Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Николаев Артем Константинович

Обобщённые процессы Леви и связанные с ними операторы

1.1.4 — Теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2025

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

СМОРОДИНА Наталия Васильевна,
доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник
Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

ГЛИКЛИХ Юрий Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор
кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета.

КУЦЕНКО Владимир Александрович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории биостатистики Национального медицинского исследовательского центра
терапии и профилактической медицины.

Ведущая организация:
«ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук».

Защита состоится _____ _____ в _____ часов на заседании диссертационного совета 24.1.207.02 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
https://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-24.1.207.02/

Автореферат разослан _____ _____ 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-
математических наук К. С. Рядовкин

Общая характеристика работы

Актуальность.

В настоящей работе рассматриваются так называемые обобщённые процессы Леви. Обобщённые процессы Леви наследуют основные свойства процессов Леви такие как независимость и стационарность приращений, но отличаются тем, что их одномерные распределения не обязаны быть вероятностными мерами.

Ранее в литературе были рассмотрены различные подходы, позволяющие строить невероятностные аналоги процессов Леви. В частности, в [1], [2], [3] рассмотрены так называемые псевдопроцессы. В рамках соответствующей теории каждый псевдопроцесс определяется некоторым псевдодифференциальным оператором $\mathcal{A}$. Для этого для каждого натурального n и каждых фиксированных $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ строится мера (вообще говоря, знакопеременная или даже комплексная) $\mu_{t_1,...,t_n}$, которая для каждого борелевского множества $I \subset \mathbf{R^n}$ определяется как

$$\mu_{t_1,...,t_n}(I) = \int\limits_I dx_1 dx_2 ... dx_n \, \mathcal{K}^0_{t_1}(0, x_1) \, \mathcal{K}^0_{t_2-t_1}(x_1, x_2) ... \mathcal{K}^0_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1}, x_n), \tag{1}$$

где через $\mathcal{K}^0_t(x, x')$ в (1) обозначено фундаментальное решение эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u. \tag{2}$$

По семейству мер $\mu_{t_1,...,t_n}$ на алгебре цилиндрических множеств вида

$$U_{t_1,t_2,...,t_n,I} = \{\omega(t) \in C_0[0, \infty) : \, (\omega(t_1), \omega(t_2), ..., \omega(t_n)) \in I\}$$

(здесь $C_0[0, \infty)$ – пространство непрерывных на отрезке $[0, \infty)$ функций, для которых $\omega(0) = 0$) определяется мера Υ соотношением

$$\Upsilon(U_{t_1,t_2,...,t_n,I}) = \mu_{t_1,...,t_n}(I).$$

Мера Υ, вообще говоря, не продолжается на σ-алгебру, порождённую цилиндрическими множествами, и является только конечно-аддитивной. Наиболее известным примером такой конечно-аддитивной меры является так называемая мера Фейнмана, ей соответствует ядро

$$\mathcal{K}^0_t(x, x') = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi t}} \, e^{\frac{i(x'-x)^2}{2t}}.$$

В терминах теории псевдопроцессов полугруппа P^t, переводящая начальную функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ в решение задачи Коши для уравнения (2), может быть записана как

$$P^t\varphi(x) = \int_{C_0[0,\infty)} \varphi(x - \omega(t)) \, \mu(d\omega).$$

Отметим, что теорию псевдопроцессов следует рассматривать как некоторое формальное обобщение теории случайных процессов. Соответствующее обобщение является принципиально невероятностным, в нём отсутствует понятие вероятностного пространства, а интегрирование по этой конечно-аддитивной мере не может рассматриваться как вычисление математического ожидания. В частности, этот подход не позволяет использовать метод Монте-Карло.

Далее, в работах [4], [5], [6], [7], [8], [10] был предложен вероятностный подход, который позволяет строить невероятностные аналоги процессов Леви. Основная идея этих работ состояла в том, что в них распределение случайной величины определялось не как образ вероятностной меры, а как образ некоторой обобщённой функции. На основе данного подхода в работах [8] и [9] построены аналоги симметричных α–устойчивых процессов Леви с параметром устойчивости $\alpha > 2$. Для случая $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (4k, 4k+2)$ действие соответствующей полугруппы P^t на функцию φ определялось как

$$P^t\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\,(\omega_\varepsilon^t * \varphi)(x - \xi_\varepsilon(t)), \tag{3}$$

где ω_ε^t – специально подобранное семейство быстро осциллирующих функций, а $\xi_\varepsilon(t)$ – сложный пуассоновский процесс, определённый в виде стохастического интеграла

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{|x|>\varepsilon} x\,\nu(ds, dx)$$

по пуассоновской случайной мере $\nu(ds, dx)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(ds, dx) = \frac{C_\alpha\, ds\, dx}{|x|^{1+\alpha}},$$

где $C_\alpha > 0$ – некоторая константа.

Оператор (3) переводит функцию $\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R})$ в точное решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha\,\Gamma(-\alpha)\,\mathcal{D}^\alpha u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \tag{4}$$

где $c_\alpha = (-1)^{[\frac{\alpha}{2}]}$, а оператор $\mathcal{D}^\alpha$ определён формулой

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x-y) - \sum_{j=0}^{[\frac{\alpha}{2}]} \frac{f^{(2j)}(x)}{(2j)!}\, y^{2j} \Big) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}.$$

Таким образом, допредельное выражение в (3) можно интерпретировать как вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши (4) семейством функций

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\,(\omega_\varepsilon^t * \varphi)(x - \xi_\varepsilon(t)). \tag{5}$$

В работах [8] и [9] была получена оценка скорости сходимости (в метрике класса Соболева $W_2^l(\mathbf{R})$, $l \in \mathbf{Z}_+$) семейства функций (5) к соответствующему решению $u(t,x)$.

При построении аналогов симметричных α–устойчивых процессов Леви с параметром устойчивости $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(4k-2, 4k)$ в [8], [9] использовалась другая конструкция, отличная от (3). Для этого были привлечены некоторые идеи комплексного анализа, в частности, комплекснозначные процессы и аппарат пространств Харди.

В диссертации получены результаты, аналогичные результатам [8], [9], но для значений $\alpha = 2m+1$, где $m \in \mathbf{N}$. Случай $m = 0$ соответствует процессу Коши, в остальных случаях процесс Коши понимается только в обобщённом смысле.

Напомним, что процессом Коши $(\xi(t))_{t\geqslant 0}$ называется симметричный α-устойчивый процесс Леви (с параметром устойчивости $\alpha = 1$) такой, что при всех $t > s$ приращение $\xi(t) - \xi(s)$ имеет распределение Коши $\mathcal{C}(0, t-s)$. Траектории процесса Коши являются чисто скачкообразными, а соответствующие ему моменты $\mu_j(t) = \mathbf{E}\,(\xi(t))^j$ бесконечны при всех $t > 0$ и $j \in \mathbf{N}$.

Хорошо известно, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_0 u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

где оператор $\mathcal{A}_0$ определён формулой

$$(\mathcal{A}_0 f)(x) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{f(x+y) - f(x)}{y^2} dy,$$

а начальная функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $L_2(\mathbf{R})$, допускает вероятностное представление в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(x + \xi(t)). \tag{7}$$

В диссертации получено аналогичное вероятностное представление для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \tag{8}$$

где $m \in \mathbf{N}$, а оператор $\mathcal{A}_m$ определён выражением

$$(\mathcal{A}_m f)(x) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \left(f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f^{(2j)}(x) y^{2j}}{(2j)!} \right) \frac{dy}{y^{2m+2}}.$$

Отметим, что получить в точности вероятностное представление вида (7) для решения данной задачи Коши невозможно, так как фундаментальное решение соответствующего уравнения не будет вероятностной плотностью.

В первой главе диссертации строится вероятностная аппроксимация решения задачи Коши (8) семейством функций $u_\varepsilon(t,\cdot) = P_\varepsilon^t\,\varphi$. Оператор P_ε^t определяется в виде математического ожидания некоторого функционала от пуассоновского случайного поля, он действует в $L_2(\mathbf{R})$ и по переменной t определяет операторную полугруппу. Случаи чётных $m = 2k$ и нечётных $m = 2k-1$ рассматриваются отдельно. Случай нечётных $m = 2k-1$ является более сложным, при построении полугруппы P_ε^t используются комплекснозначные процессы, а также аппарат пространств Харди.

Отметим, что для обобщённого процесса Коши ядро $\mathcal{K}_t^0$ задаётся как

$$\mathcal{K}_t^0(x,x') = q_t(|x'-x|),$$

где функция q_t определяется как обратное преобразование Фурье функции $\widehat{q}_t(p) = e^{-C_m t|p|^{2m+1}}$. В случае $m=0$ функция q_t есть плотность одномерного распределения стандартного процесса Коши.

Также в главе 1 диссертации доказываются предельные теоремы о сходимости математических ожиданий функционалов от сумм независимых случайных величин к обобщённым распределениям Коши.

Другой целью работы является построение аналога локального времени для процесса комплексного броуновского движения $\sigma \cdot w(\tau), \tau \geqslant 0$, где σ – комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \arg\sigma \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad |\sigma| = 1.$$

Локальное время винеровского процесса определяется как плотность времени пребывания процесса $w(\tau)$, $\tau \geqslant 0$ в точке $x \in \mathbf{R}$ до момента времени t и имеет следующее формальное выражение

$$l(t,x) = \int\limits_0^t \delta(x - w(\tau))\, d\tau. \tag{9}$$

Используя анализ Фурье, формуле (9) можно придать строгий математический смысл (используемый подход изложен в статье С.М. Бермана [11]). Именно, в классе обобщённых функций справедливо тождество

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ip\,(y-x)}\, dp = \frac{1}{2\pi}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^{M} e^{ip\,(y-x)}\, dp. \tag{10}$$

С учётом (10), выражение (9) может быть переписано в виде

$$l(t,x) = \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ip(w(\tau)-x)}\, dp\right) d\tau = (L_2)\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M} e^{-ipx}\int\limits_0^t e^{ipw(\tau)}\, d\tau\, dp. \tag{11}$$

Предел в правой части (11) берётся в метрике пространства $L_2(\Omega\times\mathbf{R}, \mathbf{P}\times\mathbf{m})$ (здесь $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P})$ – вероятностное пространство, на котором задан винеровский процесс $w(\tau)$, $\mathbf{m}$ – мера Лебега).

С помощью броуновского локального времени может быть построено вероятностное представление решения уравнения теплопроводности

$$\partial_t\, u(t,x) - \frac{1}{2}\,\partial_{xx}^2\, u(t,x) = f(x), \;\; u(0,x) = 0, \;\; f \in L_2(\mathbf{R}), \tag{12}$$

именно,

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,(f * l)(t,x), \tag{13}$$

где $(f * l)(t,x)$ – стандартная свёртка функций f и $l(t,\cdot)$, определённая формулой

$$(f * l)(t,x) = \int\limits_{\mathbf{R}} f(x-y)\, l(t,y)\, dy.$$

Из (13), в частности, вытекает, что для решения $u(x)$ дифференциального уравнения

$$-\frac{1}{2}\, u''(x) = f(x),$$

в случае, когда это уравнение имеет решение (т.е. функция f принадлежит области значений оператора $-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$), справедливо вероятностное представление

$$u(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\, (f * l)\, (t,x). \tag{14}$$

В главе 2 диссертации определён аналог локального времени $m = m(t,x)$, $(t,x) \in [0,\infty)\times \mathbf{R}$ для процесса комплексного броуновского движения $\sigma \cdot w(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, где σ – комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \operatorname{Arg} \sigma \leqslant \pi/4, \;\; |\sigma| = 1.$$

Данный аналог определён в виде специальной регуляризации интеграла (11) (с комплексным процессом $\sigma \cdot w(\tau)$, $\operatorname{Im} \sigma \neq 0$ в правой части). Соответствующая регуляризация подобрана таким образом, что при всех $t > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbf{E}\, m(t,x) = (L_2) \lim_{M\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_0^t \delta_M(x - \sigma w(\tau))\, d\tau, \tag{15}$$

где $\delta_M(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{\sin(Mx)}{x}$ – ядро Дирихле. Такой выбор регуляризации позволил обобщить представление (13) на случай уравнения

$$\partial_t\, u(t,x) - \frac{\sigma^2}{2}\, \partial_{xx}^2\, u(t,x) = f(x), \;\; u(0,x) = 0, \;\; f \in L_2(\mathbf{R}). \tag{16}$$

Именно, в диссертации показано, что для решения уравнения (16) справедливо вероятностное представление

$$u(t,x) = \mathbf{E}\, (f * m)(t,x). \tag{17}$$

Как следствие, из (17) вытекает вероятностное представление для решения $u(x)$ (для тех f, для которых оно существует) дифференциального уравнения

$$-\frac{\sigma^2}{2}\, u''(x) = f(x), \quad f(x) \in L_2(\mathbf{R}),$$

вида

$$u(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\, (f * m)\, (t,x).$$

Также в главе 2 показывается, что случайная функция $m(t,x)$ наследует некоторые другие свойства броуновского локального времени.

Ещё одной целью диссертации является построение и исследование свойств семейства случайных линейных операторов $\mathcal{R}_\lambda^t : L_2(\mathbf{R}^2) \to L_2(\mathbf{R}^2)$, дающих вероятностное представление резольвенты двумерного оператора Шрёдингера

$$(\mathcal{H}f)(x) = -\frac{1}{2}\,(\Delta\, f)(x) + V(x)\, f(x),$$

потенциал $V(x)$ которого является неотрицательной, ограниченной, непрерывной функцией, степенным образом убывающей на бесконечности

$$V(x) = O\left(\|x\|^{-\alpha}\right),\ \alpha > 2. \tag{18}$$

Мы предполагаем, что оператор $\mathcal{H}$ определён на классе Соболева $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{H}) = W_2^2(\mathbf{R}^2)$. Отметим, что на своей области определения оператор Шрёдингера является самосопряжённым и положительным оператором. При этих условиях спектр оператора $\mathcal{H}$ абсолютно непрерывный и заполняет положительную полуось $[0,\infty)$.

Известно, что резольвента $R_\lambda = (\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}$ оператора $\mathcal{H}$ допускает представление в виде преобразования Лапласа по τ полугруппы операторов $\mathcal{P}^\tau = e^{-\tau\mathcal{H}}$, $\tau \geqslant 0$. Именно, в случае $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ справедливо соотношение

$$(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\left[e^{-\tau\mathcal{H}}\, f(x)\right] d\tau. \tag{19}$$

С другой стороны, для операторной полугруппы $\mathcal{P}^\tau = e^{-\tau\mathcal{H}}$, $\tau \geqslant 0$ имеет место вероятностное представление

$$(\mathcal{P}^\tau f)(x) = \mathbf{E}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\, ds} \tag{20}$$

(формула Фейнмана-Каца), где через $w_x(\tau)$ обозначен случайный процесс $w_x(\tau) = x - w(\tau)$ (здесь $w(\tau) = (w_1(\tau), w_2(\tau))$, $\tau \geqslant 0$ – стандартный двумерный винеровский процесс).

С учётом (20) и (19), окончательно, для всех $f \in L_2(\mathbf{R}^2) \cap C_b(\mathbf{R}^2)$ получим

$$(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = \mathbf{E}\left[\int\limits_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\, ds}\, d\tau\right]. \tag{21}$$

Таким образом, на функциях класса $L_2(\mathbf{R}^2) \cap C_b(\mathbf{R}^2)$ резольвента оператора $\mathcal{H}$ допускает представление в виде потраекторного усреднения случайного оператора

$$\mathcal{A}_\lambda : f \longmapsto \int\limits_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\, ds}\, d\tau. \tag{22}$$

Заметим, что траектория двумерного винеровского процесса заметает на плоскости множество нулевой лебеговой меры и, значит, оператор $\mathcal{A}_\lambda$ не может быть продолжен до непрерывного оператора на всём пространстве $L_2(\mathbf{R}^2)$.

В главе 3 диссертации построено другое семейство случайных операторов $\mathcal{R}_\lambda^t$, усреднение которого также даёт вероятностное представление резольвенты оператора $\mathcal{H}$, но, в отличие от (22), операторы этого семейства с вероятностью единица допускают продолжение до ограниченных интегральных операторов в $L_2(\mathbf{R}^2)$. В параграфе 3.1 рассматривается случай $V(x) \equiv 0$. В параграфе 3.2 рассматривается общий случай. В главе 4 (приложение) приводятся необходимые сведения из математической теории рассеяния.

Цели и задачи диссертационной работы.

1. Построение обобщённых процессов Коши, соответствующих показателю устойчивости $2m+1$, $m \in \mathbf{N}$, а также построение на их основе вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения, в правой части которого стоит оператор свёртки с обобщённой функцией $|x|^{-2m-2}$. Получение оценки скорости сходимости построенной аппроксимации к точному решению задачи Коши.

2. Доказательство предельных теорем о сходимости распределений функционалов от сумм независимых одинаково распределённых случайных величин к обобщённому распределению Коши.

3. Построение аналога локального времени для процесса комплексного броуновского движения.

4. Построение и исследование свойств семейства случайных линейных операторов, дающих вероятностное представление резольвенты двумерного оператора Шрёдингера.

Методы.

В диссертации используются различные методы современной теории вероятностей, в частности, метод представления процессов Леви в виде стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере. Также используются методы Фурье-анализа и математической теории рассеяния.

Научная новизна.

Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных областях теории вероятностей, в частности, в исследовании случайных процессов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для всех натуральных m построены обобщённые процессы Коши, соответствующие показателю устойчивости $2m+1$. На их основе получена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \;\; m \in \mathbf{N}, \tag{23}$$

где оператор $\mathcal{A}_m$ определён формулой

$$(\mathcal{A}_m f)(x) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \left(\varphi(x+y) - \varphi(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi^{(2j)}(x) y^{2j}}{(2j)!} \right) \frac{dy}{y^{2m+2}}.$$

Получена оценка скорости сходимости данной аппроксимации к соответствующему решению.

2. Доказаны предельные теоремы о сходимости функционалов от сумм независимых одинаково распределённых случайных величин к обобщённому распределению Коши.

3. Построен аналог локального времени для процесса комплексного броуновского движения $\sigma\, w(\tau), \tau \geqslant 0$, где $w(\tau)$ – стандартный винеровский процесс, а σ – комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \arg \sigma \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad |\sigma| = 1.$$

4. Построено семейство случайных линейных операторов $\mathcal{R}_\lambda^t : L_2(\mathbf{R}^2) \to L_2(\mathbf{R}^2)$, дающих вероятностное представление резольвенты двумерного оператора Шрёдингера

$$(\mathcal{H} f)(x) = -\frac{1}{2} (\Delta\, f)(x) + V(x)\, f(x),$$

потенциал $V(x)$ которого является неотрицательной, ограниченной, непрерывной функцией, степенным образом убывающей на бесконечности

$$V(x) = O\left(\|x\|^{-\alpha}\right), \ \alpha > 2. \tag{24}$$

Показано, что с вероятностью единица операторы этого семейства являются ограниченными интегральными операторами в $L_2(\mathbf{R}^2)$, а также исследованы свойства их ядер.

Степень достоверности.

Все полученные в этой диссертационной работе результаты являются математически достоверными фактами.

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах: Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, 2019, 2021, 2022 г.), Международной конференции International Conference on Stochastic Methods (ICSM) (Дивноморское, 2021, 2022, 2023 г.), Первой конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 9-13 августа, 2021 г.), Конференции "New Trends in Mathematical Stochastics"(Санкт-Петербург, 30 августа-3 сентября, 2021 г.), Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным

и эволюционным задачам (Крым, 17-29 сентября 2021 г.), Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ (Санкт-Петербург, май 2022 г.), Международной конференции "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures"(Москва, 21–24 июня, 2022 г.).

Публикации.

Основные результаты диссертации содержатся в пяти статьях [1], [2], [3], [4], [5], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Личный вклад.

Результаты второй и третьей глав диссертации получены автором самостоятельно (опубликованы в [3], [4], [5]). Результаты первой главы получены совместно с М.В. Платоновой (опубликованы в [1], [2]), в этих работах основной вклад принадлежит соискателю, его соавтору М.В. Платоновой принадлежит постановка задачи и ряд идей по упрощению доказательства.

Структура и объём диссертации.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, приложения, заключения и библиографии.

Общий объём диссертации составляет 111 страниц. Список литературы содержит 38 наименований, в число которых включены 5 работ автора по теме диссертации. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору Наталии Васильевне Смородиной за постановку интересных задач, постоянное внимание и поддержку, полезные обсуждения и ценные советы, замечания и комментарии.

Содержание работы

В **первой главе** диссертации строится вероятностная аппроксимация решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^m \mathcal{A}_m u, \;\; u(0,x) = \varphi(x), \;\; m \in \mathbf{N}, \tag{25}$$

где $\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R})$, а оператор $\mathcal{A}_m$ определён формулой

$$(\mathcal{A}_m f)(x) = \text{v.p.} \int\limits_{\mathbf{R}} \left(f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^{m} \frac{f^{(2j)}(x) y^{2j}}{(2j)!} \right) \frac{dy}{y^{2m+2}}.$$

Сначала в параграфе 1.1 рассматривается случай чётных m ($m = 2k$). При всех $\varepsilon > 0$ на функциях класса $L_2(\mathbf{R})$ определяется операторная полугруппа

$$[P_\varepsilon^t \varphi](x) = \mathbf{E}[(\varphi * h_\varepsilon^t)(x + \xi_\varepsilon(t))], \tag{26}$$

где функция $h_\varepsilon^t(x)$ определена своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon^t(p) = \exp\left(t \int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon} \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^{j+1} p^{2j} y^{2j}}{(2j)!} \frac{dy}{y^{4k+2}}\right),$$

а $\xi_\varepsilon(t)$ – сложный пуассоновский процесс, заданный в виде стохастического интеграла

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} x\, \nu(ds, dx)$$

по пуассоновской случайной мере $\nu(ds, dx)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\nu(ds, dx) = \frac{ds\, dx}{|x|^{4k+2}}.$$

Показывается, что операторы этого семейства являются псевдодифференциальными операторами в $L_2(\mathbf{R})$.

Далее, показывается, что при всех $t \geqslant 0$ и $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$ семейство функций $u_\varepsilon(t, \cdot) = P_\varepsilon^t\, \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в метрике пространства Соболева $W_2^l(\mathbf{R})$, $l \in \mathbf{Z}_+$ к точному решению задачи Коши $u(t, \cdot) = e^{t\mathcal{A}_{2k}}\, \varphi$ и оценивается скорость сходимости. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $l \in \mathbf{Z}_+$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon \|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}}.$$

Далее, во второй части параграфа 1.1 строится аналогичное вероятностное представление исходной задачи Коши, но уже в виде аппроксимации решения математическими ожиданиями функционалов от случайных блужданий. Именно, при всех $n \in \mathbf{N}$ определяется случайный процесс

$$\zeta_n(t) = n^{-\frac{1}{4k+1}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j, \tag{27}$$

где $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих общее симметричное распределение. Предполагается, что соответствующее распределение абсолютно непрерывно относительно меры Лебега, а его плотность $q(x)$ при $|x| \to \infty$ имеет асимптотику специального вида. Процесс $\eta(t)$ – стандартный ($\mathbf{E}\eta(t) = t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$.

Далее, по процессу $\zeta_n(t)$ определяется операторная полугруппа P_n^t, действие которой на функции $\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R})$ определено формулой

$$[P_n^t\, \varphi](x) = \mathbf{E}[(\varphi * r_n^t)(x + \zeta_n(t))], \tag{28}$$

где функция $r_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{r}_n^t(p) = \exp\left(- nt \sum_{j=1}^{2k} \frac{(-1)^j \, \mu_{2j} \, (pn^{-\frac{1}{4k+1}})^{2j}}{(2j)!} \right) \tag{29}$$

(здесь $\mu_{2j} = \mathbf{E}\,\xi_1^{2j}$ – момент порядка $2j$ случайной величины ξ_1).

Далее, вводится обозначение $u_n(t,x) = [P_n^t\,\varphi](x)$.

Основной результат второй половины параграфа 1.1 сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $l \in \mathbf{Z}_+$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ctn^{-\frac{1}{4k+1}} \|\varphi\|_{W_2^{l+4k+2}(\mathbf{R})}.$$

Далее, в параграфе 1.2 рассматривается случай $m = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}$, который является более сложным. Здесь мы уже не можем определить полугруппу P_ε^t так, как это было сделано ранее, потому что символ соответствующего ей псевдодифференциального оператора будет иметь экспоненциальный рост. Чтобы справиться с этой проблемой привлечены некоторые идеи комплексного анализа.

Пусть $\nu(dt,dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty) \times \mathbf{R}$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt\,\Lambda(dx) = \frac{dt\,dx}{x^{4k}}.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ определим сложные пуассоновские процессы $\xi_\varepsilon^+(t)$ и $\xi_\varepsilon^-(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon^+(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,\infty)} x\,d\nu(s,x),$$

$$\xi_\varepsilon^-(t) = \iint\limits_{[0,t]\times(-\infty,-\varepsilon]} x\,d\nu(s,x).$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ случайные величины $\xi_\varepsilon^+(t)$ и $\xi_\varepsilon^-(t)$ независимы, так как они задаются стохастическими интегралами по непересекающимся множествам.

При построении полугруппы P_ε^t нами используются комплекснозначные случайные процессы $\sigma_+\,\xi_\varepsilon^+(t)$, $\sigma_-\,\xi_\varepsilon^-(t)$, $\sigma_-\,\xi_\varepsilon^+(t)$ и $\sigma_+\,\xi_\varepsilon^-(t)$, где

$$\sigma_+ = e^{\frac{i\pi}{4k-1}}, \quad \sigma_- = e^{-\frac{i\pi}{4k-1}}.$$

Далее, определяются проекторы Рисса $P_\pm$, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H_+^2(\mathbf{C}_+)$ и $H_-^2(\mathbf{C}_-)$ соответственно. На классе функций $L_1 \cap L_2(\mathbf{R})$ действие проекторов Рисса определено формулами

$$\varphi_+(x) = (P_+\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \tag{30}$$

$$\varphi_-(x) = (P_-\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp. \tag{31}$$

Отметим, что функции $\varphi_+(x)$, $\varphi_-(x)$ аналитически продолжаются в верхнюю и нижнюю комплексные полуплоскости соответственно.

Для каждого $\varepsilon > 0$ на функциях класса $L_2(\mathbf{R})$ определяется операторная полугруппа

$$[P_\varepsilon^t\,\varphi](x) = \mathbf{E}\,[(\varphi_- * h_\varepsilon^t)(x + \sigma_-\xi_\varepsilon^+(t) + \sigma_+\xi_\varepsilon^-(t)) + \,(\varphi_+ * h_\varepsilon^t)(x + \sigma_+\xi_\varepsilon^+(t) + \sigma_-\xi_\varepsilon^-(t))],$$

где функция $h_\varepsilon^t(x)$ определена своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon^t(p) = \exp\Bigg(-t\sum_{j=1}^{4k-1}\int\limits_\varepsilon^\infty \frac{(-i|p|\sigma_-y)^j}{j!}\frac{dy}{y^{4k}} - t\sum_{j=1}^{4k-1}\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{(-i|p|\sigma_+y)^j}{j!}\frac{dy}{y^{4k}}\Bigg).$$

Основной результат первой половины параграфа 1.2 сформулирован в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть $l \in \mathbf{Z}_+$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+4k}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l} \leqslant Ct\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+4k}}.$$

Далее, во второй части параграфа 1.2 строится аналогичное вероятностное представление исходной задачи Коши, но уже в виде аппроксимации решения математическими ожиданиями функционалов от случайных блужданий.

Рассматриваются две последовательности $\{\xi_j^\pm\}_{j=1}^\infty$ независимых одинаково распределённых неотрицательных (неположительных) случайных величин. Дополнительно предполагается, что случайные величины последовательностей $\{\xi_j^+\}_{j=1}^\infty$ и $\{\xi_j^-\}_{j=1}^\infty$ взаимно независимы, а распределение $\mathcal{P}^\pm$ случайной величины $\xi_1^\pm$ имеет плотность $q_\pm(x)$, удовлетворяющую условиям

$$q_+(x) = q_-(-x),\ x > 0,$$
$$q_+(x) = \frac{1}{x^{4k}}(1 + h(x)),\ x > 1,$$

где функция $h(x)$ удовлетворяет неравенству $|h(x)| \leqslant C\,x^{-\beta}$ для некоторых $\beta > 1$, $C > 0$.

Далее, для любого $n \in \mathbf{N}$ определяются два случайных процесса $\zeta_n^\pm(t)$ в виде

$$\zeta_n^\pm(t) = n^{-\frac{1}{4k-1}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j^\pm, \tag{32}$$

где $\eta(t)$ – стандартный ($\mathbf{E}\eta(t) = t$) пуассоновский процесс, не зависящий от последовательностей $\{\xi_j^+\}_{j=1}^\infty$ и $\{\xi_j^-\}_{j=1}^\infty$.

Далее, по процессам $\sigma_+\,\zeta_n^+(t)$, $\sigma_-\,\zeta_n^-(t)$, $\sigma_-\,\zeta_n^+(t)$ и $\sigma_+\,\zeta_n^-(t)$, где

$$\sigma_+ = e^{\frac{i\pi}{4k-1}},\quad \sigma_- = e^{-\frac{i\pi}{4k-1}},$$

нами определяется операторная полугруппа P_n^t, действие которой на функции $\varphi(x) \in L_2(\mathbf{R})$ определено формулой

$$[P_n^t\,\varphi](x) = \mathbf{E}[(\varphi_+ * r_n^t)(x + \sigma_+\zeta_n^+(t) + \sigma_-\zeta_n^-(t)) + (\varphi_- * r_n^t)(x + \sigma_-\zeta_n^+(t) + \sigma_+\zeta_n^-(t))],$$

где функция $r_n^t(x)$ задаётся своим преобразованием Фурье

$$\widehat{r}_n^t(p) = \exp\left(-nt\sum_{j=1}^{4k-2}\frac{\mu_j^+(i|p|\sigma_+ n^{-\frac{1}{4k-1}})^j}{j!}\right)\cdot\exp\left(-nt\sum_{j=1}^{4k-2}\frac{\mu_j^-(i|p|\sigma_- n^{-\frac{1}{4k-1}})^j}{j!}\right)$$

(здесь $\mu_j^\pm = \mathbf{E}\,(\xi_1^\pm)^j$ – момент порядка j случайной величины $\xi_1^\pm$).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $l \in \mathbf{Z}_+$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+4k}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство*

$$\|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ctn^{-\frac{1}{4k-1}}\|\varphi\|_{W_2^{l+4k}(\mathbf{R})}.$$

Во **второй главе** диссертации определяется аналог локального времени для процесса комплексного броуновского движения $\sigma\,w(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, где σ – комплексное число, удовлетворяющее условиям

$$0 < \arg\sigma \leqslant \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad |\sigma| = 1.$$

Сначала в параграфе 2.1 даётся определение соответствующего аналога $m = m(t,x)$, $(t,x) \in [0,T]\times\mathbf{R}$ в виде интеграла

$$m(t,x) = \int_0^t h(t,\tau,\,x - \sigma w(\tau))\,d\tau = \int_0^t\left(\frac{1}{2\pi}\int_{|p|<\sqrt{\frac{t}{b\,\tau}}} H(t,p)\,e^{-ip(x-\sigma w(\tau))}\,dp\right)d\tau. \tag{33}$$

Показывается, что интеграл (33) с вероятностью 1 сходится при всех $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{R}$.

В этом же параграфе показывается, что случайная функция $m(t,x)$ наследует некоторые свойства броуновского локального времени такие, как:

1. Функция $m(t,x)$ по переменной x с вероятностью 1 является гёльдеровской функцией с показателем $\alpha \in (0,1)$ (здесь следует отметить, что для броуновского локального времени соответствующий показатель лежит в интервале $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$).

2. При всех $t > 0$ и $\alpha \in [0,\frac{3}{2})$ функция $m(t,\cdot)$ принадлежит классу Соболева $W_2^\alpha(\mathbf{R})$.

3. При всех $f \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо соотношение

$$\int_0^t (h * f)(t,\tau,\sigma\,w(\tau))\,d\tau = \int_{\mathbf{R}} f(y)\,m(t,y)\,dy \tag{34}$$

(здесь $(h * f)(t,\tau,\cdot)$ – стандартная свёртка функций $h(t,\tau,\cdot)$ и f соответственно).

Соответствующий результат сформулирован в виде теоремы 2.2.

Далее, в параграфе 2.2 обобщается другой результат, известный для броуновского локального времени, именно, показывается, что для решения $u(x)$ дифференциального уравнения

$$-\frac{\sigma^2}{2}\,u''(x) = f(x), \quad f(x) \in L_2(\mathbf{R}),$$

в случае, когда f принадлежит области значений оператора $-\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2}{dx^2}$, справедливо вероятностное представление $u(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{E}\, f * m\,(t,x)$. Этот результат сформулирован в виде теоремы 2.5.

В **третьей главе** диссертации определяется и исследуются свойства семейства случайных линейных операторов $\mathcal{R}^t_\lambda : L_2(\mathbf{R}^2) \to L_2(\mathbf{R}^2)$, дающих вероятностное представление резольвенты R_λ двумерного оператора Шрёдингера $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\,\Delta + V(x)$.

Сначала в параграфе 3.1 рассматривается случай $V(x) \equiv 0$. В первой половине данного параграфа исследуется случай $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, приводится явное выражение для соответствующего семейства операторов

$$(\mathcal{R}^t_\lambda\, f)(x) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} f(x - \|w(\tau)\|\cdot\theta)\,dS(\theta)\right]d\tau, \tag{35}$$

где $\|\cdot\|$ – стандартная евклидова норма в пространстве $\mathbf{R}^2$, а $dS(\theta)$ – длина элемента дуги единичной окружности S^1. Показывается, что операторы этого семейства допускают продолжение до ограниченных интегральных операторов в $L_2(\mathbf{R}^2)$ (теорема 3.1).

Далее, во второй половине параграфа 3.1 вводится определение семейства операторов $\mathcal{R}^t_\lambda : L_2(\mathbf{R}^2) \to L_2(\mathbf{R}^2)$ для случая $\operatorname{Re}\lambda > 0$, показывается, что операторы этого семейства также допускают продолжение до ограниченных интегральных операторов в $L_2(\mathbf{R}^2)$ (теорема 3.3). В конце параграфа 3.1 доказывается теорема о вероятностном представлении резольвенты двумерного оператора Шрёдингера с нулевым потенциалом (теорема 3.5).

Затем в параграфе 3.2 рассматривается случай, когда потенциал $V(x)$ – неотрицательная, ограниченная непрерывная функция, степеннным образом убывающая на бесконечности

$$V(x) = O\left(\|x\|^{-\alpha}\right),\ \alpha > 2. \tag{36}$$

Сначала приводятся необходимые сведения о собственных функциях непрерывного спектра оператора Шрёдингера $\varphi(x,k)$. Затем при всех $t > 0$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ определяется случайная функция $g^t_\lambda(x,k)$

$$g^t_\lambda(x,k) = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,\overline{\varphi\left(w_x(\tau),k\right)}\,e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\,ds}\,d\tau, & \|k\| < m \\ (2\pi)^{-1}\,\overline{\varphi(x,k)}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,\psi\left(w_0(\tau),\|k\|\right)e^{-\int_0^\tau V(w_0(s))\,ds}\,d\tau, & \|k\| \geqslant m \end{cases},$$

где функция $\psi = \psi(y,\rho)$, $(y,\rho) \in \mathbf{R}^2 \times [m,\infty)$ определена формулой

$$\psi(y,\rho) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} \frac{\varphi\left(y,\rho\,\theta\right)}{\varphi\left(0,\rho\,\theta\right)}\,dS(\theta), \tag{37}$$

где $dS(\theta)$ – элемент длины дуги единичной окружности, а m – некоторое число, которое определяется потенциалом $V(x)$.

Далее, показывается, что случайная функция

$$\overline{r_\lambda^t(x,y)} = \mathcal{F}^*[\overline{g_\lambda^t\,(x,\cdot)}](y),$$

где $\mathcal{F}$ – обобщённое преобразование Фурье, представляющее из себя разложение по собственным функциям непрерывного спектра оператора Шрёдингера ($\mathcal{F}^*$ – сопряженный к $\mathcal{F}$ оператор), при всех $x \in \mathbf{R}^2$ и $\alpha \in [0, 1/2)$ по переменной y с вероятностью единица принадлежит классу Соболева $W_2^\alpha(\mathbf{R}^2)$ (теорема 3.6).

Далее, при всех $t > 0$ и $\lambda \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ на множестве функций $f \in L_2(\mathbf{R}^2)$ определяется случайный интегральный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, как

$$\mathcal{R}_\lambda^t\, f(x) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Показывается, что соответствующий интегральный оператор с вероятностью 1 является ограниченным оператором в $L_2(\mathbf{R}^2)$ (теорема 3.7).

В конце параграфа 3.2 доказывается теорема о вероятностном представлении резольвенты оператора Шрёдингера.

Теорема 5. 1. *Если* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *то тогда при всех* $f \in L_2\,(\mathbf{R}^2)$ *выполнено*

$$R_\lambda\, f(x) = \mathbf{E} \int\limits_{\mathbf{R}^2} r_\lambda^\infty(x,y)\, f(y)\, dy.$$

2. *Если* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *и* $\lambda \neq 0$, *то тогда при всех* $f \in L_2\,(\mathbf{R}^2)$ *выполнено*

$$R_\lambda\, f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_{\mathbf{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\, f(y)\, dy.$$

3. *Если* $\lambda = 0$, *то тогда при всех* $f \in \operatorname{Dom}(R_0)$ *выполнено*

$$R_0\, f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_{\mathbf{R}^2} r_0^t(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Список публикаций автора по теме диссертации

[1] А. К. Николаев, М. В. Платонова, *Невероятностные аналоги процесса Коши.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2018, том 474, с. 183–194.

[2] А. К. Николаев, М. В. Платонова, *Предельные теоремы о сходимости к обобщённым процессам типа Коши.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2019, том 486, с. 214–228.

[3] А. К. Николаев, *Аналог локального времени для комплекснозначного винеровского процесса.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2021, том 505, с. 172–184.

[4] А. К. Николаев, *О вероятностном представлении резольвенты двумерного оператора Лапласа.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2022, том 510, с. 189–200.

[5] А. К. Николаев, *О вероятностном представлении резольвенты двумерного оператора Шрёдингера.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2023, том 526, с. 140–158.

Список литературы

[1] Lachal A., *First hitting time and place, monopoles and multipoles for pseudo–processes driven by the equation* $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$. — Electronic Journal of Probability, 2007, vol. 12, p. 300–353.

[2] Lachal A., *First hitting time and place for the pseudo–processes driven by the equation* $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^n}{\partial x^n}$ *subject to a linear drift.* — Stochastic Processes and their Application, 2008, vol. 118, p. 1–27.

[3] Lachal A., *A survey on the pseudo–process driven by the high–order heat–type equation* $\frac{\partial}{\partial t} = \pm\frac{\partial^N}{\partial x^N}$ *concerning the first hitting times and sojourn times.* — Methodology and Computing in Applied Probability, 2014, vol. 14, p. 549–566.

[4] Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2008, том 361, с. 145– 166.

[5] Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Теоремы о сходимости распределений стохастических интегралов к знакопеременным мерам и локальные предельные теоремы для больших уклонений.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2009, том 368, с. 201–228.

[6] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2011, том 396, с. 111–143.

[7] И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностный подход к построению решений одномерных начально-краевых задач.* — Теория вероятн. и ее примен., 2013, том 58, с. 255–281.

[8] М. В. Платонова, *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2015, том 442, с. 101–117.

[9] М. В. Платонова, *Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов.* — Диссертация, 2017, с. 1–132.

[10] П. Н. Иевлев, *Вероятностное представление решения задачи Коши для многомерного уравнения Шрёдингера.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2017, том 466, с. 145–158.

[11] S. M. Berman, *Local times and sample function properties of stationary Gaussian process.* — Trans. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 137, p. 277–299.