вероятностными пространствами (пространствами Лебега, Лебега–Рохлина), если не указано обратное. Основной интерес для нас будут представлять пространства с непрерывной мерой, однако все определения даются для произвольного пространства Лебега, т.е. пространства, в котором мера может содержать атомы. Говоря о вероятностном пространстве, мы чаще всего позволим себе опускать обозначение сигма-алгебры. В тех редких случаях, когда нам потребуется обозначение сигма-алгебры вероятностного пространства, скажем (X, μ), мы будем обозначать ее $\mathfrak{A}(X, \mu)$.

Поскольку полуметрики будут играть в дальнейшем существенную роль, мы используем основные понятия теории метрик и для случая полуметрик. Например, мы говорим о борелевской сигма-алгебре множеств, понимая в случае полуметрик сигма-алгебру, порожденную открытыми (в смысле полуметрики) множествами. Разумеется, эта сигма-алгебра, вообще говоря, может не разделять точки.

Имея некоторое множество A и $k \in \mathbb{N}$, символом A^k мы будем обозначать его декартову степень. Имея полное вероятностное пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, его степень $(X^k, \mathfrak{A}^k, \mu^k)$ мы всегда будем считать пополненным вероятностным пространством.

Определение 1. Пусть (X, μ) — вероятностное пространство (не обязательно стандартное). Функцию $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$, измеримую по мере μ^2, будем называть измеримой полуметрикой на (X, μ), если она является полуметрикой на X. Тройку (X, μ, ρ) будем называть полуметрической тройкой. В случае, если найдется некоторое подмножество $X_1 \subset X$ полной меры, такое что сужение полуметрики ρ на X_1 является метрикой, тройку (X, μ, ρ) будем называть метрической тройкой. Измеримую полуметрику ρ будем называть суммируемой, если она, как функция двух переменных, суммируема по мере μ^2, то есть $\rho \in L^1(X^2, \mu^2)$.

Определение 2. Измеримую полуметрику (или метрику) ρ на (не обязательно стандартном) вероятностном пространстве (X, μ) будем называть допустимой, если найдется некоторое подмножество $X_1 \subset X$ полной меры, такое что полуметрическое (соотв. метрическое) пространство (X_1, ρ) сепарабельно. Тройку (X, μ, ρ) в этом случае будем называть допустимой.

Важным классом примеров допустимых полуметрик являются блок-полуметрики. Напомним определение измеримого разбиения и информационной энтропии.

Определение 3. Разбиение ξ пространства (X, μ) на конечное или бесконечное количество непересекающихся элементов называется измеримым, если найдется измеримая функция $f\colon (X, \mu) \to \mathbb{R}$, такая что любой элемент разбиения ξ есть полный прообраз $f^{-1}(y)$ какой-то точки $y \in \mathbb{R}$. Энтропией разбиения ξ называется число $H(\xi) = -\sum \mu(A_i) \log \mu(A_i)$, если найдутся попарно дизъюнктные элементы разбиения $\{A_1, A_2, \dots\}$, такие что $\mu(\cup A_i) = 1$. В противном случае полагают $H(\xi) = +\infty$. Множество всех измеримых разбиений стандартного вероятностного пространства (X, μ) с конечной энтропией обозначим символом $Z(X, \mu)$. Энтропией вероятностного пространства считается энтропия разбиения на точки.

Произведением $\vee \xi_i$ нескольких измеримых разбиений ξ_i будем называть измеримое разбиение, элементы которого суть пересечения элементов исходных разбиений ξ_i.

Определение 4. Пусть ξ — измеримое разбиение пространства (X, μ). Для $x \in X$ пусть $\xi(x)$ — элемент разбиения ξ, содержащий x. Блок-полуметрикой, соответствующей разбиению ξ, называется полуметрика ρ_ξ, определенная равенствами $\rho_\xi(x, y) = 0$, если $\xi(x) = \xi(y)$, и $\rho_\xi(x, y) = 1$ в противном случае. Если ξ является разбиением на два множества, полуметрика ρ_ξ называется разрезной (или просто разрезом).

Полезно дать формально менее ограничительное определение измеримой полуметрики, которое, однако, эквивалентно исходному.

Определение 5. Пусть (X, μ) — стандартное вероятностное пространство, а $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ — измеримая по мере μ^2 неотрицательная функция. Будем называть ρ почти метрикой, если $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для μ^2-почти всех пар $(x, y) \in X^2$ и $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для μ^3-почти всех троек $(x, y, z) \in X^3$.

Определение 6. Пусть ρ — почти метрика на (X, μ). Пусть $A \subset X$ — некоторое μ-измеримое подмножество. Символом $\mathrm{dm}_\rho(A)$ будем обозначать диаметр множества A в полуметрике ρ:

$$\mathrm{dm}_\rho(A) = \sup\{\rho(x, y)\colon x, y \in A\}.$$

Символом $\mathrm{essdm}_\rho(A)$ будем обозначать его существенный диаметр:

$$\mathrm{essdm}_\rho(A) = \inf\{d \in \mathbb{R}\colon \rho(x, y) \le d \text{ для } \mu^2\text{-п. в. } (x, y) \in A^2\}.$$

Из определения ясно, что $\mathrm{dm}_\rho(A) \ge \mathrm{essdm}_\rho(A)$. Обращение в некотором смысле этого неравенства устанавливает следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть ρ — измеримая полуметрика на (X, μ), $A \subset X$ — измеримое подмножество. Тогда найдется μ-измеримое подмножество $B \subset A$, такое что $\mu(A \setminus B) = 0$ и $\mathrm{dm}_\rho(B) \le 2\mathrm{essdm}_\rho(A)$.*

Доказательство. Пусть $d = \mathrm{essdm}_\rho(A)$. Мы можем считать, что $\mu(A) > 0$. Так как $\rho(x,y) \le d$ для μ^2-почти всех пар $(x,y) \in A^2$, то найдется точка $x \in A$, такая что $\rho(x,y) \le d$ для μ-почти всех $y \in A$. Пусть $B = \{y \in A\colon \rho(x,y) \le d\}$. Тогда $\mu(A \setminus B) = 0$ и для $y_1, y_2 \in B$ по неравенству треугольника имеем $\rho(y_1,y_2) \le \rho(x,y_1) + \rho(x,y_2) \le 2d$. □

Следующее определение вводит естественный аналог понятия допустимости для почти метрик.

Определение 7. Почти метрику ρ на пространстве (X,μ) будем называть существенно сепарабельной, если для любого $\varepsilon > 0$ пространство X может быть покрыто счетным семейством измеримых множеств, существенный диаметр каждого из которых меньше ε.

Определение 8. Две почти метрики ρ_1, ρ_2 на пространстве (X,μ) назовем μ-эквивалентными, если $\mu^2(\{(x,y) \in X^2\colon \rho_1(x,y) \ne \rho_2(x,y)\}) = 0$. Также будем иногда говорить, что одна из двух μ-эквивалентных метрик является исправлением другой (обычно исправленная метрика будет обладать какими-то лучшими свойствами по сравнению с исходной).

Отметим, что если два измеримых разбиения совпадают на множестве полной меры, то соответствующие им полуметрики μ-эквивалентны.

1.2. Теорема об исправлении

В этом разделе мы докажем теорему об исправлении, которая утверждает, что почти-метрика всегда может быть исправлена до полуметрики.

Теорема 1. *1) Пусть (X,μ) — стандартное вероятностное пространство, ρ — почти-метрика на (X,μ). Тогда ρ можно исправить до всюду конечной* *полуметрики на X, то есть найдется μ-эквивалентная ей полуметрика $\tilde{\rho}$ на (X,μ).*

2) Если при этом почти-метрика ρ была существенно сепарабельной, то исправленную полуметрику $\tilde{\rho}$ можно выбрать допустимой.

Замечание 1. Если последовательность полуметрик (или почти-метрик) на (X,μ) сходится к некоторой функции ρ по мере μ^2, или μ^2-почти всюду, то функция ρ может не быть полуметрикой, но почти-метрикой она является. В силу теоремы 1 об исправлении она μ-эквивалентна некоторой полуметрике. Пользуясь этой теоремой, мы в будущем всегда будем исправлять встречающиеся после предельных переходов почти-метрики до полуметрик. Таким образом, предел последовательности полуметрик на (X,μ) относительно сходимости по мере μ^2, μ^2-почти всюду, или в $L^1(X^2,\mu^2)$ мы будем считать полуметрикой.

Доказательство теоремы 1. 1) Заметим, что для μ-почти всех $x \in X$ функция $\rho(x,\cdot)$ является измеримой на (X,μ), и неравенство

$$\rho(y,z) \le \rho(x,y) + \rho(x,z) \tag{1.1}$$

выполняется для μ^2-почти всех пар $(y,z) \in X^2$. Зафиксируем одну из таких точек x_0. Изменим меру μ на эквивалентную так, чтобы функция $f(\cdot) = \rho(x_0,\cdot)$ стала суммируемой на $(X,\tilde{\mu})$. Это несложно сделать, положив $A_n = f^{-1}([n-1,n))$ при $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mu}(B) = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\mu(B\cap A_n)$ для всякого измеримого $B \subset X$, где константа c выбрана так, что $\tilde{\mu}(X) = 1$. Заметим, что тогда для μ^2-почти всех пар $(y,z) \in X^2$ выполнено неравенство (1.1) с $x = x_0$, поэтому функция $\rho(y,z)$ суммируема на $(X^2,\tilde{\mu}^2)$.

Теперь отождествим пространство Лебега $(X,\tilde{\mu})$ с единичной окружностью $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с мерой Лебега. Определим функцию $\tilde{\rho}$ (возможно, принимающую бесконечные значения) равенством

$$\tilde{\rho}(x,y) = \varlimsup_{T\to 0+} T^{-2} \int_0^T \int_0^T \rho(x+t, y+s)dtds. \tag{1.2}$$

В силу теоремы Лебега о дифференцировании интеграла для почти всех пар $(x,y) \in S^2$ предел (1.2) существует и совпадает с $\rho(x,y)$. Отметим, что для любых $x, y \in S$ для почти всех пар $(s,t) \in [0,T]^2$ выполнено равенство $\rho(x+t, y+s) = \rho(y+s, x+t)$, поэтому $\tilde{\rho}(x,y) = \tilde{\rho}(y,x)$. Докажем, что $\tilde{\rho}$ удовлетворяет неравенству треугольника. Для любых $x, y, z \in S$ для почти всех троек $(s,t,\tau) \in [0,T]^3$ выполняется неравенство

$$\rho(y+s, z+t) \leq \rho(y+s, x+\tau) + \rho(x+\tau, z+t). \tag{1.3}$$

Проинтегрируем неравенство (1.3) по $(s,t,\tau) \in [0,T]^3$, поделим на T^3 и перейдем к верхнему пределу по $T \to 0+$. Пользуясь тем, что верхний предел сумм не превосходит суммы верхних пределов, получаем неравенство треугольника для функции $\tilde{\rho}$. Переопределим значения функции $\tilde{\rho}$ на диагонали нулем.

Заметим, что функция $\tilde{\rho}$ почти всюду конечна (поскольку такова μ-эквивалентная функция ρ), следовательно, можно выбрать точку $x_0 \in S$ так, что $\tilde{\rho}(x_0, x) < \infty$ для почти всех $x \in S$, то есть для всех x из некоторого множества S_1 полной меры. Переопределим полуметрику $\tilde{\rho}$ вне $S_1 \times S_1$ по правилу $\tilde{\rho}(x,y) := \tilde{\rho}(x_0, y)$ для $x \notin S_1, y \in S_1$, аналогично $\tilde{\rho}(x,y) := \tilde{\rho}(x, x_0)$ для $y \notin S_1, x \in S_1$ и $\tilde{\rho}(x,y) := 0$ для $x, y \notin S_1$. Построенная таким образом функция $\tilde{\rho}$ является всюду конечной полуметрикой на S, μ-эквивалентной исходной почти метрике ρ.

2) Пользуясь утверждением пункта 1, будем считать, что ρ — полуметрика, заданная на всем X и всюду удовлетворяющая неравенству треугольника. Отметим, что при этом исправлении существенная сепарабельность сохранилась. Докажем, что найдется множество полной меры, сужение полуметрики ρ на которое дает сепарабельное полуметрическое пространство.

Достаточно доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется множество $X_n \subset X$ полной меры, покрываемое счетным семейством множеств диаметра не более $\frac{1}{n}$ в полуметрике ρ. Тогда сужение полуметрики ρ на множество $\cap_n X_n$ полной меры дает сепарабельное полуметрическое пространство. В силу существенной сепарабельности полуметрики ρ для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ найдется семейство измеримых подмножеств $A_k \subset X$, такое что $\mathrm{essdm}_\rho(A_k) < \frac{1}{2n}$ для каждого k и $X = \cup_k A_k$. Для каждого k, воспользовавшись леммой 1, найдем $B_k \subset A_k$, так что $\mu(A_k \setminus B_k) = 0$ и $\mathrm{dm}_\rho(B_k) \le \frac{1}{n}$. Тогда объединение $X_n = \cup_k B_k$ и есть искомое подмножество X полной меры. $\square$

1.3. Теоремы о борелевских сигма-алгебрах

Обычно, когда говорят о связи меры и метрики, основной структурой считают метрическое пространство, а на меру накладываются условия, такие как борелевость, регулярность. Мы же, следуя подходу, предложенному А. М. Вершиком, действуем наоборот — в качестве основного объекта берем вероятностное пространство (X, μ), а на полуметрику ρ накладываем условие измеримости. Теорема об измеримости, доказываемая нами в данном разделе, в некоторой степени проясняет связь между этими подходами.

Если (X, ρ) — некоторое полуметрическое пространство, а μ — борелевская мера на нем, то функция ρ, рассматриваемая как функция двух переменных, тривиальным образом является непрерывной в топологии, задаваемой ей самой, поэтому она является борелевски измеримой, стало быть измеримой по мере μ. Обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, если A — некоторое неизмеримое подмножество в (X, μ), $x_0 \in X \setminus A$ — фиксированная точка, то метрика ρ, определенная равенством

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x = x_0,\ y \in A \text{ или } y = x_0,\ x \in A, \\ 2, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

будет μ^2-почти всюду равна 2 и потому измерима на (X,μ), но шар с центром x_0 и радиусом $3/2$ окажется неизмерим. Как показывает следующая теорема, в случае допустимой тройки такого эффекта не бывает.

Теорема 2. *Пусть $(X,\mathfrak{A},\mu)$ — некоторое полное вероятностное пространство (не обязательно стандартное), а ρ — допустимая полуметрика на нем. Тогда мера μ является борелевской относительно топологии, задаваемой полуметрикой ρ. Иными словами, борелевская сигма-алгебра, порожденная полуметрикой ρ, является подалгеброй сигма-алгебры $\mathfrak{A}$ пространства (X,μ).*

Доказательство. Мы можем считать, что все пространство (X,ρ) сепарабельно. Если это не так, то мы можем перейти к подмножеству $X_1 \subset X$ полной меры, такому что полуметрическое пространство (X_1,ρ) сепарабельно (при этом $\mu(X \setminus X_1) = 0$, поэтому в силу полноты меры μ любое подмножество множества $X \setminus X_1$ измеримо по мере μ).

В силу сепарабельности пространства (X,ρ) нам достаточно показать, что любой открытый шар измерим по мере μ. Пусть $Y_1 \subset X$ — множество таких точек $x \in X$, для которых все шары с центром в x измеримы по мере μ, а $Y_2 = X \setminus Y_1$ — его дополнение. Для каждого рационального $r > 0$ множество $\{(x,y) \in X^2 : \rho(x,y) < r\}$ является μ^2-измеримым, поэтому для μ-почти всех $x \in X$ открытый шар $\{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ измерим по мере μ. Следовательно, для почти всех точек $x \in X$ все открытые шары рационального радиуса с центром x измеримы, а тогда и вообще все шары с центром

x измеримы. Таким образом $\mu(Y_1) = 1$, $\mu(Y_2) = 0$. Выберем в Y_1 счетное плотное множество точек X'.

Рассмотрим любой открытый шар $B = B(x_0, r_0)$ с центром $x_0 \in X$ и радиусом $r_0 > 0$. Для каждой точки $y \in X' \cap B$ рассмотрим открытый шар $B(y, r_0 - \rho(y, x_0))$. Он лежит в B по построению и измерим по мере μ, так как $y \in Y_1$. Докажем, что объединение этих шаров содержит $Y_1 \cap B$. Тогда дополнение до B их объединения будет подмножеством множества Y_2 и, следовательно, иметь меру 0 — отсюда следует, что множество B измеримо. Рассмотрим произвольную точку $x \in Y_1 \cap B$. Найдем точку $y \in X'$, такую что $\rho(x, y) < (r_0 - \rho(x_0, x))/2$. Тогда по неравенству треугольника имеем $\rho(x_0, y) \leq \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < (r_0 + \rho(x_0, x))/2$, а потому $y \in B$ и, более того, открытый шар $B(y, r_0 - \rho(x_0, y))$ содержит точку x, что и требовалось. □

Оказывается, для стандартного вероятностного пространства и допустимой метрики на нем верно более сильное свойство.

Теорема 3. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — стандартное вероятностное пространство, а ρ — допустимая метрика на нем. Тогда пополненная по мере μ борелевская сигма-алгебра $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\rho)$, порожденная метрикой ρ, совпадает с сигма-алгеброй $\mathfrak{A}$ пространства (X, μ).*

Доказательство. Теорема 2 утверждает, что имеется включение $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$.

В силу допустимости метрики ρ существует некоторое подмножество $X_0 \subset X$, $\mu(X_0) = 1$, такое что метрическое пространство (X_0, ρ) сепарабельно. Сужение сигма-алгебры $\mathfrak{A}$ на множество X_0 обозначим $\mathfrak{A}_0$. Отметим, что мы можем выбрать X_0 замкнутым в X по метрике ρ, таким образом получив $X \setminus X_0 \in \mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{B}_0$ — борелевская сигма-алгебра метрического пространства (X_0, ρ).

Пусть X_1 — пополнение X_0 по метрике ρ. Зададим меру μ_1 на борелевской сигма-алгебре $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ полного сепарабельного метрического пространства

(X_1, ρ), продолжив меру μ с $\mathfrak{B}_0$, положив $\mu_1(X_1 \setminus X_0) = 0$. Пусть $\mathfrak{B}_1$ — пополнение сигма-алгебры $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ по мере μ_1. Тогда $(X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$ является стандартным вероятностным пространством, так как это полное сепарабельное метрическое пространство с борелевской вероятностной мерой на пополненной борелевской сигма-алгебре. Кроме того, отображение $\mathrm{id}\colon (X_0, \mathfrak{A}_0, \mu) \to (X_1, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$ есть инъективное сохраняющее меру отображение стандартных вероятностных пространств. Тогда при этом отображении образ любого измеримого множества также измерим (см., например, пункт 5 параграфа 2 статьи [6]). Таким образом, мы имеем включение $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{B}_1$. Так как $\mathfrak{A}_0$ является сигма-алгеброй на X_0, сужения сигма-алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$ на X_0 совпадают, и $X_0 \in \mathfrak{B}$, поэтому $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{B}$. Так как $\mu(X \setminus X_0) = 0$, мы получаем $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. $\square$

1.4. Эпсилон-энтропия полуметрической тройки

1.4.1. Определение и некоторые оценки

Введем определение ε-энтропии полуметрической тройки, существенно использующееся в дальнейшем. Следующее определение восходит к А. Н. Колмогорову.

Определение 9. Пусть (X, μ, ρ) — полуметрическая тройка. Рассмотрим наименьшее натуральное k, для которого пространство X можно представить в виде объединения множеств $X_0, X_1, \ldots, X_k$, таких что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_j) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k$. Определим ε-энтропию тройки (X, μ, ρ) равенством

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \log(k).$$

(Здесь и далее $\log = \log_2$.) Если такое k не существует, положим $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = +\infty$.

Приведем сначала несколько простых оценок эпсилон-энтропии.

Лемма 2. *Если ρ — суммируемая полуметрика на (X,μ), такая что $\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, то $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = 0$. Иными словами, найдется разбиение пространства X на два непересекающихся измеримых множества X_0, X_1, такое что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_p(X_1) < \varepsilon$.*

Доказательство. Отметим, что по теореме Фубини отображение $f\colon x \mapsto \mu(\{y \in X\colon \rho(x,y) \geq \varepsilon/2\})$ измеримо на (X,μ), и имеет место оценка

$$\int\limits_X f d\mu = \mu^2(\{(x,y) \in X^2\colon \rho(x,y) \geq \varepsilon/2\}) \leq \frac{2}{\varepsilon}\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < \varepsilon.$$

Выберем $x_0 \in X$, такое что $f(x_0) < \varepsilon$, $X_0 = \{y \in X\colon \rho(x_0,y) \geq \varepsilon/2\}$, $X_1 = X \setminus X_0$. Тогда $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_1) < \varepsilon$ по неравенству треугольника. Таким образом $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = 0$. □

Следующая простая лемма дает оценку энтропий суммы полуметрик через энтропии слагаемых.

Лемма 3. *Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 — три измеримые полуметрики на стандартном вероятностном пространстве (X,μ), такие что μ^2-п. в. выполнено неравенство $\rho \leq \rho_1 + \rho_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X,\mu,\rho) \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_2). \tag{1.4}$$

Доказательство. Если правая часть неравенства (1.4) бесконечна, то оно тривиально выполнено. В противном случае для $i = 1,2$ найдем $k_i \in \mathbb{N}$ и подмножества $X_0^i, \dots, X_{k_i}^i \subset X$, так что $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_i) = \log(k_i)$, $X = \bigcup\limits_{j=0}^{k_i} X_j^i$, $\mu(X_0^i) < \varepsilon$, $\mathrm{dm}_{\rho_i}(X_j^i) < \varepsilon$ при $j = 1,\dots,k_i$. Возьмем $Y_0 = X_0^1 \cup X_0^2$, $Y_{j_1,j_2} = X_{j_1}^1 \cap X_{j_2}^2$, где $j_1 = 1,\dots,k_1$ и $j_2 = 1,\dots,k_2$. Тогда $X = Y_0 \cup \bigcup\limits_{j_1=1}^{k_1}\bigcup\limits_{j_2=1}^{k_2} Y_{j_1,j_2}$, $\mu(Y_0) < 2\varepsilon$ и

$$\mathrm{essdm}_\rho(Y_{j_1,j_2}) \leq \mathrm{dm}_{\rho_1}(Y_{j_1,j_2}) + \mathrm{dm}_{\rho_2}(Y_{j_1,j_2}) \leq \mathrm{dm}_{\rho_1}(X_{j_1}^1) + \mathrm{dm}_{\rho_2}(X_{j_2}^2) < 2\varepsilon.$$

Воспользовавшись леммой 1 найдем множества $X_{j_1,j_2} \subset Y_{j_1,j_2}$, такие что $\mu(Y_{j_1,j_2} \setminus X_{j_1,j_2}) = 0$, $\mathrm{dm}_\rho(X_{j_1,j_2}) < 4\varepsilon$. Пусть $X_0 = Y_0 \cup \bigcup\limits_{j_1=1}^{k_1} \bigcup\limits_{j_2=1}^{k_2} (Y_{j_1,j_2} \setminus X_{j_1,j_2})$. Тогда имеем $X = X_0 \cup \bigcup\limits_{j_1=1}^{k_1} \bigcup\limits_{j_2=1}^{k_2} X_{j_1,j_2}$, $\mu(X_0) < 2\varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_{j_1,j_2}) < 4\varepsilon$. По определению это означает, что

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X,\mu,\rho) \le \log(k_1k_2) = \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_2).$$

□

Следующие леммы связывают энтропии измеримых разбиений с ε-энтропией соответствующих полуметрик.

Лемма 4. *Для любого измеримого разбиения $\xi \in Z(X,\mu)$ стандартного вероятностного пространства (X,μ) и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_\xi) \le \frac{H(\xi)}{\varepsilon}, \tag{1.5}$$

где ρ_ξ — соответствующая разбиению ξ полуметрика.

Доказательство. Зададим измеримую функцию $f(x) = -\log(\mu(\xi(x)))$, где $\xi(x)$ — элемент разбиения ξ, содержащий точку x. Тогда $H(\xi) = \int\limits_X f(x)d\mu(x)$. Рассмотрим множество $X_0 = \{x \in X \colon f(x) > \frac{H(\xi)}{\varepsilon}\}$. По неравенству Чебышева имеем $\mu(X_0) < \varepsilon$. Для любой точки $x \notin X_0$ выполнено $\mu(\xi(x)) \ge 2^{-\frac{H(\xi)}{\varepsilon}}$, поэтому количество k различных элементов разбиения ξ, пересекающихся с $X \setminus X_0$, не превосходит $2^{\frac{H(\xi)}{\varepsilon}}$. Пусть это элементы $c_1, \ldots, c_k$. Возьмем $X_j = c_j \setminus X_0$ для $j = 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно, $X = \bigcup\limits_{j=0}^{k} X_j$ и $\mathrm{dm}_{\rho_\xi}(X_j) = 0$ при $j = 1, \ldots, k$. По определению ε-энтропии имеем

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_\xi) \le \log k \le \frac{H(\xi)}{\varepsilon}.$$

□

Лемма 5. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, *а* $\xi_i \in Z(X,\mu)$, $i = 1, \dots, n$, *— некоторые измеримые разбиения пространства* (X,μ), *каждое из которых состоит не более, чем из* m *элементов. Пусть* $\xi = \bigvee_{i=1}^{n} \xi_i$ *— произведение этих разбиений, а* $\rho = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho_{\xi_i}$ *— усреднение соответствующих разбиениям полуметрик. Тогда для любого* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ *имеет место оценка*

$$\frac{H(\xi)}{n} < \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)}{n} + 2\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) + \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Доказательство. Пусть $k \in \mathbb{N}$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = \log k$. Пусть $X_0, \dots, X_k \subset X$ — непересекающиеся измеримые подмножества, такие что $X = \bigcup_{j=0}^{k} X_j$, $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_j) < \varepsilon$ при $j = 1, \dots, k$. Для каждого $j = 1, \dots, k$ зафиксируем произвольную точку $x_j \in X_j$.

Зафиксируем произвольный индекс $j \in 1, \dots, k$. Каждой точке $y \in X_j$ сопоставим множество $S(y) = \{i \in \{0, \dots, n-1\} \colon \rho_{\xi_i}(x_j, y) > 0\}$. Тогда $|S(y)| \le n\rho(x_j, y) < \varepsilon n$. Зафиксируем некоторое подмножество $S \subset \{0, \dots, n-1\}$ и рассмотрим множество $\tilde{X}_S = \{y \in X_j \colon S(y) = S\}$. Тогда при $i \notin S$ множество $\tilde{X}_S$ содержится целиком в каком-то элементе разбиения ξ_i. Отсюда следует, что разбиение ξ индуцирует на множестве $\tilde{X}_S$ разбиение на не более, чем $m^{|S|}$ частей. Перебирая всевозможные подмножества $S \subset \{0, \dots, n-1\}$ мощности не более εn, получим, что разбиение ξ_n индуцирует на множестве X_j разбиение с количеством частей, не превышающим

$$m^{n\varepsilon} \sum_{\ell=0}^{\varepsilon n} C_n^\ell \le \frac{m^{n\varepsilon}}{\varepsilon^{\varepsilon n}(1-\varepsilon)^{n-\varepsilon n}} \sum_{\ell=0}^{\varepsilon n} C_n^\ell \varepsilon^\ell (1-\varepsilon)^{n-\ell} \le \frac{m^{n\varepsilon}}{\varepsilon^{\varepsilon n}(1-\varepsilon)^{n-\varepsilon n}} \sum_{\ell=0}^{n} C_n^\ell \varepsilon^\ell (1-\varepsilon)^{n-\ell} = \frac{m^{n\varepsilon}}{\varepsilon^{\varepsilon n}(1-\varepsilon)^{n-\varepsilon n}} = 2^{n(\varepsilon \log m - \varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon))}.$$

Применяя приведенное рассуждение для каждого $j \in 1, \dots, k$, получим, что количество N элементов разбиения ξ, пересекающихся с $X \setminus X_0$, не превосходит $k2^{n(\varepsilon\log m-\varepsilon\log\varepsilon-(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon))}$. Пусть это элементы $c_1, c_2, \dots c_N \in \xi$. Тогда в силу неравенства Йенсена для вогнутой функции $-s\log s$ имеем

$$\sum_{i=1}^{N} -\mu(c_i)\log\mu(c_i) \le -N\Big(\sum_{i=1}^{N}\mu(c_i)/N\Big)\log\Big(\sum_{i=1}^{N}\mu(c_i)/N\Big). \qquad (1.7)$$

При $N = 1$ правая часть неравенства (1.7) не превосходит $\frac{1}{2}$, а при $N > 1$ оценивается через $\log N$. Итого, имеем

$$\sum_{i=1}^{N} -\mu(c_i)\log\mu(c_i) \le \log N + \frac{1}{2} \le \log k + n(\varepsilon\log m - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)) + \frac{1}{2}. \qquad (1.8)$$

Количество N_0 элементов разбиения ξ, содержащихся в X_0, очевидно, не превосходит m^n. Применяя опять же неравенство Йенсена для вогнутой функции $-s\log s$, в силу монотонности последней на интервале $(0,\varepsilon)$ получаем оценку

$$\sum_{c\in\xi, c\subset X_0} -\mu(c)\log\mu(c) \le -\,N_0\Big(\sum_{c\in\xi, c\subset X_0}\mu(c)/N_0\Big)\log\Big(\sum_{c\in\xi, c\subset X_0}\mu(c)/N_0\Big) \le \varepsilon(\log N_0 - \log\varepsilon) \le \varepsilon n\log m + \frac{1}{2}. \qquad (1.9)$$

Суммируя оценки (1.8), (1.9), получаем

$$H(\xi) < \log k + n(2\varepsilon\log m - \varepsilon\log\varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)) + 1,$$

откуда в силу определения числа k следует утверждение леммы. $\square$

1.4.2. Эквивалентные определения допустимости полуметрик

В следующей теореме мы приводим серию эквивалентных определений допустимости полуметрик.

Теорема 4. *Пусть (X, μ, ρ) — полуметрическая тройка. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *Тройка (X, μ, ρ) допустима;*

2) *Для любого $\varepsilon > 0$ полуметрика ρ имеет конечную ε-энтропию: $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < \infty$;*

3) *Для μ-почти всех $x \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ шар $B(x, \varepsilon) = \{y \in X\colon \rho(x, y) < \varepsilon\}$ имеет положительную меру: $\mu(B(x, \varepsilon)) > 0$;*

4) *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k \in \mathbb{N}$, такое что пространство X можно представить в виде объединения множеств $X_0, X_1, \ldots X_k$, таких что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\operatorname{essdm}_\rho(X_j) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k$;*

5) *Для любого μ-измеримого множества $A \subset X$ положительной меры существенный инфимум функции ρ на $A \times A$ равен нулю.*

Доказательство. Докажем следствие из 2) в 3). Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $T_n = \{x \in X\colon \mu(B(x, \frac{1}{n})) = 0\}$. Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество T_n измеримо по мере μ и $\mu(T_n) = 0$. Выберем любое $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2n})$. По условию $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) < \infty$, поэтому существует разбиение множества X на дизъюнктные множества $X_0, X_1, \ldots, X_k$, такие что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\operatorname{dm}_\rho(X_j) < \varepsilon$ для любого $j = 1, \ldots, k$. Мы можем считать, что множества X_j при $j > 0$ имеют ненулевую меру (множества нулевой меры можно добавить к X_0). Но тогда для любой $x \notin X_0$ шар $B(x, 2\varepsilon)$ содержит одно из множеств X_j, $j > 0$, поэтому $\mu(B(x, \frac{1}{n})) \geq \mu(B(x, 2\varepsilon)) \geq \mu(X_j) > 0$. Таким образом, $T_n \subset X_0$. Значит, для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ множество T_n содержится в множестве μ-меры меньше ε. Отсюда следует, что множество T_n измеримо и $\mu(T_n) = 0$. Но тогда $\mu(\bigcup\limits_n T_n) = 0$, $\mu(B(x, \varepsilon)) > 0$ для любого $x \notin \bigcup\limits_n T_n$ и любого $\varepsilon > 0$. Утверждение 3) доказано.

Докажем следствие из 3) в 1). Мы знаем, что подмножество $X_1 = \{x \in X\colon \mu(B(x, \varepsilon)) > 0\, \forall \varepsilon > 0\}$ имеет полную меру. Проверим, что пространство (X_1, ρ) сепарабельно. Для этого для любого $\varepsilon > 0$ найдем в нем не более чем счетную ε-сеть. Воспользовавшись леммой Цорна, выберем максимальное по включению подмножество $\{x_j\}_{j\in J} \subset X_1$ точек, так что $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ при $i, j \in J, i \neq j$. Тогда шары $\{B(x_i, \varepsilon/3)\}_{i\in J}$ попарно не пересекаются и имеют положительные μ-меры. Но $\mu(X) = 1$, поэтому множество J не более чем счетно. Но в силу построения семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ образует ε-сеть в (X_1, ρ).

Выведем 2) из 1). Выберем множество $X_1 \subset X$, такое что (X_1, ρ) сепарабельно и $\mu(X_1) = 1$. Найдем счетное плотное в (X_1, ρ) семейство точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим шары $B_n = B(x_n, \varepsilon)$. Тогда $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = 1$, но тогда для достаточно большого N имеем $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n) > 1 - \varepsilon$. Отсюда имеем оценку $\mathbb{H}_{2\varepsilon}(X, \mu, \rho) \leq \log N$.

Равносильность пунктов 2) и 4) очевидна в силу леммы 1.

Докажем, что 4) влечет 5). Пусть 5) не выполнено. Тогда найдется некоторое $\varepsilon > 0$ и измеримое множество $A \subset X$, такое что $\mu(A) > \varepsilon$ и существенный инфимум функции ρ на $A \times A$ не меньше ε. Найдем покрытие пространства X множествами $X_0, X_1, \ldots X_k \subset X$, такими что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{essdm}_\rho(X_j) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k$. Тогда, очевидно, $\mu(X_j \cap A) = 0$ при $j > 0$, поэтому $\mu(A) \leq \mu(X_0) < \varepsilon$. Противоречие.

Докажем импликацию из 5) в 3). Для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ функция $x \to \mu(\{y \in X\colon \rho(x, y) < \varepsilon\})$ измерима на (X, μ) по теореме Фубини, поэтому множество $A_\varepsilon = \{x\colon \mu(\{y \in X\colon \rho(x, y) < \varepsilon\}) = 0\}$ измеримо. Если условие пункта 3) не выполнено, то для некоторого $\varepsilon > 0$ множество A_ε имеет положительную меру. Взяв $A = A_\varepsilon$ получим, что существенный инфимум ρ на $A \times A$ положителен, что противоречит условию пункта 5). $\square$

Из леммы 3 и теоремы 4 имеем важное следствие.

Следствие 1. *Если ρ_1, ρ_2 — две допустимые полуметрики на (X, μ), то полуметрика $\rho = \rho_1 + \rho_2$ тоже допустима.*

1.5. Пространство допустимых полуметрик. Определение и свойства m-нормы

В дальнейшем мы будем работать в основном с суммируемыми допустимыми полуметриками на фиксированном стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Из следствия 1 очевидно, что суммируемые допустимые полуметрики образуют выпуклый конус в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Обозначим его $\mathcal{A}dm(X, \mu)$.

Для работы с допустимыми полуметриками удобно ввести специальную норму, которую мы назовем m-нормой. Она определена и конечна на конусе $\mathcal{A}dm(X, \mu)$ и на некотором более широком подпространстве пространства $L^1(X^2, \mu^2)$.

Определение 10. Для функции $f \in L^1(X^2, \mu^2)$ определим конечную или бесконечную норму

$$\|f\|_m = \inf\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \colon \rho - \text{измеримая полуметрика на } (X, \mu),$$
$$\rho(x, y) \geq |f(x, y)| \text{ для } \mu^2\text{-п. в. } (x, y) \in X^2\}.$$

Легко проверить, что m-норма действительно является нормой в том смысле, что она однородна и удовлетворяет неравенству треугольника. При этом, если f — измеримая полуметрика на (X, μ), то $\|f\|_m = \|f\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$. Кроме того, прямо из определения видно, что для любой $f \in L^1(X^2, \mu^2)$ выполнено неравенство $\|f\|_m \geq \|f\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$, поэтому сходимость в m-норме влечет сходимость в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. В теории банаховых пространств с конусом подобная сходимость называется сходимостью с регулятором.

Рассмотрим множество всех функций из пространства $L^1(X^2, \mu^2)$ с конечной m-нормой

$$\mathbb{M} = \{f \in L^1(X^2, \mu^2) \colon \|f\|_m < \infty\}.$$

Ясно, что $\mathbb{M}$ — линейное подпространство пространства $L^1(X^2,\mu^2)$.

Лемма 6. *Пространство* $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$ *является банаховым пространством.*

Доказательство. Пусть последовательность f_n фундаментальна в m-норме. Покажем, что она имеет предел в m-норме. Так как m-норма мажорирует норму пространства $L^1(X^2,\mu^2)$, эта последовательность фундаментальна в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$, поэтому она имеет некоторый предел $f \in L^1(X^2,\mu^2)$. Проредив последовательность, мы можем считать, что последовательность f_n сходится μ^2-почти всюду к f, и, кроме того, для всех n выполнено неравенство $\|f_n - f_{n+1}\|_m < \frac{1}{2^n}$. По определению m-нормы это означает, что существует измеримая полуметрика ρ_n на (X,μ), мажорирующая $|f_n - f_{n+1}|$ μ^2-почти всюду, такая что $\|\rho_n\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < \frac{1}{2^n}$. Отметим, что полуметрика $\sum\limits_{k=n}^{\infty}\rho_k$ измерима на (X,μ), μ^2-почти всюду мажорирует разность $|f_n - f|$, и $\|\sum\limits_{k=n}^{\infty}\rho_k\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le \sum\limits_{k=n}^{\infty}\|\rho_k\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le 2^{1-n}$, поэтому $\|f_n - f\|_m \le 2^{1-n}$. Из этого следует, что $\|f\|_m < \infty$, и последовательность f_n сходится к f в m-норме. Лемма доказана. $\square$

Изучим простые свойства сходимости полуметрик.

Лемма 7. *Если последовательность суммируемых полуметрик ρ_n сходится к функции ρ по m-норме, и для любого $\varepsilon > 0$ энтропия $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_n)$ конечна при достаточно больших n, то ρ является допустимой полуметрикой.*

Следствие 2. *Если последовательность суммируемых допустимых полуметрик ρ_n сходится к функции ρ по m-норме, то ρ тоже является допустимой полуметрикой. Иными словами, конус $\mathcal{A}dm$ замкнут в* $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$.

Доказательство леммы 7. Так как последовательность ρ_n сходится в m-норме, то она сходится и в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$, поэтому можно считать предельную функцию ρ измеримой полуметрикой (см. замечание 1). Пусть $\varepsilon > 0$.

Тогда при достаточно большом n выполнены неравенства $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_n)<\infty$ и $\|\rho_n-\rho\|_m<\varepsilon^2/2$. Это означает, что найдется суммируемая полуметрика d на (X,μ), такая что неравенство $\rho\le\rho_n+d$ выполнено μ^2-п. в. и $\|d\|_{L^1(X^2,\mu^2)}<\varepsilon^2/2$. Из лемм 2 и 3 имеем неравенство

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X,\mu,\rho)\le\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_n)+\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,d)=\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho_n)<\infty.$$

Таким образом, для измеримой полуметрики ρ выполнено условие 2) теоремы 4, поэтому она допустима. $\square$

1.6. Сходимость допустимых полуметрик, аппроксимация срезками

Следствие 2 утверждает, что предел допустимых полуметрик в m-норме есть снова допустимая полуметрика. Оказывается, предел в норме пространства $L^1(X^2,\mu^2)$ последовательности допустимых полуметрик с равномерно ограниченными энтропиями есть снова допустимая полуметрика.

Лемма 8. *Если для множества суммируемых допустимых полуметрик $M\subset\mathcal{A}dm(X,\mu)$ множество $\{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)\colon \rho\in M\}$ ограничено для любого $\varepsilon>0$, то замыкание множества M в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$ состоит лишь из допустимых полуметрик.*

Доказательство. Возьмем любую функцию ρ из замыкания множества M в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$ и докажем, что она является допустимой полуметрикой. Мы знаем, что существует последовательность полуметрик $\{\rho_n\}_n\subset M$, сходящаяся к функции ρ в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$. Ясно (см. замечание 1), что функция ρ является полуметрикой, и вопрос лишь в ее допустимости.

Докажем от противного. Допустим, полуметрика ρ не является допустимой. Тогда по теореме 4 найдутся $\varepsilon>0$ и множество $A\subset X$, такие что

$\mu(A) > 0$ и при μ^2-п. в. $(x, y) \in A^2$ выполнено неравенство $\rho(x, y) \geq \varepsilon$. Уменьшив ε, если потребуется, мы получим $\mu(A) \geq \varepsilon$.

Воспользуемся равномерной ограниченностью энтропий и найдем $k \in \mathbb{N}$, такое что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\mathbb{H}_{\varepsilon/2}(X, \mu, \rho_n) < \log k$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ найдем разбиение $X = \bigcup\limits_{i=0}^{k} X_i$, такое что $\mathrm{dm}_{\rho_n}(X_i) \leq \varepsilon/2$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $\mu(X_0) \leq \varepsilon/2$. Отметим, что найдется $i \geq 1$, такое что $\mu(X_i \cap A) \geq \frac{\varepsilon}{2k}$. При этом для μ^2-почти всех $(x, y) \in (X_i \cap A)^2$ будет выполнено неравенство

$$\rho(x, y) - \rho_n(x, y) \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\|\rho - \rho_n\|_{L^1(X^2, \mu^2)} \geq \frac{\varepsilon}{2}\mu(X_i \cap A)^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2k}\right)^2 > 0,$$

что противоречит сходимости ρ_n к ρ в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Лемма доказана. $\square$

Как уже отмечалось, m-норма мажорирует норму пространства $L^1(X^2, \mu^2)$, поэтому из сходимости в m-норме следует сходимость в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Следующая лемма в некоторой степени обращает это наблюдение.

Лемма 9. *Пусть последовательность равномерно ограниченных полуметрик ρ_n сходится к допустимой полуметрике ρ в норме пространства $L^1(X^2, \mu^2)$. Тогда эта последовательность сходится в m-норме к тому же пределу.*

Доказательство. Пусть R — константа, ограничивающая все полуметрики ρ_n. Ясно, что полуметрика ρ ограничена μ^2-почти всюду той же константой R. Не умаляя общности, можно считать, что полуметрика ρ ограничена константой R всюду (в противном случае мы можем заменить ее поточечно на полуметрику $\min(\rho, R)$). Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$ и, воспользовавшись допустимостью полуметрики ρ, найдем разбиение пространства X на попарно дизъюнктные множества $A_0, A_1, \ldots, A_k$, где $\mu(A_0) < \varepsilon$, и $\mathrm{dm}_\rho(A_j) \le \varepsilon^2$ при $j > 0$. Мы можем считать, что $\delta = \min\{\mu(A_j) \colon j = 1, \ldots, k\} > 0$. Пусть μ_j — сужение меры μ на множество A_j: $\mu_j(B) = \mu(B \cap A_j)$.

Заметим, что для любого $j > 0$ последовательность суженных полуметрик $\rho_n|_{A_j^2}$ сходится к полуметрике $\rho|_{A_j^2}$ в пространстве $L^1(A_j^2, \mu_j^2)$. Предельная полуметрика ρ не превосходит ε^2 всюду на A_j по построению, поэтому при достаточно больших n выполнено соотношение

$$\|\rho_n|_{A_j^2}\|_{L^1(A_j^2,\mu_j^2)} \le 2\varepsilon^2 \mu_j(A_j)^2.$$

Рассмотрим теперь множество A_j с нормированной мерой $\mu_j/\mu(A_j)$ и применим к полуметрике $\rho_n|_{A_j^2}$ на стандартном вероятностном пространстве $(A_j, \mu_j/\mu(A_j))$ лемму 2. Получим, что множество A_j можно разбить на множества $B_j(n), C_j(n)$, так что $\mu(B_j(n)) \le 2\varepsilon\mu(A_j)$ и $\mathrm{dm}_{\rho_n}(C_j(n)) \le 2\varepsilon$. Отсюда следует, что $\mu(C_j(n)) \ge (1 - 2\varepsilon)\mu(A_j)$. Выберем n настолько большим, чтобы эти неравенства выполнялись для всех $j = 1, \ldots, k$. Введем обозначение $C(n) = \bigcup\limits_{j=1}^{k} C_j(n)$ и докажем, что если n достаточно велико, то для любых $u_0, v_0 \in C(n)$ выполнено неравенство $|\rho_n(u_0, v_0) - \rho(u_0, v_0)| \le 10\varepsilon$. Если $u_0, v_0 \in C_j(n)$ для некоторого j, то по построению $|\rho_n(u_0, v_0) - \rho(u_0, v_0)| \le \rho_n(u_0, v_0) + \rho(u_0, v_0) \le 3\varepsilon$. Пусть теперь $u_0 \in C_i(n), v_0 \in C_j(n)$ и $i \ne j$. Если $|\rho_n(u_0, v_0) - \rho(u_0, v_0)| > 10\varepsilon$, то для всех $u \in C_i(n), v \in C_j(n)$ выполнено

$$\begin{aligned}&|\rho_n(u, v) - \rho(u, v)| \ge \\ &|\rho_n(u_0, v_0) - \rho(u_0, v_0)| - (\rho_n(u_0, u) + \rho_n(v_0, v) + \rho(u_0, u) + \rho(v_0, v)) > 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Но тогда $\|\rho_n - \rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \ge 4\varepsilon\mu(C_i(n))\mu(C_j(n)) \ge 4\varepsilon(1 - 2\varepsilon)^2\delta^2$, что не может быть выполнено при больших n. Таким образом, для всех достаточно больших n для любых двух точек $u, v \in C(n)$ выполнено неравенство

$|\rho_n(u,v)-\rho(u,v)| \le 10\varepsilon$. Из построения видно, что множество $C(n)$ имеет большую меру, более конкретно,

$$\mu(C(n)) = \sum_{j=1}^{k} \mu(C_j(n)) \ge (1-2\varepsilon)\mu(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \ge (1-2\varepsilon)(1-\varepsilon).$$

Зададим метрику p_n на (X,μ) следующим образом. На множестве $C(n)\times C(n)$ она тождественно равна 10ε, а на оставшемся она равна $2R+10\varepsilon$. Мы только что доказали, что на множестве $C(n)\times C(n)$ такая метрика мажорирует разность $|\rho_n-\rho|$. На оставшемся множестве полуметрика p_n ограничена снизу числом $2R$, которое в свою очередь мажорирует функцию $|\rho_n-\rho|$, поскольку все исходные полуметрики ограничены константой R. Так как число R фиксировано, то при достаточно малых ε метрика p_n будет иметь сколь угодно малую норму в $L^1(X^2,\mu^2)$. Таким образом, последовательность ρ_n сходится к ρ в m-норме. Лемма доказана. $\square$

Далее нам понадобится лемма об аппроксимации полуметрик срезками. Для произвольной функции f и вещественного числа R символом f^R обозначим срезку по уровню R, то есть $f^R(\cdot) = \min(f(\cdot), R)$. Ясно, что срезка измеримой полуметрики есть снова измеримая полуметрика, а срезка допустимой — допустимая.

Лемма 10. *Для суммируемой полуметрики ρ на пространстве (X,μ) и любого $R>0$ верно неравенство*

$$\|\rho-\rho^{2R}\|_m \le 2\int\limits_{\rho>R} \rho\, d\mu^2.$$

Доказательство. Для μ-почти каждой точки $x\in X$ шар $B=\{y\in X\colon \rho(x,y)\le R\}$ и его дополнение $A = X\setminus B$ измеримы по мере μ. Зададим измеримую полуметрику q на (X,μ) следующим образом:

$$q(u,v) = \begin{cases} 0, & u,v \in B, \\ \rho(u,v), & u,v \in A, \\ \rho(u,x), & u \in A, v \in B, \\ \rho(v,x), & u \in B, v \in A. \end{cases}$$

Легко проверить, что это действительно полуметрика, и, кроме того, для любых $u,v \in X$ выполнено неравенство $0 \le \rho(u,v) - \rho^{2R}(u,v) \le q(u,v)$. Таким образом, по определению m-нормы имеем оценку

$$\|\rho - \rho^{2R}\|_m \le \|q\|_{L^1(X^2,\mu^2)} = \int\limits_{X^2} q d\mu^2 = \left(\int\limits_{A^2} + \int\limits_{A\times B} + \int\limits_{B\times A} + \int\limits_{B^2}\right) q d\mu^2 =$$
$$\iint\limits_{A^2} \rho(u,v) d\mu(u) d\mu(v) + 2 \iint\limits_{A\times B} \rho(u,x) d\mu(u) d\mu(v) \le$$
$$\iint\limits_{A^2} \left(\rho(u,x) + \rho(x,v)\right) d\mu(u) d\mu(v) + 2\mu(B) \int\limits_{A} \rho(u,x) d\mu(u) =$$
$$2(\mu(A) + \mu(B)) \int\limits_{A} \rho(u,x) d\mu(u) = 2 \int\limits_{A} \rho(u,x) d\mu(u).$$

Осталось заметить, что левая часть полученного неравенства не зависит от x, в то время как среднее значение его правой части по $x \in (X,\mu)$ совпадает с $2 \int\limits_{\rho>R} \rho d\mu^2$. Лемма доказана. □

Лемма 10 позволяет обобщить результат леммы 9.

Теорема 5. *Пусть последовательность суммируемых полуметрик ρ_n сходится к допустимой полуметрике ρ в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$. Тогда эта последовательность сходится и в m-норме к тому же пределу.*

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и, воспользовавшись абсолютной непрерывностью интеграл от функции ρ, выберем такое большое $R > 0$, что

$$\int\limits_{\rho > R} \rho d\mu^2 < \delta.$$

Так как последовательность ρ_n сходится к ρ в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$, для достаточно больших n выполнено неравенство

$$\int\limits_{\rho_n > R} \rho_n d\mu^2 < 2\delta.$$

Кроме того, поточечное неравенство $|\rho_n^{2R} - \rho^{2R}| \leq |\rho_n - \rho|$ выполнено для любого n, поэтому срезки ρ_n^{2R} сходятся к срезке ρ^{2R} в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Применим лемму 9 к последовательности равномерно ограниченных полуметрик ρ_n^{2R} и предельной допустимой полуметрике ρ^{2R} и получим, что для достаточно больших n выполнено неравенство

$$\|\rho_n^{2R} - \rho^{2R}\|_m \leq \delta.$$

Дважды воспользовавшись леммой 10, мы можем написать неравенство

$$\|\rho_n - \rho\|_m \leq \|\rho_n - \rho_n^{2R}\|_m + \|\rho_n^{2R} - \rho^{2R}\|_m + \|\rho - \rho^{2R}\|_m \leq 7\delta.$$

Таким образом, последовательность ρ_n сходится к ρ в m-норме. Теорема доказана. □

Следствие 3. *На конусе $\mathcal{A}dm$ нормы $\|\cdot\|_m$ и $\|\cdot\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$ задают одинаковые топологии.*

1.7. Критерий предкомпактности в $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$

Доказанное в предыдущем параграфе следствие 3, в частности, влечет следующее

Следствие 4. *Множество допустимых полуметрик на (X,μ) компактно в $(\mathbb{M},\|\cdot\|_m)$ тогда и только тогда, когда оно компактно в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$.*

Следствие 2 утверждает, что конус $\mathcal{A}dm(X,\mu)$ замкнут в m-норме. Однако, он не замкнут в пространстве $L^1(X^2,\mu^2)$. Поэтому, несмотря на то что компактность семейства допустимых полуметрик в $(\mathbb{M},\|\cdot\|_m)$ и в $L^1(X^2,\mu^2)$ равносильна, для предкомпактности это уже не верно.

Следующая теорема дает критерий предкомпактности семейства допустимых полуметрик в m-норме.

Теорема 6. *Пусть $M \subset \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — некоторое множество суммируемых допустимых полуметрик на пространстве (X,μ). Тогда M предкомпактно в m-норме тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

1) *(равномерная интегрируемость) полуметрики из M равномерно интегрируемы на (X^2,μ^2);*

2) *(равномерная допустимость) для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение множества X на конечное количество измеримых множеств $X_1,\ldots,X_k$, такое что для каждой полуметрики $\rho \in M$ существует множество $A \subset X$, такое что $\mu(A) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_j \setminus A) < \varepsilon$ при всех $j = 1,\ldots,k$.*

Замечание 2. В формулировке теоремы пункт 2) можно заменить равносильным (в силу леммы 1) пунктом 2'), в котором вместо диаметра стоит существенный диаметр. Из каждого из этих свойств следует, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)\colon \rho \in M\}$ ограничено.

Стоит отметить, что тут мы будем пользоваться не только определением равномерной интегрируемости, но и его переформулировкой. Мы будем говорить, что семейство функций $K \subset L^1(\Omega,\nu)$ равномерно интегрируемо, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любого множества $A \subset \Omega$, такого что $\nu(A) < \delta$, для любой функции $f \in K$ верно неравенство

$$\int\limits_A |f| d\nu < \varepsilon.$$

Приступим к доказательству теоремы.

Доказательство теоремы 6. Пусть ρ — измеримая полуметрика на (X, μ), а ξ — некоторое конечное разбиение пространства X на измеримые множества $X_1, \ldots, X_k$. Будем говорить, что разбиение ξ является ε-разбиением для полуметрики ρ, если найдется исключительное множество $A \subset X$, такое что $\mu(A) < \varepsilon$ и $\mathrm{essdm}_\rho(X_j \setminus A) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k$.

Докажем сначала, что если M предкомпактно в m-норме, то выполнены свойства $1), 2')$. Заметим, что, так как m-норма мажорирует норму пространства $L^1(X^2, \mu^2)$, множество M является предкомпактом в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$, поэтому оно равномерно интегрируемо.

Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем произвольное конечное разбиение ξ пространства X на измеримые множества $X_1, \ldots, X_k$. Покажем, что множество $M_\xi \subset \mathcal{A}dm(X, \mu)$, состоящее из полуметрик ρ, для которых это разбиение является ε-разбиением, открыто в m-норме. Пусть $\rho \in M_\xi$. Найдем исключительное множество $A \subset X$, такое что $\mu(A) < \varepsilon$ и $\mathrm{essdm}_\rho(X_j \setminus A) < \varepsilon$ при $j = 1, \ldots, k$. Возьмем

$$\delta = \min\left(\varepsilon - \mu(A), \min_{j \le k}(\varepsilon - \mathrm{essdm}_\rho(X_j \setminus A))\right).$$

Тогда если $\rho_1 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ и $\|\rho - \rho_1\|_m < \delta^2/2$, то найдется полуметрика d на (X, μ), такая что μ^2-п. в. $\rho_1 \le \rho + d$ и $\|d\|_{L^1(X^2, \mu^2)} < \delta^2/2$. Применим лемму 2 к полуметрике d и найдем разбиение X на измеримые множества A_1, B_1, такое что $\mu(A_1) < \delta$ и $\mathrm{dm}_d(B_1) < \delta$. Тогда $\mu(A \cup A_1) < \mu(A) + \delta \le \varepsilon$ и

$$\mathrm{essdm}_{\rho_1}(X_j \setminus (A \cup A_1)) \le \mathrm{essdm}_\rho(X_j \setminus A) + \mathrm{dm}_d(B_1) < \varepsilon.$$

Таким образом, разбиение ξ является ε-разбиением для полуметрики ρ_1 с исключительным множеством $A \cup A_1$, то есть $\rho_1 \in M_\xi$. Мы доказали, что множество M_ξ открыто в m-норме.

Рассмотрим замыкание $\tilde{M}$ множества M в $(\mathbb{M}, \| \cdot \|_m)$. По следствию 2 оно является компактным в m-норме подмножеством $\mathcal{A}dm(X, \mu)$. Покроем компакт $\tilde{M}$ открытыми множествами M_ξ, соответствующими всевозможным конечным разбиениям ξ. В силу компактности из этого открытого покрытия можно выделить некоторое конечное подпокрытие $M_{\xi_1}, \ldots, M_{\xi_n}$. Ясно, что разбиение $\xi = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, произведение разбиений ξ_i, будет ε-разбиением для всех полуметрик $\rho \in \tilde{M}$. Свойство 2') доказано.

Докажем достаточность свойств 1) и 2).

Мы докажем сначала, что множество M предкомпактно в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. Для этого для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем конечную 2ε-сеть в множестве M в L^1-норме.

Равномерная интегрируемость семейства M означает, что

$$\lim_{R \to +\infty} \sup_{\rho \in M} \int\limits_{\rho > R} \rho d\mu^2 = 0.$$

Поэтому по лемме 10 при достаточно большом R для каждой $\rho \in M$ будет выполнено неравенство

$$\|\rho^R - \rho\|_m < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Отметим, что универсальное разбиение из свойства 2) остается универсальным и для всех срезок ρ^R, $\rho \in M$. Множество срезанных полуметрик мы обозначим M^R. В силу неравенства (1.10) нам достаточно найти конечную ε-сеть в множестве M^R в L^1-норме.

Возьмем $\delta < \frac{\varepsilon}{4(1+R)}$ и, воспользовавшись условием 2), найдем разбиение $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$, которое является δ-разбиением для любой $\rho \in M^R$. Для каждой $\rho \in M^R$ найдем исключительное измеримое подмножество $A \subset X$, такое что $\mu(A) < \delta$ и $\mathrm{dm}_\rho(X_j \setminus A) < \delta$ при $j = 1, \ldots, k$. Обозначим множества $Y_j = X_j \setminus A$ и зададим функцию $\bar{\rho} \in L^1(X^2, \mu^2)$ на каждом из множеств $X_i \times X_j$ равной среднему значению функции ρ по множеству $Y_i \times Y_j$. В случае, если хотя бы одно из множеств Y_j имеет нулевую меру, положим функцию $\bar{\rho}$ нулем на соответствующем множестве. Докажем, что в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$ функция $\bar{\rho}$ близка к ρ. Во-первых, обе функции ограничены числом R. Во-вторых, при любых $u_1, u_2 \in Y_i$, $v_1, v_2 \in Y_j$ выполнено очевидное неравенство

$$|\rho(u_1, v_1) - \rho(u_2, v_2)| \leq \rho(u_1, u_2) + \rho(v_1, v_2) < 2\delta,$$

поэтому

$$\int\limits_{Y_i \times Y_j} |\rho - \bar{\rho}| d\mu^2 \leq 2\delta \mu(Y_i)\mu(Y_j).$$

Объединение множеств вида $Y_i \times Y_j$ есть в точности $(X \setminus A)^2$, поэтому выполнено неравенство

$$\int\limits_{X^2} |\rho - \bar{\rho}| d\mu^2 < 2\delta \mu(X \setminus A)^2 + 2R\mu(A) < 2\delta(1 + R) < \varepsilon/2.$$

Таким образом, каждая функция $\rho \in M^R$ приближается в норме пространства $L^1(X^2, \mu^2)$ соответствующей функцией $\bar{\rho}$ с точностью $\varepsilon/2$. Но множество всех таких функций $\bar{\rho}$ ограничено в $L^1(X^2, \mu^2)$ и содержится в конечномерном подпространстве, поэтому в нем можно найти конечную $\varepsilon/2$-сеть. Из этого следует, что в множестве M мы можем найти конечную 2ε-сеть в норме пространства $L^1(X^2, \mu^2)$.

Таким образом, множество M предкомпактно в $L^1(X^2, \mu^2)$. Рассмотрим его замыкание $\bar{M}$ в пространстве $L^1(X^2, \mu^2)$. По лемме 8 все функции из $\bar{M}$ являются допустимыми полуметриками. Таким образом, компактное в $L^1(X^2, \mu^2)$ множество $\bar{M}$ состоит лишь из допустимых полуметрик, поэтому по следствию 4 оно компактно в m-норме. Значит, множество M предкомпактно в m-норме. □

Из теорем 5, 6 и леммы 8 легко получить такое следствие:

Следствие 5. *Если $M \subset \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — предкомпакт в m-норме, то его замыкания в $L^1(X^2,\mu^2)$ и в m-норме совпадают и состоят лишь из допустимых полуметрик. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)\colon \rho \in M\}$ ограничено. В частности, это выполнено для любой последовательности допустимых полуметрик, сходящейся в m-норме, или сходящейся в $L^1(X^2,\mu^2)$ к допустимой полуметрике.*

В заключении главы приведем еще одну теорему — критерий предкомпактности для выпуклых подмножеств $\mathcal{A}dm(X,\mu)$.

Теорема 7. *Пусть $M \subset \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — равномерно интегрируемое выпуклое семейство допустимых полуметрик. Тогда M предкомпактно в m-норме тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)\colon \rho \in M\}$ ограничено.*

Доказательство теоремы 7 опирается на следующую техническую лемму.

Лемма 11. *Пусть $M \subset \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — некоторое семейство суммируемых допустимых полуметрик. Пусть $c, \varepsilon > 0$ таковы, что*

$$2\varepsilon + \int\limits_Y \rho d\mu^2 < c \tag{1.11}$$

для любой полуметрики $\rho \in M$ и любого измеримого подмножества $Y \subset X^2$, такого что $\mu^2(Y) \le 2\varepsilon$. Пусть $R \ge \sup\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)}\colon \rho \in M\}$. Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $\rho_1,\dots,\rho_n \in M$, $\tilde\rho = \frac{\rho_1+\dots+\rho_n}{n}$ и $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\tilde\rho) \le \log k$. Тогда можно найти подмножество $I \subset \{1,\dots,n\}$, такое что $|I| \ge \frac{n}{2}\left(\frac{c}{R+3c}\right)^{k^2}$, и для любых $i_1, i_2 \in I$ выполнено неравенство $\|\rho_{i_1} - \rho_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le 8c$.

Доказательство. Рассмотрим соответствующее полуметрике $\tilde{\rho}$ измеримое разбиение пространства X на части $X_0, X_1, \ldots, X_k$, такое что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и $\mathrm{dm}_{\tilde{\rho}}(X_i) < \varepsilon$ при $i = 1, \ldots, k$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ выберем произвольную точку $x_i \in X_i$. Для каждого $s = 1, \ldots, n$ зададим функцию f_s на $X \times X$ равенством

$$f_s(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in X_0 \text{ или } y \in X_0, \\ \rho_s(x_i, x_j), & \text{если } x \in X_i, y \in X_j, 1 \le i, j \le k. \end{cases}$$

Для $s = 1, \ldots, n$ при $1 \le i, j \le k$ и $x \in X_i, y \in X_j$ имеем неравенство

$$|\rho_s(x, y) - f_s(x, y)| = |\rho_s(x, y) - \rho_s(x_i, x_j)| \le \rho_s(x, x_i) + \rho_s(y, x_j).$$

Усредняя это по $s = 1, \ldots, n$, при $1 \le i, j \le k$ и $x \in X_i, y \in X_j$ получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} |\rho_s(x, y) - f_s(x, y)| \le \tilde{\rho}(x, x_i) + \tilde{\rho}(y, x_j) < 2\varepsilon.$$

Проинтегрируем полученное неравенство по $(x, y) \in X_i \times X_j$ и сложим по $i, j = 1, \ldots, k$:

$$\frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{(X \setminus X_0)^2} |\rho_s - f_s| d\mu^2 < 2\varepsilon \mu(X \setminus X_0)^2 \le 2\varepsilon. \tag{1.12}$$

С другой стороны $\mu^2(X_0 \times X \cup X \times X_0) < 2\varepsilon$, поэтому в силу неравенства (1.11) для каждого $s = 1, \ldots, n$ получаем

$$\int\limits_{X_0 \times X \cup X \times X_0} \rho_s d\mu^2 < c - 2\varepsilon.$$

Используя это вместе с неравенством (1.12), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \|\rho_s - f_s\|_{L^1(X^2, \mu^2)} = & \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{X_0 \times X \cup X \times X_0} \rho_s d\mu^2 + \\ & \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \int\limits_{(X \setminus X_0)^2} |\rho_s - f_s| d\mu^2 < c, \end{aligned}$$

откуда следует, что мощность множества

$$S = \{s \in \{1, \ldots, n\} \colon \|\rho_s - f_s\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < 2c\}$$

не меньше $n/2$.

Заметим, что при $s \in S$ выполнено неравенство

$$\|f_s\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le \|\rho_s - f_s\|_{L^1(X^2,\mu^2)} + \|\rho_s\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < 2c + R,$$

поэтому функция f_s лежит в шаре радиуса $R + 2c$ в подпространстве $L \subset L^1(X^2, \mu^2)$ размерности k^2, состоящем из функций, постоянных на $X_i \times X_j$, $i, j = 1, \ldots, k$, и равных нулю вне $(X \setminus X_0)^2$. Из соображений конечномерного объема мы можем выбрать $2c$-сеть в этом шаре мощности не более $\left(\frac{R+3c}{c}\right)^{k^2}$. Поэтому хотя бы $|S|\left(\frac{c}{R+3c}\right)^{k^2}$ функций f_s попадут в $2c$-окрестность одной из точек этой сети. Таким образом, найдется подмножество $I \subset S$, такое что $|I| \ge |S|\left(\frac{c}{R+3c}\right)^{k^2}$ и $\|f_{i_1} - f_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le 4c$ при $i_1, i_2 \in I$. Но в таком случае

$$\|\rho_{i_1} - \rho_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le \|f_{i_1} - f_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} + \|\rho_{i_1} - f_{i_1}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} + \|\rho_{i_2} - f_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < 8c$$

для $i_1, i_2 \in I$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 7. В одну сторону теорема моментально вытекает из следствия 5.

Докажем обратную импликацию. Нам достаточно доказать, что множество M предкомпактно в $L^1(X^2, \mu^2)$. Действительно, в таком случае в силу леммы 8 его замыкание $\bar{M}$ в $L^1(X^2, \mu^2)$ содержится в $\mathcal{A}dm(X, \mu)$ и является компактом в $L^1(X^2, \mu^2)$. Но тогда в силу следствия 4 $\bar{M}$ является компактом в $(\mathbb{M}, \|\cdot\|_m)$, откуда следует предкомпактность M в m-норме.

Предположим, что M не предкомпактно в $L^1(X^2, \mu^2)$. Тогда найдутся $c > 0$ и последовательность полуметрик $\{\rho_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset M$, такие что при $i \ne j$ выполнено неравенство $\|\rho_i - \rho_j\|_{L^1(X^2,\mu^2)} > 8c$. Воспользовавшись равномерной интегрируемостью семейства M, найдем и зафиксируем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее неравенству (1.11). Равномерная ограниченность ε-энтропий полуметрик из множества M позволяет найти и зафиксировать такое $k \in \mathbb{N}$, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) \leq \log k$ для любой полуметрики $\rho \in M$. Пусть $R = \sup\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} : \rho \in M\}$.

Выберем $n \geq 4\left(\frac{R+3c}{c}\right)^{k^2}$. В силу выпуклости множества M полуметрика $\tilde{\rho} = \frac{\rho_1+\dots+\rho_n}{n}$ тоже принадлежит M. Применим лемму 11 и найдем соответствующее подмножество индексов $I \subset \{1, \dots, n\}$. Тогда имеем $|I| \geq 2$, поэтому для некоторых различных $i_1, i_2 \in I$ выполнено неравенство $\|\rho_{i_1} - \rho_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < 8c$, что противоречит выбору последовательности полуметрик ρ_i. Теорема доказана. $\square$

Глава 2

Динамика метрик на пространстве с мерой

В этой главе мы будем исследовать свойства метрических динамических систем при помощи полуметрик. Мы ограничимся простейшим случаем метрических динамических систем — действием группы $\mathbb{Z}$.

Напомним основные понятия метрической теории динамических систем.

Метрические динамические системы — динамические системы на пространствах с мерой. Мы, как уже говорилось, ограничимся стандартными вероятностными пространствами. Стоит упомянуть, что в категории пространств с мерой объекты и морфизмы рассматриваются mod 0, то есть с точностью до множеств меры ноль. Напомним определение.

Определение 11. Пусть (X_1, μ_1), (X_2, μ_2) — два стандартных вероятностных пространства. Измеримое отображение $T\colon (X_1', \mu_1) \to (X_2', \mu_2)$, действующее из некоторого подмножества $X_1' \subset X_1$ полной меры в некоторое подмножество $X_2' \subset X_2$ полной меры, такое что для любого μ_2-измеримого множества $A \subset X_2'$ выполнено равенство $\mu_1(T^{-1}A) = \mu_2(A)$, называется гомоморфизмом пространства (X_1, μ_1) на пространство (X_2, μ_2). В случае, если найдутся подмножества $X_1'' \subset X_1$, $X_2'' \subset X_2$ полной меры, такие что отображение T является биекцией между X_1'' и X_2'', а обратное отображение T^{-1} тоже является гомоморфизмом, T называется изоморфизмом пространств (X_1, μ_1) и (X_2, μ_2).

Отметим, что в соответствии с теоремой об изоморфизмах, доказанной В. А. Рохлиным (см. пункт 5 параграфа 2 статьи [6]), гомоморфизм пространств Лебега, являющийся инъективным на множестве полной меры, является изоморфизмом.

В категории пространств с мерой совпадающие с точностью до множества меры ноль гомоморфизмы отождествляют, то есть рассматривают классы таких гомоморфизмов. Стандартным образом эндоморфизмом называется гомоморфизм на себя, а автоморфизмом — изоморфизм на себя.

Определение 12. Пусть (X, μ) — стандартное вероятностное пространство, а $T\colon (X, \mu) \to (X, \mu)$ — эндоморфизм. В таком случае тройка (X, μ, T) называется метрической динамической системой.

Отметим, что в этом случае можно выделить подмножество $X' \subset X$ полной меры, такое что $T(X') \subset X'$.

Определение 13. Метрическая динамическая система (X_2, μ_2, T_2) называется фактором системы (X_1, μ_1, T_1), если существует гомоморфизм пространств с мерой $T\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$, такой что $T \circ T_1 = T_2 \circ T$.

Важной проблемой в метрической теории динамических систем является проблема изоморфизма.

Определение 14. Метрические динамические системы (X_1, μ_1, T_1) и (X_2, μ_2, T_2) называются метрически изоморфными, если существует изоморфизм $T\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$, такой что $T \circ T_1 = T_2 \circ T$.

Частичное решение проблемы изоморфизма дают инварианты.

Определение 15. Некоторая величина, соответствующая динамическим системам, называется метрическим инвариантом динамических систем, если она совпадает для метрически изоморфных динамических систем. Метрический инвариант (или систему метрических инвариантов) называют полным, если его совпадение для двух динамических систем влечет их метрическую изоморфность.

В фундаментальной работе 1958 года А. Н. Колмогоров определил простой числовой метрический инвариант динамических систем — энтропию. Приведем необходимые определения для случая стандартного вероятностного пространства (X, μ) с непрерывной мерой.

Пусть (X, μ, T) — метрическая динамическая система. Сдвигом $T^{-1}\xi$ измеримого разбиения ξ называется измеримое разбиение, элементы которого суть полные прообразы элементов разбиения ξ под действием отображения T. Наиболее удобная форма определения энтропии динамических систем была предложена Я. Г. Синаем в работе [7] 1959 года.

Определение 16. Информационной энтропией измеримого разбиения ξ под действием отображения T называется число

$$h_\mu(T, \xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee T^{-2}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi).$$

Метрической (колмогоровской) энтропией динамической системы (X, μ, T) называется точная верхняя грань этих чисел, взятая по всевозможным измеримым разбиениям с конечной энтропией:

$$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(T, \xi) \colon \xi \in Z(X, \mu)\}. \tag{2.1}$$

Теорема Колмогорова–Синая (см. работу [7]), утверждает, что если разбиение ξ порождающее (то есть его сдвиги $T^n\xi, n \in \mathbb{Z}$, в совокупности порождают всю сигма-алгебру $\mathfrak{A}$ пространства (X, μ)), то энтропия вычисляется по формуле $h_\mu(T) = h_\mu(T, \xi)$.

Мы изучим некоторый метрический инвариант динамических систем энтропийного типа, предложенный А. М. Вершиком, который может быть нетривиальным в случае нулевой или бесконечной колмогоровской энтропии. Определение основано на динамике допустимых полуметрик.

Определение 17. Пусть (X, μ, T) — метрическая динамическая система, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, а f — некоторая функция, заданная и измеримая на (X^n, μ^n).

Сдвигом $T^k f$ называется измеримая функция, заданная на (X^n, μ^n) по правилу

$$T^k f(x_1, \dots, x_n) = f(T^k x_1, \dots, T^k x_n). \tag{2.2}$$

Функция f называется T-инвариантной, если $Tf = f$ μ^n-почти всюду.

Замечание 3. Так как отображение T^k может быть задано, вообще говоря, лишь на некотором подмножестве $X' \subset X$ полной меры, равенство (2.2) задает функцию $T^k f$ лишь на множестве $(X')^n$. Однако, это множество также имеет полную меру в (X^n, μ^n), поэтому можно говорить об измеримой функции $T^k f$, доопределив ее на $X^n \setminus (X')^n$ тем или иным способом.

2.1. Определение и свойства масштабирующей энтропийной последовательности

2.1.1. Порождающие полуметрики

Пусть (X, μ, T) — метрическая динамическая система, T — автоморфизм, а ρ — измеримая полуметрика на (X, μ). Сдвиги $T^k \rho$, заданные в соответствии с определением 17 и доопределенные подходящим образом в соответствии с замечанием 3, очевидно, также являются измеримыми полуметриками на (X, μ), причем для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^k \rho).$$

Определим конечные усреднения полуметрики ρ под действием оператора T формулой $T^n_{av}\rho = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k \rho$.

Важным динамическим свойством полуметрик является порождение.

Определение 18. Измеримая на (X, μ) полуметрика ρ называется (двусторонней) порождающей для метрической динамической системы (X, μ, T), если ее сдвиги $T^k \rho, k \in \mathbb{Z}$, в совокупности разделяют точки с точностью до множества меры ноль, то есть существует некоторое множество $X' \subset X$ полной меры, такое что для любых различных $x, y \in X'$ найдется $k \in \mathbb{Z}$, такое что $T^k\rho(x, y) > 0$.

Отметим, что допустимая метрика является порождающей полуметрикой.

Пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — допустимая полуметрика. Для $n \in \mathbb{Z}$ рассмотрим борелевскую сигма-алгебру $\mathfrak{B}(T^n\rho)$ на X, порожденную полуметрикой $T^n\rho$. В соответствии с теоремой 2 эти сигма-алгебры являются подалгебрами сигма-алгебры $\mathfrak{A}(X, \mu)$ пространства (X, μ).

Лемма 12. *Если допустимая полуметрика $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ является порождающей для динамической системы (X, μ, T), то минимальная сигма-алгебра, содержащая все сигма-алгебры $\mathfrak{B}(T^n\rho)$, $n \in \mathbb{Z}$, плотна в сигма-алгебре $\mathfrak{A}(X, \mu)$ пространства (X, μ).*

Доказательство. Во-первых, мы можем считать, что полуметрика ρ не превосходит 1 всюду. В противном случае мы можем рассматривать вместо нее срезку $\rho^1 = \min(\rho, 1)$.

Для $n \in \mathbb{N}$ поточечно определим ограниченные функции

$$d_n = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \frac{1}{2^{|k|}} T^k\rho, \qquad d = \lim_n d_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|k|}} T^k\rho.$$

Отметим, что $d_n \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$, $\|d - d_n\|_m \to 0$, поэтому $d \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ в силу следствия 2. Из того, что полуметрика ρ является порождающей следует, что d — допустимая метрика.

Для каждого $n \geq 0$ борелевская сигма-алгебра $\mathfrak{B}(d_n)$ на пространстве X, задаваемая полуметрикой d_n, совпадает с сигма-алгеброй, порожденной сигма-алгебрами $\mathfrak{B}(T^k\rho)$, $1 - n \leq k \leq n - 1$. Из построения метрики d

очевидно, что ее борелевская сигма-алгебра $\mathfrak{B}(d)$ содержит все сигма-алгебры $\mathfrak{B}(d_n)$ и, более того, является их сигма-оболочкой. Утверждение леммы теперь следует из теоремы 3, примененной к допустимой метрике d. □

2.1.2. Масштабирующая энтропийная последовательность как метрический инвариант динамической системы

Напомним определение, данное А. М. Вершиком в работе [15].

Определение 19. Пусть (X, μ, T) — метрическая динамическая система, а ρ — допустимая полуметрика на (X, μ). Последовательность положительных чисел $\{h_n\}$ называется масштабирующей для полуметрики ρ, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\varlimsup_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)}{h_n} < +\infty, \tag{2.3}$$

а при достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$0 < \varliminf_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)}{h_n}. \tag{2.4}$$

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ обозначим символом $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$.

Замечание 4. Если ρ — допустимая полуметрика, $h = \{h_n\} \in \mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$, а $h' = \{h'_n\}$ — последовательность положительных чисел, то $h' \in \mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$ тогда и только тогда, когда $0 < \varliminf \frac{h'_n}{h_n} \le \varlimsup \frac{h'_n}{h_n} < \infty$.

Следующая теорема проясняет зависимость класса $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$ масштабирующих последовательностей от полуметрики ρ.

Теорема 8. *Пусть $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — суммируемые допустимые порождающие полуметрики на (X, μ). Тогда $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho) = \mathcal{H}(X, \mu, T, \tilde{\rho})$.*

Лемма 13. *Если последовательность суммируемых допустимых полуметрик $\rho_k \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ сходится к суммируемой допустимой полуметрике $\tilde\rho \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ в m-норме, то для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших k для любого $n \ge 1$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\tilde\rho) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,T^n_{av}\rho_k).$$

Доказательство. Выберем k настолько большим, что $\|\rho_k - \tilde\rho\|_m < \varepsilon^2/32$. По определению m-нормы найдется измеримая полуметрика d на (X,μ), такая что $\|d\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < \varepsilon^2/32$ и $|\rho_k - \tilde\rho| \le d$ μ^2-почти всюду. Для любого $n \ge 1$ имеем $T^n_{av}\tilde\rho \le T^n_{av}\rho_k + T^n_{av}d$ μ^2-почти всюду, при этом

$$\|T^n_{av}d\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\|T^j d\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < \frac{\varepsilon^2}{32}.$$

Лемма 2 утверждает, что в этом случае $\mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,T^n_{av}d) = 0$. Но тогда в силу выполненного почти всюду неравенства $T^n_{av}\tilde\rho \le T^n_{av}\rho_k + T^n_{av}d$ и леммы 3 очевидно, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\tilde\rho) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,T^n_{av}\rho_k) + \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,T^n_{av}d) = \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,T^n_{av}\rho_k).$$

□

Следующая лемма является ключевой в доказательстве теоремы 8.

Лемма 14. *Пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — суммируемая допустимая полуметрика, порождающая для (X,μ,T). Тогда для любой суммируемой допустимой полуметрики $\tilde\rho \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $c_1, \varepsilon_1 > 0$, такие что для любого $n \ge 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\tilde\rho) \le c_1\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{av}\rho). \tag{2.5}$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{A}dm(X,\mu)$ всех суммируемых допустимых полуметрик $\tilde\rho$ на (X,μ), для которых выполнено заключение леммы. Очевидно, $\rho \in \mathcal{M}_\rho$. В силу леммы 13 множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто по m-норме в $\mathcal{A}dm(X,\mu)$, поэтому нам достаточно доказать его плотность в этом множестве.

Воспользовавшись леммой 3, несложно понять, что множество $\mathcal{M}_\rho$ является выпуклым конусом в $\mathcal{A}dm(X,\mu)$. Множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто относительно перехода к мажорируемой полуметрике, то есть если $\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$ и $\rho_2 \leq \rho_1$ μ^2-почти всюду, то $\rho_2 \in \mathcal{M}_\rho$. Кроме того, оно инвариантно относительно действия преобразования T^k, $k \in \mathbb{Z}$, то есть если $\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$, то $T^k\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$, потому что

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}(T^k\rho_1)) =&\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^k(T^n_{av}\rho_1)) =\\ \mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\rho_1) \leq& c_1\mathbb{H}_{\varepsilon/c_2}(X,\mu,T^n_{av}\rho).\end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что $T^k(T^n_{av}\rho) \in \mathcal{M}_\rho$ для любых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Каждой функции $f \in L^1(X,\mu)$ сопоставим суммируемую допустимую полуметрику $d[f]$ на X, задаваемую равенством $d[f](x,y) = |f(x) - f(y)|$. Отметим, что если $f, g \in L^1(X,\mu)$, то для любых $x, y \in X$ имеет место неравенство

$$|d[f](x,y) - d[g](x,y)| \leq |f(x) - g(x)| + |f(y) - g(y)|,$$

при этом функция, стоящая в его правой части, является полуметрикой. Интегрируя это неравенство, мы получаем

$$\|d[f] - d[g]\|_m \leq 2\|f - g\|_{L^1(X,\mu)}. \tag{2.6}$$

Если для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ функция $f \in L^1(X,\mu)$ является липшицевой по полуметрике $T^k(T^n_{av}\rho)$ с константой Липшица $l(f)$, то $d[f] \leq l(f)T^k(T^n_{av}\rho)$, поэтому $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$. Пусть $\mathfrak{B}_n$ — борелевская сигма-алгебра полуметрического пространства $(X, T^{-n}(T^{2n}_{av}\rho))$. В соответствии с теоремой 2 $\mathfrak{B}_n$ является подалгеброй $\mathfrak{A}(X,\mu)$ сигма-алгебры пространства (X,μ). Отметим, что липшицевы по полуметрике $T^{-n}(T^{2n}_{av}\rho)$ функции плотны в

$L^1(X, \mathfrak{B}_n, \mu)$. Таким образом, для любой функции $f \in L^1(X, \mathfrak{B}_n, \mu)$ в силу неравенства (2.6) и замкнутости множества $\mathcal{M}_\rho$ в m-норме имеем $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$. Но полуметрика ρ порождающая, поэтому по лемме 12 сигма-алгебра на X, порожденная сигма-алгебрами $\mathfrak{B}_n$, $n \geq 1$, плотна в сигма-алгебре $\mathfrak{A}(X, \mu)$ пространства (X, μ). Отсюда следует, что объединение $\bigcup\limits_{n\geq 1} L^1(X, \mathfrak{B}_n, \mu)$ плотно в $L^1(X, \mu)$. Еще раз воспользовавшись неравенством (2.6) и замкнутостью множества $\mathcal{M}_\rho$ в m-норме, получаем, что $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$ для любой $f \in L^1(X, \mu)$. В частности, если $A \subset X$ — измеримое множество, то $d[\chi_A]$ — разрезная полуметрика, соответствующая разбиению пространства X на A и $X \setminus A$. Следовательно, в множестве $\mathcal{M}_\rho$ лежат все разрезные полуметрики, и, более того, любые полуметрики, мажорируемые конечной суммой разрезных.

Из леммы 10 следует, что любая суммируемая допустимая полуметрика аппроксимируется в m-норме своими срезками, поэтому достаточно доказать, что любая ограниченная допустимая полуметрика лежит в $\mathcal{M}_\rho$. Покажем, что ограниченная допустимая полуметрика $\tilde{\rho}$ аппроксимируется в m–норме полуметриками, мажорируемыми конечными суммами разрезных. Пусть $M = \|\tilde{\rho}\|_{L^\infty(X^2,\mu^2)}$ — существенный супремум метрики $\tilde{\rho}$. Возьмем достаточно малое $\delta > 0$. Так как полуметрика $\tilde{\rho}$ допустима, для некоторого $n \in \mathbb{N}$ мы можем найти измеримое разбиение $X = \bigsqcup\limits_{j=0}^{n} X_j$, так что $\mu(X_0) < \delta$ и $\mathrm{dm}_{\tilde{\rho}}(X_j) < \delta$ при $j > 0$. Для каждого $j \geq 0$ зафиксируем произвольную точку $a_j \in X_j$. Зададим полуметрику d_1 равенством $d_1(x, y) = \tilde{\rho}(a_i, a_j)$, где i, j таковы, что $x \in X_i$ и $y \in X_j$. Зададим полуметрику d_2 равенством $d_2(x, y) = 2\delta$, если $x, y \notin X_0$, и равенством $d_2(x, y) = M + 2\delta$ в противном случае. Легко проверить, что $|\tilde{\rho}(x, y) - d_1(x, y)| \leq d_2(x, y)$ для μ^2-почти всех $(x, y) \in X^2$, поэтому

$$\|\tilde{\rho} - d_1\|_m \leq \|d_2\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \leq 2\delta(1 + M),$$

что может быть сделано сколь угодно маленьким за счет выбора маленького δ. При этом полуметрика d_1 мажорируется конечной суммой разрезных полуметрик, стало быть $d_1 \in \mathcal{M}_\rho$. Следовательно, ограниченная полуметрика $\tilde{\rho}$ аппроксимируется в m-норме полуметриками из множества $\mathcal{M}_\rho$. Но множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто в m-норме, стало быть $\tilde{\rho} \in \mathcal{M}_\rho$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 8. Достаточно показать, что $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho) \subset \mathcal{H}(X,\mu,T,\tilde{\rho})$. Возьмем произвольную последовательность $h = \{h_n\} \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ и проверим, что $h \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\tilde{\rho})$. Оценка сверху (2.3) для $\tilde{\rho}$ сразу следует из леммы 14. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $c_1, \varepsilon_1 > 0$, такие что для любого n выполнено неравенство (2.5), поэтому

$$\varlimsup_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\tilde{\rho})}{h_n} \le c_1 \varlimsup_n \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{av}\rho)}{h_n} < +\infty.$$

Перейдем к доказательству оценки снизу (2.4) для полуметрики $\tilde{\rho}$. Выберем достаточно малое $\varepsilon_2 > 0$, такое чтобы неравенство (2.4) было выполнено для ρ. Воспользуемся леммой 14, поменяв ролями полуметрики ρ и $\tilde{\rho}$, и найдем $c_1, \varepsilon_1 > 0$, такие что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_{\varepsilon_2}(X,\mu,T^n_{av}\rho) \le c_1 \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{av}\tilde{\rho}).$$

Тогда имеем

$$\varliminf_n \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{av}\tilde{\rho})}{h_n} \ge \frac{1}{c_1} \varliminf_n \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_2}(X,\mu,T^n_{av}\rho)}{h_n} > 0.$$

Но если $\varepsilon < \varepsilon_1$, то $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,T^n_{av}\tilde{\rho}) \ge \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,T^n_{av}\tilde{\rho})$, поэтому неравенство (2.4) для $\tilde{\rho}$ выполнено. Теорема доказана. □

Теорема 8 приводит к следующему определению.

Определение 20. Последовательность $h = \{h_n\}$ положительных чисел называется масштабирующей энтропийной последовательностью метрической динамической системы (X,μ,T), если $h \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ для некоторой (а тогда и любой) суммируемой допустимой порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$. Класс масштабирующих энтропийных последовательностей динамической системы (X,μ,T) обозначим $\mathcal{H}(X,\mu,T)$.

Следствие 6. *Класс маситабирующих энтропийных последовательностей является метрическим инвариантом динамических систем.*

Из леммы 14 и определения 20 очевидно следствие.

Следствие 7. *Если последовательность* $h = \{h_n\}$ *является маситабирующей энтропийной последовательностью динамической системы* (X, μ, T)*, а* $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ *— суммируемая допустимая полуметрика, то для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho) = O(h_n)$*,* $n \to +\infty$*.*

В свою очередь отсюда следует "монотонность" масштабирующей энтропийной последовательности:

Следствие 8. *Пусть динамическая система* (X_2, μ_2, T_2) *является фактором системы* (X_1, μ_1, T_1)*, а* $h^1 = \{h^1_n\}$*,* $h^2 = \{h^2_n\}$ *— их маситабирующие энтропийные последовательности соответственно. Тогда* $h^2_n = O(h^1_n)$*,* $n \to +\infty$*.*

Доказательство. Пусть $T\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$ — факторотображение. Возьмем любую суммируемую допустимую метрику $\rho_2 \in \mathcal{A}dm(X_2, \mu_2)$ и определим полуметрику ρ_1 на (X_1, μ_1) формулой $\rho_1(x, y) = \rho_2(Tx, Ty)$. Ясно, что ρ_1 — допустимая полуметрика на (X_1, μ_1), и что для любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\mathbb{H}_\varepsilon(X_1, \mu_1, (T_1)^n_{av}\rho_1) = \mathbb{H}_\varepsilon(X_2, \mu_2, (T_2)^n_{av}\rho_2)$. Отсюда в силу определений 20, 19 и следствия 7 имеем $h^2_n = O(h^1_n)$, $n \to +\infty$. □

Однако, открытым остается вопрос о том, для каких динамических систем масштабирующая энтропийная последовательность существует, то есть множество $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ не пусто.

2.1.3. Сравнение с колмогоровской энтропией

В этом пункте мы докажем теорему, связывающую масштабирующую энтропийную последовательность с колмогоровской энтропией.

Сначала отметим такое элементарное следствие лемм 4 и 5.

Следствие 9. *Пусть* (X, μ, T) — *метрическая динамическая система,* $\xi \in Z(X, \mu)$ — *измеримое разбиение с конечной энтропией,* ρ_ξ — *соответствующая полуметрика. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено неравенство*

$$\overline{\lim_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho_\xi)}{n} \leq \frac{h_\mu(T, \xi)}{\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Если разбиение ξ *состоит из* $|\xi|$ *элементов (с точностью до множества меры ноль), то*

$$\underline{\lim_n} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho_\xi)}{n} \geq h_\mu(T, \xi) - (2\varepsilon \log |\xi| - \varepsilon \log \varepsilon - (1 - \varepsilon) \log(1 - \varepsilon)). \tag{2.8}$$

Доказательство. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ применим лемму 4 к разбиению $\zeta_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi$, воспользуемся тривиальным неравенством $\rho_{\zeta_n} \geq T_{av}^n \rho_\xi$ и получим

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho_\xi) \leq \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_{\zeta_n}) \leq \frac{H(\zeta_n)}{\varepsilon},$$

откуда моментально следует оценка (2.7).

Оценка (2.8) столь же элементарно следует из леммы 5, примененной к разбиениям $\xi_i = T^{-i}\xi$, $i \in \mathbb{N}$. □

Теорема 9. *Пусть* T — *апериодический автоморфизм пространства* (X, μ). *Тогда: 1) если колмогоровская энтропия* $h_\mu(T)$ *конечна и положительна, то последовательность* $h_n = n$ *является масштабирующей энтропийной последовательностью системы* (X, μ, T);
2) если h_n — *масштабирующая энтропийная последовательность системы* (X, μ, T), *то* $h_\mu(T) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $h_n = o(n)$, $n \to +\infty$.

Доказательство. Пусть сначала $h_\mu(T) < +\infty$. Найдем разбиение $\zeta \in Z(X, \mu)$ с конечной энтропией, такое что его сдвиги $T^n\zeta$, $n \in \mathbb{Z}$, порождают сигма-алгебру $\mathcal{A}(X, \mu)$ (доказательство существования такого разбиения см., например, в пункте 10 работы [8] В. А. Рохлина). В таком случае в силу теоремы Колмогорова–Синая $h_\mu(T) = h_\mu(T, \zeta)$. Ясно, что соответствующая этому разбиению полуметрика ρ_ζ является суммируемой допустимой порождающей.

Неравенство (2.3) для последовательности $h_n = n$ для полуметрики ρ_ζ следует из неравенства (2.7). Более того, если $h_\mu(T) = 0$ и h_n — масштабирующая энтропийная последовательность системы (X, μ, T), то $h_n = o(n)$, $n \to +\infty$.

Если $h_\mu(T) > 0$, то, воспользовавшись непрерывностью функции $h_\mu(T, \cdot)$ по разбиению (см., например, пункт 8 работы [8] В. А. Рохлина), найдем конечное разбиение ξ, являющееся укрупнением разбиения ζ (то есть элементы разбиения ξ составлены из элементов разбиения ζ), такое что $h_\mu(T, \xi) > 0$. Выбрав достаточно малое $\varepsilon > 0$, из неравенства (2.8) получим оценку (2.4) для последовательности $h_n = n$ и полуметрики ρ_ξ. Но по построению очевидно неравенство $\rho_\zeta \geq \rho_\xi$, поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенство (2.4) выполнено для последовательности $h_n = n$ и полуметрики ρ_ζ. Так как полуметрика ρ_ζ является суммируемой допустимой порождающей, по определению последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью системы (X, μ, T).

Для окончательного доказательства пункта 2) теоремы нам осталось показать, что если h_n — масштабирующая последовательность и $h_n = o(n)$, $n \to +\infty$, то $h_\mu(T) = 0$. В силу следствия 7 для любого конечного разбиения $\xi \in Z(X, \mu)$ левая часть неравенства (2.8) равна нулю. Устремив в нем ε к нулю, получим $h_\mu(T, \xi) = 0$. В силу произвольности ξ это означает, что $h_\mu(T) = 0$. Теорема доказана. $\square$

Как показывает результат следующего пункта, обращение утверждения 1) теоремы 9 неверно.

2.1.4. Масштабирующая энтропийная последовательность сдвига Бернулли

Приведем вычисление масштабирующей энтропийной последовательности сдвига Бернулли. Пусть (A, ν) — стандартное вероятностное пространство (возможно, мера ν имеет точечные нагрузки). Пусть $X = A^{\mathbb{Z}}$ — пространство двусторонних последовательностей, $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$ — продакт-мера на X, а $T\colon X \to X$ — левый сдвиг.

Теорема 10. *Если мера ν не сосредоточена в одной точке, то последовательность $h_n = n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью сдвига Бернулли (X, μ, T).*

Если мера ν непрерывна, то энтропия пространства (A, ν) бесконечна. При этом в соответствии с теоремой Колмогорова (см. [4, 5]) энтропия $h_\mu(T)$ будет бесконечной. Таким образом, обращение утверждения 1) теоремы 9 неверно.

Доказательство теоремы 10. Выберем произвольное измеримое разбиение ζ пространства (A, ν) на два множества положительной меры. Пусть ρ_ζ — соответствующая разрезная полуметрика на (A, ν). Зададим измеримое разбиение ξ пространства (X, μ) на два множества и соответствующую ему разрезную полуметрику равенством $\rho_\xi(x, y) = \rho_\zeta(x_0, y_0)$. Зафиксируем некоторую допустимую метрику d на пространстве (A, ν), такую что $\rho_\zeta \le d \le 1$. Зададим полуметрику ρ на X равенством $\rho(x, y) = d(x_0, y_0)$. Ясно, что полуметрика ρ допустимая, суммируемая и порождающая для (X, μ, T). Покажем, что последовательность $h_n = n$ является масштабирующей для полуметрики ρ.

Сначала докажем неравенство (2.4). Отметим, что по теореме Колмогорова $h_\mu(T, \xi) = H(\zeta) > 0$. Кроме того, $\rho \ge \rho_\xi$ по построению, поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$ в силу неравенства (2.8) имеем

$$\varliminf_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho)}{n} \geq \varliminf_n \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho_\xi)}{n} \geq h_\mu(T, \xi) + \varepsilon \log \varepsilon + (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon) > 0.$$

Перейдем к доказательству оценки (2.3). Пусть $\varepsilon > 0$. Воспользовавшись допустимостью метрики d на (A, ν), найдем $m \in \mathbb{N}$ и измеримые дизъюнктные подмножества $A_0, \ldots, A_m \subset A$, такие что $A = \bigcup\limits_{j=0}^{m} A_j$, $\nu(A_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ и $\mathrm{dm}_d(A_j) < \frac{\varepsilon}{4}$ при $j = 1, \ldots, m$. Для $j = 0, \ldots, m$ выберем и зафиксируем по одной точке $a_j \in A_j$, пусть $\tilde{A} = \{a_j\}_{j=0}^m \subset A$. Зададим отображение $\pi\colon A \to \tilde{A}$ равенством $\pi(x) = a_j$ для $x \in A_j$ и продолжим его покоординатно до отображения из $X = A^{\mathbb{Z}}$ в $\tilde{X} = \tilde{A}^{\mathbb{Z}} \subset X$.

Рассмотрим последовательность случайных величин f_n, $n \geq 0$, на X, заданных равенством $f_n(x) = 1$, если $x_n \in A_0$, и $f_n(x) = 0$ в противном случае. Отметим, что, так как мера $\mu = \nu^{\mathbb{Z}}$ — продакт мера на X, эти случайные величины независимы и одинаково распределены, причем $f_n = 1$ с вероятностью $\nu(A_0)$. Тогда математическое ожидание $\mathbb{E}[f_n]$ равно $\nu(A_0)$, а дисперсия $\mathbb{D}[f_n]$ равна $\nu(A_0)(1 - \nu(A_0))$. Тогда по неравенству Чебышева для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем оценку

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) > \frac{\varepsilon}{2} n\right\}\right) \leq \frac{\mathbb{D}\Big[\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k\Big]}{(\frac{\varepsilon}{2} - \mathbb{E}[f_n])^2 n^2} = \frac{\nu(A_0)(1-\nu(A_0))}{(\frac{\varepsilon}{2} - \nu(A_0))^2 n} < \frac{4}{\varepsilon n}, \tag{2.9}$$

что не превосходит ε при $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$. Отметим, что если для $x \in X$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_k(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} n$, то $\sum\limits_{k=0}^{n-1} d(x_k, \pi(x_k)) \leq \frac{\varepsilon}{2} n + \frac{\varepsilon}{4} n = \frac{3\varepsilon}{4} n$, поэтому $T_{av}^n \rho(x, \pi(x)) \leq \frac{3\varepsilon}{4}$. Но на множестве $\pi(X) = \tilde{A}^{\mathbb{Z}}$ полуметрика $T_{av}^n \rho$ различает не более, чем $(m+1)^n$ точек. Таким образом, при $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$ имеем оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho) \leq n \log(m+1),$$

откуда следует оценка (2.3). $\square$

2.2. Чисто точечный спектр и последовательностная энтропия Кушниренко

2.2.1. Масштабирующая энтропийная последовательность динамической системы с чисто точечным спектром

Метрическая динамическая система (X, μ, T) имеет чисто точечный спектр, если собственные функции оператора U_T образуют полную систему в $L^2(X, \mu)$.

Оказывается, чистая точечность спектра динамической системы напрямую выражается в терминах масштабирующей энтропийной последовательности.

Теорема 11. *Пусть T — автоморфизм пространства (X, μ). Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *спектр системы (X, μ, T) чисто точечный;*

2) *множество $\mathcal{H}(X, \mu, T)$ состоит из положительных ограниченных отделенных от нуля последовательностей.*

Пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$. Легко проверить, что тензорный квадрат $T^{\otimes 2}$ преобразования T, заданный равенством $T^{\otimes 2}(x, y) = (Tx, Ty)$ для $(x, y) \in X^2$, сохраняет меру μ^2 на X^2. Применив эргодическую теорему Биркгофа–Хинчина для динамической системы $(X^2, \mu^2, T^{\otimes 2})$ и функции $\rho \in L^1(X^2, \mu^2)$, получим, что для некоторой функции из пространства $L^1(X^2, \mu^2)$, которую мы обозначим $T_{av}\rho$, имеется сходимость $T^n_{av}\rho(x, y)$ к $T_{av}\rho$ μ^2-почти всюду и в $L^1(X^2, \mu^2)$. В соответствии с замечанием 1, функцию $T_{av}\rho$ можно считать суммируемой полуметрикой на (X, μ). Мы будем называть ее усредненной полуметрикой. Простое следствие построенной теории говорит нам, в каком случае она будет допустимой.

Следствие 10. *Пусть* (X, μ, T) — *метрическая динамическая система, а* $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — *допустимая полуметрика. Усредненная полуметрика* $T_{av}\rho$ *допустима тогда и только тогда, когда постоянная последовательность* $\mathbf{1}$, *состоящая из единиц, является масштабирующей для полуметрики* ρ.

Доказательство. Условие того, что постоянная последовательность $\mathbf{1}$, состоящая из единиц, является масштабирующей для полуметрики ρ, по сути есть переформулировка того, что для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n\rho)$ ограничена. Если оно выполнено, то по лемме 8 полуметрика $T_{av}\rho$ допустима. Обратная импликация моментально выводится из следствия 5. □

Элементарным следствием теоремы 8 и следствия 10 является следующее замечание.

Замечание 5. Условие 2) теоремы 11 может быть переформулировано следующими равносильными способами:

3) для некоторой порождающей суммируемой допустимой полуметрики ρ для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n\rho)$ ограничена;

4) для любой порождающей суммируемой допустимой полуметрики ρ для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n\rho)$ ограничена;

5) для некоторой порождающей суммируемой допустимой полуметрики ρ усредненная полуметрика $T_{av}\rho$ допустима;

6) для любой порождающей суммируемой допустимой полуметрики ρ усредненная полуметрика $T_{av}\rho$ допустима.

Перейдем к доказательству теоремы 11.

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 2) *теоремы 11.* Покажем сначала, что если спектр системы (X, μ, T) чисто точечный, то выполнено условие 4) замечания 5, которое, как уже обсуждалось, равносильно условию 2) теоремы 11.

Пусть $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ — суммируемая порождающая полуметрика для системы (X, μ, T). Так как спектр системы (X, μ, T) чисто точечный, собственные функции соответствующего оператора U_T образуют полную систему в $L^2(X, \mu)$. Отсюда следует, что собственные функции оператора $U_{T^{\otimes 2}}$ в пространстве $L^2(X^2, \mu^2)$, соответствующего динамической системе $(X^2, \mu^2, T^{\otimes 2})$, тоже образуют полную систему, то есть спектр оператора $U_{T^{\otimes 2}}$ тоже чисто точечный. Из спектральной теоремы для унитарных операторов следует, что в таком случае орбита любой функции $f \in L^2(X^2, \mu^2)$ под действием оператора $U_{T^{\otimes 2}}$ предкомпактна. Покажем, что множество $M = \{T^n\rho \colon n \geq 0\}$, то есть орбита функции ρ под действием оператора $U_{T^{\otimes 2}}$, предкомпактна в $L^1(X^2, \mu^2)$. Пусть это не так, тогда найдется $c > 0$ и последовательность натуральных чисел n_k, такая что $\|T^{n_i}\rho - T^{n_j}\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} > c$ при $i \neq j$. Срезка функции коммутирует с применением оператора $U_{T^{\otimes 2}}$, поэтому мы можем найти большое положительное число R, такое что для всех n выполнено неравенство $\|T^n(\rho^R) - T^n\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < c/3$. Тогда для $i \neq j$ по неравенству треугольника имеем неравенство $\|T^{n_i}(\rho^R) - T^{n_j}(\rho^R)\|_{L^1(X^2,\mu^2)} > c/3$. Но функция ρ^R ограничена, поэтому лежит в $L^2(X^2, \mu^2)$ и ее орбита под действием $U_{T^{\otimes 2}}$ должна быть предкомпактна в $L^2(X^2, \mu^2)$, следовательно и в $L^1(X^2, \mu^2)$ тоже. Противоречие.

Таким образом, множество M предкомпактно в $L^1(X^2, \mu^2)$, а его замыкание $\bar{M}$ в $L^1(X^2, \mu^2)$ компактно. Но для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n\rho)$ постоянна, поэтому по лемме 8 множество $\bar{M}$ состоит только из допустимых полуметрик. Но тогда по следствию 4 множество $\bar{M}$ компактно в m-норме. Отсюда следует, что его выпуклая оболочка $\mathrm{conv}(\bar{M})$ предкомпактна в m-норме. Но $T^n_{av}\rho \in \mathrm{conv}(\bar{M})$ для любого n, поэтому в силу следствия 5 для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)$ ограничена, что и требовалось. $\square$

Перед тем, как доказывать импликацию 2) $\Rightarrow$ 1) теоремы 11, нам понадобится несколько усилить теорему 7 в частном случае.

Теорема 12. *Пусть T — эндоморфизм (не обязательно обратимый) стандартного вероятностного пространства (X, μ), а ρ — суммируемая допустимая полуметрика на (X, μ). Если для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)$ ограничена, то множество $\{T^n\rho\colon n \in \mathbb{N}\}$, то есть орбита ρ под действием $U_{T^{\otimes 2}}$, является предкомпактным в $L^1(X^2, \mu^2)$.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда найдется $c > 0$ и возрастающая последовательность q_i натуральных чисел, такая что $\|T^{q_i}\rho - T^{q_j}\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} > 8c$ при $i \neq j$.

Пусть $M = \{T^n\rho\colon n \in \mathbb{N}\}$. Отметим, что множество M равномерно интегрируемо, потому как состоит из сдвигов одной функции ρ. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы было выполнено неравенство (1.11). Пусть n — некоторое большое число. Найдем число $k \in \mathbb{N}$, такое что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho) \leq \log k$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $R = \|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$, $A = \left(\frac{R+3c}{c}\right)^{k^2}$. Применим лемму 11 для полуметрик $\rho_i = T^{i-1}\rho, i = 1, \ldots, n$, $\tilde{\rho} = T^n_{av}\rho$ и найдем подмножество $I_n \subset \{1, \ldots, n\}$, такое что $|I_n| \geq \frac{n}{2A}$, и для любых $i_1, i_2 \in I_n$ выполнено неравенство $\|\rho_{i_1} - \rho_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \leq 8c$.

Окончание доказательства основано на следующей простой комбинаторной лемме.

Лемма 15. *Пусть $f \in L^1(X^2, \mu^2)$, T — эндоморфизм стандартного вероятностного пространства (X, μ). Пусть $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$, и подмножества $I, J \subset \{1, \ldots, N\}$ таковы, что $\|T^{i_1}f - T^{i_2}f\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \leq C$ для $i_1, i_2 \in I$, $\|T^{j_1}f - T^{j_2}f\|_{L^1(X^2,\mu^2)} > C$ для различных $j_1, j_2 \in J$. Тогда $|I||J| \leq 2N$.*

Доказательство леммы 15. Пусть это не так. Рассмотрим всевозможные суммы вида $i+j$, где $i \in I$, $j \in J$. С одной стороны, при этих условиях $i \le N$ и $j \le N$, поэтому $i+j \le 2N$. С другой стороны, количество таких сумм равно $|I||J| > 2N$. Следовательно, по принципу Дирихле найдутся различные $i_1, i_2 \in I$ и $j_1, j_2 \in J$, такие что $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$. Пусть $i_1 < i_2$. Тогда

$$C < \|T^{j_1} f - T^{j_2} f\|_{L^1(X^2,\mu^2)} = \|T^{j_1 - j_2} f - f\|_{L^1(X^2,\mu^2)} = \\ \|T^{i_2 - i_1} f - f\|_{L^1(X^2,\mu^2)} = \|T^{i_2} f - T^{i_1} f\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \le C.$$

Противоречие. Лемма 15 доказана. □

Зафиксируем $n > q_{10A}$. Рассмотрим $J_n = \{q_i \colon 1 \le i \le 10A\} \subset \{1, \dots, n\}$. Множества $I = I_n$, $J = J_n$, функция $f = \rho \in L^1(X^2, \mu^2)$, числа $N = n$, $C = 8c$ удовлетворяют условию леммы 15. Поэтому $2n \ge |J_n||I_n| = 10A|I_n| \ge 5n$ по построению множества I_n. Противоречие, теорема 12 доказана. □

Доказательство импликации 2) $\Rightarrow$ 1) *теоремы 11.* Пусть $F \subset L^2(X,\mu)$ — замкнутое линейное подпространство, порожденное собственными функциями оператора U_T. Хорошо известно, что пространство F есть $L^2(X, \mathfrak{F}, \mu)$, где $\mathfrak{F}$ — полная сигма-алгебра, порожденная собственными функциями оператора U_T, подалгебра сигма-алгебры $\mathfrak{A}(X,\mu)$ пространства (X,μ). Собственные функции оператора $U_{T^{\otimes 2}}$ лежат в $F \otimes F$, поэтому измеримы по сигма-алгебре $\mathfrak{F}^2$. Более того, если орбита некоторой функции $f \in L^2(X^2,\mu^2)$ под действием $U_{T^{\otimes 2}}$ предкомпактна в $L^2(X^2,\mu^2)$, то f лежит в замкнутом линейном подпространстве, порожденным собственными функциями оператора $U_{T^{\otimes 2}}$, поэтому f лежит в $F \otimes F$ и тоже измерима по сигма-алгебре $\mathfrak{F}^2$.

Пусть для некоторой суммируемой допустимой порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ выполнено условие 3) замечания 5, то есть последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)$ ограничена для любого $\varepsilon > 0$. Возьмем некоторое

$R > 0$ и рассмотрим срезанную полуметрику ρ^R. Очевидно, она также является суммируемой допустимой порождающей, и для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho^R)$ тоже ограничена. Тогда по теореме 12 орбита функции ρ^R под действием $U_{T^{\otimes 2}}$ предкомпактна в $L^1(X^2, \mu^2)$. Все сдвиги функции ρ^R равномерно ограничены, поэтому эта орбита предкомпактна и в $L^2(X^2, \mu^2)$. Следовательно, функция ρ^R, все ее сдвиги $T^n \rho^R$ и усреднения $T_{av}^n \rho^R$ должны быть измеримы по сигма-алгебре $\mathfrak{F}^2$. Но в таком случае борелевские сигма-алгебры, задаваемые этими полуметриками, являются подалгебрами $\mathfrak{F}$ (см. теорему 2). Так как полуметрика ρ^R является порождающей, в силу леммы 12 отсюда следует, что сигма-алгебра $\mathfrak{F}$ совпадает со всей сигма-алгеброй $\mathfrak{A}(X, \mu)$ пространства (X, μ), поэтому $F = L^2(X, \mu)$, и оператор U_T имеет чисто точечный спектр.

$\square$

2.2.2. Сравнение с последовательностной энтропией Кушниренко

Сравним масштабирующую энтропийную последовательность с последовательностной энтропией Кушниренко, предложенной в работе [20]. А именно, получим оценку снизу на рост масштабирующей энтропийной последовательности при условии положительности последовательностной энтропии Кушниренко.

Напомним определение последовательностной энтропии (А-энтропии).

Определение 21. Пусть $A = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Пусть T — автоморфизм пространства (X, μ), а $\xi \in Z(X, \mu)$ — измеримое разбиение с конечной энтропией. Определим

$$h_A(T, \xi) = \overline{\lim_n} \frac{H(\cap_{i=1}^n T^{a_i} \xi)}{n},$$

$$h_A(T) = \sup_{\xi \in Z} h_A(T, \xi).$$

Число $h_A(T)$ называется последовательностной энтропией оператора T, отвечающей последовательности A.

Для любой последовательности A отвечающая ей последовательностная энтропия является метрическим инвариантом.

Пусть $r(\cdot,\cdot)$ — метрика Рохлина на пространстве $Z(X,\mu)$ (см., например, [8]). Она определяется, вообще говоря, через условную энтропию: $r(\xi,\nu) = H(\xi/\nu) + H(\nu/\xi)$. Однако, для измеримых разбиений с конечной энтропией выполнено равенство $H(\xi/\nu) = H(\xi \vee \nu) - H(\nu)$.

В работе [20] показано, что функция $h_A(T,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1 на пространстве $Z(X,\mu)$ с метрикой r:

$$|h_A(T,\xi) - h_A(T,\nu)| \leq r(\xi,\nu).$$

В работе [20] приведен следующий критерий чистой точечности спектра: оператор T имеет чисто точечный спектр тогда и только тогда, когда для любой возрастающей последовательности A натуральных чисел выполнено равенство $h_A(T) = 0$.

Следующая теорема дает нижнюю оценку на рост масштабирующей энтропийной последовательности в случае положительности последовательностной энтропии.

Теорема 13. *Пусть $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, такая что $h_A(T) > 0$, а h_n — масштабирующая энтропийная последовательность системы (X,μ,T). Тогда* $\underline{\lim}\, \frac{h_{a_n}}{\log\log n} > 0$.

Доказательство. Так как $h_A(T) > 0$, то найдется $\xi \in Z(X,\mu)$, такое что $h_A(T,\xi) > 0$. В силу липшицевости функции $h_A(T,\cdot)$ мы можем считать, что разбиение ξ конечное. Зафиксируем его, пусть $\delta = h_A(T,\xi)$. Напомним, что каждому разбиению $\eta \in Z(X,\mu)$ соответствует полуметрика ρ_η. Рассмотрим подмножество $Z_\xi \subset Z(X,\mu)$ всевозможных разбиений типа ξ (то есть составленные из элементов той же меры). Ясно, что если $\{\eta_n\}_n, \{\zeta_n\}_n$ — последовательности разбиений из Z_ξ, то $r(\eta_n, \zeta_n) \to 0$ тогда и только тогда, когда $\|\rho_{\eta_n} - \rho_{\zeta_n}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \to 0$. Выберем $c > 0$, такое что если $\nu_1, \nu_2 \in Z_\xi$ и $r(\nu_1, \nu_2) \geq \frac{\delta}{3}$, то $\|\rho_{\nu_1} - \rho_{\nu_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \geq 9c$.

Пусть $\delta_j = H(T^{a_j}\xi / \bigvee_{i=1}^{j-1} T^{a_i}\xi)$, $\delta_1 = H(T^{a_1\xi}) = H(\xi)$. Тогда $\delta = \overline{\lim\limits_n} \frac{\delta_1+\dots+\delta_n}{n}$. Отметим, что $\delta_i \leq H(T^{a_i}\xi) = H(\xi)$, поэтому в силу определения верхнего предела для любого $N \in \mathbb{N}$ найдется $n > N$, такое что $\frac{\delta_1+\dots+\delta_n}{n} > \frac{2}{3}\delta$, откуда следует, что мощность множества $\tilde{J}_n = \{i \leq n \colon \delta_i \geq \frac{\delta}{3}\}$ не меньше $\frac{\delta}{3H(\xi)}n$. При этом $\delta_i \leq H(T^{a_i}\xi / T^{a_j}\xi) \leq r(T^{a_i}\xi, T^{a_j}\xi)$ при $j < i$, поэтому если $\delta_i \geq \frac{\delta}{3}$, то $\|T^{a_i}\rho_\xi - T^{a_j}\rho_\xi\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \geq 9c$. Таким образом мы нашли подмножество $J_n = \{a_j \colon j \in \tilde{J}_n\} \subset \{1, \dots, a_n\}$ мощности хотя бы $\frac{\delta}{3H(\xi)}n$, такое что $\|T^{j_1}\rho_\xi - T^{j_2}\rho_\xi\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \geq 9c$ при $j_1, j_2 \in J_n$, $j_1 \neq j_2$.

Выберем $\varepsilon < \frac{c}{5}$. Тогда для любого множества $Y \subset X^2$, такого что $\mu^2(Y) \leq 2\varepsilon$, будет выполнено неравенство $2\varepsilon + \int_Y \rho_\xi d\mu^2 < c$. Пусть далее для каждого $n \in \mathbb{N}$ число $k = k(n) \in \mathbb{N}$ таково, что $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^{a_n}\rho_\xi) = \log k$. Применим лемму 11 для полуметрик $\rho_i = T^{i-1}\rho_\xi, i = 1, \dots, a_n$, $\tilde{\rho} = T_{av}^{a_n}\rho_\xi$ (мы можем взять $R = 1$) и найдем подмножество $I_n \subset \{1, \dots, a_n\}$, такое что $|I_n| \geq \frac{a_n}{2}\left(\frac{c}{R+3c}\right)^{k^2}$ и для любых $i_1, i_2 \in I_n$ выполнено неравенство $\|\rho_{i_1} - \rho_{i_2}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \leq 8c$.

Примени лемму 15 к функции $f = \rho \in L^1(X^2, \mu^2)$, числам $N = a_n, C = 8c$ и множествам $I = I_n, J = J_n$ и получим неравенство $|I_n||J_n| \leq 2a_n$, откуда следует $|J_n| \leq 4\left(\frac{R+3c}{c}\right)^{k^2}$. С другой стороны, $|J_n| \geq \frac{\delta}{3H(\xi)}n$, откуда имеем неравенство

$$\left(\frac{R+3c}{c}\right)^{k^2} \geq \frac{\delta}{12H(\xi)}n.$$

Логарифмируя его, получаем

$$k^2 \geq \frac{1}{\log \frac{R+3c}{c}} \left(\log n + \log\left(\frac{\delta}{12H(\xi)}\right)\right).$$

Таким образом, мы получаем оценку

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^{a_n}\rho_\xi) = \log k(n) \geq C_1 \log\log n$$

для некоторого $C_1 > 0$. В соответствии со следствием 7 получаем $\log\log n = O(h_{a_n})$, $n \to \infty$.

$\square$

2.3. Масштабирующая энтропийная последовательность подстановочной динамической системы

В качестве примера продемонстрируем вычисление масштабирующей энтропийной последовательности подстановочной динамической системы постоянной длины. Приведем необходимые сведения из теории подстановочных динамических систем (подробности см., например, в монографии [21]). Стоит отметить, что схожие вопросы обсуждались в работе [16].

2.3.1. Подстановочные динамические системы

Пусть A — некоторое конечное множество. Мы будем называть его алфавитом, а его элементы — буквами. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим набор A^n всевозможных слов длины n из букв алфавита A. Рассмотрим также множество $A^* = \bigsqcup\limits_{n \geq 0} A^n$ всевозможных конечных слов и множество бесконечных в одну сторону слов $A^{\mathbb{N}_0}$, где $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел. На множестве $A^{\mathbb{N}_0}$ стандартным образом задана топология произведения; пространство $A^{\mathbb{N}_0}$ с этой топологией является компактным. Для слова $w \in A^*$ обозначим его длину $|w|$, а символом w_j, $j = 0, \ldots, |w| - 1$, букву алфавита A, стоящую на j-ом месте в слове w (нумерация мест при этом начинается с нуля). Аналогично, если $w \in A^{\mathbb{N}_0}$ — бесконечное слово и $j \geq 0$, то w_j — буква, стоящая на j-ом месте. Если $0 \leq i \leq j < |w|$, то символом $w_{[i,j]}$ обозначается подслово слова w, образованное буквами, стоящими на местах от i до j. Слову $w \in A^*$ сопоставим множество слов $[w] = \{\tilde{w} \in A^{\mathbb{N}_0} \colon \tilde{w}_j = w_j, j < |w|\} \subset A^{\mathbb{N}_0}$, начинающихся с него.

Подстановкой на A называется отображение $\xi\colon A \to A^*$, сопоставляющее каждой букве некоторое конечное слово. Подстановка ξ называется подстановкой постоянной длины, если существует некоторое $q \in \mathbb{N}$, называемое длиной подстановки, такое что $\xi\colon A \to A^q$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь подстановки ξ постоянной длины $q > 1$.

Образом $\xi(w)$ слова $w \in A^*$ называется слово длины $q|w|$, такое что $\xi(w)_{[qj,q(j+1)-1]} = \xi(w_j)$ при $j = 0, \dots, |w|-1$. Аналогично определяется образ бесконечного слова при подстановке. Таким образом подстановка ξ задает отображение из A^n в A^{qn} при каждом n и отображение из $A^{\mathbb{N}_0}$ в $A^{\mathbb{N}_0}$. Степень ξ^k подстановки ξ определяется как композиция отображений. Подстановка ξ называется инъективной, если она инъективна, как отображение из A в A^*.

Подстановка $\zeta\colon B \to B^*$ на алфавите B называется фактором подстановки $\xi\colon A \to A^*$, если существует сюрьективное отображение $\pi\colon A \to B$ (продолженное покоординатно до отображения из A^* в B^*), такое что $\zeta(\pi(\alpha)) = \pi(\xi(\alpha))$ для любого $\alpha \in A$.

В дальнейшем мы будем считать, что для некоторого $\alpha_0 \in A$ выполнено соотношение $\xi(\alpha_0)_0 = \alpha_0$ (этого можно с легкостью добиться, возведя подстановку в степень). В этом случае для каждого $k \geq 0$ слово $\xi^k(\alpha_0)$ является началом слова $\xi^{k+1}(\alpha_0)$, поэтому можно определить бесконечное слово $u = u^\xi = \lim \xi^k(\alpha_0)$, инвариантное относительно подстановки ξ: $\xi(u) = u$. Для $n \geq 1$ символом $\mathrm{V}_n = \mathrm{V}_n^\xi$ обозначим набор слов длины n, которые являются подсловами инвариантного слова u. Для каждой подстановки ξ существует некоторая константа $C > 0$, такая что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|\mathrm{V}_n^\xi| \leq Cn. \tag{2.10}$$

Пусть $T\colon A^{\mathbb{N}_0} \to A^{\mathbb{N}_0}$ — левый сдвиг. Подстановочной динамической системой, отвечающей подстановке ξ, называется пара (X_ξ, T), где $X_\xi = \mathrm{cl}\{T^n u\}$ — замыкание орбиты слова u под действием T в топологии $A^{\mathbb{N}_0}$. Подстановка ξ называется примитивной, если существует некоторое $n \in \mathbb{N}$, такое что для любых $\alpha, \beta \in A$ буква β встречается в слове $\xi^n(\alpha)$. В этом случае топологическая динамическая система (X_ξ, T) является минимальной, то есть в X_ξ не существует нетривиальных собственных T-инвариантных компактных подмножеств. Подстановка ξ называется периодической, если все элементы множества X_ξ являются периодическими относительно T, и апериодической в противном случае. В нашем случае периодичность подстановки ξ с периодом p равносильна периодичности инвариантного слова u^ξ с периодом p, и равносильна тому, что $|X_\xi| = p$.

Если подстановка ξ примитивна, то на топологическом компакте X_ξ существует единственная T-инвариантная борелевская вероятностная мера μ^ξ. Значение этой единственной меры μ^ξ на цилиндре $[w] \subset A^{\mathbb{N}_0}$, $w \in A^*$, совпадает с частотой появления слова w в ξ-инвариантном слове u:

$$\mu^\xi([w]) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \in \{0, \ldots, n-1\} \colon u_{[k,k+|w|-1]} = w\}\right|. \tag{2.11}$$

Таким образом, примитивной подстановке канонически соответствует метрическая динамическая система (X_ξ, μ^ξ, T). Говоря про спектральные свойства подстановки, имеют в виду спектральные свойства именно этой метрической динамической системы. Если подстановка ξ примитивна, то преобразование T на (X_ξ, μ^ξ) является автоморфизмом. Для любого $n \ge 1$ мера μ^ξ естественным образом задает меру μ^ξ_n на конечном множестве V_n равенством $\mu^\xi_n(w) = \mu^\xi([w])$, при этом для любого $w \in \mathrm{V}_n$ выполнено неравенство $\mu^\xi_n(w) > 0$.

Высота $h(\xi)$ подстановки ξ определяется как наибольшее натуральное k, взаимно простое с q, такое что если $u_n = u_0$, то $k|n$. Для любого $m \ge 0$

число $h(\xi)$ есть наибольшее натуральное k, взаимно простое с q, такое что если $u_{n+m} = u_m$, то $k|n$. Если подстановка ξ на алфавите A примитивная инъективная периодическая с периодом p, то $p = |A| = h(\xi)$ и числа p и q взаимно просты (см., например, лемму 5 работы [18]). Если подстановка ζ на некотором алфавите B является фактором подстановки ξ, то $h(\zeta)|h(\xi)$. Кроме того, существует периодическая подстановка ζ с периодом $h(\xi)$, являющаяся фактором подстановки ξ.

Важным свойством подстановки является распознаваемость. Для подстановок постоянной длины q это означает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется число $M \in \mathbb{N}$, такое что если для некоторых $i, j \geq 0$ выполнено равенство $u_{[i,i+M]} = u_{[j,j+M]}$, то $q^n|(i-j)$. Инъективная примитивная апериодическая подстановка постоянной длины является распознаваемой (см., например, [22]).

Для подстановки ξ на алфавите A определим число $\mathrm{c}(\xi) = \min\{|\{\xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\}| \colon k \in \mathbb{N}, i < q^k\}$. Ясно, что $\mathrm{c}(\xi)$ не увеличивается при переходе к фактору. Если ζ — периодическая примитивная подстановка с периодом p на алфавите B, то $\mathrm{c}(\zeta) = |B| = p = h(\zeta)$. Так как у любой подстановки ξ существует инъективный периодический фактор ζ с периодом $p = h(\xi)$, имеем $\mathrm{c}(\xi) \geq h(\xi)$.

Для $w \in A^*$ и $k = 0, \ldots, q-1$ введем обозначение $P_k(w) = \xi(w)_{[k,q|w|-q+k]}$. Слова $P_0(w), \ldots, P_{q-1}(w)$ — все подслова длины $q|w| - q + 1$ слова $\xi(w)$. Формула (2.11), описание меры μ в терминах частоты появления слова в инвариантном слове u, позволяет написать очевидную оценку $\mu([P_k(w)]) \geq \frac{1}{q}\mu([w])$ для любого $k < q$.

Для конечного множества A введем обозначение ρ^A для метрики, заданной равенством $\rho^A(\alpha, \beta) = 1$ при $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$. Если ρ — некоторая полуметрика на множестве A, а $n \in \mathbb{N}$, то символом ρ_n условимся обозначать соответствующую ей нормированную метрику Хемминга на A^n, заданную равенством

$$\rho_n(v,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\rho(v_i,w_i).$$

2.3.2. Вычисление масштабирующей энтропийной последовательности подстановочной динамической системы

Основным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 14. *Пусть ξ — инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A, $|A| > 1$. Тогда последовательность $h_n = 1 + (\mathrm{c}(\xi) - h(\xi))\log n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X_ξ, μ^ξ, T).*

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы 14, сделаем одно замечание, которое является тривиальным следствием неравенства (2.10).

Замечание 6. Пусть $\xi\colon A \to A^q$ — некоторая подстановка, а ρ — некоторая полуметрика на алфавите A. Рассмотрим полуметрику $\tilde\rho$ на $A^{\mathbb{N}_0}$, заданную равенством $\tilde\rho(v,w) = \rho(v_0,w_0)$, и ее конечные усреднения $T^n_{av}\tilde\rho$, $n \in \mathbb{N}$, под действием оператора сдвига T. Тогда существует $C > 0$, такое что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X_\xi, \mu^\xi, T^n_{av}\tilde\rho) \le \log n + C.$$

Доказательство теоремы 14 существенно опирается на следующее понятие.

Определение 22. Пусть $\zeta\colon B \to B^q$ — некоторая подстановка длины q. Полуметрику ρ на алфавите B мы будем называть ζ-инвариантной, если для любых $\alpha,\beta \in B$ выполнено равенство

$$\rho(\alpha,\beta) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\rho(\zeta(\alpha)_i,\zeta(\beta)_i).$$

Лемма 16. *Пусть $\zeta\colon B \to B^q$ — апериодическая инъективная примитивная подстановка. Пусть ρ — ζ-инвариантная метрика на B, а ρ_n — соответствующая ей метрика на B^n. Тогда найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_0 > 0$, такое что для любого $n > n_0$ в метрическом пространстве $(\mathrm{V}^{\zeta}_{q^n+1}, \rho_{q^n+1})$ найдется хотя бы $2q^{n-n_0}$ элементов v^i, таких что $\mu^{\zeta}_{q^n+1}(v^i) \geq \frac{\varepsilon_0}{q^{n-n_0}}$ и $\rho_{q^n+1}(v^i, v^j) \geq \varepsilon_0$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Заменив, если потребуется, метрику ρ на пропорциональную, мы можем считать, что

$$\max\{\rho(\alpha,\beta)\colon \alpha,\beta \in B\} = 1.$$

Пусть

$$\delta_1 = \min\{\rho(\alpha,\beta)\colon \alpha,\beta \in B, \alpha \neq \beta\}.$$

Рассмотрим метрики $d_n = n\rho_n$ на V_n. Из ζ-инвариантности метрики ρ следует, что для любых $v^1, v^2 \in B^n$ выполнено

$$d_{qn}(\zeta(v^1), \zeta(v^2)) = q d_n(v^1, v^2). \tag{2.12}$$

Подстановка ζ — апериодическая инъективная примитивная, поэтому она распознаваема. Пусть $M \in \mathbb{N}$ таково, что если $u^{\zeta}_{[i,i+M-1]} = u^{\zeta}_{[j,j+M-1]}$, то $q|(i-j)$. Пусть n достаточно большое, $v^1, v^2 \in \mathrm{V}_{q^n+1}$ и $k_1, k_2 < q$, $k_1 \neq k_2$. В таком случае слова $P_{k_1}(v^1)$ и $P_{k_2}(v^2)$ встречаются в инвариантном слове u^{ζ} в местах, различающихся по модулю q, поэтому в силу распознаваемости для любого $i \leq q^{n+1} + 1 - M$ слова $P_{k_1}(v^1)_{[i,i+M-1]}$ и $P_{k_2}(v^2)_{[i,i+M-1]}$ различны. Таким образом, мы имеем оценку

$$d_{q^{n+1}+1}(P_{k_1}(v^1), P_{k_2}(v^2)) \geq \frac{q^{n+1}+1-M}{M}\delta_1 > \frac{q^{n+1}}{2M}\delta_1 \tag{2.13}$$

при $q^{n+1} > 2M$. Если $v^1 \neq v^2$ и $k < q$, то в силу (2.12) имеем

$$d_{q^{n+1}+1}(P_k(v^1), P_k(v^2)) \geq d_{q^{n+1}+q}(\zeta(v^1), \zeta(v^2)) - (q-1) = \\ q d_{q^n+1}(v^1, v^2) - (q-1). \tag{2.14}$$

Найдем $\alpha, \beta \in B$, такие что $\rho(\alpha, \beta) = 1$. Возьмем n_0, такое что

$$q^{n_0} > 2M\left(q + \frac{1}{\delta_1}\right). \tag{2.15}$$

Найдем два слова $\tilde{w}^1, \tilde{w}^2 \in \mathrm{V}_{q^{n_0-1}+1}$, такие что $\tilde{w}^1_0 = \alpha$, $\tilde{w}^2_0 = \beta$. Тогда слова $w^1 = P_0(\tilde{w}^1)$ и $w^2 = P_0(\tilde{w}^2)$ начинаются со слов $\zeta(\alpha)$ и $\zeta(\beta)$ соответственно. Следовательно, $d_{q^{n_0}+1}(w^1, w^2) \geq d_q(\zeta(\alpha), \zeta(\beta)) = q$. Возьмем $\delta_2 = \min(\mu([w^1]), \mu([w^2])) > 0$. Зададим последовательность чисел

$$c_n = \delta_1(q-1)q^{n-n_0} + 1. \tag{2.16}$$

По индукции по n докажем, что при $n \geq n_0$ в множестве V_{q^n+1} найдется подмножество G_n, состоящее из $2q^{n-n_0}$ слов, таких что если $v^1, v^2 \in G_n$, то $\mu([v^1]) \geq \frac{\delta_2}{q^{n-n_0}}$, и при $v^1 \neq v^2$ выполнено неравенство $d_{q^n+1}(v^1, v^2) \geq c_n$. Базу индукции, утверждение для $n = n_0$, дают построенные нами слова $w^1, w^2 \in \mathrm{V}_{q^{n_0}+1}$, $G_{n_0} = \{w^1, w^2\}$. Переход осуществляется следующим образом. Пусть утверждение выполнено для n, G_n — множество с указанными свойствами. Определим $G_{n+1} = \{P_k(v) \colon v \in G_n, k < q\}$. Ясно, что $|G_{n+1}| = 2q^{n-n_0}$, $\mu([P_k(v)]) \geq \mu([v])/q \geq \frac{\delta_2}{q^{n+1-n_0}}$ для любого $v \in G_n$ и любого $k < q$. Осталось проверить, что для любых $v^1, v^2 \in G_n$, $k_1, k_2 < q$ если $(v^1, k_1) \neq (v^2, k_2)$, то $d_{q^{n+1}+1}(P_{k_1}(v^1), P_{k_2}(v^2)) \geq c_{n+1}$. В случае $k_1 \neq k_2$ это неравенство следует из неравенств (2.13), (2.15) и равенства (2.16), а в случае $k_1 = k_2$ и $v^1 \neq v^2$ оно следует из неравенства (2.14), предположения индукции и рекуррентного соотношения $c_{n+1} = qc_n - (q-1)$.

Последовательность чисел $\{\frac{c_n}{q^n+1}\}_{n \geq n_0}$ отделена от нуля, поэтому можно найти $\varepsilon_0 > 0$, такое что $\varepsilon_0 < \frac{c_n}{q^n+1}$ при $n \geq n_0$ и $\varepsilon_0 < \delta_2$. Лемма доказана. □

Следствие 11. *Если для апериодической инъективной примитивной подстановки $\zeta \colon B \to B^q$ существует ζ-инвариантная метрика ρ на B, то последовательность $h_n = \log n$ является масштабирующей энтропийной последовательностью динамической системы (X_ζ, μ^ζ, T).*

Доказательство. Воспользуемся леммой 16 и найдем соответствующие n_0 и $\varepsilon_0 > 0$. Ясно, что в таком случае при $n \geq n_0$ имеем

$$\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(\mathrm{V}^{\zeta}_{q^n+1}, \mu^{\zeta}_{q^n+1}, \rho_{q^n+1}) \geq (n - n_0)\log q.$$

С помощью метрики ρ на алфавите B зададим порождающую полуметрику $\tilde{\rho}$ на $B^{\mathbb{N}_0}$ формулой $\tilde{\rho}(v, w) = \rho(v_0, w_0)$. Тогда, очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ и любого n имеем равенство

$$\mathbb{H}_{\varepsilon}(X^{\zeta}, \mu^{\zeta}, T^{q^n+1}_{av}\tilde{\rho}) = \mathbb{H}_{\varepsilon}(\mathrm{V}^{\zeta}_{q^n+1}, \mu^{\zeta}_{q^n+1}, \rho_{q^n+1}),$$

поэтому при $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ имеем

$$\varliminf_{n} \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon}(X^{\zeta}, \mu^{\zeta}, T^{n}_{av}\tilde{\rho})}{h_n} \geq \varliminf_{n} \frac{\mathbb{H}_{\frac{\varepsilon_0}{2}}(X^{\zeta}, \mu^{\zeta}, T^{q^n+1}_{av}\tilde{\rho})}{h_{q^n+1}} > 0,$$

что в точности совпадает с (2.4). Оценка (2.3) уже обсуждалась в замечании 6. Стало быть, $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_{\zeta}, \mu^{\zeta}, T, \tilde{\rho})$. Полуметрика $\tilde{\rho}$ является суммируемой порождающей допустимой, стало быть $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_{\zeta}, \mu^{\zeta}, T)$. $\square$

Оказывается, найти ξ-инвариантную метрику на алфавите A удается не всегда. Простейший пример ξ-инвариантной полуметрики на A можно построить при помощи поднятия. Найдем периодическую подстановку ζ на некотором алфавите B, являющуюся фактором подстановки ξ при некотором отображении π. На алфавите B возьмем произвольную ζ-инвариантную метрику ρ (например, ρ^B) и определим ξ-инвариантную полуметрику $\pi^{-1}[\rho]$ на A формулой $\pi^{-1}[\rho](\alpha, \beta) = \rho(\pi(\alpha), \pi(\beta))$. Построенные таким способом ξ-инвариантные полуметрики будем называть поднятыми. Они в некотором смысле тривиальны. Например, в случае $h(\xi) = 1$ все поднятые полуметрики тождественно равны нулю.

Приведем конструкцию, дающую не столь тривиальный, и в некотором смысле главный пример ξ-инвариантной полуметрики на A.

Определение 23. Назовем две буквы $\alpha, \beta \in A$ существенно различными (относительно подстановки ξ), если для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i \leq q^k - 1$ символы $\xi^k(\alpha)_i$ и $\xi^k(\beta)_i$ различны.

Лемма 17. *Найдутся попарно существенно различные буквы* $\alpha^1, \ldots, \alpha^{\mathrm{c}(\xi)} \in A$.

Доказательство. Выберем $k \in \mathbb{N}$ и $i < q^k$ так, что $\mathrm{c}(\xi) = |\{\xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\}|$. Пусть $\{\xi^k(\alpha)_i \colon \alpha \in A\} = \{\alpha^1, \ldots, \alpha^{\mathrm{c}(\xi)}\}$. Покажем, что все эти буквы попарно существенно различны. Действительно, для любого $\alpha \in A$ найдется $j \leq \mathrm{c}(\xi)$, такое что $\xi^k(\alpha)_i = \alpha^j$, поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $m < q^n$ имеем $\xi^{k+n}(\alpha)_{iq^n+m} = \xi^n(\alpha^j)_m$. Таким образом, количество различных символов вида $\xi^{k+n}(\alpha)_{iq^n+m}, \alpha \in A$, не превосходит $\mathrm{c}(\xi)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m < q^n$. С другой стороны, их количество не может быть меньше $\mathrm{c}(\xi)$ в силу определения $\mathrm{c}(\xi)$. Следовательно, для любых $n \in \mathbb{N}$ и $m < q^n$ все символы $\xi^n(\alpha^j)_m, j \leq \mathrm{c}(\xi)$, попарно различны. Это по определению означает, что буквы $\alpha^j, j \leq \mathrm{c}(\xi)$, попарно существенно различны. Лемма доказана. □

Из определения ясно, что если буквы α и β существенно различны, то для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i < q^k$ буквы $\xi^k(\alpha)_i$ и $\xi^k(\beta)_i$ тоже существенно различны.

Определим последовательность полуметрик r_n на A следующим образом. Возьмем $\mathrm{r}_0 = \rho^A$, а последующие полуметрики определим рекуррентным соотношением

$$\mathrm{r}_{n+1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} \mathrm{r}_n(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i). \tag{2.17}$$

По индукции по n очевидно, что: а) $\mathrm{r}_n \leq 1$; б) $\mathrm{r}_{n+1} \leq \mathrm{r}_n$; в) если $\alpha, \beta \in A$ существенно различны, то $\mathrm{r}_n(\alpha, \beta) = 1$. В силу монотонности и неотрицательности существует предел $\rho^\xi = \lim \mathrm{r}_n$, который, очевидно, является полуметрикой на A.

Определение 24. Построенная полуметрика ρ^ξ на алфавите A называется главной ξ-инвариантной полуметрикой.

Замечание 7. Полуметрика ρ^ξ является ξ-инвариантной, $\rho^\xi(\alpha,\beta) = 1$ для существенно различных $\alpha,\beta \in A$. Кроме того, если ρ — ξ-инвариантная полуметрика на A, то найдется $C > 0$, такое что $\rho \le C\rho^\xi$.

Доказательство. Первые два утверждения очевидны из определения полуметрики ρ^ξ. Докажем последнее. Возьмем $C = \max\rho$. Тогда по индукции по n легко показать, что $\rho \le C\mathrm{r}_n$. Переходя к пределу, получаем требуемое. □

Доказательство теоремы 14. Возьмем метрику $\rho = \rho^A$ на A, соответствующие метрики ρ_n на A^n, а также соответствующую ей порождающую суммируемую допустимую полуметрику $\tilde\rho$ на $A^{\mathbb{N}_0}$, заданную равенством $\tilde\rho(v,w) = \rho(v_0,w_0)$.

Сначала разберем случай $\mathrm{c}(\xi) > h(\xi)$. Пусть ρ^ξ — главная ξ-инвариантная полуметрика на A, а $\tilde\rho^\xi$— полуметрика на $A^{\mathbb{N}_0}$, определенная равенством $\tilde\rho^\xi(v,w) = \rho^\xi(v_0,w_0)$. Покажем, что $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi,\mu^\xi,T,\tilde\rho^\xi)$. Полуметрика ρ^ξ естественным образом задает отношение эквивалентности на A (буквы $\alpha,\beta \in A$ эквивалентны, если $\rho^\xi(\alpha,\beta) = 0$). Пусть $\pi\colon A \to B$ — факторотображение, а d — факторметрика на B. В силу ξ-инвариантности полуметрики ρ^ξ равенство $\zeta(\pi(\alpha)) = \pi(\xi(\alpha))$ корректно определяет подстановку ζ на алфавите B. Подстановка ζ — подстановка длины q, факторподстановка подстановки ξ, наследует от подстановки ξ примитивность. Метрика d на B является ζ-инвариантной, откуда следует инъективность подстановки ζ. Единственная T-инвариантная мера μ^ζ на компактном топологическом пространстве $X_\zeta \subset B^{\mathbb{N}_0}$ является образом меры μ^ξ при отображении π, а ζ-инвариантное слово u^ζ есть образ ξ-инвариантного слова u^ξ.

Заметим, что если $\alpha,\beta \in A$ — существенно различные буквы (относительно ξ), то $d(\pi(\alpha),\pi(\beta)) = \rho^\xi(\alpha,\beta) = 1$ в соответствии с замечанием 7.

Но по лемме 17 в алфавите A можно найти как минимум $\mathrm{c}(\xi)$ попарно существенно различных букв, поэтому $|B| \geq \mathrm{c}(\xi) > h(\xi) \geq h(\zeta)$. Отсюда следует, что подстановка ζ апериодическая. Пусть $\tilde{d}$ — порождающая допустимая суммируемая полуметрика на $B^{\mathbb{N}_0}$, определенная равенством $\tilde{d}(v,w) = d(v_0,w_0)$. Подстановка ζ с ζ-инвариантной метрикой d на алфавите B удовлетворяет условиям следствия 11, поэтому $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\zeta, \mu^\zeta, T, \tilde{d})$. Но по построению для любого $\varepsilon > 0$ и любого n имеем

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi, \mu^\xi, T^n_{av}\tilde{\rho}^\xi) = \mathbb{H}_\varepsilon(X^\zeta, \mu^\zeta, T^n_{av}\tilde{d}),$$

поэтому $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho}^\xi)$.

Отметим, что полуметрика $\tilde{\rho}^\xi$ на $A^{\mathbb{N}_0}$ может быть, вообще говоря, не порождающей. Но имеет место неравенство $\tilde{\rho}^\xi \leq \tilde{\rho}$, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi, \mu^\xi, T^n_{av}\tilde{\rho}) \geq \mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi, \mu^\xi, T^n_{av}\tilde{\rho}^\xi),$$

откуда следует оценка (2.4) для полуметрики $\tilde{\rho}$ и последовательности h_n. Оценка (2.3) следует из замечания 6. Таким образом,

$$\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho}) = \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T).$$

Разберем теперь оставшийся случай, $\mathrm{c}(\xi) = h(\xi)$. В этом случае $h_n = 1$ для любого n. Покажем, что $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi, \mu^\xi, T, \tilde{\rho})$. Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ и $i_0 < q^{k_0}$ так, что $\mathrm{c}(\xi) = |\{\xi^{k_0}(\alpha)_{i_0} \colon \alpha \in A\}|$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $k_0 = 1$ (если это не так, заменим подстановку ξ на ξ^{k_0}).

Пусть $\zeta\colon B \to B^q$ — инъективная периодическая подстановка, являющаяся фактором подстановки ξ, такая что $h(\zeta) = h(\xi)$, а $\pi\colon A \to B$ — соответствующая проекция. Отметим, что если $\alpha, \beta \in A$ таковы, что $\pi(\alpha) \neq \pi(\beta)$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ и $i < q^k$ выполнено $\pi(\xi^k(\alpha)_i) = \zeta^k(\pi(\alpha))_i \neq \zeta^k(\pi(\beta))_i = \pi(\xi^k(\beta)_i)$, поэтому $\xi^k(\alpha)_i \neq \xi^k(\beta)_i$, то есть α и β существенно различны. С другой стороны, $|\{\pi(\alpha)\colon \alpha \in A\}| = |B| = h(\zeta) = h(\xi) = \mathrm{c}(\xi) = |\{\xi(\alpha)_{i_0}\colon \alpha \in A\}|$, поэтому для $\alpha, \beta \in A$ равенство $\xi(\alpha)_{i_0} = \xi(\beta)_{i_0}$ выполнено тогда и только тогда, когда $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$.

Пусть $d = \max\{\rho^\xi(\alpha, \beta)\colon \alpha, \beta \in A, \pi(\alpha) = \pi(\beta)\}$. Пусть $\alpha, \beta \in A$таковы, что $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда для любого $i < q$ выполнено $\pi(\xi(\alpha)_i) = \pi(\xi(\beta)_i)$, поэтому $\rho^\xi(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i) \le d$. Кроме того, $\rho^\xi(\xi(\alpha)_{i_0}, \xi(\beta)_{i_0}) = 0$. Воспользовавшись ξ-инвариантностью полуметрики ρ^ξ, получаем

$$\rho^\xi(\alpha, \beta) = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1} \rho^\xi(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i) = \frac{1}{q}\sum_{i<q, i\ne i_0} \rho^\xi(\xi(\alpha)_i, \xi(\beta)_i) \le \frac{q-1}{q}d.$$

Переходя к супремуму по всем $\alpha, \beta \in A$, таким что $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, получаем неравенство $d \le \frac{q-1}{q}d$, откуда $d = 0$.

Итого, если $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$, то $\rho^\xi(\alpha, \beta) = 0$, а если $\pi(\alpha) \ne \pi(\beta)$, то α и β существенно различны, поэтому по замечанию 7 $\rho^\xi(\alpha, \beta) = 1$. Таким образом, полуметрика ρ^ξ является поднятой с алфавита B при помощи отображения π, $\rho^\xi = \pi^{-1}[\rho^B]$. Напомним, что для $n \in \mathbb{N}$ символом ρ^ξ_n обозначена соответствующая полуметрика на A^n, а символом ρ^B_n — на B^n. Тогда $\rho^\xi_n(v, w) = \rho^B_n(\pi(v), \pi(w))$.

Вспомним, что полуметрика ρ^ξ является пределом последовательности полуметрик r_n, задаваемых равенством $\mathrm{r}_0 = \rho$ и рекуррентной формулой (2.17), из которой следует явное представление

$$\mathrm{r}_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{q^n}\sum_{i=0}^{q^n-1} \rho(\xi^n(\alpha)_i, \xi^n(\beta)_i) = \rho_{q^n}(\xi^n(\alpha), \xi^n(\beta)).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем n_0 настолько большим, что $\mathrm{r}_{n_0} < \rho^\xi + \varepsilon/2$. Зафиксируем любое отображение $\hat\pi\colon B^* \to A^*$, такое что $\pi(\hat\pi(\cdot))$ тождественно на B^*. Покажем, что для $n > 0$ множество $N_n = \{\xi^{n_0}(\hat\pi(\hat v))_{[k, k+q^{n+n_0}]}\colon \hat v \in \mathrm{V}^B_{q^n+1}, k < q^{n_0}\}$ образует ε-сеть в метрическом пространстве $(\mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1}, \rho_{q^{n+n_0}+1})$.

Если $w \in \mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1}$, то найдутся $v \in \mathrm{V}^A_{q^n+1}$ и $k < q^{n_0}$, такие что $w = \xi^{n_0}(v)_{[k, k+q^{n+n_0}]}$. Возьмем $\hat v = \pi(v)$, $v^1 = \hat\pi(\hat v), w^1 = \xi^{n_0}(v^1)_{[k, k+q^{n+n_0}]}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\rho_{q^{n+n_0}+1}(w^1,w) =&\frac{1}{q^{n+n_0}+1}\sum_{i=0}^{q^{n+n_0}}\rho(w^1_i,w_i) \le \\ &\frac{1}{q^{n+n_0}+1}\sum_{i=0}^{q^{n_0}(1+q^n)-1}\rho(\xi^{n_0}(v^1)_i,\xi^{n_0}(v)_i) = \\ &\frac{q^{n_0}}{q^{n+n_0}+1}\sum_{i=0}^{q^n}\mathrm{r}_{n_0}(v^1_i,v_i) < \\ &\frac{q^{n_0}}{q^{n+n_0}+1}\sum_{i=0}^{q^n}\rho^\xi(v^1_i,v_i)+\frac{\varepsilon}{2}\frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1} = \\ &\frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1}\left(\rho^\xi_{q^n+1}(v^1,v)+\frac{\varepsilon}{2}\right) = \\ &\frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1}\left(\rho^B_{q^n+1}(\pi(v^1),\pi(v))+\frac{\varepsilon}{2}\right) = \\ &\frac{q^{n_0}(q^n+1)}{q^{n+n_0}+1}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Осталось лишь заметить, что $|\mathrm{V}^B_{q^n+1}| = |B|$, поэтому

$$\mathbb{H}_\varepsilon(\mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1},\mu^\xi_{q^{n+n_0}+1},\rho_{q^{n+n_0}+1}) \le \log(|N_n|) \le \log(|B|q^{n_0}).$$

Для каждого большого m найдем наименьшее n, такое что $m < q^{n+n_0}+1$. Тогда $q^{n+n_0}+1 < mq$, поэтому $mT^m_{av}\tilde\rho \le (q^{n+n_0}+1)T_{av}^{q^{n+n_0}+1}\tilde\rho < qmT_{av}^{q^{n+n_0}+1}\tilde\rho$, откуда следует оценка (2.3):

$$\begin{aligned}&\mathbb{H}_{q\varepsilon}(X^\xi,\mu^\xi,T^m_{av}\tilde\rho) \le \mathbb{H}_\varepsilon(X^\xi,\mu^\xi,T_{av}^{q^{n+n_0}+1}\tilde\rho) = \\ &\mathbb{H}_\varepsilon(\mathrm{V}^A_{q^{n+n_0}+1},\mu^\xi_{q^{n+n_0}+1},\rho_{q^{n+n_0}+1}) \le \log(|B|q^{n_0}).\end{aligned}$$

Значит, в этом случае также $\{h_n\} \in \mathcal{H}(X_\xi,\mu^\xi,T,\tilde\rho) = \mathcal{H}(X_\xi,\mu^\xi,T)$. □

Из теорем 14 и 11 имеем следствие.

Следствие 12. *Пусть ξ — инъективная примитивная подстановка постоянной длины на алфавите A, $|A| > 1$. Тогда спектр соответствующей ей* *динамической системы* (X_ξ, μ^ξ, T) *чисто точечный тогда и только тогда, когда* $c(\xi) = h(\xi)$.

Отметим, что похожий критерий впервые был получен в работах Камае (см. [18]) и Деккинга (см. [19]), однако там он сформулирован несколько иначе. Отличие заключается в том, что для подстановок, высота которых больше единицы, параметр $c(\xi)$ определяется не так, как у нас, а путем рассмотрения некоторой модифицированной подстановки. Для случая $h(\xi) = 1$ результат следствия 12 совпадает с их критерием — спектр чисто точечный тогда и только тогда, когда $c(\xi) = 1$. А для случая $h(\xi) > 1$ критерий 12, в отличие от их критерия, не требует перехода к модифицированной подстановке.

Заключение.

Приведем коротко список основных результатов работы. Изучено пространство допустимых полуметрик на фиксированном стандартном вероятностном пространстве. На основе его геометрических свойств получен результат о независимости масштабирующей энтропийной последовательности от выбора полуметрики (в классе суммируемых допустимых порождающих полуметрик). Установлена связь масштабирующей последовательности с энтропией Колмогорова и Кушниренко. Получен критерий чистой точечности спектра в терминах масштабирующей последовательности. Вычислена масштабирующая последовательность подстановочных динамических систем, отвечающих подстановкам постоянной длины, в качестве следствия передоказан классический критерий чистой точечности спектра для них.

Приведем несколько вопросов, связанных с тематикой проведенного исследования, ответы на которые автору не известны.

Пожалуй, самым интригующим вопросом является вопрос существования масштабирующей энтропийной последовательности. Для любого ли автоморфизма T стандартного вероятностного пространства (X, μ) существует некоторая последовательность, являющаяся масштабирующей? Или же можно привести пример автоморфизма T и допустимой метрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$, для которых при разных $\varepsilon > 0$ рост последовательностей $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T^n_{av}\rho)$ будет совершенно разным? Автору пока не удалось обнаружить такой пример, равно как и доказать существование масштабирующей последовательности в общем случае.

Следующий вопрос касается введения числового или хотя бы функционального инварианта динамической системы (X, μ, T), основанного на масштабирующей последовательности. Возможно ли тем или иным разумным способом, основываясь на масштабирующей последовательности h_n, определить некоторое число или функцию от ε, более точно характеризующую рост последовательности $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n\rho)$, которая бы не зависела от полуметрики ρ, тем самым являясь метрическим инвариантом?

Кроме того, возникает естественный вопрос о возможных асимптотиках роста масштабирующих энтропийных последовательностей. В работе приведены примеры роста $h_n \sim 1$, $h_n \sim \log n$, $h_n \sim n$. Исследования по масштабированной энтропии фильтраций сигма-алгебр, проведенные, среди прочего, в работе [13], позволяют надеяться на широкий спектр возможных скоростей роста масштабирующих последовательностей динамических систем.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю, Федору Владимировичу Петрову, за постановку задач, помощь в работе и непременную поддержку в любых трудных ситуациях. Автор также благодарен Анатолию Моисеевичу Вершику за постановку задач, многочисленные полезные обсуждения, комментарии и советы.

Автор благодарен коллективам математической лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ и ПОМИ РАН за поддержку и создание невероятной атмосферы для работы и для написания диссертации, в частности.

Работа автора поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ 11.G34.31.0026; ОАО “Газпром Нефть”; грантом Президента РФ для молодых исследователей МК-6133.2013.1; грантами РФФИ (номер 13-01-12422 офи_m2, номер 14-01-00373_А); грантом СПбГУ 6.38.223.2014.

Список публикаций диссертанта по теме

1. Затицкий П. Б., Петров Ф. В. Об исправлении метрик // Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 390, № 0. С. 201–209.

2. Vershik A. M., Zatitskiy P. B., Petrov F. V. Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces // Central European Journal of Mathematics. 2013. Vol. 11, no. 3. P. 379–400.

3. Затицкий П. Б. О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48, № 4. С. в печати. URL: http://arxiv.org/abs/1409.6134.

Список литературы

4. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. С. 861–864.

5. Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 754–755.

6. Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры // Матем. сб. 1949. Т. 25(67). С. 107–150.

7. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. С. 768–771.

8. Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22, № 5 (137). С. 3–56.

9. Adler R. L., Konheim A. G., McAndrew M. H. Topological entropy // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 114. P. 309–319.

10. Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 153. P. 401–414.

11. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 324–366.

12. Вершик А. М. Динамическая теория роста в группах: энтропия, границы, примеры // УМН. 2000. Т. 55, № 4(334). С. 59–128. URL: http://dx.doi.org/10.1070/rm2000v055n04ABEH000314.

13. Вершик А. М., Горбульский, А. Д. Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр // ТВП. 2007. Т. 52, № 3. С. 446–467. URL: http://dx.doi.org/10.1137/S0040585X97983122.

14. Vershik A. M. Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants // Markov Process. Related Fields. 2010. Vol. 16, no. 1. P. 169–184.

15. Вершик А. М. Масштабированная энтропия и автоморфизмы с чисто точечным спектром // Алгебра и Анализ. 2011. Т. 23, № 1. С. 111–135. URL: http://dx.doi.org/10.1090/S1061-0022-2011-01187-2.

16. Ferenczi S. Measure-theoretic complexity of ergodic systems // Israel J. Math. 1997. Vol. 100. P. 189–207. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF02773640.

17. Katok A., Thouvenot J.-P. Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 1997. Vol. 33, no. 3. P. 323–338. URL: http://dx.doi.org/10.1016/S0246-0203(97)80094-5.

18. Kamae T. A topological invariant of substitution minimal sets // J. Math. Soc. Japan. 1972. Vol. 24. P. 285–306.

19. Dekking F. M. The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete. 1977/78. Vol. 41, no. 3. P. 221–239.

20. Кушниренко А. Г. О метрических инвариантах типа энтропии // Успехи математических наук. 1967. Т. 22, № 5 (137. С. 57–65.

21. Queffélec M. Substitution dynamical systems—spectral analysis. Second edition. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Vol. 1294 of Lecture Notes in Mathemat-

ics. P. xvi+351. ISBN: 978-3-642-11211-9. URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-11212-6.

22. Martin J. C. Substitution minimal flows // Amer. J. Math. 1971. Vol. 93. P. 503–526.