На правах рукописи

Лебедева Елена Александровна

Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2017

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный консультант:
СКОПИНА Мария Александровна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Официальные оппоненты:
ГОРБАЧЕВ Дмитрий Викторович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»,
ЛУКОМСКИЙ Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»,
ЧЕРНЫХ Николай Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник ФГБУН «Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук».

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Защита состоится ____________________ г. в __________ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН» по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27, к.311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН», http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан ____________________

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физ.-мат. наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Всплеском (или всплеск-функцией) называют два близких, но не эквивалентных объекта. Во-первых, всплеском называют функцию ψ, используемую в качестве ядра интегрального преобразования (непрерывное всплеск-преобразование (НВП))

$$W_\psi f(a,\,b)=\frac{1}{|a|^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,dx,\quad a,b\in\mathbb{R},\quad a\neq 0.$$

При этом свойства, характеризующие всплеск-функцию в этом контексте (нулевое среднее и быстрое убывание на бесконечности), содержатся в условии допустимости

$$C_\psi:=\int_{\mathbb{R}}\frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\,d\omega<\infty.$$

При выполнении последнего неравенства справедлива формула обращения

$$f(x)=\frac{1}{C_\psi}\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a,\,b)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{da\,db}{|a|^{5/2}},\quad a,b\in\mathbb{R},\quad a\neq 0.$$

Во-вторых, всплеском (или всплеск-функцией) называют функцию ψ, двоичные сжатия и целочисленные сдвиги которой

$$\psi_{j,k}(x):=2^{j/2}\psi(2^jx-k),\quad j,k\in\mathbb{Z},$$

образуют какую-либо систему представления (базис или фрейм) в некотором функциональном пространстве (первоначально, в $L_2(\mathbb{R})$). Тогда говорят, что определено дискретное всплеск-преобразование. Более общее определение приводит к нестационарным системам всплесков, где исходной является не одна функция ψ, а последовательность ψ_j^N, $j\in\mathbb{Z}$, и вся система порождается только сдвигами функций этой последовательности

$$\psi_{j,k}^N(x):=\psi_j^N(x-2^{-j}k),\quad j,k\in\mathbb{Z}.$$

Ясно, что функция, порождающая дискретное всплеск-преобразование, будет порождать и непрерывное, но не наоборот. Так, если функция ψ порождает фрейм всплесков, то $C_\psi<\infty$. В то же время, при $a=2^{-j}$, $b=2^{-j}k$, $j,k\in\mathbb{Z}$, формула непрерывного всплеск-преобразования служит для расчета коэффициентов разложения по системе $\{\psi_{j,k}\}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, но без дополнительных требований на функцию ψ нельзя утверждать даже линейную независимость этой системы.

Одно из характерных свойств всплеск-фунции – ее хорошая локализованность по времени (пространству) и частоте. Многие классические семейства этим свойством обладают, то есть и сами всплеск-функции и их преобразования Фурье быстро убывают на бесконечности.

Частотно-временную локализованность функции пространства $L_2(\mathbb{R})$ измеряют с помощью константы неопределенности (КН) Гейзенберга, предложенной в 1927 году В. Гейзенбергом и Э. Шредингером. КН характеризует локализованность функции во временной (множитель $\Delta(\psi)$) и в частотной (множитель $\Delta(\widehat{\psi})$) областях. Чем меньше каждый из данных множителей, тем лучше функция локализована в соответствующей области. Так, для системы Хаара $\Delta(\psi) = \sqrt{5/6}$, $\Delta(\widehat{\psi}) = \infty$, поэтому система Хаара лучше локализована по времени, чем по частоте. Для периодических функций КН была предложена Э. Брейтенбергером в 1985 году, исходя из квантово-механических представлений об угловых наблюдаемых (angle observables). Обе КН ограничены снизу положительной постоянной, этот факт лежит в основе принципа неопределенности. Известен общий операторный подход, в котором принцип неопределенности является следствием некоммутативности некоторых пар самосопряженных операторов гильбертова пространства. КН определены также для многих локально компактных групп. Этим темам посвящены работы В. П. Хавина, Б. Ёрикке, Г. Б. Фолланда, А. Ситарама, Дж. Ф. Прайса, а также написанные ими монографии и обзоры, содержащие обширную библиографию. В работах Г. Баттла, Р. Балана, С. Дальке, П. Мааса, Д. Л. Донохо, Т. Гудмана, Ч. Мичелли, К. Зайлих получены уточнения границ КН для различных пространств.

Еще одним преимуществом базисов всплесков является их безусловность. Так, базисы всплесков дали первые примеры безусловных базисов для некоторых функциональных пространств. Для широкого класса всплеск-функций базисы всплесков в $L_2(\mathbb{R})$ являются и безусловными базисами в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Этой тематике посвящены работы И. Мейера, Г. Грипенберга, П. Войташчика, И. Я. Новикова. Для приложений безусловная сходимость разложений важна, потому что, пренебрегая малыми слагаемыми, можно не заботиться об их номерах: оставшаяся сумма будет хорошо приближать исходную функцию.

НВП является одним из мощных современных инструментов анализа в различных областях науки, связанных с изучением нестационарных сигналов, так как оно позволяет получить детализированное частотно-временное разложение нестационарного сигнала (С. Малла, П. Эддисон, В. Келлер, М. Унзер). В частности, НВП используется в задачах квантовой механики, поскольку всплески дают удобный метод для представления когерентных состояний (А. Мужикян, М. Тотонж), а также в задачах нейродинамики (А. Павлов, А. Храмов, А. Короновский), где импульсы (спайки), форму которых можно интерпретировать как всплеск-функции, являются типичным видом регистрируемой активности.

Данная работа посвящена изучению некоторых характерных для всплеск-преобразований свойств, таких как частотно-временная локализация, безусловная сходимость и кратномасштабная структура разложений по системам всплесков, обратимость, и построению новых примеров объектов (системы всплесков, КН для функций, определенных на группе Кантора, альтернативная формула обращения НВП), имеющих некоторые дополнительные свойства.

Цели работы. Исследование характерных свойств всплесков, а именно, построение хорошо локализованных базисов и фреймов всплесков на прямой и периодических всплесков; нахождение всплеск-функции Мейера с наименьшей КН Гейзенберга; уточнение нижней границы КН Брейтенбергера на классах периодических последовательностей; введение характеристики для локализованности функций, определенных на группе Кантора; изучение связи между нестационарными и периодическими системами всплесков; разработка методов решения дифференциальных уравнений, содержащих классическую и модифицированную производные Гиббса; решение матричной проблемы продолжения для фреймов всплесков, определенных на группе Виленкина; достаточные условия безусловной сходимости разложений по двойственным фреймам всплесков; альтернативная формула для обращения НВП, не требующая выполнения условия допустимости.

Методика исследования. Основными методами исследования являются методы математического анализа, теории всплесков, теории функций и вариационного исчисления, а также методы, разработанные автором работы.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Основные результаты работы состоят в следующем.

1.Решена задача Ч. Чуи 1996 года о существовании семейства ортонормированных базисов всплесков, КН (константы неопределенности) которых остаются ограниченными с ростом гладкости всплеск-функций. Построенные всплеск-функции (квазисплайн всплески) экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности, их преобразования Фурье имеют поведение $O(\omega^{-l})$, $\omega \to \infty$, где l – параметр семейства. КН этих функций стремятся к КН всплеск-функций Мейера, использованных при построении. Конструкция основана на линейных методах суммирования тригонометрических рядов Фурье. Широкий класс линейных методов удовлетворяет требованиям, предъявляемым конструкцией. В частности, к этому классу относятся средние Фейера, Валле-Пуссена, Рогозинского, Абеля–Пуассона, монотонные средние Валле-Пуссена.

2. Найдена всплеск-функция Мейера, имеющая наименьшую возможную КН Гейзенберга. Минимизация КН сведена к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. Поскольку его аналитическое решение неизвестно, то построена последовательность всплеск-функций Мейера, определяемых в явном виде и равномерно приближающих экстремальную всплеск-функцию Мейера.

3. Построено семейство фреймов Парсеваля периодических всплесков, у которых масштабирующая последовательность имеет асимптотически минимальные КН, а всплесковая последовательность имеет наименьшие известные на текущий момент КН. Найден класс последовательностей периодических функций, в котором построенная всплесковая последовательность имеет асимптотически минимальные КН. Таким образом, для случая фреймов Парсеваля и масштабирующих последовательностей положительно решен вопрос, поставленный Ю. Престином, Э. Куаком в 1999 году, о существовании таких систем. Для всплесковых последовательностей вопрос решен положительно внутри класса.

4. Разработан метод построения систем нестационарных всплесков, периодизация которых совпадает с исходной системой периодических всплесков, при этом нестационарные маски могут быть выбраны произвольно гладкими. В терминах масок периодических всплесков получены достаточные условия для согласованности локализаций построенной нестационарной системы $\{\psi^N_{j,k}\}$ и исходной периодической $\{\psi^P_{j,k}\}$. Под согласованностью понимается равенство $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi^P_j) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi^N_j)$, в котором UC_H и UC_B – КН Гейзенберга и Брейтенбергера соответственно.

5. Введено понятие КН для функций, заданных на группе Кантора, доказано существование принципа неопределенности для этой КН, вычислены значения КН для некоторых классических всплеск-функций (всплесков Лэнга), численно найдены хорошо локализованные фреймы всплесков.

6. Разработан метод решения дифференциальных уравнений, в которых пространственная переменная неизвестной функции принадлежит группе Кантора, а временная действительна, в качестве производной выступает классическая и модифицированная производные Гиббса. Метод базируется на представлении распределений на группе Кантора в виде формальных рядов по системам Уолша и Хаара. Решения найдены в классе распределений, исследованы условия, при которых решения регулярны, непрерывны и суммируемы с квадратом.

7. Дано точное описание всех полиномов Уолша, порождающих жесткие фреймы всплесков в пространстве $L_2(G)$, где G – группа Виленкина. Найдены соответствующие маски всплесков, то есть решена проблема матричного продолжения, и дано точное описание всех решений этой проблемы.

8. Получены достаточные условия для безусловной сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков.

9. Найдена альтернативная формула обращения НВП, которая применима даже в случае нарушения условия допустимости $C_\psi < \infty$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования систем всплесков и НВП, в частности для изучения свойств локализованности систем, безусловной сходимости разложений, развития теории нестационарных всплесков, а также для применения НВП к различным прикладным задачам.

Аппробация работы. Результаты данной работы докладывались на конференциях: Воронежская зимняя математическая школа (2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017), Саратовская зимняя математическая школа (2008, 2010, 2014, 2016), международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения" (Абрау Дюрсо, 2008, 2012), "Wavelets and Applications" (Санкт-Петербург, Россия, 2012, 2015), "Recent Progress in Wavelet Analysis and Frame Theory" (Бремен, Германия, 2006), "From Abstract to Computational Harmonic Analysis" (Штробль, Австрия, 2011), "International Conference in Modern Analysis" (Донецк, Украина, 2011), "Harmonic Analysis and Approximation" (Цахкадзор, Армения, 2011, 2015), "Constructive Theory of Functions" (Созополь, Болгария, 2013), "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM)" (Родос, Греция, 2013), "Dyadic Analysis and Related Fields with Applications" (Ньиредьхаза, Венгрия, 2014), International Congress of Mathematicians (Сеул, Южная Корея, 2014), 15th International Conference in Approximation Theory (Сан Антонио, США, 2016), "Approximation Methods and Data Analysis" (Хасенвинкель, Германия, 2016);
на семинарах: по конструктивной теории функций в СПбГУ (рук. проф. М. А. Скопина), по теории операторов и теории функций в ПОМИ (рук. проф. В. П. Хавин, акад. С. В. Кисляков), по теории функций действительного переменного в МГУ (рук. акад. Б. С. Кашин), в Орегонском университете (рук. проф. М. Боуник), в университете г. Любек (рук. проф. Ю. Престин).

Работа поддержана грантом DAAD по программе "Михаил Ломоносов" (2009) и грантами президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (2010, 2012).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1]-[15], список которых приведен в конце автореферата. Все работы опубликованы в журналах из списка ВАК (5 статей в российских журналах и 10 статей в ведущих зарубежных журналах). Из совместных работ [5]-[7], [11]-[15] в диссертацию включены только результаты автора.

Структура и объем работы. Диссертация объемом 215 страниц состоит из списка обозначений и сокращений, введения, девяти глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего 124 источника. Изучению свойств систем всплесков (дискретных всплеск-преобразований) посвящены главы 1-8, причем в главе 4 рассматриваются нестационарные системы. В главе 9 исследуется НВП. Для удобства чтения каждая глава снабжена собственным введением.

Основное содержание работы.

В главе 1 решена задача Ч. Чуи 1996 года о существовании семейства ортонормированных базисов всплесков, КН которых остаются ограниченными с ростом гладкости всплеск-функций.

КН Гейзенберга функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ называется функционал $UC_H(f) := \Delta(f)\Delta(\widehat{f})$, где

$$\Delta^2(f) := \frac{1}{\|f\|^2}\int_{\mathbb{R}}(t-c(f))^2|f(t)|^2\,dt, \quad c(f) := \frac{1}{\|f\|^2}\int_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2\,dt. \tag{1}$$

Приведем схему построения всплеск-функции Мейера. Пусть $\theta(\omega)$ – нечетная, непрерывно дифференцируемая функция, равная $\pi/4$ при $\omega > \pi/3$. Пусть ω_0 – параметр, изменяющийся в промежутке $\pi/3 \le \omega_0 < \pi/2$, $\omega_1 := \pi - \omega_0$. В главе 1 предполагается, что θ – неубывающая, дважды непрерывно дифференцируемая функция, а в главе 2 предполагается только, что $\omega_0 = \pi/3$. Масштабирующая функция Мейера φ^M определяется так:

$$\widehat{\varphi^M}(\omega) := \begin{cases} 1, & |\omega| \le 2\omega_0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\left(\frac{\pi}{3(\pi-2\omega_0)}(|\omega|-\pi)\right)\right), & 2\omega_0 < |\omega| \le 2\pi - 2\omega_0, \\ 0, & |\omega| > 2\pi - 2\omega_0. \end{cases} \tag{2}$$

Конструкция нового семейства, названного квазисплайн всплесками, основана на линейных методах суммирования тригонометрических рядов Фурье. Пусть для ряда Фурье $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$ последовательность $(\lambda_{n,k})$, $k = 1,\dots n$, $n \in \mathbb{N}$, определяет линейный метод суммирования

$$u_n(f,\omega) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}(a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) U_n(x,\omega)\,dx,$$

где $U_n(x,\omega) := 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} \cos k(x-\omega)$ и a_n, b_n – коэффициенты Фурье.

Определим неортогональную маску квазисплайн всплеска как 2π-периодический тригонометрический полином

$$m_l(\omega) := \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} \frac{u_{n(l)}(m_l^M,\omega)}{u_{n(l)}(m_l^M,0)}, \tag{3}$$

где

$$m_l^M(\omega) := \frac{m^M(\omega)}{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l}},\ l\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

m^M – фиксированная маска Мейера и тригонометрический полином $u_{n(l)}(m_l^M,\cdot)$ получен фиксированным линейным методом суммирования, примененным к функции m_l^M.

Так как m_l – тригонометрический полином, и $m_l(0)=1$, то бесконечное произведение $\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$ сходится абсолютно и равномерно на любом замкнутом отрезке. (Мы считаем бесконечное произведение сходящимся и в том случае, когда оно равно нулю.) Функция m_l является маской для неортогональной масштабирующей функции φ_l, где преобразование Фурье φ_l определяется так:

$$\widehat{\varphi}_l(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right). \tag{5}$$

Функции $\varphi_l(\cdot+k)$, $k\in\mathbb{Z}$, образуют систему Рисса, это следует из неравенства $A\le\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)|^2\le B$, которое проверяется при доказательстве основной теоремы. Доказывается, что ортогонализующий множитель

$$\Phi_l(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)|^2 \tag{6}$$

корректно определен и строго положителен. Далее по общей схеме кратномасштабного анализа определяется преобразование Фурье ортогональной масштабирующей функции

$$\widehat{\varphi_l^{\perp}}(\omega) := \widehat{\varphi}_l(\omega)\Phi_l^{-0.5}(\omega), \tag{7}$$

ортогональная маска

$$m_l^{\perp}(\omega) := m_l(\omega)\Phi_l^{0.5}(\omega)\Phi_l^{-0.5}(2\omega) \tag{8}$$

и преобразование Фурье всплеск-функции

$$\widehat{\psi_l^{\perp}}(\omega) := e^{\frac{-i\omega}{2}}\overline{m_l^{\perp}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi_l^{\perp}}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{9}$$

Определение 1. *Под* ***квазисплайн всплеск-функцией*** *мы понимаем функцию $\psi_l^\perp$, преобразование Фурье которой $\widehat{\psi_l^\perp}$ определено в (9), и неортогональная маска определена в (3).*

В следующей теореме доказываются основные свойства семейства квазисплайн всплесков

Теорема 1. *Пусть существует последовательность $n(l)$, $l \in \mathbb{N}$, такая что*

$$\|u_{n(l)}(m_l^M, \cdot) - m_l^M\|_C =: \alpha(l) = o(l^{-1}) \text{ при } l \to \infty, \tag{10}$$

$$\|u_{n(l)}((m_l^M)', \cdot) - (m_l^M)'\|_C =: \gamma(l) = o(1) \text{ при } l \to \infty, \tag{11}$$

$$u_{n(l)}(m_l^M, \pi) \neq 0. \tag{12}$$

Пусть $\psi_l^\perp$ ($\varphi_l^\perp$) – квазисплайн всплеск-функции (масштабирующие функции), определенные по формулам (3)-(9). Тогда

1. *функции $\varphi_l^\perp$ и $\psi_l^\perp$ экспоненциально убывают на бесконечности;*
2. *показатели Гельдера $\alpha_{\varphi_l^\perp}$ и $\alpha_{\psi_l^\perp}$ этих функций удовлетворяют неравенствам*
$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1 + \alpha(l)/\|m_l^M\|_C}\right) \le \alpha_{\varphi_l^\perp} \le 2l,$$
$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1 + \alpha(l)/\|m_l^M\|_C}\right) \le \alpha_{\psi_l^\perp} \le 2l;$$
3. *константы неопределенности (1) квазисплайн масштабирующих функций $\varphi_l^\perp$ и всплеск-функций $\psi_l^\perp$ стремятся к константам неопределенности масштабирующих функций φ^M и всплеск-функций Мейера ψ^M*
$$|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\varphi^M})| = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$
$$|\Delta^2(\varphi_l^\perp) - \Delta^2(\varphi^M)| = O\left(\max\{\mu(l),\, l(32\pi^2 e^{2\omega_0}/27)^{-l+2\log_2\frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$
$$|\Delta^2(\widehat{\psi_l^\perp} - \Delta^2(\widehat{\psi^M})| = O\left(\max\{\mu(l),\, l(32\pi^2 e^{2\omega_0}/27)^{-l+2\log_2\frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\psi_l^{\perp}) - \Delta^2(\psi^M)| = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right)$$

при $l \to \infty$, где $\mu(l) := l\alpha(l) + \gamma(l)$.

Условия (10)–(12) определяют очень широкий класс линейных методов суммирования. При этом (12) необходимо только для более точного определения показателя Гельдера, его невыполнение не ухудшает гладкость и не меняет свойств локализованности. Для средних Валле-Пуссена (12) проверено в [4].

Лемма 1. *Если для любой $f \in C(\mathbb{T})$ верна оценка*

$$\|u_{n(l)}(f, \cdot) - f\|_C \leq A\, \omega(f,\, (n(l))^{-\nu}),$$

где $\omega(f, \cdot)$ – модуль непрерывности, $\nu > 0$, A – абсолютная константа, то (10) и (11) выполняются.

Условие из леммы 1 выполнено для многих классических средних, например, средних Фейера, Валле-Пуссена, Рогозинского, Абеля–Пуассона, монотонных средних Валле-Пуссена.

В главе 2 изучается частотно-временная локализованность семейства всплеск-функций Мейера. В параграфе 2.1 найдена система всплесков Мейера, имеющая наименьшую возможную КН Гейзенберга. Минимизация КН сведена к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. В 2007 году автором получено следующее выражение для квадрата КН Гейзенберга, вычисленного для всплеск-функции Мейера

$$J(x) \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin x(t)\,dt\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x'(t)\right)^2 dt\,, \tag{13}$$

где $x(t) = 2\theta(t)$, и функцию x можно выбрать из множества

$$x \in W_2^1\left[0;\, \frac{\pi}{3}\right], \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}. \tag{14}$$

Основной результат §2.1 сформулирован в следующей теореме

Теорема 2. *Существует функция $x(t)$, доставляющая абсолютный минимум функционала J при условиях (14). Она является аналитической возрастающей вогнутой функцией на отрезке $\left[0;\, \frac{\pi}{3}\right]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$x''(t) \ = -q\, t\, \cos x(t) \tag{15}$$

при некотором значении параметра $q \geq 0$.

Доказательство следует из двух лемм. Обозначим

$$G(x) := \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x'(t)\right)^2 dt,\ \ F(x) := -\int_0^{\frac{\pi}{3}} t \sin x(t)\, dt,$$

$$M_a^0 := \left\{ x \in W_2^1\left[0;\, \frac{\pi}{3}\right] \Big|\ G(x) = a,\ x(0) = 0,\ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Лемма 2. *Если при некотором $q \geq 0$ функция $\overline{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (15) и граничным условиям $\overline{x}(0) = 0$, $\overline{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$, то она доставляет абсолютный минимум в вариационной задаче*

$$F(x) \to \min \quad x \in M_a^0, \tag{16}$$

где $a = G(\overline{x})$, причем данная точка минимума единственна.

В. Ю. Протасовым доказана следующая

Лемма 3. *При любом $q \geq 0$ уравнение (15) имеет единственное решение $x(t)$, такое что $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$. Это решение является аналитической возрастающей вогнутой функцией, непрерывно зависящей от параметра q.*

При $q \to +0$ имеем $G(x) \to \frac{3\pi}{4}$, а при $q \to \infty$ имеем $G(x) \to \infty$. Для любого $a \geq \frac{3\pi}{4}$ существует единственное значение параметра $q \geq 0$, при котором соответствующее решение уравнения (15) удовлетворяет равенству $G(x) = a$.

Минимальное значение КН для всплеск-функций Мейера с точностью $0,001$ равно $2,622$ и достигается при $q = 0,676$.

Аналитическое решение уравнения (15) не известно. В параграфе 2.2 построено приближенное решение данного уравнения. Рассмотрим сплайны первой степени f_n, интерполирующие функцию sin на равномерном разбиении отрезка $[0;\, \pi/2]$ с шагом $h = \pi(2n)^{-1}$ и узлами $\tau_k = kh$, $k = \overline{0, n}$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (d_k(t - \tau_k) + \sin(\tau_k)) \mathbb{1}_{[\tau_{k-1};\, \tau_k]}(t), \tag{17}$$

где $d_k = (\sin \tau_k - \sin \tau_{k-1})/h$ и $\mathbb{1}_{[a;\, b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a;\, b]$. Рассмотрим последовательность задач:

$$H_n(x) = \int_0^{\pi/3} (-t\, f_n(x(t)))\, dt \to \min, \quad x \in M_a^0. \tag{18}$$

Теорема 3. *Выполняется:*

1. *для каждого n существует единственная функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи (18); функция $\tilde{x}_n(t)$ является решением дифференциального уравнения $x'' = -p_n\, t\, f_n'(x)$ и имеет вид*

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{r=1}^{n} \left(-\frac{p_n d_r t^3}{6} + C_r t + D_r \right) \cdot \mathbb{1}_{[t_{r-1};\, t_r]}(t),$$

где параметры C_r, D_r, t_r определяются из условий $\tilde{x}_n(t_r) = \tau_r$, $t_r < t_{r+1}$, $r = \overline{0,\, n}$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$, $\tilde{x}_n \in C^1[0;\, \pi/3]$;

2. *последовательность $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ является минимизирующей для задачи (16);*

3. *имеет место сходимость $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, где $\tilde{x}$ – решение задачи (16), доставляющее абсолютный минимум функционала (13) при условиях (14);*

4. *имеет место сходимость $\|\widetilde{\psi^M}_n - \widetilde{\psi^M}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, где $\widetilde{\psi^M}_n$ и $\widetilde{\psi^M}$ – всплеск-функции Мейера, построенные по вспомогательным функциям $\tilde{x}_n = 2\tilde{\theta}_n$ и $\tilde{x} = 2\tilde{\theta}$ соответственно.*

В главе 3 мы изучаем локализованность систем периодических всплесков. КН Брейтербергера (или периодической КН) функции $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k \cdot} \in L_2(0,\, 1)$ называется функционал

$$UC_B(\{c_k\}) := UC_B(f) := \sqrt{\mathrm{var}_\mathrm{A}(f) \mathrm{var}_\mathrm{F}(f)},$$

где величина

$$\mathrm{var_A}(f) := \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2\right)^2}{\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_{k-1}\bar{c}_k\right|^2}-1\right) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\|f\|^4}{|\tau(f)|^2}-1\right)$$

называется угловой вариацией функции f, величина

$$\mathrm{var_F}(f) := \frac{4\pi^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^2|c_k|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2} - \frac{4\pi^2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}k|c_k|^2\right)^2}{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2\right)^2} = \frac{\|f'\|^2}{\|f\|^2} - \frac{(if',\, f)^2}{\|f\|^4}$$

называется частотной вариацией функции f, а величина

$$\tau(f) := \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-1}\overline{c_k}$$

называется первым тригонометрическим моментом функции f.

В параграфе 3.2 построено семейство фреймов Парсеваля периодических всплесков с наименьшими возможными КН для масштабирующей последовательности и наименьшими известными на сегодняшний день КН для всплесковой последовательности.

Теорема 4. *Существует семейство всплесковых последовательностей* $\Psi_a := \{(\psi_j^a)_{j=0}^{\infty} : a > 1\}$, *порожденных масштабирующими последовательностями* $(\varphi_j^a)_{j=0}^{\infty}$, *такое что для любого фиксированного* $a > 1$ *система* $\{\varphi_0^a\} \cup \{\psi_{j,k}^a : j = 0, 1, \dots,\ k = 0, \dots, 2^j - 1\}$, *где* $\psi_{j,k}^a(x) := \psi_j^a(x - 2^{-j}k)$, *образует фрейм Парсеваля в* $L_2(0,\, 1)$ *и*

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \tag{19}$$

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{3}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Семейство Ψ_a *строится следующим образом. Положим* $\varphi_0^a = 1$. *Определим последовательность* $\nu_k^{j,a}$ *так:* $\nu_0^{1,a} = \nu_1^{1,a} = \sqrt{1/2}$ *и*

$$\nu_k^{j,a} := \begin{cases} \exp\left(-\frac{k^2+a^2}{j(j-1)a}\right), & k = -2^{j-2}+1, \dots, 2^{j-2}, \\ \sqrt{1-\exp\left(-\frac{2((k-2^{j-1})^2+a^2)}{j(j-1)a}\right)}, & k = 2^{j-2}+1, \dots, 3\times 2^{j-2}, \end{cases} \tag{21}$$

и продолжена 2^j-периодически по k. Далее определим $\widehat{\xi}_j^a(k) := \prod_{r=j+1}^{\infty} \nu_k^{r,a}$. Тогда масштабирующая последовательность, маски, маски всплесков и всплесковая последовательность определяются так:

$$\widehat{\varphi_j^a}(k) := 2^{-j/2}\widehat{\xi}_j^a(k), \qquad \mu_k^{j,a} := \sqrt{2}\nu_k^{j,a},$$
$$\lambda_k^{j,a} := e^{2\pi i 2^{-j}k}\mu_{k+2^{j-1}}^{j,a}, \qquad \widehat{\psi}_j^a(k) := \lambda_k^{j+1,a}\widehat{\varphi}_{j+1}^a(k). \tag{22}$$

Доказательство того, что построенное семейство является фреймом Парсеваля следует из унитарного принципа расширения, асимптотическое поведение КН доказывается конструктивно.

Второй результат этой главы состоит в доказательстве неравенства, уточняющего нижнюю границу КН Брейтенбергера для широкого класса последовательностей периодических функций.

Для функции $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx} \in L_2(0,\,1)$ определим

$$A(f) := \|f\|^2 - \mathrm{Re}(\tau(f)), \qquad B(f) := i\,\mathrm{Im}(\tau(f)).$$

Теорема 5. *Пусть $\psi_j \in L_2(0,\,1)$, $j\in\mathbb{N}$, – последовательность периодических функций, такая что*

$$\lim_{j\to\infty} q_j\widehat{\psi}_j(k)/\|\psi_j\| = 0 \text{ для } |k| \le M(C),$$
$$\lim_{j\to\infty} q_j^{-2}A(\psi_j')/\|\psi_j\|^2 = 0,$$
$$|(\psi_j',\,\psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2, \quad q_j^{-2}\|\psi_j'\|^2 \le C\|\psi_j\|^2,$$
$$q_j^2 A(\psi_j) \le C\|\psi_j\|^2, \quad q_j\,|B(\psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2,$$

где $M(C) := 2(2\pi C + C\sqrt{2C}/3 + 1/6)$, $C > 0$ – абсолютная константа, и $q_j \to \infty$ при $j\to\infty$. Тогда если $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j)$ существует, то

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j) \ge 3/2.$$

Условиям данной теоремы удовлетворяют следующие классы всплесковых последовательностей.

- Последовательности, порожденные периодизацией всплеск-функции ψ^0 пространства $L_2(\mathbb{R})$, при условии $x(\psi^0(x))' \in L_2(\mathbb{R})$, при этом $q_j = 2^j$. То есть последовательности, определяемые равенством

$$\psi_{j,k}^p(x) := 2^{j/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi^0(2^j(x+n)+k).$$

- Последовательности, построенные в теореме 4, при этом $q_j = j^{1/2}$.

- В общем случае, среди всех последовательностей, построенных с помощью унитарного принципа расширения, можно выделить такой класс: всплеск-функции являются тригонометрическими полиномами степени $C_1 2^j$, где C_1 – абсолютная константа, имеют ограниченные нормы $c_1 \le \|\psi_j\| \le c_2$, где $c_1 > 0$, c_2 – абсолютные константы, для коэффициентов справедливы равенства $\widehat{\psi}(k) = \widehat{\psi}(-k)$, и выполняется неравенство $q_j^2 A(\psi_j) \le C\|\psi_j\|^2$.

Таким образом, в классе последовательностей, описанных в теореме 5, построенное в теореме 4 семейство периодических всплесков действительно имеет наименьшие возможные КН и, тем самым, положительно отвечает на вопрос Ю. Престина, Э. Куака 1999 года о существовании подобных семейств.

Кроме этого, теорема 5 в некотором смысле является периодическим аналогом следующего результата Г. Баттла: если $xf(x)$, $f'(x) \in L_2(\mathbb{R})$, функция f имеет нулевое среднее $\int_{\mathbb{R}} f = 0$ и нулевой частотный центр $c(\widehat{f}) = 0$, см. (1), то $UC_H(f) \ge 3/2$. Для данной последовательности периодических функций ψ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, условия $|(\psi_j', \psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2$ и $\lim_{j\to\infty} q_j \widehat{\psi}_j(k)/\|\psi_j\| = 0$ из теоремы 5 соответствуют нулевому частотному центру $c(\widehat{\psi^0}) = 0$ и нулевому интегральному среднему $\int_{\mathbb{R}} \psi^0 = 0$ соответственно. Тогда напрашивается обобщение теоремы Баттла вида: если $\int_{\mathbb{R}} f = \varepsilon$ и $c(\widehat{f}) = 0$, то $UC_H(f) \ge \alpha(\varepsilon)$, где $\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha(\varepsilon) = 3/2$. К сожалению, обобщить доказательство теоремы Баттла на этот случай невозможно, что ясно из следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть f – функция, такая что $\cdot f$, $if' \in L_2(\mathbb{R})$, $f_0 := a^{1/2} f(a\cdot)$, где $a = (\|\cdot f\|/\|if'\|)^{1/2}$, и $c(\widehat{f_0}) = 0$. Фиксируем $\varepsilon \in \mathbb{C}$ и положим $\int_{\mathbb{R}} f_0 = \varepsilon$. Тогда если $\varepsilon \ne 0$, $\varepsilon \ne 2\pi^{3/4}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}$, $k \in \mathbb{N}$, то не существует функции, являющейся решением минимизационной задачи*

$$\begin{cases} UC_H(f_0) \to \min, \\ \int_{\mathbb{R}} f_0 = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad c(\widehat{f_0}) = 0. \end{cases}$$

Если $\varepsilon = 2\pi^{3/4}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда функция Эрмита

$$\phi_n(x) = \left(\frac{2^n n!}{2\sqrt{\pi}}\right)^{-1/2} (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

$n = 2k$, *минимизирует данную задачу и* $UC_H(\phi_{2k}) = (4k+1)/2$.

Если высказанное обобщение теоремы Баттла верно, то это поможет изучать локализованность нестационарных систем всплесков.

Наконец, насколько нам известно, теорема 5 является первым результатом, касающимся оценок нижней границы КН Брейтенбергера.

В главе 4 мы сопоставляем системы нестационарных всплесков на $L_2(\mathbb{R})$ и периодических всплесков и изучаем, как построить одну систему из другой с помощью периодизации.

Предложение 1. *Если* $\Psi^N = \{\varphi^N_{0,k},\, \psi^N_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ *– фрейм Парсеваля всплесков, порожденный унитарным принципом расширения,* $\varphi^N_0, \psi^N_j \in L_1(\mathbb{R})$, *и* $\psi^P_j(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^N_j(x-n)$, *тогда* $\Psi^P = \{\varphi^P_0,\, \psi^P_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ *– фрейм Парсеваля всплесков.*

Доказательство сводится к сравнению унитарных принципов расширения для нестационарных и периодических систем. Далее мы решаем задачу о построении нестационарной системы, периодизация которой совпадает с исходной системой. В лемме 4 мы строим семейство нестационарных масок m^K_j, соответствующее маскам исходной периодической системы. Параметр семейства $K \in \mathbb{N}$ отвечает за гладкость маски и за порядок нуля в точке $\xi = \pi$. Последняя характеристика также важна, потому что, как и в стационарном случае, она является необходимым условием для гладкости масштабирующих и всплеск-функций.

Лемма 4. *Пусть* $\nu^j_k \in \mathbb{R}$, $\nu^j_k \geq 0$, *– числовая последовательность, такая что* $\nu^j_k = \nu^j_{k+2^j}$, $|\nu^j_k|^2 + |\nu^j_{k+2^{j-1}}|^2 = 1$, $\nu^j_k = \nu^j_{-k}$. *По определению положим* $\theta^j_k := \arccos \nu^j_k$. *Пусть* z^K_j *– определенный на интервале* $[0,\, \pi/2]$ *сплайн порядка* K *минимального дефекта, заданный на равномерной сетке отрезка* $[0,\, \pi/2]$ *так:* $z^K_j(2\pi k 2^{-j}) = \theta^j_k$, $k = 0, \dots, 2^{j-2}$, $(z^K_j)^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, \dots, K-1$. *Наконец, пусть* m^K_j *– четная* 2π*-периодическая функция*

$$m^K_j(\xi) = \begin{cases} \cos(z^K_j(\xi)), & \xi \in [0,\, \pi/2], \\ \sin(z^K_j(\pi - \xi)), & \xi \in (\pi/2,\, \pi]. \end{cases}$$

Тогда $|m^K_j(\xi)|^2 + |m^K_j(\xi+\pi)|^2 = 1$, $m^K_j \in C^{K-1}(\mathbb{T})$, $(m^K_j)^{(l)}(\pi) = 0$, $l = 1, \dots, K-1$.

В лемме 5 мы пишем нестационарный аналог достаточного условия равномерной сходимости на компактах и принадлежности $L_2(\mathbb{R})$ бесконечного произведения $\prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}(\xi 2^{-r})$.

Лемма 5. *Если* $a_j \in L_2(\mathbb{T})$, $a_j(0) = 1$ *и* $\sum_j \|a_j''\|_2/2^j < \infty$, *то* $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^{\infty} a_{j+r}(\xi/2^r)$ *равномерно и абсолютно сходится на любом* $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$. *Если дополнительно* $|a_j(\xi)|^2 + |a_j(\xi+\pi)|^2 = 1$, *то* $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \le 1$.

В лемме 6 это достаточное условие конкретизировано для масок m_j^K, определенных в лемме 4.

Лемма 6. *Если* m_j^K *определена в лемме 4,* $\nu_0^j = 1$, *и*

$$\sum_j \frac{1}{2^j} \left(\int_0^{\pi/2} ((z_j^K)'(\xi))^4 + ((z_j^K)''(\xi))^2 \, d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

то $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^K(\xi/2^r)$ *равномерно и абсолютно сходится на любом* $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \le 1$.

Таким образом, предлагается конструкция системы нестационарных всплесков, периодизация которой совпадает с исходной системой периодических всплесков, и нестационарные маски могут быть выбраны произвольно гладкими.

Далее, среди этих нестационарных систем мы ищем фрейм всплесков со следующим дополнительным свойством: $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$. Это свойство названо согласованностью локализаций. Отчасти, поиск такой нестационарной системы мотивирован результатами двух предыдущих глав. Точнее, появляется возможность строить хорошо локализованные системы нестационарных всплесков, начиная с периодических. В теореме 7 мы получаем достаточные условия в терминах нестационарных фреймов, обеспечивающие равенство $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$.

Теорема 7. *Пусть* $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ *и* $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ *– фреймы Парсеваля периодических и нестационарных всплесков и* $\psi_j^P(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_j^N(x-n)$. *Если существуют функции* $f,\, f_1 \in L_2(\mathbb{R})$, *такие что*

$|2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x)| \le f(x)$, $|(2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x))'(x)| \le f_1(x)$ *и* $f \in AC_{loc}(\mathbb{R})$, $f(x) = O(|x|^{-3/2-\varepsilon})$, $f_1(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ *при* $x \to \infty$, $\varepsilon > 0$, *тогда*

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N).$$

Теорему 7 сложно применять. Отправной точкой является система периодических всплесков, в то время как главное условие (существование мажорант f, f_1) касается построенной нестационарной системы. Следующая теорема избавлена от этого недостатка и дает достаточные условия для согласования локализованностей в терминах периодических масок.

Теорема 8. *Пусть* $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ *– фрейм Парсеваля периодических всплесков,* $(\mu_k^j)_k = (2^{1/2}\nu_k^j)_k$ *– масштабирующие маски. Пусть* $(\nu_k^j)_k$ *удовлетворяют условиям леммы 4. Обозначим* $\theta_k^j := \arccos \nu_k^j$, $\overline{\nu}_k^j := \max\{\nu_k^j,\, \nu_{k+1}^j\}$. *Если*

1. *ряд* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |kb_k^j|$ *равномерно сходится и равномерно ограничен относительно* j, *где* $b_k^j := \prod_{r=1}^\infty \overline{\nu}_k^{j+r}$, *и*
2. $|\theta_{k+1}^j - \theta_k^j| \le C2^{-j}$, *где* C *– абсолютная константа,*

то система $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ *с масштабирующими масками* $m_j^1(\xi)$, *определенными в лемме 4 при* $K = 1$, *образует фрейм Парсеваля нестационарных всплесков, и* $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$.

В главах 5–7 используются следующие обозначения. $G = G_p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \ne 1$ – группа Виленкина, ее элементами являются последовательности $x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots)$, где $x_j \in \{0, \dots, p-1\}$ при $j \in \mathbb{Z}$ и существует только конечное количество ненулевых членов x_j с отрицательными индексами j. Обозначим нулевую последовательность $\mathbf{0}$. Если $x \ne \mathbf{0}$, тогда существует единственное $N = N(x)$, такое что $x_N \ne 0$ и $x_j = 0$ для $j < N$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю p: $(z_j) = (x_j) \oplus (y_j)$ означает $z_j = x_j + y_j \pmod p$ при $j \in \mathbb{Z}$. Обозначаем $\ominus$ операцию, обратную $\oplus$. Группа G_p при $p = 2$ называется группой Кантора. В этом случае обратная операция $\ominus$ совпадает с групповой операцией $\oplus$. На группе G общеупотребительны две эквивалентные метрики. Метрика d

на группе G вводится с помощью отображения $\|\cdot\|_G: \ G \to [0, \infty)$, определенного так: $\|\mathbf{0}\|_G := 0$ и $\|x\|_G := 2^{-N(x)}$ и $x \neq \mathbf{0}$. Тогда $d(x, y) := \|x \ominus y\|_G$ для $x, y \in G$. Другая метрика d_1 определяется так: $d_1(x, y) := \lambda(x \ominus y)$ для $x, y \in G$. Обозначим $I_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in G$, шар радиуса p^{-n} с центром в точке x, т.е. $I_n(x) = \{y \in G : d(x, y) < p^{-n}\}$. Обозначим $I_j := I_j(\mathbf{0})$ и $I := I_0$. Определим отображение $\lambda : G \to [0, \infty)$ так: $\lambda(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j p^{-j-1}$, $x = (x_j) \in G$, взаимно-однозначно переводящее $G \setminus \mathbb{Q}_0$ на $[0, \infty)$, где $\mathbb{Q}_0$ состоит из всех элементов x, для которых $x_j = p - 1$ при всех $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{Z}$. Аналоги сжатий и сдвигов на G определяются так: $D: \ G \to G$, где $(Dx)_k = x_{k+1}$ для $x \in G$. Обозначаем $f_{0,h}: \ G \to \mathbb{C}$ функцию $f_{0,h}(x) = f(x \oplus \lambda^{-1}(h))$, где $x \in G$, $h \geq 0$. Если дополнительно $j \in \mathbb{Z}$, полагаем $f_{j,h}(x) = p^{j/2} f_{0,h}(D^j x)$, $x \in G$. Функция f, определенная на G, называется 1-периодической, если $f(x) = f_{0,2^n}(x)$ для всех $x \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Ff – преобразование Фурье–Уолша, w_k – k-ая обобщенная функция Уолша. Функция $f^{[1]}(x) := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} 2^{j-1}(f(x) - f_{0,2^{-j-1}}(x))$ называется производной Гиббса функции $f : G_2 \to \mathbb{C}$. Производные высших порядков определяются рекурсивно $f^{[n+1]} = (f^{[n]})^{[1]}$.

В главе 5 мы предлагаем определение КН для функций, заданных на группе Кантора.

Определение 2. *Пусть $f : G_2 \to \mathbb{C}$, $f \in L_2(G_2)$, тогда функционал*

$$UC_d(f) := V(f)V(Ff), \qquad \text{где}$$

$$V(f) := \frac{1}{\|f\|^2_{L_2(G_2)}} \min_{\tilde{x}} \int_{G_2} (\lambda(x \oplus \tilde{x}))^2 |f(x)|^2 \, dx,$$

$$V(Ff) := \frac{1}{\|Ff\|^2_{L_2(G_2)}} \min_{\tilde{t}} \int_{G_2} (\lambda(t \oplus \tilde{t}))^2 |Ff(t)|^2 \, dt,$$

называется диадической КН функции f.

Доказывается, что существует точка $y^* \in G_2$, на которой функционал $\int_{G_2} (\lambda(x \oplus y))^2 |g(x)|^2 \, dx$ достигает наименьшего значения. Обоснованность такого определения поясняется с помощью примеров и сравнения в известными КН. Обсуждается, почему операторный подход не работает в данном случае.

В теореме 9 доказывается, что UC_d ограничена снизу положительной константой, то есть для UC_d существует принцип неопределенности.

Теорема 9. *Пусть* $f : G_2 \to \mathbb{C}$, $f \in L_2(G_2)$. *Тогда верно неравенство*

$$UC_d(f) \geq C, \text{ где } C \simeq 8.5 \times 10^{-5}.$$

Вычисление UC_d для произвольной функции непросто, так как необходимо решать задачу минимизации для функционалов от диадических функций, и нам не удалось найти литературу, содержащую методы решения подобных задач. Теорема 10 дает способ вычисления UC_d для широкого класса функций, сводя минимизационную задачу к перебору конечного количества вариантов. В дальнейшем для упрощения записи используем обозначение $k \oplus n = \lambda(\lambda^{-1}(k) \oplus \lambda^{-1}(k))$ для k, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 10. *Пусть* $f(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1)}(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x)$ *и ряд равномерно сходится, обозначим*

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1)}(x) \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \mathrm{w}_k(x).$$

Пусть $V(f)$, $V(Ff)$ *конечны. Тогда диадическая КН примет вид*

$$UC_d(f) = \lim_{n\to\infty} V(f_n) V(Ff_n), \text{ где}$$

$$V(f_n) = \frac{\min_{k_0=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |b_{k\oplus k_0}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

$$V(Ff_n) = \frac{\min_{k_1=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |a_{k\oplus k_1}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

и $a := (a_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$ *– дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона вектора* $b := (b_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$, *то есть* $a_k = p^{-n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s \mathrm{w}_k(\lambda^{-1}(s/p^n))$.

Данная теорема распространяется на функции вида $g(x) := \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,2^N)}(x)$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x/2^N)$. Этот класс функций достаточно обширен и важен, так как из работы В. Ю. Протасова, Ю. А. Фаркова 2006 года следует, что любая масштабирующая и всплеск-функция с компактным носителем, порождающая ортонормированный базис всплесков в $L_2(G_2)$, принадлежит этому классу.

С помощью теоремы 10, пользуясь Wolfram Mathematica 8.0, мы минимизируем численно функционал UC_d на полиномах Уолша степени $2^n - 1$ для $n = 2$; 3; 4; 5; 6. Полученные значения принадлежат отрезку $[0,0871,\ 0.0891]$.

В параграфе 5.3 приведен вид КН для семейства масштабирующих функций и всплеск-функций Лэнга, а также найдены значения КН для нескольких частных значений параметра a семейства. Наиболее локализованным оказался всплеск Хаара, являющийся частным случаем всплеска Лэнга при $a = 1$. Также численно найдены всплеск-функции вида $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,1)}(x)\sum_{k=0}^{3} a_k \mathrm{w}_k(x)$ и $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,1)}(x)\sum_{k=0}^{7} a_k \mathrm{w}_k(x)$, порождающие фрейм всплесков и имеющие наименьшие КН.

В главе 6 мы изучаем уравнения в частных производных. В этих уравнениях пространственная переменная неизвестной функции принадлежит группе Кантора, а временная – действительна. Мы рассматриваем два типа уравнений, один тип содержит классическую, а другой дробную модифицированную производную Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (псевдодифференциальный оператор).

В §6.2 мы рассматриваем распределения на группе Кантора G_2, которые являются аналогом распределений в действительном анализе. В качестве пространства пробных функций выбран класс S всех локально постоянных функций с компактным носителем. Распределение $f \in S'$ интерпретируется как формальный ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k\varphi_{0k} + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{jk}$, $a_k = \langle f, \varphi_{0k}\rangle$, $\quad a_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$, который называется квази-представлением Хаара f, где φ и ψ – масштабирующая и всплеск-функция Хаара. Имеет место следующий аналог леммы Дюбуа–Реймона.

Предложение 2. *Если функция f локально интегрируема на G_2 и ее квази-представление Хаара равно нулю, то $f = 0$ почти везде на G_2.*

Обозначим $\tilde{S}$ множество всех полиномов Хаара, то есть функций, для которых конечное число коэффициентов в разложении по системе Хаара отличны от нуля. Тогда распределение $f \in \tilde{S}'$ можно отождествить с формальным рядом $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}$, $a_{j,k} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$, который называется представлением Хаара f. Из следующей теоремы выводится $\tilde{S}' = \{f\big|_{\tilde{S}}, f \in S'\}$.

Теорема 11. *Если $f \in \tilde{S}'$, то существует однопараметрическое семейство $\{f_c\}_{c\in\mathbb{C}} \subset S'$, такое что $f_c|_{\tilde{S}} = f$ для любого $c \in \mathbb{C}$ и $g|_{\tilde{S}} \neq f$ для любой $g \in S' \setminus \{f_c \ : \ c \in \mathbb{C}\}$. Кроме того, если $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}$, $a_{j,k} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$, – представление Хаара f, то квази-представление Хаара f_c дается*

$f_c = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c)\varphi_{0,k} + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}$, *где* $a_k = a_k(c) = a_k(0)+c$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $c \in \mathbb{C}$ – *общее решение системы* $\sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} a_{2^jk+m} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} a_{2^jk+m} = 2^{j/2}a_{-j,k}$, $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Далее вводится класс периодических распределений. В качестве пространства пробных функций используется P, класс 1-периодических локально постоянных функций. Распределение $f \in P'$ интерпретируется как формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k$, $a_k = \langle f, \mathrm{w}_k\rangle$, который называется представлением Уолша распределения f.

В §6.3 рассматривается задача Коши для одномерного однородного волнового уравнения, в котором неизвестная функция зависит от переменных (x, t), где $x \in G_2$ и t (время) действительно. Пусть $U = [0, \infty)$ или $U = [0, T]$. Задача имеет вид

$$\begin{cases} f''_{t^2}(x,\, t) = f^{[2]}_{x^2} f(x,\, t), \\ f(x,\, 0) = f^0(x), \quad f'_t(x,\, 0) = f^1(x), \end{cases} \qquad x \in G_2, \quad t \in U.$$

Теорема 12. *Пусть* f^0, $f^1 \in P'$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathrm{w}_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \mathrm{w}_n$ *– представления Уолша* f^0 *и* f^1 *соответственно. Тогда*

1. *задача Коши имеет единственное решение* $f(x,\, t)$, *принадлежащее* P' *для каждого* $t \in U$;
2. *решение принадлежит* C^P, *как только* $p_n = O(e^{-n\theta(n)})$, $q_n = O(e^{-n\theta(n)})$ *при* $n \to \infty$, *где* $\theta(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$;
3. *решение принадлежит* L_2^P, *как только выполняются условия пункта 2.*

Доказательство основано на том, что функции Уолша являются собственными функциями дифференциального оператора Гиббса.

В §6.4 мы изучаем свойства дробной модифицированной производной Гиббса. Необходимость в ее использовании вместо классической производной Гиббса возникает при поиске непериодических решений дифференциальных уравнений. Рассмотрим простое уравнение $f^{[1]} = g$, где g – 1-периодическая функция. Для решения находим коэффициенты Фурье-Уолша функции $f^{[1]}$, они и позволяют восстановить f. Пусть теперь функция g сужена на множество I, тогда можно попытаться применить тот же метод, используя преобразование Фурье–Уолша вместо коэффициентов Фурье–Уолша. Оказывается, что такое решение не имеет компактный носитель и не совпадает на множестве I с периодическим решением. Этого недостатка лишена модифицированная производная Гиббса $\mathcal{D}$. А именно, если g – 1-периодическая функция, f – неизвестная функция, тогда периодическое решение уравнения $\mathcal{D}f = g$ совпадает на I с решением уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$, где $\mathbb{1}_I$ – характеристическая функция множества I. Кроме того, решение уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$ также имеет носитель I.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}^\alpha(x) := \|x\|_{G_2}^\alpha$ для $x \in G_2$, $x \neq \mathbf{0}$, и $\mathbb{D}^\alpha(\mathbf{0}) := 1$. Дробная модифицированная производная Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$ определяется на $\tilde{S}$ по правилу $F(\mathcal{D}^\alpha\phi) = \mathbb{D}^\alpha F\phi$, $\phi \in \tilde{S}$. Из леммы 7 следует, что $\mathcal{D}^\alpha$ корректно определен и $\mathcal{D}^\alpha : \tilde{S} \to \tilde{S}$.

Лемма 7. *Пусть $\phi \in S$. Для того чтобы ϕ принадлежала $\tilde{S}$ необходимо и достаточно, чтобы $supp\, F\phi \cap I_n = \emptyset$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$.*

Кроме того, оператор $\mathcal{D}^{-\alpha}$ является обратным для $\mathcal{D}^\alpha$, это означает, что $\mathcal{D}^\alpha$ взаимно однозначно отображает $\tilde{S}$ на $\tilde{S}$. Это позволяет распространить $\mathcal{D}^\alpha$ на $\tilde{S}'$. Для $f \in \tilde{S}'$ распределение $\mathcal{D}^\alpha f \in \tilde{S}'$ определяется так $\langle \mathcal{D}^\alpha f, \phi\rangle = \langle f, \mathcal{D}^\alpha\phi\rangle$, $\phi \in \tilde{S}$. Этот оператор был введен на $L_1(G_2)$ Б. И. Голубовым.

Предложение 3. *Пусть g, Fg, $\mathbb{D}^\alpha Fg$ локально интегрируемы на G_2, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда условие $\operatorname{supp} Fg \subset I_{-j-1} \setminus I_{-j}$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция g была собственной функцией оператора $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующей собственному значению $2^{j\alpha}$.*

Следствие 1. *Любая функция Хаара $\psi_{j,k}$ является собственной функцией $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующей собственному значению $2^{j\alpha}$.*

В §6.5 мы рассматриваем задачу Коши для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности относительно функции, зависящей от переменных (x, t), где $x \in G_2$ и t (время) – действительное число. Пусть $U = [0, \infty)$ или $U = [0, T]$. Задача имеет вид

$$\begin{cases} f_t'(x,\, t) = \mathcal{D}_x^\alpha f(x,\, t) + g(x,\, t), \\ f(x,\, 0) = f^0(x), \end{cases} \qquad x \in G_2, \quad t \in U.$$

Теорема 13. *Пусть $f^0 \in \tilde{S}'$, $g_t := g(\cdot, t) \in \tilde{S}'$ для каждого $t \in U$, и $g(x, \cdot)$ непрерывна на U. Тогда*

1. *задача Коши имеет единственное решение $f(x, t)$, оно принадлежит $\tilde{S}'$ для каждого $t \in U$;*

2. *это решение принадлежит $L_2(G_2)$ для каждого $t \in U$ как только $f^0 \in L_2(G_2)$, для каждого $t \in U$ выполняется $g_t \in L_2(G_2)$ и $Ff^0(\xi) = O(e^{-\|\xi\|^{\alpha}_{G_2}\theta(\log_2\|\xi\|_{G_2})})$, $F(g_t)(\xi) = O(e^{-\|\xi\|^{\alpha}_{G_2}\theta(\log_2\|\xi\|_{G_2})})$ при $\|\xi\|_{G_2} \to \infty$, где $\theta(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$;*

3. *если либо $\alpha > 0$ и условия пункта 2 выполнены, либо $\alpha < 0$ и для каждого $t \in U$ выполняются равенства $Ff^0(\xi) = O(\|\xi\|^{-(\varepsilon+1/2)}_{G_2})$, $F(g_t)(\xi) = O(\|\xi\|^{-(\varepsilon+1/2)}_{G_2})$ при $\|\xi\|_{G_2} \to \infty$, где $\varepsilon > 0$, тогда решение непрерывно на G_2 для каждого $t \in U$, все непрерывные решения даются $f_c(x, t) = f_0(x, t) + c, c \in \mathbb{C}$.*

Доказательство основано на том, что все функции системы Хаара являются собственными функциями дробной модифицированной производной Гиббса.

В главе 7 мы рассматриваем жесткие фреймы всплесков на группе Виленкина, построенные по общей схеме унитарного принципа расширения.

Рассмотрим масштабирующую функцию $\varphi \in L_2(G)$, удовлетворяющую масштабирующему уравнению $\varphi(x) = p\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k))$, $x \in G$. Для построения фреймов всплесков с компактным носителем необходима масштабирующая функция с компактным носителем. Следующее утверждение выполняется для группы Виленкина.

Предложение 4. *Если φ – масштабирующая функция с компактным носителем, то в масштабирующем уравнении только конечное количество коэффициентов a_k отличны от нуля.*

Для всплесков, определенных на действительной прямой, аналог этого утверждения не верен без дополнительного требования ортогональности целых сдвигов масштабирующей функции.

Пусть φ – масштабирующая функция с компактным носителем. Тогда по предложению 4 существует натуральное число n, такое что φ удовлетворяет масштабирующему уравнению $\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(0)} \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k))$, $x \in G$. Находим преобразование Фурье от обеих частей $F\varphi(\omega) = m_0(D^{-1}\omega) F\varphi(D^{-1}\omega)$, при этом

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(0)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}. \tag{23}$$

Функция m_0 называется маской φ или масштабирующей маской. Эта функция является полиномом Уолша порядка $p^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что существуют полиномы Уолша $m_1, \dots, m_r$, $r \geq p-1$, (маски всплеска), такие что для матрицы

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_r(\omega) \\ m_0(\omega \oplus \delta_1) & m_1(\omega \oplus \delta_1) & \dots & m_r(\omega \oplus \delta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & m_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \dots & m_r(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix},$$

где $\delta_l \in G$ и $\lambda(\delta_l) = l/p$, $l \in \{0, \dots, p-1\}$, верно $M(\omega)M^*(\omega) = E_p$, то есть первый столбец продолжается до унитарной матрицы M. Символом M^* обозначаем матрицу, сопряженную к M.

Тогда всплеск-функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ определяются с помощью равенства

$$F\psi^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(D^{-1}\omega) F\varphi(D^{-1}\omega), \quad \nu = 1, \dots, r.$$

Преобразование вектора $(c_0, c_1, \dots, c_r)$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, r$, $c_0 \neq 1$, $\sum_{k=0}^{r} |c_k|^2 = 1$, вида

$$c_{k0} = c_k, \quad c_{0j} = \bar{c}_{j0} \frac{1 - c_{00}}{1 - \bar{c}_{00}}, \quad c_{kj} = \delta_{kj} - \frac{c_{k0}\bar{c}_{j0}}{1 - \bar{c}_{00}}, \quad j, k = 1, \dots, r, \tag{24}$$

называется преобразованием Хаусхолдера.

Следующая теорема описывает множество всех возможных масок всплесков, соответствующих фиксированной масштабирующей маске.

Теорема 14. *Пусть для маски (23) верно* $\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 \leq 1$, $\omega \in G$. *Обозначим* $b_{n,l}^{*(0,s)} = \mu_{0,s}(D^{1-n}\lambda^{-1}(l))$, $s = 0, \dots, p-1$, $l = 0, \dots, p^n - 1$, *где* $\mu_{0,s}(\omega) := \sqrt{p} \sum_{k=0}^{p^{n-1}-1} a_{pk+s}^{(0)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}$. *Выберем числа* $b_{n,l}^{*(0,p)}, \dots, b_{n,l}^{*(0,r)} \in \mathbb{C}$ *произвольно, но так, чтобы выполнялось условие* $\sum_{k=0}^{r} |b_{n,l}^{*(0,k)}|^2 = 1$. *Для каждого* l *обозначим* $c_k = b_{n,l}^{*(0,k)}$, $k = 0, \dots, r$; *для каждого* $s \in \{0, \dots, p-1\}$

и $\nu \in \{1,\dots,r\}$ *вычислим* $c_{s,\nu}$ *с помощью (24), примененного к* c_k, *при* $c_0 \neq 1$ *или положим* $c_{s,\nu} = \delta_{s\nu}$ *при* $c_0 = 1$; *обозначим* $b_{n,l}^{*(\nu,s)} = c_{s,\nu}$. *Пусть* $V_l := (v_{n,l}^{(\nu,k)})_{\nu,k=0,\dots,r}$, $l = 0,\dots,p^n-1$, *– унитарная матрица с первым столбцом* $(1,0,\dots,0)^T$. *Тогда полиномы* m_ν, $\nu = 1,\dots,r$ *являются масками всплеска, соответствующими маске* m_0 *тогда и только тогда, когда*

$$m_\nu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{q=0}^{p^n-1} \left(\sum_{s=0}^{p-1} c_{n,\lambda(\lambda^{-1}(q)\ominus\lambda^{-1}(s))}^{(\nu,s)} \right) \overline{\mathrm{w}_q(\omega)},$$

где

$$c_{n,t}^{(\nu,s)} = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{r} b_{n,l}^{*(k,s)} v_{n,l}^{(\nu,k)} \mathrm{w}_t(D^{1-n}\lambda^{-1}(l)).$$

Следующая теорема дает точное описание всех полиномов Уолша, порождающих жесткие фреймы всплесков.

Теорема 15. *Масштабирующая функция с компактным носителем порождает жесткий фрейм всплесков с компактным носителем тогда и только тогда, когда ее маска* m_0 *является полиномом Уолша, удовлетворяющим условиям* $m_0(\mathbf{0}) = 1$ *и* $\sum_{l=0}^{p-1} |m_0(\omega \oplus \delta_l)|^2 \leq 1$, $\omega \in G$.

Глава 8 посвящена изучению безусловной сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков. Первые достаточные условия на всплеск-функции, обеспечивающие безусловность разложений в $L_p(\mathbb{R})$ в том случае, когда в $L_2(\mathbb{R})$ система образует ортонормированный базис, доказаны И. Мейером и приведены в большинстве классических монографий по теории всплесков. Эти достаточные условия предполагают гладкость всплеск-функций ($\psi \in C^1(\mathbb{R})$), которая используется в методе доказательства, основанном на свойствах оператора Кальдерона–Зигмунда. Достаточные условия, не предполагающие гладкость, а только определенную скорость убывания всплеск-функций, предложены Г. Грипенбергом, его результат усилен П. Войташчиком и перенесен на случай биортогональных базисов всплесков.

В следующей теореме получены достаточные условия для безусловной сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков.

Теорема 16. *Пусть* $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ *– пара двойственных фреймов всплесков в* $L_2(\mathbb{R})$, *пусть существует четная ограниченная убывающая на* $[0,\infty)$ *функция* η, *удовлетворяющая условию* $\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx<\infty$, *и такая что* $|\psi(x)|, |\tilde{\psi}(x)|\le\eta(x)$, *тогда для любой функции* $f\in L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, *ряд* $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(f,\,\tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ *безусловно сходится в* $L_p(\mathbb{R})$.

Требования, предъявляемые к фреймам, совпадают с условиями в теореме П. Войташчика. Так что наш результат является распространением теоремы П. Войташчика на фреймы всплесков.

Из доказательства теоремы 16 следует достаточное условие для безусловной сходимости в $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, разложений по произвольной паре двойственных фреймов из $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 17. *Если* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– пара двойственных фреймов в* $L_2(\mathbb{R})$, $f_n,\,\tilde{f}_n\in L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$, *и существует постоянная* M, *такая что для любого конечного множества индексов* Ω *и любой функции* $f\in L_p(\mathbb{R})$ *выполняется неравенство* $\left\|\sum_{n\in\Omega}(f,\,\tilde{f}_n)f_n\right\|_p\le M\|f\|_p$, *то ряд* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f,\,\tilde{f}_n)f_n$ *безусловно сходится в* $L_p(\mathbb{R})$.

В главе 9 мы изучаем непрерывное всплеск-преобразование (НВП). На странице 3 приведены определение НВП, условие допустимости, необходимое для классической формулы обращения, и сама формула обращения. Условие допустимости $C_\psi<\infty$ эквивалентно равенству $\widehat{\psi}(0)=0$ при слабом дополнительном предположении $(1+|\cdot|^\alpha)\psi\in L_1(\mathbb{R})$, $\alpha>0$. Некоторые популярные и полезные в приложениях всплески, например, стандартный приведенный всплеск Морле $\psi_M(\xi)=\exp(i\omega_0\xi)\exp(-\xi^2/2)$, не удовлетворяют условию допустимости: $\widehat{\psi_M}(0)=C_1\exp(-\omega_0^2/2)\ne0$. В следующей теореме предлагается альтернативная формула обращения НВП, которая применима даже в случае нарушения условия допустимости.

Теорема 18. *Пусть* $W_{n,\psi}f(a,\,b)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi_{n,a,b}(x)}\,dx$, *где* $n=1$ *или* $n=2$,

$$\psi_{1,a,b}(x)=\frac{1}{|a|}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right),\quad \psi_{2,a,b}(x)=\frac{1}{|a|^{1/2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Для* $n = 1$ *мы предполагаем, что* $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ *и* $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, dx = 1$. *Для* $n = 2$ *мы полагаем, что* $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1$.

Если f, ψ, $\omega\widehat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{f}$, $\widehat{\psi} \in L_1(\mathbb{R})$, *тогда почти везде на* $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{db}{b-x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_{1,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(x),$$

$$\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{db}{b-x} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|a|} \frac{\partial}{\partial b} W_{2,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(x).$$

Если дополнительно $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [0,\, \infty)$, *тогда почти везде на* $\mathbb{R}$

$$-i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_{1,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(b), \quad -i \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|a|} \frac{\partial}{\partial b} W_{2,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(b).$$

Список публикаций по теме диссертации

[1] Е. А. Лебедева. Безусловная сходимость разложений по фреймам всплесков // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 456.

[2] Е. А. Лебедева. Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81. — № 4. — С. 553–560.

[3] Е. А. Лебедева. О принципе неопределенности для всплеск-функций Мейера // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2011. — Т. 389. — С. 131–142.

[4] Е. А. Лебедева. Экспоненциально убывающие всплески, имеющие равномерно ограниченные константы неопределенности по параметру, определяющему гладкость // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49. — № 3. — С. 574–591.

[5] Е. А. Лебедева, В. Ю. Протасов. Всплески Мейера с наименьшей константой неопределенности // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84. — № 5. — С. 732–740.

[6] Yu. Farkov, E. Lebedeva, M. Skopina. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. — 2015. — Vol. 13. — No. 5. — P. 1550036.

[7] A. V. Krivoshein, E. A. Lebedeva. Uncertainty Principle for the Cantor Dyadic Group // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — Vol. 423. — No. 2. — P. 1231–1242.

[8] E. A. Lebedeva. An inequality for a periodic uncertainty constant // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2017. — Vol. 42. — No. 2. — P. 536–549.

[9] E. A. Lebedeva. On a connection between nonstationary and periodic wavelets // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 451. — No. 1. — P. 434–447.

[10] E. A. Lebedeva. Uncertainty constants and quasispline wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2011. — Vol. 30. — No. 2. — P. 214–230.

[11] E. A. Lebedeva, E. B. Postnikov. On alternative wavelet reconstruction formula: a case study of approximate wavelets // R. Soc. open sci. — 2014. — Vol. 1. — 140124.

[12] E. A. Lebedeva, J. Prestin. Periodic wavelet frames and time-frequency localization // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2014. — Vol. 37. — No. 2. — P. 347–359.

[13] E. Lebedeva, M. Skopina. Walsh and wavelet methods for differential equations on the Cantor group // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — Vol. 430. — No. 2. — P. 593–613.

[14] E. B. Postnikov, E. A. Lebedeva. Decomposition of strong nonlinear oscillations via modified continuous wavelet transform // Phys. rev. E. — 2010. — Vol. 82. — No. 5. — P. 057201.

[15] E. B. Postnikov, E. A. Lebedeva, A. I. Lavrova. Computational implementation of the inverse continuous wavelet transform without a requirement of the admissibility condition // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 282. — P. 128–136.