Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Болохов Тимур Анатольевич

Расширения квадратичных форм векторного оператора Лапласа и сингулярные возмущения оператора Шредингера

01.01.03 – Математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н.
М. А. Семенов-Тян-Шанский

Санкт-Петербург – 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Оператор Лапласа является универсальным объектом, используемым в различных областях механики и физики. В квантовой механике этот оператор появляется как кинетическая часть оператора Шредингера [1], в электродинамике, теории поля, механике сплошных сред и гидродинамике — в качестве оператора квадратичной формы функционала потенциальной энергии [2], [3], [4], в термодинамике — как оператор, определяющий скорость передачу тепла в уравнении теплопроводности [5]. Универсальность оператора Лапласа заключается, прежде всего, в возможности точно решить однородное уравнение с его участием, как в координатном представлении, с помощью обратного оператора или функции Грина [6, стр. 73], так и с помощью преобразования Фурье, либо другого способа разделения переменных [7]. Более сложные уравнения, содержащие кроме оператора Лапласа также добавки, пропорциональные малому параметру, могут быть точно, либо приближенно решены методом теории возмущений [8], то есть с помощью разложения в ряд по параметру. Среди примеров, допускающих такой вид решений, можно перечислить метод функционального интегрирования для вычисления матрицы рассеяния в теории поля [3] и корреляционных функций в статистической физике [9], метод приближения Борна в теории рассеяния [1, стр. 156] и другие. Все эти методы используют в том или ином виде функции Грина, разложение по собственным функциям (преобразование Фурье) или же выражение для квадратичной формы обратного оператора.

В то же время, перечисленные выше методы обладают существенным недостатком: они подразумевают наличие (малого) параметра и общую сходимость ряда теории возмущений в исследуемой задаче. Этим свойством обладают далеко не все модели, рассматриваемые в механике и физике. В некоторых случаях теория возмущений оказывается неприменимой и не дает корректные результаты.

На этом фоне теория взаимодействия с сингулярными потенциалами (также называемая с литературе теорией сингулярных возмущений [10]) показала, что существуют объекты, которые являются возмущениями оператора Лапласа определенного вида и обладают большей частью его полезных свойств. В частности, гамильтониан системы по-прежнему представляется в виде квадратичной формы оператора, действующего в пространстве функций, а не является формой более высокой степени. Кроме того, возмущенные операторы допускают точное описание в терминах резольвенты, подобной резольвенте оператора Лапласа [11], или, что эквивалентно, в терминах спектрального разложения с простыми спектральными проекторами. Эти свойства позволяют использовать теорию взаимодействия с сингулярными потенциалами, как для полного описания каких-либо физических или механических систем, так и в качестве точных затравочных решений при построении теории возмущений, как разложения по малому параметру.

В работе [11] модель скалярной трехмерной частицы, взаимодействующей с точечным потенциалом была исследована с точки зрения теории операторов. Было показано, что для данной модели можно выбрать такой режим перенормировки (стремления к нулю константы взаимодействия и расширения области учитываемых состояний), что оператор Шредингера приобретает строгий математический смысл. Ему соответствует некоторое расширение симметрического оператора, получаемого из оператора Лапласа сужением области определения до пространства функций, исчезающих в начале координат (точке взаимодействия) вместе с первой производной. Для этого расширения вычисляется резольвента, а через нее — матрица рассеяния и остальные характеристики модели.

Вместе с тем, взаимодействие с сингулярными потенциалами может быть описано в терминах расширений квадратичной формы оператора Лапласа (оператора Шредингера свободной частицы). Такое описание является простым и наглядным, так как расширенная квадратичная форма имеет смысл математического ожидания для энергии взаимодействующей частицы в каком-либо квантовом состоянии. Вид этого расширения в координатном представлении определяется из условий физической задачи, а само расширение квадратичной формы изначально имеет строгий математический смысл и не требует проведения перенормировки. Самосопряженный оператор Шредингера однозначно определяется с помощью теоремы Фридрихса-Стоуна [42], далее могут быть вычислены его резольвента и спектральное разложение.

Из этих свойств также вытекает возможность применения теории взаимодействия с сингулярными потенциалами, сформулированной в терминах квадратичных форм, для описания функционала потенциальной энергии в электродинамике или теории поля. Расширения квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном подпространстве соответствуют взаимодействию классического электромагнитного поля с точечным объектом (рассеяние электромагнитной волны на точечном заряде). Таким образом, для решения задачи построения резольвенты или спектрального разложения самосопряженного оператора, задающего квадратичную форму функционала энергии в электродинамике, оказывается естественно использовать методы теории взаимодействия с сингулярными потенциалами.

В данной работе описанные выше методы применяются к ранее не исследованным случаям взаимодействия поперечного и продольного векторных полей с сингулярными потенциалами. В сферических координатах на множестве поперечных или продольных функций в трехмерном пространстве, исчезающих в окрестности начала координат вместе с первыми производными, строится симметрический оператор, а затем исследуются его самосопряженные расширения. Для самосопряженных расширений радиальных частей этого оператора строятся резольвенты и спектральные разложения, а затем производится перенос резольвенты на пространство функций трех переменных. В результате выводятся выражения для замкнутых квадратичных форм, соответствующих взаимодействию поперечного или продольного поля со сферически-симметричными сингулярными потенциалами.

Степень разработанности темы исследования. Работа является распространением теории взаимодействия с сингулярными потенциалами, описываемой в терминах расширений квадратичных форм, на случай поперечного и продольного подпространств в пространстве векторных функций. Математически строгая теория взаимодействия квантово-механической частицы (частиц) с сингулярными потенциалами берет свое начало с работы [11], в которой взаимодействие скалярной трехмерной частицы с точечным потенциалом рассматривалось с точки зрения теории расширений симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Дальнейшее развитие это теории включало в себя теорию обобщенных сингулярных возмущений [12], нескольких частиц с сингулярным взаимодействием [15], [16], а также взаимодействий, сосредоточенных на подмногообразиях низкой размерности [17]. На данный момент теория взаимодействия с сингулярными потенциалами представляет из себя хорошо изученную область математической физики, опирающуюся на фундаментальный аппарат функционального анализа (см. обзор [10]). Однако, ее приложение, представленное в данной работе, до сих пор оставалось вне поля зрения исследователей.

Базис векторных сферических гармоник был в различных вариантах введен в работах [18], [19] и получил дальнейшее развитие в математической физике [20], в приложениях к магнитостатике [21], и электродинамике [22] и гидродинамике [23].

Теория расширений квадратичных форм опирается на работы Фридрихса и Стоуна [42] и их дальнейшее развитие М. Г. Крейном [44]. Ее приложения к взаимодействию с сингулярными потенциалами были описаны в работах [14], [6, стр. 190].

Цели и задачи диссертационной работы: Целью настоящей диссертации является исследование свойств расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах пространства векторных функций трех переменных, порожденных взаимодействием с точечной сингулярностью. Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- На множестве функций, исчезающих в окрестности начала координат вместе с первыми производными, в сферических координатах были построены симметрические операторы, и показано, что они имеют нетривиальные индексы дефекта.
- Были исследованы самосопряженные расширения указанных операторов.
- Для расширений радиальных частей были построены резольвенты и спектральные разложения, а затем построены резольвенты операторов в трехмерном пространстве.
- Были получены выражения для замкнутых квадратичных форм, соответствующих взаимодействию поперечного или продольного поля со сферически симметричными сингулярными потенциалами.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, в частности, описание самосопряженных расширений оператора Лапласа на поперечном подпространстве и расширений его квадратичной формы могут быть использованы в электродинамике, в физике твердого тела, для описания Рэлеевского рассеяния, а также в любой другой теории, содержащей взаимодействие поперечных волн с точечными сингулярностями среды распространения.

Методология и методы исследования. Исследование использует такие широко распространенные методы теории операторов в Гильбертовом пространстве как расширение симметрических операторов с конечными индексами дефекта с помощью преобразования Кэли, вычисление спектрального разложения самосопряженного оператора через полюса его резольвенты и скачек резольвенты на границе разреза в спектральной плоскости. Резольвенты самосопряженных расширений оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах строятся с помощью формулы Крейна для разности резольвент. Также используются метод разделения переменных с использованием базиса векторных сферических гармоник и теория замкнутых расширений квадратичных форм, порожденных полуограниченным симметрическим оператором.

Положения, выносимые на защиту:

1. Показано, что существует параметризация поперечного и продольного подпространств пространства векторных функций трех переменных, в которой индуцированные скалярные произведения и радиальные части оператора Лапласа задаются одними и теми же дифференциальными операциями (для поперечного подпространства это свойство относится только к половине параметризующих радиальных функций).

2. Доказано, что в подпространствах с орбитальным моментом $l = 1$ радиальные части оператора Лапласа на множестве гладких функций, быстро убывающих в начале координат, в индуцированном скалярном произведении являются симметрическими операторами с индексами дефекта (1,1). Построены самосопряженные расширения этих операторов и их спектральные разложения.

3. Построены выражения для замкнутых сферически симметричных расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах, определяемые указанными выше самосопряженными расширениями радиальных операторов.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность исследования обусловлена высокой степенью разработанности и длительной историей применения в математической физике используемых в работе методов теории операторов в Гильбертовых пространствах. Результаты докладывались на научных семинарах Лаборатории Математических проблем физики Санкт-Петербургского отделения Математического Института им. В. А. Стеклова РАН.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в работах [24], [26], [27], [31], из них 3 статьи [24], [26], [27] в рецензируемом издании, входящем в список ВАК.

Личный вклад автора. Все результаты диссертации и положения, выносимые на защиту, получены автором лично и опубликованы без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 82 страницы. Библиография включает 45 наименований на 4 страницах.

Условные обозначения

В работе используются следующие обозначения:

- индекс l используется для обозначения орбитального момента $0 \leq l \leq \infty$
- символ $\hat{l}$ используется для обозначения величины $\sqrt{l(l+1)}$
- индекс m используется для обозначения проекции орбитального момента на третью координатную ось, $0 \leq |m| \leq l$.
- символы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ используются для обозначения векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$
- индексы j и k нумеруют компоненты векторов x_j, y_k в пространстве $\mathbb{R}^3$
- по повторяющимся индексам j, k производится суммирование
- символ ∂_k, наряду с $\frac{\partial}{\partial x_k}$, обозначает частную производную в направлении k-го координатного орта
- символ $\vec{\partial}$ обозначает вектор с компонентами ∂_k
- обозначение D_l используется для дифференциальной операции $r^l \frac{d}{dr} r^{-l}$
- оператор Лапласа (дифференциальная операция) Δ имеет следующий знак:

$$\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

Глава 1

Векторный оператор Лапласа в сферических координатах

Для разделения переменных при действии скалярного оператора Лапласа в сферических координатах естественно воспользоваться базисом сферических функций. В векторном случае аналогом этих функций являются векторные сферические гармоники. В этой главе будет предъявлена параметризация векторных функций в сферической системе координат, позволяющая явно выделить поперечные и продольные подпространства. Действие оператора Лапласа при этом сводится к действию одномерных радиальных операторов на пространствах с некоторыми индуцированными скалярными произведениями.

1.1. Скалярный оператор Лапласа

Начнем описание векторного оператора Лапласа в сферических координатах со скалярного примера. Скалярный оператор Лапласа действует в пространстве два раза дифференцируемых функций трех переменных по правилу

$$\Delta : \quad f(\vec{x}) \to \Delta f(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}.$$

При переходе к сферическим координатам

$$\vec{x} = \vec{x}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix},$$

$$0 \le r, \quad 0 \le \vartheta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

скалярный оператор Лапласа приобретает вид

$$\Delta f(\vec{x}(r,\vartheta,\varphi)) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}f - \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)f.$$

Стандартная процедура разделения переменных

$$f(x(r,\vartheta,\varphi)) = \sum_{0\le|m|\le l} \nu_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{1.1}$$

позволяет переписать действие оператора Лапласа в виде

$$\Delta f = \sum_{0\le|m|\le l} \Big(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)\nu_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta,\varphi), \tag{1.2}$$

где $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ – это сферические гармоники, то есть функции на сфере $\mathbb{S}^2$, такие, что

$$-\frac{1}{\sin\vartheta}\Big(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big)Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = l(l+1)Y_{lm}(\vartheta,\varphi),$$

$$\int\limits_0^\pi d\vartheta\, \sin\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \overline{Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Приведенные далее формулы не будут зависеть от конкретного вида параметризации точки на сфере $\mathbb{S}^2$ через углы ϑ,φ, поэтому мы для упрощения записи заменим переменные ϑ,φ на общую координату на сфере Ω. Нам важен лишь факт полноты набора $Y_{lm}(\Omega)$ [28, стр. 81], который состоит в том, что любую достаточно гладкую функцию можно однозначно представить в виде суммы (1.1).

Таким образом, формула (1.2) показывает, что действие оператора Лапласа сводится к действию операторов

$$\tau_l: \quad \nu_l(r) \to -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}\nu_l(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}\nu_l(r) \tag{1.3}$$

на пространстве два раза дифференцируемых функций заданных на положительной полуоси. Скалярному произведению в трехмерном пространстве

$$\big(f,g\big)_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{f(\vec{x})} g(\vec{x})\, d^3x \tag{1.4}$$

соответствуют интегралы по полуоси с весом r^2

$$\big(f_{\nu_{lm}}, f_{\tilde{\nu}_{l'm'}}\big)_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \int\limits_0^\infty \overline{\nu_{lm}(r)}\tilde{\nu}_{lm}(r) r^2 dr, \tag{1.5}$$

где

$$f_{\nu_{lm}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \nu_{lm}(r)Y_{lm}(\Omega), \quad f_{\tilde{\nu}_{l'm'}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \nu_{l'm'}(r)Y_{l'm'}(\Omega).$$

При помощи функциональной замены $u_l(r) = r\nu_l(r)$ операторы $\mathcal{T}_l$ преобразуются в операторы

$$T_l: \quad u_l \to T_l u_l = -\frac{d^2}{dr^2}u_l + \frac{l(l+1)}{r^2}u_l, \tag{1.6}$$

а скалярное произведение переходит в интеграл по полуоси

$$\left(f_{u_{lm}}, f_{v_{l'm'}}\right)_{\mathbb{R}^3} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}(u_{lm}, v_{lm}) \equiv \delta_{ll'}\delta_{mm'}\int\limits_0^\infty \overline{u_{lm}(r)}v_{lm}(r)dr, \tag{1.7}$$

где

$$f_{u_{lm}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{u_{lm}(r)}{r}Y_{lm}(\Omega), \quad f_{v_{l'm'}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{v_{l'm'}(r)}{r}Y_{l'm'}(\Omega).$$

1.2. Векторные сферические гармоники

Для параметризации векторных функций вместо скалярного базиса Y_{lm} введем три векторные сферические гармоники [18], [19]

$$\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) = \frac{\vec{x}}{r}Y_{lm}(\Omega), \quad 0 \le l, \quad |m| \le l, \tag{1.8}$$

$$\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) = (l(l+1))^{-1/2} r\vec{\partial}Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \le l, \quad |m| \le l, \tag{1.9}$$

$$\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) = (l(l+1))^{-1/2}(\vec{x} \times \vec{\partial})Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \le l, \quad |m| \le l. \tag{1.10}$$

Несмотря на то, что в определение этих функций входит переменная r и зависящие от нее координаты $\vec{x}$, несложно увидеть, что функции $\vec{\Upsilon}$, $\vec{\Psi}$ и $\vec{\Phi}$ зависят только от углов Ω. Векторные сферические гармоники, определенные как (1.8)–(1.10), при интегрировании по углам Ω ортогональны друг другу и нормированы на единицу [22]

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Upsilon}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$
$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = 0, \quad \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}.$$

Векторные сферические гармоники позволяют написать однозначное представление векторной функции $\vec{f}(\vec{x})$ в следующем виде [20]

$$\vec{f}(\vec{x}) = \nu_{00}(r)\vec{\Upsilon}_{00} + \sum_{1\le|m|\le l} \big(\nu_{lm}(r)\vec{\Upsilon}_{lm} + \psi_{lm}(r)\vec{\Psi}_{lm} + \phi_{lm}(r)\vec{\Phi}_{lm}\big), \tag{1.11}$$

при этом параметризующие функции ν_{lm}, ψ_{lm}, ϕ_{lm} принадлежат пространству со скалярным произведением (1.5).

1.2.1. Действие оператора Лапласа и диагонализация

Действие векторного оператора Лапласа на векторные функции сводится к действию скалярного оператора Лапласа на каждую компоненту вектора

$$\Delta f^j(\vec{x}) = -\frac{d^2}{dx_k^2} f^j(\vec{x}).$$

Для каждого слагаемого разложения (1.11) при действии оператора Δ имеет место разделение переменных

$$\Delta\big(z(r)\vec{Z}_{lm}(\Omega)\big) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}z(r)\vec{Z}_{lm}(\Omega) + z(r)\Delta\vec{Z}_{lm}(\Omega), \quad \vec{Z} = \vec{\Upsilon}, \vec{\Psi}, \vec{\Phi}. \tag{1.12}$$

Отсутствие перекрестного слагаемого (скалярного произведения градиентов) в этой формуле следует из того факта, что градиент функции радиуса $\partial_k z(r)$ всегда направлен вдоль радиус-вектора $\vec{x}$, а градиент функции угловых переменных $\partial_k \vec{Z}(\Omega)$ всегда направлен по касательной к сфере с центром в начале координат. Отсюда следует, что эти градиенты ортогональны друг другу.

Действие оператора Δ на векторные сферические гармоники не диагонально (при $l \geq 1$), однако, в нормировке (1.8)–(1.10) оно оказывается симметричным [29] (см. вычисления в приложении 1.5.1)

$$\Delta\vec{\Upsilon}_{lm} = (2 + l(l+1))r^{-2}\vec{\Upsilon}_{lm} - 2\sqrt{l(l+1)}r^{-2}\vec{\Psi}_{lm}, \tag{1.13}$$

$$\Delta\vec{\Psi}_{lm} = -2\sqrt{l(l+1)}r^{-2}\vec{\Upsilon}_{lm} + l(l+1)r^{-2}\vec{\Psi}_{lm}, \tag{1.14}$$

$$\Delta\vec{\Phi}_{lm} = l(l+1)r^{-2}\vec{\Phi}_{lm} \tag{1.15}$$

(отметим, что эти же формулы верны и при $l = 0$ для компоненты $\vec{\Upsilon}_{00}$). Замена базиса [24]

$$\begin{pmatrix} \vec{\Upsilon}_{lm} \\ \vec{\Psi}_{lm} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{\varUpsilon}_{lm} = (2l+1)^{-1/2}(\sqrt{l}\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l+1}\vec{\Psi}_{lm}) \\ \vec{\varPsi}_{lm} = (2l+1)^{-1/2}(-\sqrt{l+1}\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{l}\vec{\Psi}_{lm}) \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

диагонализует действие оператора Лапласа

$$\Delta\vec{\varUpsilon}_{lm} = (l-1)l\vec{\varUpsilon}_{lm},$$

$$\Delta\vec{\varPsi}_{lm} = (l+1)(l+2)\vec{\varPsi}_{lm}.$$

Здесь можно заметить, что при $l = 1$ действие векторного оператора Лапласа на подпространстве компоненты $\vec{\varUpsilon}_{1m}$ совпадает с действием скалярного лапласиана на подпространстве сферически симметричных гармоник (1.3)

$$\Delta\big(\nu(r)\vec{\varUpsilon}_{1m}\big) = -r^{-2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\nu(r)\vec{\varUpsilon}_{1m}, \quad m = -1, 0, 1.$$

1.3. Поперечное и продольное подпространства

Для физических приложений, в частности, для электродинамики в калибровке Кулона, представляют интерес свойства оператора Лапласа при действии на поперечные функции. В разложении (1.11) только последняя сумма является поперечной, в то время как слагаемые в первых двух содержат также и продольную составляющую. Поэтому далее мы будем рассматривать параметризацию, отличную от (1.11).

В электродинамике вводятся понятия поперечного подпространства $P^{\perp}$, как множества дифференцируемых векторных функций, удовлетворяющих условию

$$\vec{\partial} \cdot \vec{f}(\vec{x}) \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j} f^j(\vec{x}) = 0, \tag{1.17}$$

и продольного подпространства $P^{\|}$, как множества функций, являющихся градиентами каких-либо скаляров

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{\partial}\phi(\vec{x}). \tag{1.18}$$

Очевидно, что если $\vec{f}(\vec{x})$ — дифференцируемая функция, а $\phi(\vec{x})$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то функции $\vec{f}(\vec{x})$ и $\vec{g}(\vec{x})$ ортогональны в скалярном произведении из пространства $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^3$

$$(\vec{g}, \vec{f})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{g}(\vec{x})} \vec{f}(\vec{x})\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{\partial}\phi(\vec{x})} \vec{f}(\vec{x})\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\phi(\vec{x})} \vec{\partial} \cdot \vec{f}(\vec{x})\, d^3x = 0.$$

То есть любые две гладкие функции из подпространств $P^{\perp}$ и $P^{\|}$ ортогональны и при этом множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^3$.

В монографии [25, стр. 196] приводится следующее

Утверждение. *Ортогональные подпространства $P^{\perp}$ и $P^{\|}$, определенные на гладких функциях через свойства (1.17) и (1.18), допускают замыкание в $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^3$.*

То есть если $\vec{f}_n \in P^{\perp}$, $\vec{g}_n \in P^{\|}$ и $\|\vec{f}_n - \vec{f}\| \to 0$, $\|\vec{g}_n - \vec{g}\| \to 0$, то $(\vec{f}, \vec{g})_{\mathbb{R}^3} = 0$. Далее мы будем пользоваться этим утверждением для того, чтобы проверять свойство продольности и поперечности только на дифференцируемых функциях. А под обозначениями $P^{\perp}$ и $P^{\|}$ подразумевать замкнутые подпространства.

1.3.1. Поперечные и продольные параметризации

Используя векторные сферические гармоники, любую достаточно гладкую векторную функцию $\vec{f}(\vec{x})$ можно параметризовать с помощью функции v_0 и трех наборов $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ функций радиальной переменной $r = |x|$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0 + \sum_{1\le l, |m|\le l}\big((\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \tag{1.19}$$

$$+ \sum_{1\le l, |m|\le l}\big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \sum_{1\le l, |m|\le l}\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm} \tag{1.20}$$

(здесь и далее мы используем сокращение $\hat{l} = \sqrt{l(l+1)}$). В такой параметризации первое слагаемое и первая сумма представляет из себя продольную компоненту

$$\frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0 = \vec{\partial}Y_0\int\limits_0^r \frac{v_0(\tilde{r})}{\tilde{r}}d\tilde{r}, \quad (\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm} = \vec{\partial}\,\frac{v_{lm}}{r}Y_{lm},$$

а две оставшихся — поперечную

$$\vec{\partial}\cdot\big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) = 0, \quad \vec{\partial}\cdot\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm} = 0$$

Линейные подпространства векторных функций, порождаемые первым слагаемым и тремя суммами в разложении (1.19), (1.20) мы будем обозначать, соответственно, $P_0^{\|}$, $P_1^{\|}$, $P_1^{\perp}$, $P_2^{\perp}$.

Для доказательства поперечности функций из $P_2^{\perp}$ проведем следующие вычисления

$$\vec{\partial}\cdot\big(\phi(r)\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)\big) = \vec{\partial}\phi(r)\cdot\vec{\Phi}_{lm} + \phi(r)\vec{\partial}\cdot\vec{\Phi}_{lm} =$$
$$= \hat{l}^{-1}\big(\phi'(r)r^{-1}\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm} + \phi(r)\vec{\partial}\cdot(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm}\big) = 0,$$

так как

$$\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{\partial}) = 0, \quad \vec{\partial}\cdot(\vec{x}\times\vec{\partial}) = 0.$$

Поперечность функций из $P_1^{\perp}$ следует из соотношений

$$\vec{x}\cdot\vec{\partial}Y_{lm}(\Omega) = 0, \quad \vec{\partial}\cdot\frac{\vec{x}}{r} = \frac{2}{r}, \quad \vec{\partial}\cdot\vec{\partial}Y_{lm} = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_{lm},$$

действительно

$$\vec{\partial}\cdot\big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) =$$
$$= \hat{l}Y_{lm}\big((\frac{u'_{lm}}{r^2} - \frac{2u_{lm}}{r^3})\frac{\vec{x}}{r}\cdot\frac{\vec{x}}{r} + \frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\partial}\cdot\frac{\vec{x}}{r}\big) + \hat{l}^{-1}u'_{lm}\vec{\partial}\cdot\vec{\partial}Y_{lm} = 0.$$

Это равенство также можно можно проверить с помощью представления для поперечных функций через потенциал Дебая

$$\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}=\vec{\partial}\times\frac{u_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}=\vec{\partial}\times(\vec{\partial}\times\vec{x})\frac{u_{lm}}{r}Y_{lm},$$

(см. прил. 1.5.2), которое было введено для потенциалов общего вида в [30]. Очевидно, что дивергенция $\vec{\partial}\cdot$ при применении к правой части этого равенства дает ноль.

Параметризация (1.19)–(1.20), конечно, не является единственно возможной, мы выбрали ее таким образом, чтобы в дальнейшем скалярное произведение было согласовано с действием оператора Лапласа.

В заключение приведем формулы преобразования от векторной функции $\vec{f}(\vec{x})$ к параметрам $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$, то есть преобразования, обратного к подстановке (1.19), (1.20)

$$v_{lm}(r)=\int\limits_0^\infty ds\,T_l^{-1}(r,s)\int\limits_{\mathbb{S}^2}d\Omega\,\big(\hat{l}\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}-\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}s^2\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(s,\Omega)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3x\,\big((\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{s}T_l^{-1}(r,s))\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}+\frac{\hat{l}^2}{s}T_l^{-1}(r,s)\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(\vec{x}),\qquad(1.21)$$

$$u_{lm}(r)=\int\limits_0^\infty ds\,T_l^{-1}(r,s)\int\limits_{\mathbb{S}^2}d\Omega\,\big(\hat{l}\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}-\frac{\partial}{\partial s}s\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(s,\Omega)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3x\,\big(\frac{\hat{l}}{s^2}T_l^{-1}(r,s)\overline{\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega)}+\frac{1}{s}(\frac{\partial}{\partial s}T_l^{-1}(r,s))\overline{\vec{\Psi}_{lm}(\Omega)}\big)\cdot\vec{f}(\vec{x}),\qquad(1.22)$$

$$\phi_{lm}(r)=r\int\limits_{\mathbb{S}^2}d\Omega\,\overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\cdot\vec{f}(r,\Omega)=\frac{1}{r}\int\limits_{\mathbb{R}^3}d^3x\,\delta(r-s)\overline{\vec{\Phi}_{lm}(\Omega)}\cdot\vec{f}(\vec{x}),\qquad(1.23)$$

(см. формулы (27), (28) из [37]). Здесь $\vec{x}=\vec{x}(s,\Omega)$, а $T_l^{-1}(r,s)$ — это ядра операторов, обратных к операторам T_l

$$T_l^{-1}(r,s)=\frac{1}{2l+1}\big(\frac{s^{l+1}}{r^l}\theta(r-s)+\frac{r^{l+1}}{s^l}\theta(s-r)\big)\qquad(1.24)$$

(см., например, [28]).

1.3.2. Индуцированные скалярные произведения

Прежде чем вычислить скалярное произведение для наборов v_0, $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ в параметризации (1.19), (1.20), убедимся, что любые перекрестные слагаемые из первых двух сумм ортогональны друг другу: если

$$\vec{g}_{v_{lm}}(\vec{x}(r,\Omega)) = (\frac{v_{lm}(r)}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) + \hat{l}\frac{v_{lm}(r)}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}(\Omega), \tag{1.25}$$

$$\vec{f}_{u_{l'm'}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \hat{l}'\frac{u_{l'm'}(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{l'm'}(\Omega) + \frac{u'_{lm}(r)}{r}\vec{\Psi}_{l'm'}(\Omega), \tag{1.26}$$

то

$$\begin{aligned}
(\vec{g}_{v_{lm}}, \vec{f}_{u_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} &\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{g}_{v_{lm}}(\vec{x})} \cdot \vec{f}_{u_{l'm'}}(\vec{x})\, d^3x = \\
&= \iint \overline{\Big((\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}\Big)} \cdot \Big(\hat{l}'\frac{u_{l'm'}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{l'm'} + \frac{u'_{l'm'}}{r}\vec{\Psi}_{l'm'}\Big)\, d\Omega\, r^2 dr = \\
&= \delta_{ll'}\delta_{mm'}\hat{l}\int\limits_0^\infty \Big(u_{lm}(\frac{\bar{v}_{lm}}{r})' + \frac{u'_{lm}\bar{v}_{lm}}{r}\Big)dr = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\int\limits_0^\infty (\frac{u_{lm}\bar{v}_{lm}}{r})'dr = \\
&= \delta_{ll'}\delta_{mm'}\Big(\frac{u_{lm}\bar{v}_{lm}}{r}\Big)\Big|_0^\infty = 0.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Это равенство верно также в случае, когда функции v_{lm}, $u_{l'm'}$ исчезают в нуле и имеют ограниченную первую производную. Ортогональность перекрестных слагаемых из $P_2^{\perp}$ и $P_1^{\perp}$, $P^{\|}$ следует из ортогональности гармоник $\vec{\Psi}_{lm}$ остальным векторным сферическим гармоникам.

Теперь вычислим скалярное произведение в трехмерном пространстве для двух продольных функций, $\vec{g}_{v_{lm}}(\vec{x})$ и $\vec{g}_{\tilde{v}_{l'm'}}(\vec{x})$, записанных в виде (1.25)

$$(\vec{g}_{v_{lm}}, \vec{g}_{\tilde{v}_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{f}_{v_{lm}}(\vec{x})} \cdot \vec{f}_{\tilde{v}_{l'm'}}(\vec{x})\, d^3x = \tag{1.28}$$

$$= \iint \overline{\Big((\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}\Big)} \cdot \Big((\frac{\tilde{v}_{l'm'}}{r})'\vec{\Upsilon}_{l'm'} + \hat{l}'\frac{\tilde{v}_{l'm'}}{r^2}\vec{\Psi}_{l'm'}\Big)\, d\Omega\, r^2 dr =$$

$$= \delta_{ll'}\delta_{mm'} \int\limits_0^\infty \Big((\frac{\bar{v}_{lm}}{r})' r^2 (\frac{\tilde{v}_{lm}}{r})' + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{v}_{lm}\tilde{v}_{lm}\Big) dr = \tag{1.29}$$

$$= \delta_{ll'}\delta_{mm'} \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{v}_{lm}}{dr}\frac{d\tilde{v}_{lm}}{dr} - (\frac{\bar{v}_{lm}\tilde{v}_{lm}}{r})' + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{v}_{lm}\tilde{v}_{lm}\Big) dr =$$

$$= \delta_{ll'}\delta_{mm'} \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{v}_{lm}}{dr}\frac{d\tilde{v}_{lm}}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{v}_{lm}\tilde{v}_{lm}\Big) dr, \tag{1.30}$$

(см. [27]) и такое же произведение для функций $\vec{f}_{u_{lm}}(\vec{x})$ и $\vec{f}_{\tilde{u}_{l'm'}}(\vec{x})$ из поперечного подпространства $P_1^\perp$, записанных в виде (1.26)

$$(\vec{f}_{u_{lm}}, \vec{f}_{\tilde{u}_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{f}_{u_{lm}}(\vec{x})} \cdot \vec{f}_{\tilde{u}_{l'm'}}(\vec{x})\, d^3x =$$

$$= \iint \overline{\Big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\Big)} \cdot \Big(\hat{l}'\frac{u_{l'm'}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{l'm'} + \frac{u'_{l'm'}}{r}\vec{\Psi}_{l'm'}\Big)\, d\Omega\, r^2 dr =$$

$$= \delta_{ll'}\delta_{mm'} \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}_{lm}}{dr}\frac{d\tilde{u}_{lm}}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}_{lm}\tilde{u}_{lm}\Big) dr, \tag{1.31}$$

(см. [26]).

Скалярное произведение двух функций из подпространства $P_2^\perp$

$$\vec{h}_{\phi_{lm}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{\phi_{lm}(r)}{r}\vec{\Phi}_{lm}(\Omega), \quad \vec{h}_{\tilde{\phi}_{l'm'}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{\tilde{\phi}_{l'm'}(r)}{r}\vec{\Phi}_{l'm'}(\Omega),$$

то есть из последней суммы параметризации (1.20), при переносе на $\phi_{lm}(r)$, $\tilde{\phi}_{l'm'}(r)$ приводит к обычному интегралу по полуоси

$$(\vec{h}_{\phi_{lm}}, \vec{h}_{\tilde{\phi}_{l'm'}})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{h}_{\phi_{lm}}(\vec{x})} \cdot \vec{h}_{\tilde{\phi}_{l'm'}}(\vec{x})\, d^3x =$$

$$= \delta_{ll'}\delta_{mm'} \int\limits_0^\infty \bar{\phi}_{lm}(r)\tilde{\phi}_{l'm'}(r)\, dr = \delta_{ll'}\delta_{mm'}(\phi_{lm}, \tilde{\phi}_{l'm'}),$$

здесь мы использовали введенное ранее обозначение (1.7). То же самое верно и для скалярного произведения функций из подпространства $P_0^{\|}$: если

$$\vec{h}_v(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{v(r)}{r}\vec{\Upsilon}_0(\Omega), \quad \vec{h}_{\tilde{v}}(\vec{x}(r,\Omega)) = \frac{\tilde{v}(r)}{r}\vec{\Upsilon}_0(\Omega),$$

то

$$(\vec{h}_v, \vec{h}_{\tilde{v}})_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_0^\infty \bar{v}(r)\tilde{v}(r)\,dr = (v, \tilde{v}).$$

1.3.3. Замыкания поперечного и продольного подпространств

Для интегралов в правых частях произведений (1.30) и (1.31) введем обозначение

$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{dv}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}v\Big)dr = \langle u, v\rangle_l. \tag{1.32}$$

Эти интегралы представляют из себя положительно определенные скалярные произведения и порождают Гильбертовы пространства

$$\mathcal{H}_l = \{u(r) : \int\limits_0^\infty \big(|u'|^2 + \frac{l(l+1)}{r^2}|u|^2\big)dr < \infty\},$$

состоящие из абсолютно-непрерывных функций на полуоси, исчезающих в нуле, таких, что интеграл в определении конечен. Локально эти пространства эквивалентны классу Соболева $\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^+)$ (см. определение в [32]), однако, глобально они содержат и медленно возрастающие (не быстрее, чем $r^{1/2}$) на бесконечности функции.

Здесь стоит отметить, что для функций $\vec{g}_{v_{lm}}(\vec{x})$, $\vec{g}_{\tilde{v}_{lm}}(\vec{x})$ из продольного подпространства равенство

$$(\vec{g}_{v_{lm}}, \vec{g}_{\tilde{v}_{lm}}) = \langle v_{lm}, \tilde{v}_{lm}\rangle_l$$

опирается на переход от (1.29) к (1.30), то есть на предельное соотношение

$$\Big(\frac{v_{lm}\tilde{v}_{lm}}{r}\Big)\Big|_0^\infty = 0.$$

Это соотношение заведомо выполняется для функций v_{lm}, $\tilde{v}_{lm}$ из пространства $\mathcal{H}_l$. Однако, как мы увидим в разделе 3.4, если одна из функций v_{lm} или $\tilde{v}_{lm}$ представляется в виде суммы менее регулярных компонент, то для вычисления скалярного произведения векторных функций, порождаемых этими компонентами, необходимо пользоваться интегралами (1.28) и (1.29), а не скобкой (1.32).

Проведенные в предыдущем разделе вычисления показывают, что продольное $P^{\|}$ и поперечное $P^{\perp}$ подпространства могут быть представлены как линейные множества функций следующего вида

$$P^{\|} = \{\frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0 + \big(\frac{v_{lm}}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{lm} + \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}, \quad v_o \in L_2(\mathbb{R}^+),\ v_{lm} \in \mathcal{H}_l\} \tag{1.33}$$

$$P^{\perp} = \{\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm} + \phi_{lm}\Phi_{lm}, \quad u_{lm} \in \mathcal{H}_l,\ \phi_{lm} \in L_2(\mathbb{R}^+)\}. \tag{1.34}$$

Формула (1.27) означает, что подпространства $P^{\|}$ и $P^{\perp}$ ортогональны друг другу, а из переноса нормы (1.28)–(1.30), (1.31) следует, что они замкнуты относительно скалярного произведения (1.4) в $\mathbb{R}^3$.

С другой стороны, формулы (1.21)–(1.23) и непосредственные вычисления показывают, что произвольная функция (1.11) с гладкими коэффициентами ν_{lm}, ψ_{lm}, ϕ_{lm} может быть записана в виде (1.19)–(1.20). Действительно, коэффициенты ν_{lm}, ψ_{lm} восстанавливаются по коэффициентам v_{lm}, u_{lm}

$$\nu_{lm} = \big(\frac{v_{lm}}{r}\big)' + \hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}, \quad \phi_{lm} = \hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2} + \frac{u'}{r},$$

и в обратную сторону

$$v_{lm} = T_l^{-1}\big((r\psi_{lm})' - \hat{l}\nu_{lm}\big), \quad u_{lm} = T_l^{-1}\big(\hat{l}\psi_{lm} - \frac{1}{r}(r^2\nu_{lm})'\big),$$

где ядра операторов T_l^{-1} определены в выражении (1.24).

1.4. Действие оператора Лапласа

Для действия оператора Лапласа на продольное и поперечное подпространства верно следующее утверждение [27]

Утверждение. *Действие дифференциальной операции Δ на параметризующие функции v_0, $\{v_{lm}\}$, $\{u_{lm}\}$, $\{\phi_{lm}\}$ для подпространств $P_0^{\|}$, $P_1^{\|}$, $P_1^{\perp}$, $P_2^{\perp}$ сводится к действию дифференциальных операций T_l.*

Доказательство. С помощью формул для разделения переменных (1.12), (1.13), (1.14), (1.15) вычислим действие оператора Лапласа на продольные

$$\Delta\frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0+\frac{v_0}{r}\Delta\vec{\Upsilon}_0=\big(-\frac{v_0''}{r}+\frac{2v_0}{r^3}\big)\vec{\Upsilon}_0=\frac{T_1v_0}{r}\vec{\Upsilon}_0, \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\big((\frac{v_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm}+\hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}\big)=\\
&\quad=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{v_{lm}}{r}\vec{\Upsilon}_{lm}+(\frac{v_{lm}}{r})'\Delta\vec{\Upsilon}_{lm}-\frac{\hat{l}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{v_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}+\hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\Delta\vec{\Psi}_{lm}=\\
&\quad=\big(\frac{2v_{lm}}{r^4}-\frac{2v_{lm}'}{r^3}+\frac{v_{lm}''}{r^2}-\frac{v_{lm}'''}{r}\big)\vec{\Upsilon}_{lm}+(\frac{v_{lm}}{r})'\big((2+\hat{l}^2)\vec{\Upsilon}_{lm}-2\hat{l}\vec{\Psi}_{lm}\big)+\\
&\qquad+\hat{l}\big(\frac{2v_{lm}'}{r^3}-\frac{v_{lm}''}{r^2}-\frac{2v_{lm}}{r^4}\big)\vec{\Psi}_{lm}+\hat{l}\frac{v_{lm}}{r^2}\big(\hat{l}^2\vec{\Psi}_{lm}-2\hat{l}\vec{\Upsilon}_{lm}\big)=\\
&\quad=\big(-\frac{v_{lm}''}{r}+\frac{l(l+1)}{r^3}v_{lm}\big)'\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{\hat{l}}{r^2}\big(-v_{lm}''+\frac{l(l+1)}{r^2}v_{lm}\big)\vec{\Psi}_{lm}=\\
&\qquad=(\frac{T_lv_{lm}}{r})'\vec{\Upsilon}_{lm}+\hat{l}\frac{T_lv_{lm}}{r^2}\vec{\Psi}_{lm}
\end{aligned} \tag{1.36}$$

и поперечные

$$\begin{aligned}
&\Delta\big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{u_{lm}'}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big)=\\
&\quad=-\frac{\hat{l}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\Delta\vec{\Upsilon}_{lm}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_{lm}'}{r}\vec{\Psi}_{lm}+\frac{u_{lm}'}{r}\Delta\vec{\Psi}_{lm}=\\
&\quad=\hat{l}\big(\frac{2u_{lm}'}{r^3}-\frac{u_{lm}''}{r^2}-\frac{2u_{lm}}{r^4}\big)\vec{\Upsilon}_{lm}+\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^4}\big((2+\hat{l}^2)\vec{\Upsilon}_{lm}-2\hat{l}\vec{\Psi}_{lm}\big)-\\
&\qquad-\frac{u_{lm}'''}{r}\vec{\Psi}_{lm}+\frac{u_{lm}'}{r^3}\big(\hat{l}^2\vec{\Psi}_{lm}-2\hat{l}\vec{\Upsilon}_{lm}\big)=\\
&\quad=\hat{l}\frac{1}{r^2}\big(-u_{lm}''+\frac{l(l+1)}{r^2}u_{lm}\big)\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{1}{r}\big(-u_{lm}''+\frac{l(l+1)}{r^2}u_{lm}\big)'\vec{\Psi}_{lm}=\\
&\qquad=\hat{l}\frac{T_lu_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm}+\frac{(T_lu_{lm})'}{r}\vec{\Psi}_{lm},
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\Delta\frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}=\big(-\frac{\phi_{lm}''}{r}+\frac{l(l+1)}{r^3}\phi_{lm}\big)\vec{\Phi}_{lm}=\frac{T_l\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm} \tag{1.38}$$

компоненты. Эти вычисления показывают, что подпространства $P_1^{\|}$, $P_1^{\perp}$, $P_2^{\perp}$, соответствующие трем суммам в разложении (1.19), (1.20), инвариантны относительно действия оператора Лапласа, а также, что само действие на параметризующие функции сводится к действию дифференциальных операций T_l

$$\Delta: \quad \begin{array}{ll} v_0 & \to -\frac{d^2}{dr^2}v_0 + \frac{2}{r^2}v_0 = T_1 v_0, \\ v_{lm} & \to -\frac{d^2}{dr^2}v_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}v_{lm} = T_l v_{lm}, \\ u_{lm} & \to -\frac{d^2}{dr^2}u_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}u_{lm} = T_l u_{lm}, \\ \phi_{lm} & \to -\frac{d^2}{dr^2}\phi_{lm} + \frac{l(l+1)}{r^2}\phi_{lm} = T_l \phi_{lm}. \quad \square \end{array} \tag{1.39}$$

Теперь заметим, что если функция v из пространства $\mathcal{H}_l$ дифференцируема два раза, то для произведения $\langle u, v\rangle_l$ можно написать формальное равенство

$$\langle u, v\rangle_l = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{dv}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}v\Big)dr = \\ = \int\limits_0^\infty \bar{u}\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)v\,dr = \int\limits_0^\infty \bar{u}\,T_l v\,dr. \tag{1.40}$$

Таким образом, мы видим, что дифференциальная операция в скалярном произведении (1.32) для параметризующих функций u_{lm} и v_{lm} совпадает с действием оператора Лапласа (1.39). Это совпадение является ключевым для дальнейших вычислений, так как две одинаковые дифференциальные операции всегда коммутируют, что открывает путь к построению нетривиальных векторов из дефектных подпространств.

Подводя итоги этой главы, можно заключить, что для достаточно гладких векторных функций в трехмерном пространстве существует такое разложение по векторным сферическим гармоникам (1.19), (1.20) что действие оператора Лапласа сводится к действию на параметры радиальных операторов T_l. При этом скалярные произведения из трехмерного пространства для одного набора параметров переходят в плоские интегралы по полуоси (1.7), а для двух других наборов — в произведения (1.32), определяемые с помощью тех же самых операторов T_l.

1.5. Приложение к первой главе

1.5.1. Действие оператора Лапласа на векторные сферические гармоники

Для того, чтобы вычислить действие оператора Лапласа на векторные сферические гармоники (1.8)–(1.10) воспользуемся следующими формулами

$$\partial_k\frac{x_j}{|x|} = \frac{\delta_{kj}}{|x|} - \frac{x_kx_j}{|x|^3}, \quad \partial_k^2\frac{x_j}{|x|} = -\frac{2x_j}{|x|^3}, \quad -\partial_k^2Y_{lm} = \frac{l(l+1)}{|x|^2}Y_{lm}, \tag{1.41}$$

$$x_k\partial_kY_{lm} = 0, \quad x_k\partial_j\partial_kY_{lm} = \partial_jx_k\partial_kY_{lm} - \delta_{kj}\partial_kY_{lm} = -\partial_jY_{lm}, \tag{1.42}$$

тогда

$$\begin{aligned}
[\Delta\vec{\Upsilon}_{lm}]_j &= -\partial_k^2\frac{x_j}{|x|}Y_{lm} = -\big(\partial_k^2\frac{x_j}{|x|}\big)Y_{lm} - \frac{x_j}{|x|}\partial_k^2Y_{lm} - 2\big(\partial_k\frac{x_j}{|x|}\big)\partial_kY_{lm} = \\
&= \frac{2x_j}{|x|^3}Y_{lm} + \frac{l(l+1)}{|x|^2}\frac{x_j}{|x|}Y_{lm} + 2\frac{x_kx_j}{|x|^3}\partial_kY_{lm} - \frac{2}{|x|}\partial_jY_{lm} = \\
&= \frac{1}{|x|^2}\big[\big(l(l+1)+2\big)\vec{\Upsilon}_{lm} - 2\hat{l}\vec{\Psi}_{lm}\big]_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Delta\vec{\Psi}_{lm}]_j &= -\frac{1}{\hat{l}}\partial_k^2|x|\partial_jY_{lm} = \\
&= -\frac{1}{\hat{l}}\big(\partial_k^2|x|\big)\partial_jY_{lm} - \frac{1}{\hat{l}}|x|\partial_j\partial_k^2Y_{lm} - \frac{2}{\hat{l}}\big(\partial_k|x|\big)\partial_k\partial_jY_{lm} = \\
&= -\frac{2}{\hat{l}|x|}\partial_jY_{lm} + |x|\partial_j\frac{l(l+1)}{\hat{l}|x|^2}Y_{lm} - \frac{2x_k}{\hat{l}|x|}\partial_k\partial_jY_{lm} = \\
&= -\frac{2}{\hat{l}|x|}\partial_jY_{lm} - 2\hat{l}\frac{x_j}{|x|^3}Y_{lm} - \frac{l(l+1)}{\hat{l}|x|^2}|x|\partial_jY_{lm} + \frac{2}{\hat{l}|x|}\partial_jY_{lm} = \\
&= \frac{1}{|x|^2}[-2\hat{l}\vec{\Upsilon}_{lm} + l(l+1)\vec{\Psi}_{lm}]_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\Delta\vec{\Phi}_{lm}]_j &= -\frac{1}{\hat{l}}\partial_k^2\epsilon_{jin}x_i\partial_nY_{lm} = \\
&= -\frac{1}{\hat{l}}\epsilon_{jin}x_i\partial_n\partial_k^2Y_{lm} - \frac{2}{\hat{l}}\epsilon_{jin}\big(\partial_kx_i\big)\partial_n\partial_kY_{lm} = \\
&= \frac{1}{\hat{l}}\epsilon_{jin}x_i\partial_n\frac{l(l+1)}{|x|^2}Y_{lm} - \frac{2}{\hat{l}}\epsilon_{jkn}\partial_n\partial_kY_{lm} = \\
&= \frac{l(l+1)}{\hat{l}|x|^2}\epsilon_{jin}x_i\partial_nY_{lm} - \frac{2l(l+1)}{\hat{l}|x|^4}\epsilon_{jin}x_ix_nY_{lm} = \frac{l(l+1)}{|x|^2}[\Delta\vec{\Phi}_{lm}]_j.
\end{aligned}$$

1.5.2. Представление для составной поперечной компоненты

Вспомогательная формула

$$\epsilon_{jkn}\epsilon_{\alpha\beta n} = \delta_{j\alpha}\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\delta_{k\alpha}$$

вместе с (1.41), (1.42) позволяет произвести следующие вычисления

$$\begin{aligned}
&[\vec{\partial} \times \frac{u(|x|)}{|x|}\vec{\Phi}_{lm}]_j = \epsilon_{jkn}\partial_k \frac{u}{|x|}[\vec{\Phi}_{lm}]_n = \epsilon_{jkn}\partial_k \frac{u}{|x|}\frac{\epsilon_{n\alpha\beta}}{\hat{l}} x_\beta \partial_\alpha Y_{lm} = \\
&= (\delta_{j\alpha}\delta_{k\beta} - \delta_{j\beta}\delta_{k\alpha})\frac{1}{\hat{l}}\Big(\big(\frac{u'}{|x|^2} - \frac{u}{|x|^3}\big)x_k x_\beta \partial_\alpha Y_{lm} + \\
&\quad + \frac{u}{|x|}\delta_{k\beta}\partial_\alpha Y_{lm} + \frac{u}{|x|}x_\beta \partial_k \partial_\alpha Y_{lm}\Big) = \\
&= \frac{1}{\hat{l}}\big(u' - \frac{u}{|x|}\big)\partial_j Y_{lm} + \frac{2u}{\hat{l}|x|}\partial_j Y_{lm} + \frac{u}{\hat{l}|x|}x_k \partial_j \partial_k Y_{lm} - \frac{u}{|x|}x_j \partial_k^2 Y_{lm} = \\
&= \frac{1}{\hat{l}}u'\partial_j Y_{lm} + \hat{l}\frac{u}{|x|^2}\frac{x_j}{|x|}Y_{lm} = [\frac{\hat{l}u}{|x|^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'}{|x|}\vec{\Psi}_{lm}]_j,
\end{aligned}$$

здесь в предпоследней строке сокращаются часть первого, второе и третье слагаемые.

Глава 2

Спектральные свойства радиальной части оператора Лапласа

В предыдущей главе было показано, что задача об исследовании оператора Лапласа на подпространствах $P^{\|}$ и $P^{\perp}$ разделением переменных сводится к задаче о спектральных свойствах радиальных операторов T_l в скалярных произведениях (1.7) и (1.32). В этой главе мы рассмотрим сужение оператора Δ на подпространства $P^{\|}$ и $P^{\perp}$, зададим всюду плотные области определения для симметрических операторов, и покажем, что радиальный оператор T_1, заданный на некотором линейном множестве в скалярном произведении (1.32) является симметрическим оператором с индексами дефекта $(1,1)$. Далее построим самосопряженные расширения этого оператора, а также их резольвенты и спектральные разложения. В конце главы приведем общее выражение для ядер резольвент самосопряженных расширений симметрических операторов на поперечном и продольном подпространствах.

2.1. Расширения симметрических операторов на примере второй производной на полуоси

Начнем описание с оператора T_0, заданного на линейном множестве

$$\mathring{\mathcal{W}}_0 = \{u: \quad (u,u) < \infty,\, (u'',u'') < \infty,\, u(0) = u'(0) = 0\},$$

два раза дифференцируемых функций, исчезающих в нуле вместе с производной. Такой оператор является симметрическим, но не самосопряженным оператором. Мы будем использовать его для демонстрации построения самосопряженных расширений симметрических операторов.

Симметрический оператор взятия второй производной на полуоси

$$T_0 = -\frac{d^2}{dr^2}$$

имеет индексы дефекта $(1,1)$. Действительно, если T_0 задан на подпространстве $\mathring{\mathcal{W}}_0$, то функции

$$g_\pm = \exp\{e^{\mp i\frac{3\pi}{4}}\chi r\}, \tag{2.1}$$

которые называются дефектными векторами, образуют ядра сопряженных операторов $(T_0 \mp i\chi^2)^*$. Эти функции являются единственными квадратично интегрируемыми решениями уравнений

$$\frac{d^2 g_\pm}{dr^2} = \pm i\chi^2 g_\pm, \tag{2.2}$$

а поведение функций из $\mathring{\mathcal{W}}_0$ в начале координат позволяет перекинуть производную и получить равенство

$$\big(g_\pm, (T_0 \mp i\chi^2)u\big) = \int\limits_0^\infty \bar{g}_\pm(-u'' \mp i\chi^2 u)\, dr =$$

$$= \int\limits_0^\infty (\overline{-g''_\pm \pm i\chi^2 g_\pm})u\, dr = 0, \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 0.$$

Так как T_0 — это размерный оператор, его спектр – это множество размерных величин, то для того, чтобы приравнять друг к другу левую и правую части в уравнении (2.2) мы ввели размерный параметр χ: $[\chi] = [r]^{-1}$. Выбор χ в каком-то смысле аналогичен выбору точки перенормировки в квантовой теории поля [33] с тем, чтобы далее через нее выражать размерный параметр задачи.

2.1.1. Преобразование Кэли

Пользуясь симметричностью оператора T_0, между образами

$$Ran_\pm = \{(T_0 \mp i\chi^2)u : \ u \in \mathring{\mathcal{W}}_0\}$$

можно построить изометрию U (преобразование Кэли [6]), действующую по правилу

$$U: \quad (T_0 + i\chi^2)u \to (T_0 - i\chi^2)u.$$

Линейные оболочки векторов $g_\pm$ по определению ядра сопряженного оператора являются единственными ортогональными дополнениями к соответствующим образам $Ran_\pm$, следовательно, изометрию U можно продолжить на все пространство до унитарного оператора U_a, задав ее на g_- таким образом, что

$$U_a e^{-ia} g_- = e^{ia} g_+, \quad 0 \leq a < \pi,$$

где e^{2ia} – унитарный параметр. Унитарный оператор U_a является преобразованием Кэли самосопряженного расширения T_0^a исходного симметрического оператора T_0. Это расширение задано на области определения $\mathcal{W}_0^a$, которая включает в себя функцию h^a, такую, что

$$(T_0^a - i\chi^2)h^a = e^{ia} g_+,$$
$$(T_0^a + i\chi^2)h^a = e^{-ia} g_-$$

и при этом

$$\mathcal{W}_0^a = \mathring{\mathcal{W}}_0 \dot{+} \{\alpha h^a, \alpha \in \mathbb{C}\}.$$

Несложно увидеть, что h^a может быть представлена как линейная комбинация дефектных векторов g_+ и g_-

$$h^a = \frac{e^{ia}}{2i\chi^2} g_+ - \frac{e^{-ia}}{2i\chi^2} g_- = \frac{1}{2i\chi^2}\left(\exp\{ia + e^{-i\frac{3\pi}{4}}\chi r\} - \exp\{-ia + e^{i\frac{3\pi}{4}}\chi r\}\right).$$

2.1.2. Граничные условия

Оператор второй производной является симметрическим на таком линейном множестве функций, где зануляются граничные слагаемые

$$\int\limits_0^\infty \bar{v}''(r)u(r)\,dr - \int\limits_0^\infty \bar{v}(r)u''(r)\,dr = \big(\bar{v}'(r)u(r) - \bar{v}(r)u'(r)\big)\big|_0^\infty =$$

$$= \bar{v}(0)u'(0) - \bar{v}'(0)u(0)$$

(здесь пределы на бесконечности исчезают вследствие убывания функций u, v). Построенный выше элемент h^a определяет связь между значением функции из пространства $\mathcal{W}_0^a$ в нуле и значением ее производной, таким образом, чтобы оператор T_0^a был симметрическим. Поэтому множество $\mathcal{W}_0^a$ можно также описать следующим образом

$$\mathcal{W}_0^a = \{u : (u,u) < \infty,\ (u'',u'') < \infty,\ \chi \sin(a - \frac{\pi}{4})\, u(0) + \sin a\, u'(0) = 0\}.$$

Самосопряженность в существенном оператора T_0^a на этом пространстве (равенство нулю индексов дефекта) следует из построения.

2.1.3. Собственные векторы

При некоторых значениях параметра a у оператора T_0^a появляются собственные значения (дискретный спектр). Рассмотрим экспоненциальную функцию

$$v_\kappa(r) = e^{-\kappa r}, \quad \kappa > 0,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d^2 v_\kappa}{dr^2} = -\kappa^2 v_\kappa.$$

Эта функция попадает в область $\mathcal{W}_0^a$, если выполнено граничное условие

$$\chi \sin(a - \frac{\pi}{4})\, v_\kappa(0) = -\sin a\, v_\kappa'(0),$$

которое связывает κ с параметрами a и χ

$$\kappa = \chi \frac{\sin(a - \pi/4)}{\sin a}.$$

Когда параметр a меняется в пределах от 0 до π, правая часть в этом выражение по одному разу пробегает все значения на вещественной оси. Для того, чтобы параметр κ был положительным, необходимо чтобы было выполнено условие

$$\frac{\pi}{4} < a < \pi.$$

При остальных значениях a дискретный спектр у T_0^a отсутствует.

Однократный непрерывный спектр оператора T_0^a занимает всю неотрицательную полуось, спектральное преобразование задается тригонометрической функцией

$$p^a_{0,\lambda}(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\big(\cos\beta\cos\lambda r - \sin\beta\sin\lambda r\big), \quad e^{2i\beta} = \frac{\sqrt{2}\lambda + i\chi(\operatorname{ctg} a - 1)}{\sqrt{2}\lambda - i\chi(\operatorname{ctg} a - 1)},$$

подробности см., например, в [6].

2.2. Операторы в индуцированном скалярном произведении

Как было показано в предыдущей главе, продольные и поперечные части оператора Лапласа путем разделения переменных сводятся к действию операторов T_l в скалярных произведениях (1.7) и (1.32).

В первом случае симметрические операторы T_l при $l \geq 1$ самосопряжены в существенном на пространстве $\mathring{\mathcal{W}}_0$ два раза дифференцируемых функций, исчезающих в нуле вместе с производной. Такие операторы имеют однократный непрерывный спектр, занимающий неотрицательную полуось, а спектральное преобразование записывается в компактном виде через сферические функции Бесселя [34]

$$p_{l,\lambda}(r) = \frac{2r^l}{\sqrt{2\pi}\lambda^l}\Big(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\Big)^l \sin\lambda r. \qquad (2.3)$$

Основное утверждение этой главы состоит в том, что операторы T_l, рассматриваемые на некоторых всюду плотных множествах $\mathring{\mathcal{W}}_l$ в скалярных произведениях (1.32), являются существенно самосопряженными при $l \geq 2$ и симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$ при $l = 1$. Отсюда следует, что можно определить симметрические операторы $\Delta^{\|}$ и $\Delta^{\perp}$ на всюду плотных подпространствах $\mathcal{H}^{\|}$ и $\mathcal{H}^{\perp}$ в $P^{\|}$ и $P^{\perp}$, соответственно, которые будут иметь индексы дефекта $(3,3)$ и построить их самосопряженные расширения.

Перед тем, как обратиться к исследованию операторов T_l более подробно, введем некоторые предварительные обозначения.

2.2.1. Предварительные формулы

Для построения решений уравнений, в которых участвует дифференциальная операция T_l, введем ковариантные производные

$$D_l \equiv r^l \frac{d}{dr} r^{-l} = \frac{d}{dr} - \frac{l}{r}, \quad D_l^* \equiv -r^{-l} \frac{d}{dr} r^l = -\frac{d}{dr} - \frac{l}{r}.$$

Несложно увидеть, что для операций T_l, D_l и D_l^* выполняются соотношения

$$D_l D_l^* = -r^l \frac{d}{dr} r^{-2l} \frac{d}{dr} r^l = -\frac{d}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} = T_l, \tag{2.4}$$

$$D_l^* D_l = -r^{-l} \frac{d}{dr} r^{2l} \frac{d}{dr} r^{-l} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l-1)}{r^2} = T_{l-1}, \tag{2.5}$$

$$T_l D_l = D_l D_l^* D_l = D_l T_{l-1}. \tag{2.6}$$

Отсюда следует, что функция

$$D_l D_{l-1} \cdots D_1 e^{\sigma r} = r^l (\frac{d}{dr}\frac{1}{r})^l e^{\sigma r}$$

удовлетворяет формальному дифференциальному уравнению для собственной функции оператора T_l

$$(T_l + \sigma^2) D_l D_{l-1} \cdots D_1 e^{\sigma r} = D_l (T_{l-1} + \sigma^2) D_{l-1} \cdots D_1 e^{\sigma r} =$$

$$= D_l D_{l-1} \cdots D_1 (T_0 + \sigma^2) e^{\sigma r} = D_l D_{l-1} \cdots D_1 \big(-\frac{d^2}{dr^2} + \sigma^2\big) e^{\sigma r} = 0.$$

Кроме того, далее мы будем использовать следующие разложения, включающие производные D_l и экспоненты:

$$\sum_n \alpha_n D_1 e^{\sigma_n r} \sim \sum_n \alpha_n \big(-r^{-1} + \sigma_n^2 \frac{r}{2} + \sigma_n^3 \frac{r^2}{3} + \ldots\big), \quad r \to 0, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} r^l(\frac{d}{dr}\frac{1}{r})^l e^{\sigma r} \sim {} & (2l-1)(2l-3)\cdots 1(\frac{-1}{r})^l - \\ & - (2l-3)(2l-5)\cdots 1(\frac{-1}{r})^{l-2}\frac{\sigma^2}{2} + \ldots . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для вывода последнего разложения можно воспользоваться формулой

$$r^l(\frac{d}{dr}\frac{1}{r})^l r^k = (k-2l+1)(k-2l+3)\cdots(k-1)r^{k-l},$$

которая показывает, что действие операции $D_l D_{l-1}\cdots D_1$ понижает степень монома r^k на l и уничтожает первые l мономов с нечетными степенями.

2.2.2. Симметрические операторы

В качестве начальных областей определения симметрических операторов T_l рассмотрим множества $\mathring{\mathcal{W}}_l$ функций из $\mathcal{H}_l$, таких, что действие T_l на них также попадает в $\mathcal{H}_l$, а вторая производная исчезает в начале координат

$$\mathring{\mathcal{W}}_l = \{u(r):\ u \in \mathcal{H}_l,\ T_l u \in \mathcal{H}_l,\ u''(0) = 0\}, \quad l \geq 1. \tag{2.9}$$

Отметим, что принадлежность $T_l u$ к $\mathcal{H}_l$ для гладкой функции u также требует равенства нулю первой и вторых производных $u'(0) = 0$, $u''(0) = 0$. Однако, для случая $l = 1$, ввиду того, что $T_1 r^2 = 0$, условие $u''(0) = 0$ приходится записывать как отдельное требование для множества $\mathring{\mathcal{W}}_1$.

Определим симметрический оператор $\tilde{T}_l$ как действие операции T_l на множестве $\mathring{\mathcal{W}}_l$

$$\tilde{T}_l = T_l|_{\mathring{\mathcal{W}}_l}.$$

Симметричность $\tilde{T}_l$ в скалярном произведении (1.32) проверяется с помощью интегрирования по частям и разложения функций из $\mathring{\mathcal{W}}_l$ в ряд в окрестности нуля:

$$\langle u,\tilde{T}_l v\rangle_l = \tag{2.10}$$
$$= \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{d}{dr}\big(-\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^2}v\big)+\frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}\big(-\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{l(l+1)}{r^2}v\big)\Big)dr =$$
$$= \int\limits_0^\infty \big(\bar{u}''v''-\frac{l(l+1)}{r^2}(\bar{u}''v+\bar{u}v'')+\frac{l^2(l+1)^2}{r^4}\bar{u}v\big)dr+$$
$$+\,\bar{u}'(r)v''(r)|_{r=0}-\frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}'(r)v(r)|_{r=0}.$$

Здесь выражение под интегралом симметрично, а внеинтегральные слагаемые обнуляются ввиду граничных условий. Отсюда следует симметричность оператора $\tilde{T}_l$.

2.2.3. Индексы дефекта

Для определения индексов дефекта оператора $\tilde{T}_l$ необходимо исследовать ядра сдвинутых сопряженных операторов $\tilde{T}_l^* \mp i\chi^2$, $\chi > 0$. Верно следующее

Утверждение. *Индексы дефекта оператора* $\tilde{T}_l$ *в скалярном произведении* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_l$ *равны* $(1,1)$ *при* $l=1$ *и* $(0,0)$ *в остальных случаях.*

Доказательство. Пусть $c_\pm$ — какие-либо векторы из ядер операторов $\tilde{T}_l^* \mp i\chi^2$, тогда для любого $v \in \mathring{\mathcal{W}}_l$ выполнено равенство

$$\langle c_\pm, (\tilde{T}_l \pm i\chi^2)v\rangle_l = 0, \quad v \in \mathring{\mathcal{W}}_l. \tag{2.11}$$

В выражении для скалярного произведения можно перебросить производную направо

$$
\begin{aligned}
&\langle c_\pm,(\tilde{T}_l \pm i\chi^2)v\rangle_l = \qquad\qquad (2.12)\\
&= \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{c}_\pm}{dr}\frac{d}{dr}(\tilde{T}_l \pm i\chi^2)v + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{c}_\pm(\tilde{T}_l \pm i\chi^2)v\Big)dr = \\
&= \int\limits_0^\infty \bar{c}_\pm\Big(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2}\Big)(\tilde{T}_l \pm i\chi^2)v dr - \bar{c}_\pm\frac{d}{dr}(\tilde{T}_l \pm i\chi^2)v\Big|_{r=0} = \\
&= \int\limits_0^\infty \bar{c}_\pm T_l(T_l \pm i\chi^2)v dr = 0,
\end{aligned}
$$

при этом внеинтегральное слагаемое обнуляется ввиду того, что $v(0) = v'(0) = v''(0) = 0$ и $c_\pm(0) = 0$. Теперь можно воспользоваться теорией дифференциальных уравнений для распределений на полуоси (см. например, [35]), и сделать вывод, что функции $c_\pm(r)$, для которых последний интеграл равен нулю, являются дифференцируемыми функциями, удовлетворяющими уравнениям

$$(T_l \mp i\chi^2)T_l c_\pm = 0. \tag{2.13}$$

То есть для ядер сопряженных операторов $\tilde{T}_l^* - i\chi^2$ и $\tilde{T}_l^* + i\chi^2$, получаем дифференциальные уравнения четвертой степени, которые имеют по четыре ленейно-независимых решения

$$
\begin{aligned}
D_l \cdots D_1 \exp\{e^{-\frac{3\pi i}{4}}\chi r\}, &\quad r^{-l},\\
D_l \cdots D_1 \exp\{e^{\frac{\pi i}{4}}\chi r\}, &\quad r^{l+1}
\end{aligned}
$$

для уравнения $(T_l - i\chi^2)T_l c_+ = 0$ и

$$
\begin{aligned}
D_l \cdots D_1 \exp\{e^{\frac{3\pi i}{4}}\chi r\}, &\quad r^{-l},\\
D_l \cdots D_1 \exp\{e^{-\frac{\pi i}{4}}\chi r\}, &\quad r^{l+1}
\end{aligned}
$$

для уравнения $(T_l + i\chi^2)T_l c_- = 0$. Последние пары решений в обоих случаях расходятся на бесконечности, даже в скалярном произведении (1.32). Первые решения, в соответствии с формулой (2.8), ведут себя в окрестности нуля как

$$r^l(\frac{d}{dr}\frac{1}{r})^l \exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} \sim (2l-1)(2l-3)\cdots 1(\frac{-1}{r})^l \mp \\ \mp (2l-3)(2l-5)\cdots 1(\frac{-1}{r})^{l-2}\frac{i\chi^2}{2} + \mathcal{O}(r^{4-l}).$$

Любая линейная комбинация первых и вторых решений каждого соответствующего уравнения ведет себя в нуле не лучше чем r^{2-l}. Функция с таким поведением попадает в пространство $\mathcal{H}_l$ только при $l = 1$, в этом случае каждое из дифференциальных уравнений (2.13) имеет единственное допустимое решение

$$c_\pm(r) = D_1 \exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} + r^{-1} = D_1\big(\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} - 1\big) \qquad (2.14)$$

Таким образом, симметрический оператор $\tilde{T}_1$ в скалярном произведении (1.32) имеет индексы дефекта $(1, 1)$ и, следовательно, обладает нетривиальными самосопряженными расширениями. Соответственно, при $l \geq 2$ решения уравнений (2.11) отсутствуют, ядра сопряженных операторов $\tilde{T}_l^* \mp i\chi^2$ пусты, и операторы $\tilde{T}_l$ являются самосопряженными в существенном на множествах $\mathring{\mathcal{W}}_l$. □

Как и в случае операторов T_l в скалярном произведении (1.7), однократный непрерывный спектр операторов $\tilde{T}_l$, $l \geq 2$ занимает неотрицательную полуось, но при этом спектральное преобразование отличается от выражений (2.3) коэффициентом и степенью λ в знаменателе

$$\tilde{p}_{l,\lambda}(r) = \frac{2r^l}{\sqrt{2\pi}\lambda^{l+1}}\big(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big)^l \sin\lambda r. \qquad (2.15)$$

2.2.4. Дефектные векторы в трехмерном пространстве

Дефектные векторы (2.14) позволяют построить по три (соответственно количеству возможных значений проекции $m = -1, 0, 1$ орбитального момента на третью координатную ось для полного момента $l = 1$) вектора в продольном и поперечном подпространствах

$$\vec{B}^m_\pm(\vec{x}(r,\Omega)) = \vec{\partial} \times \frac{c_\pm(r)}{\sqrt{2}r}(\vec{x} \times \vec{\partial})Y_{1m}(\Omega), \quad \vec{B}^m_\pm \in P^\perp$$

$$\vec{C}^m_\pm(\vec{x}(r,\Omega)) = \vec{\partial}\frac{c_\pm(r)}{r}Y_{1m}(\Omega), \quad \vec{C}^m_\pm \in P^\|.$$

Пусть $\mathcal{H}^{\|}$ и $\mathcal{H}^{\perp}$ — это линейные оболочки функций из $P^{\|}$ и $P^{\perp}$ вида (1.33) и (1.34), соответственно, с коэффициентами v_{lm} и u_{lm} лежащими в пространствах $\mathring{\mathcal{W}}_l$ (2.9). Определим симметрические операторы $\Delta^{\|}$ и $\Delta^{\perp}$ как сужение операции Δ на $\mathcal{H}^{\|}$ и $\mathcal{H}^{\perp}$, соответственно

$$\Delta^{\|} = \Delta\Big|_{\mathcal{H}^{\|}}, \quad \Delta^{\perp} = \Delta\Big|_{\mathcal{H}^{\perp}}.$$

Из формулы (2.10) следует, что операторы $\Delta^{\|}$ и $\Delta^{\perp}$ симметричны, а равенства (2.12) для функций (2.14) означают, что векторы $\vec{C}^m_{\pm}$ и $\vec{B}^m_{\pm}$ лежат в дефектных подпространствах операторов $\Delta^{\|}$ и $\Delta^{\perp}$, то есть удовлетворяют уравнениям

$$(\vec{B}^m_{\pm}, (\Delta \pm i\chi^2)\vec{h}^{\perp}) = 0, \quad (\vec{C}^m_{\pm}, (\Delta \pm i\chi^2)\vec{h}^{\|}) = 0, \tag{2.16}$$

где $\vec{h}^{\perp} \in \mathcal{H}^{\perp}$, $\vec{h}^{\|} \in \mathcal{H}^{\|}$.

Здесь можно сделать отступление и сравнить ситуацию со случаем скалярного поля. Действие оператора Лапласа Δ на векторную функцию $\vec{f}(\vec{x})$ может быть представлено как действие скалярных операторов на набор трех функций $f_k(\vec{x})$, $k = 1, 2, 3$. Каждый такой оператор, заданный на замыкании множества функций, быстро убывающих вместе с производными в начале координат, является симметрическим оператором с индексами дефекта $(1, 1)$. Соответствующие дефектные векторы этих операторов являются переносами в трехмерное пространство функций (2.1), имеют следующий вид

$$\left(\vec{G}^k_{\pm}(x)\right)_j = \frac{\exp\{e^{\mp i\frac{3\pi}{4}}\chi|x|\}}{|x|}\delta_{kj},$$

и также удовлетворяют уравнениям вида (2.16)

$$(\vec{G}^k_{\pm}, (\Delta \pm i\chi^2)\vec{h}) = 0 \tag{2.17}$$

(см. [11]). Однако, по сравнению с (2.16), векторы $\vec{h}$ теперь лежат в другом замкнутом подпространстве, поэтому одинаковые на вид уравнения (2.16) и (2.17) имеют разные решения: 3 вектора $\vec{B}^m_{\pm}(\vec{x})$, либо 3 вектора, $\vec{C}^m_{\pm}(\vec{x})$, либо 3 вектора $\vec{G}^k_{\pm}(\vec{x})$.

Таким образом, мы определили симметрические операторы $\Delta^{\|}$, $\Delta^{\perp}$ и увидели, что их индексы дефекта равны $(3, 3)$, а значит, эти операторы имеют нетривиальные самосопряженные расширения, которые параметризуются элементами группы $U(3)$.

2.3. Самосопряженные расширения радиального оператора для $l = 1$

Стандартным способом построения самосопряженных расширений симметрического оператора является преобразование Кэли, описанное в разделе 2.1.1. Мы не будем углубляться в эту технику и просто предъявим новые области определения и сами расширенные операторы. Итак, пусть

$$\mathcal{W}_1^{\kappa} = \{u(r) : \; u \in \mathcal{H}_l, \, T_1^{\kappa} u \in \mathcal{H}_l, \, 3u''(0) = 4\kappa u'(0)\}, \quad \kappa \in \mathbb{R} \tag{2.18}$$

— область определения, на которой расширенный оператор T_1^{κ} действует как дифференциальная операция T_1 с нелокальной добавкой

$$T_1^{\kappa} u = T_1 u - \frac{2}{r} u'(0) = -\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r^2} u - \frac{2}{r} u'(0). \tag{2.19}$$

Очевидно, что $\tilde{T}_1 \subset T_1^\varkappa$, так как $\mathring{\mathcal{W}}_1 \subset \mathcal{W}_1^\varkappa$ и $T_1^\varkappa u = \tilde{T}_1 u$, если $u \in \mathring{\mathcal{W}}_1$. Симметричность оператора $T_1^\varkappa$ на $\mathcal{W}_1^\varkappa$ проверяется непосредственным вычислением

$$
\begin{aligned}
&\langle u, T_1^\varkappa v\rangle_1 = \\
&\quad = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{d}{dr}\big(-\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r^2}v - \frac{2}{r}v'(0)\big) + \frac{2}{r^2}\bar{u}\big(-\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r^2}v - \frac{2}{r}v'(0)\big)\Big)dr = \\
&\quad = \int\limits_0^\infty \big(\bar{u}''v'' - \frac{2}{r^2}(\bar{u}''v + \bar{u}v'') + \frac{4}{r^4}\bar{u}v\big)dr + v'(0)\int\limits_0^\infty \frac{d}{dr}\frac{2\bar{u}}{r}dr + \\
&\qquad + \bar{u}'(r)v''(r)|_{r=0} - \frac{2}{r^2}\bar{u}'(r)v(r)|_{r=0} = \\
&\quad = \int\limits_0^\infty \big(\bar{u}''v'' - \frac{2}{r^2}(\bar{u}''v + \bar{u}v'') + \frac{4}{r^4}\bar{u}v\big)dr + \\
&\qquad + \bar{u}'(r)v''(r)|_{r=0} - \frac{2}{r^2}\bar{u}'(r)v(r)|_{r=0} - v'(0)\frac{2\bar{u}}{r^2}|_{r=0}.
\end{aligned}
$$

Интегральное слагаемое здесь симметрично, поэтому

$$
\begin{aligned}
\langle u, T_1^\varkappa v\rangle_1 - \langle T_1^\varkappa u, v\rangle_1 = \Big(&\bar{u}'(r)v''(r) - \bar{u}''(r)v'(r) + \\
&+ \frac{2}{r^2}(\bar{u}(r)v'(r) - \bar{u}'(r)v(r)) + \bar{u}'(0)\frac{2v(r)}{r^2} - v'(0)\frac{2\bar{u}(r)}{r^2}\Big)\Big|_{r=0}.
\end{aligned}
$$

Пользуясь разложением в ряд Тейлора в окрестности нуля для функций $u(r)$ и $v(r)$

$$
u(r) = u_1 r + u_2\frac{r^2}{2} + \ldots, \quad v(r) = v_1 r + v_2\frac{r^2}{2} + \ldots, \quad u'(0) = u_1, \quad v'(0) = v_1
$$

получим

$$
\begin{aligned}
\langle u, T_1^\varkappa v\rangle_1 - \langle T_1^\varkappa u, v\rangle_1 = \Big(&\bar{u}_1 v_2 - \bar{u}_2 v_1 + \frac{2}{r^2}\frac{1}{2}(\bar{u}_1 v_2 - \bar{u}_2 v_1) + \\
&+ \frac{2}{r^2}\bar{u}_1(v_1 r + v_2\frac{r^2}{2}) - \frac{2}{r^2}v_1(\bar{u}_1 r + \bar{u}_2\frac{r^2}{2})\Big)\Big|_{r=0} = 3(\bar{u}_1 v_2 - \bar{u}_2 v_1) = 0.
\end{aligned}
$$

Разность $\bar{u}_1 v_2 - \bar{u}_2 v_1$ в правой части равна нулю, если для u и v выполняются граничные условия из $\mathcal{W}_1^\varkappa$.

Самосопряженность оператора $T_1^\varkappa$ на области $\mathcal{W}_1^\varkappa$ следует из формулы (2.7), примененной к разложению дефектных векторов $c_\pm$, определенных в (2.14), в окрестности нуля:

$$c_{\pm}(r) \sim \mp i\chi^2\bigl(\frac{r}{2} + e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi\frac{r^2}{3} + \ldots\bigr).$$

Такие функции не удовлетворяют граничным условиям из $\mathcal{W}_1^\kappa$ ни при каких χ и κ, и, следовательно, ядра сопряженных операторов $T_1^{\kappa *} \mp i\chi^2$, которые содержатся в ядрах $\tilde{T}_1^* \mp i\chi^2$, пусты.

2.3.1. Формулы для резольвенты

Для вычисления спектрального разложения оператора T_1^κ нам понадобятся несколько следствий формулы Стоуна для резольвенты самосопряженного оператора (см., например, [36]). Пусть $R_A(r,s;w)$ — ядро резольвенты самосопряженного оператора A, действующего на функции заданные на вещественной оси:

$$(A-w)\,R_A(r,s;w) = \delta(r-s), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A), \quad r,s \in \mathbb{R},$$

здесь $\sigma(A)$ — это спектр оператора A. Если предположить, что непрерывная часть $\sigma(A)$ не содержит отрицательную полуось, то с помощью ядра $R_A(r,s;w)$ можно написать следующее разложение единицы (соотношение полноты)

$$\delta(r-s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \bigl(R_A(\eta) - R_A(e^{2\pi i}\eta)\bigr)\,d\eta + \sum_n \lim_{w\to w_n} R_A(w)(w_n - w), \qquad (2.20)$$

где w_n — это полюса резольвенты $R(w)$. Если спектр оператора A однократный, то подинтегральное выражение можно переписать в виде квадрата «собственных функций непрерывного спектра»

$$R(r,s;\eta) - R(r,s;e^{2\pi i}\eta) = 2\pi i p_\eta(r) p_\eta(s), \qquad (2.21)$$

а сумму вычетов — в виде суммы квадратов собственных функций точечного спектра

$$\sum_n \lim_{w\to w_n} R(r,s;w)(w_n - w) = \sum_n q_n(r) q_n(s). \qquad (2.22)$$

При этом для $q_n(r)$, $p_\eta(r)$, кроме соотношения полноты (2.20), также выполняются соотношения ортогональности

$$\int p_\eta(r)p_\xi(r)dr = \delta(\eta-\xi),$$
$$\int q_n(r)p_\eta(r)dr = 0, \quad \int q_n(r)q_m(r)dr = \delta_{nm}.$$

В случае, когда оператор A самосопряжен, а резольвента $R(w)$ кососимметрична в пространстве со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, для которого выполняется формула (1.40), в разложения (2.21), (2.22) добавляется оператор T_1, действующий на правую переменную s:

$$\begin{aligned} R(r,s;\eta)-R(r,s;e^{2\pi i}\eta) =& 2\pi i p_\eta(r)T_1p_\eta(s),\\ \lim_{w\to w_n} R(r,s;w)(w_n-w) =& q_n(r)T_1q_n(s), \end{aligned}$$

а в соотношениях ортогональности интеграл заменяется на интеграл из определения (1.32)

$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{dp_\eta(r)}{dr}\frac{dp_\xi(r)}{dr}+\frac{2}{r^2}p_\eta(r)p_\xi(r)\Big)dr = \delta(\eta-\xi),$$
$$\int\limits_0^\infty \Big(\frac{dp_\eta(r)}{dr}\frac{dq_n(r)}{dr}+\frac{2}{r^2}p_\eta(r)q_n(r)\Big)dr = 0, \quad \langle q_n(r),q_m(r)\rangle_1 = \delta_{nm}.$$

2.3.2. Резольвента оператора T_1^κ

Для исследования спектральных характеристик оператора T_1^κ воспользуемся свойствами ядра его резольвенты. Мы будем искать это ядро как функцию $R(r,s;z)$ трех переменных, удовлетворяющую уравнению

$$(T_1^\kappa - z^2)R(r,s;z) = \delta(r-s), \quad 0<\arg z<\pi, \tag{2.23}$$

граничным условиям из $\mathcal{W}_1^\kappa$ по переменной r, условиям кососимметричности по отношению к скалярному произведению (1.32), а также убывающую на бесконечности по r и s. Такая функция может быть построена с помощью двух решений $h(r)$, $g(r)$ однородного уравнения

$$\big(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r^2}-z^2\big)h(r)=0, \quad \big(-\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r^2}-z^2\big)g(r)=0,$$
$$h(r)=D_1e^{-izr}+\beta(z)D_1e^{izr}, \quad g(r)=D_1e^{izr}$$

следующим образом:

$$R(r,s;z)=\frac{1}{W}\big(h(r)g(s)\theta(s-r)+h(s)g(r)\theta(r-s)+\frac{1+\beta}{r}g(s)\big), \tag{2.24}$$

где

$$W(z)=h'(r)g(r)-h(r)g'(r)=-2iz^3, \quad D_1=r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}.$$

Проверку, того, что выражение (2.24) удовлетворяет требованиям для ядра резольвенты начнем с граничных условий. Экспоненты $g(r)$, $g(s)$, которые выделяются θ-функцией при $r\to\infty$ или $s\to\infty$, а также функция r^{-1} убывают на бесконечности при $0<\arg z<\pi$. При фиксированном s, в окрестности нуля по r, второе слагаемое в (2.24) пропадает, а оставшиеся дают разложение

$$\frac{g(s)}{W}\big(h(r)+\frac{1+\beta}{r}\big)\sim\frac{g(s)}{W}\big(-\frac{z^2}{2}(1+\beta)r+\frac{iz^3}{3}(1-\beta)r^2+\mathcal{O}(r^3)\big), \tag{2.25}$$

которое удовлетворяет граничным условиям из $\mathcal{W}_1^\kappa$, если

$$\beta(z)=\frac{z-i\kappa}{z+i\kappa}.$$

Разложение (2.25) также показывает, что последнее (нелокальное) слагаемое в операторе T_1^κ при применении к $R(r,s;z)$ дает

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\tilde r}R(\tilde r,s;z)\big|_{\tilde r=0}=z^2\frac{(1+\beta)}{Wr}g(s). \tag{2.26}$$

Далее, первые слагаемые в (2.24) являются стандартной комбинацией двух решений однородного уравнения для резольвенты дифференциального оператора второго порядка [36], поэтому они удовлетворяют уравнению

$$(T_1-z^2)\frac{1}{W}\big(h(r)g(s)\theta(s-r)+h(s)g(r)\theta(r-s)\big)=\delta(r-s). \tag{2.27}$$

Последнее слагаемое в (2.24) зануляется дифференциальной операцией T_1, поэтому

$$(T_1 - z^2)\frac{1+\beta}{Wr}g(s) = -z^2\frac{1+\beta}{Wr}g(s), \tag{2.28}$$

что сокращает вклад (2.26) от нелокальной добавки в T_1^κ. Итого, суммируя слагаемые (2.26), (2.27) и (2.28) получаем, что выражение (2.24) удовлетворяет уравнению (2.23).

Кососимметричность ядра (2.24) по отношению к скалярному произведению (1.32), в терминах переменной z выглядит следующим образом

$$R^*(r,s;z) = R(r,s;-\bar{z}). \tag{2.29}$$

В разделе 2.6.1 показано, что ядро $R(r,s;z)$ представляется в виде действия ядра T_1^{-1} из (1.24), сглаживающего поведение в окрестности нуля по первому аргументу, на некоторое ядро $S(r,s;z)$

$$\begin{aligned}
R(r,s;z) &= \int T_1^{-1}(r,t)S(t,s;z)dt\\
S(r,s;z) &= \frac{i}{2z}\big(h(r)g(s)\theta(s-r) + h(s)g(r)\theta(r-s)\big) + \delta(r-s).
\end{aligned}$$

Ядро $S(r,s;z)$ обладает свойством кососимметричность относительно скалярного произведения (1.7)

$$\overline{S(r,s;z)} = S(s,r;-\bar{z})$$

(см. раздел 2.6.2), поэтому для произвольных функций $u, v \in \mathcal{W}_1^\kappa$ можно воспользоваться соотношением (1.40) и записать следующее равенство

$$\begin{aligned}
\langle u, R(z)v\rangle_1 &= \int_0^\infty \bar{u}(r)[T_1R(z)v](r)dr = \iint_0^\infty \bar{u}(r)S(r,s;z)v(s)dr\,ds =\\
&= \iint_0^\infty \overline{S(s,r;-\bar{z})u(r)}v(s)dr\,ds = \int_0^\infty [T_1\overline{R(-z)u}](r)v(r)dr =\\
&= \langle R(-\bar{z})u, v\rangle_1,
\end{aligned}$$

которое и означает кососимметричность (2.29). Тем самым, выражение (2.24) удовлетворяет требованиям для ядра резольвенты оператора T_1^κ.

2.3.3. Спектральное разложение оператора T_1^κ

В случае, когда ядро резольвенты R некоторого самосопряженного оператора записано в терминах переменной $z = \sqrt{w}$ и удовлетворяет уравнению (2.23), разложение единицы (2.20) переписывается в следующем виде:

$$\delta(r-s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty \big(R(r,s;\lambda) - R(r,s;-\lambda)\big)2\lambda\,d\lambda \tag{2.30}$$

$$+\sum_n 2z_n \lim_{z\to z_n} R(r,s;z)(z_n - z) = \int\limits_0^\infty \tilde{p}_\lambda(r)T_1\tilde{p}_\lambda(s)\,d\lambda + \sum_n q_n(r)T_1q_n(s).$$

При этом соотношения ортогональности для $\tilde{p}_\lambda$ остаются выполненными и для параметра λ:

$$\int \tilde{p}_\lambda(r)T_1\tilde{p}_\mu(r)dr = \delta(\lambda-\mu), \tag{2.31}$$

$$\int q_n(r)T_1p_\lambda(r)dr = 0, \qquad \int q_n(r)T_1q_m(r)dr = \delta_{nm}. \tag{2.32}$$

Для вычисления собственных функций дискретного спектра рассмотрим полюса резольвенты $R(\lambda)$. Ее единственный полюс содержится в коэффициенте $\beta(z)$, он находится в точке

$$z_0 = -i\kappa,$$

и попадает в верхнюю полуплоскость только при $\kappa < 0$. В этом случае

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} 2z_0R(r,s;z)(z_0-z) =& \frac{4z_0^2}{2iz_0^3}\big(D_1e^{\kappa r} + \frac{1}{r}\big)D_1e^{\kappa s}\\ =& -\frac{2}{\kappa^3}\big(D_1e^{\kappa r} + \frac{1}{r}\big)T_1\big(D_1e^{\kappa s} + \frac{1}{s}\big),\end{aligned}$$

и, таким образом, получаем простое выражение для нормированной собственной функции точечного спектра

$$q(r) = \sqrt{-\frac{2}{\kappa^3}}\big(D_1e^{\kappa r} + \frac{1}{r}\big) = \sqrt{-\frac{2}{\kappa^3}}D_1\big(e^{\kappa r} - 1\big). \tag{2.33}$$

Для подсчета спектральной плотности непрерывной части спектра заметим, что

$$\beta(-\lambda) = \frac{-\lambda - i\kappa}{-\lambda + i\kappa} = \beta^{-1}(\lambda)$$

и введем обозначение

$$\beta(\lambda) \equiv e^{2i\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{R}.$$

Далее подставим выражение для резольвенты (2.24) в интеграл (2.30)

$$\int\limits_0^\infty \frac{2\lambda\, d\lambda}{2\pi i}\big(R(r,s;\lambda) - R(r,s;-\lambda)\big) = \frac{-2}{2\pi i 2i}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{\lambda^3}\Big(\frac{1+e^{2i\zeta}}{r}D_1 e^{i\lambda s} +$$
$$+ \frac{1+e^{-2i\zeta}}{r}D_1 e^{-i\lambda s} + (D_1 e^{-i\lambda r} + e^{2i\zeta}D_1 e^{i\lambda r})D_1 e^{i\lambda s}\theta(s-r) +$$
$$+ (D_1 e^{-i\lambda s} + e^{2i\zeta}D_1 e^{i\lambda s})D_1 e^{i\lambda r}\theta(r-s) +$$
$$+ (D_1 e^{i\lambda r} + e^{-2i\zeta}D_1 e^{-i\lambda r})D_1 e^{-i\lambda s}\theta(s-r) +$$
$$+ (D_1 e^{i\lambda s} + e^{-2i\zeta}D_1 e^{-i\lambda s})D_1 e^{-i\lambda r}\theta(r-s)\Big) =$$

заменим суммы θ-функций с противоположными аргументами на единицы

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{2\pi\lambda^2}\Big(\frac{1+e^{2i\zeta}}{r}D_1 e^{i\lambda s} + \frac{1+e^{-2i\zeta}}{r}D_1 e^{-i\lambda s} + D_1 e^{-i\lambda r}D_1 e^{i\lambda s} +$$
$$+ D_1 e^{i\lambda r}D_1 e^{-i\lambda s} + e^{2i\zeta}D_1 e^{i\lambda r}D_1 e^{i\lambda s} + e^{-2i\zeta}De^{-i\lambda r}De^{-i\lambda s}\Big) =$$

разложим на два множителя

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2}\big(e^{i\zeta}D_1 e^{i\lambda r} + e^{-i\zeta}D_1 e^{-i\lambda r} + \frac{2\cos\zeta}{r}\big) \times$$
$$\times \big(e^{i\zeta}D_1 e^{i\lambda s} + e^{-i\zeta}D_1 e^{-i\lambda s}\big) =$$

и вынесем из второго множителя операцию T_1

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4}\big(e^{i\zeta}D_1 e^{i\lambda r} + e^{-i\zeta}D_1 e^{-i\lambda r} + \frac{2\cos\zeta}{r}\big) \times$$
$$\times T_1\big(e^{i\zeta}D_1 e^{i\lambda s} + e^{-i\zeta}D_1 e^{-i\lambda s} + \frac{2\cos\zeta}{r}\big).$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью соотношения (2.30), можно сделать вывод, что непрерывному спектру оператора T_1^κ соответствует спектральное преобразование (разложение) [26]

$$\tilde{p}^{\kappa}_{1,\lambda}(r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\lambda^2}\big(D_1\cos(\zeta+\lambda r)+\frac{\cos\zeta}{r}\big), \quad e^{2i\zeta} = \frac{\lambda - i\kappa}{\lambda + i\kappa}. \tag{2.34}$$

Здесь стоит отметить, что получившееся выражение в пределе $\kappa \to \infty$ совпадает с формулой (2.15) взятой при $l = 1$.

2.4. Функциональная замена

Для описания свойств операторов $\tilde{T}_l$ в скалярных произведениях (1.32) существует альтернативный подход, связанный с функциональной заменой [24]. Ковариантные производные D_l, D_l^*, определенные в разделе 2.2.1, позволяют переписать скалярное произведение (1.32) для функций u, v из пространства $\mathcal{H}_l$ в следующем виде

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_l &= \int\limits_0^\infty \big(\frac{d\bar{u}}{dr}\frac{dv}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{u}v\big)dr = \\ &= \int\limits_0^\infty \big(r^{-l}\frac{d}{dr}r^l\bar{u}(r)\big)\big(r^{-l}\frac{d}{dr}r^l v(r)\big)dr - \int\limits_0^\infty \big(\frac{\bar{u}v}{r}\big)'dr = \\ &= \int\limits_0^\infty D_l^*\bar{u}(r)D_l^*v(r)dr.\end{aligned}$$

Учитывая данное соотношение, действие квадратичной формы оператора Лапласа на параметризующую функцию v преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned}\langle v, T_l v\rangle_l &= \int\limits_0^\infty D_l^*\bar{v}(r)D_l^*T_l v(r)dr = \int\limits_0^\infty D_l^*\bar{v}(r)D_l^*D_lD_l^*v(r)dr = \\ &= \int\limits_0^\infty D_l^*\bar{v}(r)T_{l-1}D_l^*v(r)dr = \int\limits_0^\infty \bar{\psi}_v(r)T_{l-1}\psi_v(r)dr = (\psi_v, T_{l-1}\psi_v),\end{aligned}$$

где

$$\psi_v(r) = D_l^*v(r) = -r^{-l}\frac{d}{dr}r^l v(r). \tag{2.35}$$

Таким образом, функциональная замена (2.35), которая имеет пустое ядро на пространстве $\mathcal{H}_l$, переводит скалярное произведение (1.32) в интеграл (1.7)

$$\langle u, v\rangle_l = (\psi_u, \psi_v),$$

а квадратичную форму оператора T_l в этом произведении в квадратичную форму оператора T_{l-1} в плоском произведении. Соответственно, при $l = 1$ оператор T_0, действующий на функции ψ, в плоском скалярном произведении является симметрическим оператором с индексами дефекта $(1, 1)$, а при $l \geq 2$ операторы T_{l-1} самосопряжены в существенном.

Функциональная замена (2.35) более наглядно демонстрирует результаты части 2.2, однако, обратное преобразование требует введения интегральной операции и оказывается очень неудобным при переносе действия расширенных операторов назад на векторные функции в трехмерном пространстве. Поэтому в следующей главе мы будем пользоваться техникой, разработанной ранее в разделах 2.2, 2.3.

2.5. Регулярные аналитические векторы и ядро резольвенты для самосопряженного расширения общего вида

Основной результат второй главы настоящей работы — это описание самосопряженных расширений радиальных частей оператора Лапласа T_1^κ. Эти расширения имеют простой вид, однако, перенос их действия на пространство функций трех переменных выглядит очень громоздко и не удобен для использования в приложениях. Теория Крейна позволяет строить выражения не для самих самосопряженных расширений операторов $\Delta^\perp$ и $\Delta^\|$, а для ядер их резольвент, что может быть не менее полезно для применения в физике. Далее вычисления этого раздела следуют работе [31].

Подобно примеру, описанному в части 2.1, самосопряженные расширения симметрического оператора $\Delta^{\perp}$ определяются с помощью преобразования Кэли [38, стр. 186] посредством фиксирования некоторой унитарной матрицы, переводящей элементы $\vec{B}^m_-$ одного дефектного подпространства в элементы $\vec{B}^m_+$ другого. Теория Крейна [39], [40] дает выражение для ядра резольвенты произвольного самосопряженного расширения через ядро резольвенты в фиксированной точке области регулярности. С помощью преобразования Фурье можно вычислить выражение для ядра резольвенты $\mathring{R}_w$ самосопряженного оператора $\Delta_0^{\perp}$, заданного на множестве регулярных два раза дифференцируемых функций [6, стр. 73]

$$\mathring{R}_w^{jj'}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{e^{i\sqrt{w}|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\delta_{jj'}, \quad \left[(\Delta_0 - w)\mathring{R}_w\right]^{jj'}(\vec{x},\vec{y}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{jj'}, \tag{2.36}$$

здесь разрез у корня из спектрального параметра w выбирается вдоль положительной полуоси

$$\sqrt{\bar{w}} = -\overline{\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi. \tag{2.37}$$

Резольвента (2.36) определена на пространстве векторных функций произвольного вида $L_2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C}^3$, однако, можно показать, что она, также как и оператор $\Delta_0^{\perp}$, оставляет подпространства $P^{\|}$ и $P^{\perp}$ инвариантными. Тем самым, выражение (2.36) может быть использовано и для построения резольвент операторов, действующих на подпространствах $P^{\|}$ и $P^{\perp}$. Теория Крейна опирается на понятие аналитического вектора. В интерпретации [41, стр. 371] это вектор $\vec{B}^m_w$, который в регулярных точках рассматриваемых самосопряженных расширений аналитически зависит от спектрального параметра w и удовлетворяет уравнению

$$\vec{B}^m_w = \vec{B}^m_{w_0} + (w - w_0)\mathring{R}_w\vec{B}^m_{w_0}. \tag{2.38}$$

Здесь под понятием *вектор* подразумевается элемент линейного пространства – области определения оператора $(\Delta^{\perp})^*$, сопряженного к симметрическому оператору $\Delta^{\perp}$, в то время как символ вектора у $\vec{B}^m_w$ относится к структуре этого пространства, а индекс $m = -1, 0, 1$ нумерует линейно независимые аналитические векторы. Необходимым условием построения резольвенты с помощью аналитических векторов $\vec{B}^m_w$ является принадлежность этих векторов, взятых в точках $\pm i\chi^2$, к дефектным подпространствам симметрического оператора $\Delta^\perp$

$$(\Delta^\perp \pm i\chi^2)^* \vec{B}^m_{\pm i\chi^2} = 0.$$

Для построения аналитических векторов рассмотрим функцию

$$c_w(r) = D_1\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big)$$

с разрезом по спектральному параметру w, определенному формулой (2.37), и перенесем ее с помощью разложения (1.20) в трехмерное пространство. Для этого определим поперечные векторы $\vec{B}^m_w$, $m = -1, 0, 1$ следующим образом

$$\vec{B}^m_w(\vec{x}(r, \Omega)) = \sqrt{2}\frac{c_w(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \frac{c'_w(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega). \qquad (2.39)$$

Непосредственные вычисления с подстановкой выражений для векторных сферических функций [21] дают для этого вектора следующее выражение

$$[B^m_w(\vec{x})]^j = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big(\frac{x_m x_j}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r} - 1}{r} - \frac{\delta_{jm}}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r} - 1}{r}\Big)_{r=|x|}. \qquad (2.40)$$

Вычисление, аналогичное вычислению (2.10) показывает, что для любого элемента $u \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}_1$ выполнено равенство

$$\langle c_w, (\tilde{T}_1 - w)u\rangle_1 = 0,$$

а значит функция $c_w(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(\tilde{T}_1 - w)^* c_w(r) = (\tilde{T}_1 - w)^* D_1\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big) = 0.$$

Как следствие, вектор $\vec{B}^m_w$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta^\perp - w)^* \vec{B}^m_w = 0,$$

из которого, совместно с аналитичностью и поведением на бесконечности по параметру w, следует, что функция $\vec{B}^m_w$ является решением уравнения (2.38).

Далее вычислим скалярное произведение аналитических векторов $\vec{B}_w^m$ для разных значений спектрального параметра

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}_w^m(\vec{x})} \vec{B}_{\tilde{w}}^m(\vec{x})\, d^3x = \int\limits_0^\infty \Big(2\frac{\bar{c}_w(r) c_{\tilde{w}}(r)}{r^2} + \bar{c}'_w(r) c'_{\tilde{w}}(r) \Big)\, dr =$$

$$= \int\limits_0^\infty D_1^* \bar{c}_w(r) D_1^* c_{\tilde{w}}(r)\, dr = \int\limits_0^\infty D_1^* D_1 (e^{i\sqrt{\bar{w}}r} - 1) D_1^* D_1 (e^{i\sqrt{\tilde{w}}r} - 1)\, dr =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d^2}{dr^2}(e^{i\sqrt{\bar{w}}r} - 1) \frac{d^2}{dr^2}(e^{i\sqrt{\tilde{w}}r} - 1)\, dr = \bar{w}\tilde{w} \int\limits_0^\infty e^{i\sqrt{\bar{w}}r} e^{i\sqrt{\tilde{w}}r}\, dr =$$

$$= \frac{i\bar{w}\tilde{w}}{\sqrt{\bar{w}} + \sqrt{\tilde{w}}}, \tag{2.41}$$

здесь мы воспользовались определением (2.39), сняли интеграл по переменной Ω, проинтегрировали по частям и применили формулу (2.5). Вследствие ортогональности векторных сферических гармоник, аналитические векторы $\vec{B}_w^m$ ортогональны при отличающихся значениях индекса m, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}_w^m(\vec{x})} \vec{B}_{\tilde{w}}^{\tilde{m}}(\vec{x})\, d^3x = \delta_{m\tilde{m}} \frac{i\bar{w}\tilde{w}}{\sqrt{\bar{w}} + \sqrt{\tilde{w}}}. \tag{2.42}$$

Из вычисления (2.41) и положительности мнимой части корня (2.37) при $0 < \arg w < 2\pi$ также можно вычислить выражение для нормы этих векторов

$$\|\vec{B}_w^m\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}_w^m(\vec{x})} \vec{B}_w^m(\vec{x})\, d^3x = \frac{i\bar{w}w}{\sqrt{w} - \overline{\sqrt{w}}} = \frac{|w|^2}{2\mathrm{Im}\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi. \tag{2.43}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что нормы векторов $\vec{B}_{+i\chi^2}^m$ и $\vec{B}_{-i\chi^2}^m$, лежащих в разных дефектных подпространствах симметрического оператора $\Delta^\perp$, совпадают. Поэтому самосопряженное расширение этого оператора общего вида $\Delta_u^\perp$ может быть задано с помощью унитарного отображения U^α, переводящего элементы $\vec{B}_-^m$ одного дефектного подпространства в элементы $\vec{B}_+^m$ другого

$$U^\alpha:\ u_m^n \vec{B}_{-i\chi^2}^m \to \alpha_n u_{m'}^n \vec{B}_{+i\chi^2}^{m'}, \quad u_m^{n'} \bar{u}_m^n = \delta_{n'n}, \quad |\alpha_n| = 1,$$

(здесь суммирование производится по индексам m и m', но не по n). То есть действие U^α определено таким образом, что векторы u_m^n по индексу m являются собственными для отображения U^α из линейной оболочки векторов $\{\vec{B}^m_{-i\chi^2}\}$ в линейную оболочку $\{\vec{B}^{m'}_{+i\chi^2}\}$, и при этом U^α может быть записано в следующем виде

$$U^\alpha = \frac{U^\alpha_{mm'}}{\|\vec{B}_{i\chi^2}\|^2}\vec{B}^m_{i\chi^2}\big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3},\quad U^\alpha_{mm'} = \sum_{n=1}^{3}\alpha_n u^n_m \bar{u}^n_{m'}.$$

Можно заметить, что введенное в (2.36) ядро резольвенты $\mathring{R}_w(\vec{x},\vec{y})$, соответствует самосопряженному расширению $\Delta_0^\perp$, определяемому единичной матрицей, то есть отображению $\vec{B}^m_{-i\chi^2}$ в $\vec{B}^m_{+i\chi^2}$, $m=-1,0,1$. Из определения преобразования Кэли [38, стр. 186] и формулы (2.43) следует, что разность резольвент рассматриваемых самосопряженных расширений, взятых в точке $i\chi^2$, определяется выражением

$$R_{i\chi^2} - \mathring{R}_{i\chi^2} = \frac{U^\alpha_{mm'} - \delta_{mm'}}{2i\chi^2\|\vec{B}_{i\chi^2}\|^2}\vec{B}^m_{i\chi^2}\big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3} =$$

$$= \sum_{n=1}^{3} u^n_m \bar{u}^n_{m'}\frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}i\chi^5}\vec{B}^m_{i\chi^2}\big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3}. \quad (2.44)$$

Теория Крейна [41, стр. 374] утверждает, что разность резольвент самосопряженных расширений симметрического оператора в произвольной точке w может быть записана через аналитические векторы $\vec{B}^m_w$ в следующем виде

$$R_w - \mathring{R}_w = \beta_{mm'}(w)\vec{B}^m_w\big(\vec{B}^{m'}_{\bar{w}},\,\cdot\,\big)_{\mathbb{R}^3}, \quad (2.45)$$

где $\beta_{mm'}(w)$ — это матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\beta^{-1}_{mm'}(w) = \beta^{-1}_{mm'}(i\chi^2) - (w - i\chi^2)\big(\vec{B}^m_{\bar{w}}, \vec{B}^{m'}_{i\chi^2}\big)_{\mathbb{R}^3}. \quad (2.46)$$

Формула (2.44) дает нам выражение для функции $\beta_{mm'}(w)$ в точке $i\chi^2$

$$\beta_{mm'}(i\chi^2) = \sum_{n=1}^{3} u^n_m \bar{u}^n_{m'}\frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}i\chi^5},$$

из которого, решая уравнение (2.46), можно вычислить значение $\beta_{mm'}(w)$ в произвольной точке

$$\beta_{mm'}(w) = \sum_{n=1}^{3}\frac{u^n_m \bar{u}^n_{m'}}{i\chi^2}\frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}\chi^3 + iw(\alpha_n - 1)(\sqrt{w} + \sqrt{i\chi^2})}.$$

Переходя к конкретным функциям в координатах в формуле (2.45) получаем следующее выражение для разности ядер резольвент

$$R^{jj'}_w(\vec{x},\vec{y}) - \mathring{R}^{jj'}_w(\vec{x},\vec{y}) = \beta_{mm'}(w)[B^m_w(\vec{x})]^j[B^{m'}_w(\vec{y})]^{j'},$$

где явный вид векторов $[B^m_w(\vec{x})]^j$ приведен в (2.40). Данное выражение является аналитической функцией спектрального параметра w в области $0 < \arg w < 2\pi$, за исключением некоторого количества полюсов, определяемых знаменателями матричной функции $\beta_{mm'}(w)$. Эти полюса соответствуют собственным значениям дискретного спектра оператора $\Delta^{\perp}_u$, а вычеты в них — проекторам на собственные подпространства.

Аналогичную формулу с такой же функцией $\beta_{mm'}(w)$ можно получить и для разности резольвент самосопряженных расширений оператора $\Delta^{\|}$ на продольном подпространстве. Аналитические векторы $\vec{B}^m_w$ при этом заменяются на векторы

$$\vec{C}^m_w(\vec{x}(r,\Omega)) = \big(\frac{c_w(r)}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \sqrt{2}\frac{c_w(r)}{r^2}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega).$$

которые в явном виде выглядят следующим образом

$$[C^m_w(\vec{x})]^j = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big(\frac{x_m x_j}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r}-1}{r} - \frac{\delta_{jm}}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r}-1}{r}\Big)_{r=|x|}.$$

Все вычисления, в том числе и скалярные произведения (2.42), при этом остаются без изменений.

2.6. Приложение ко второй главе

2.6.1. Выделение сглаживающего ядра из ядра резольвенты

Предварительные формулы

$$\int\limits_A^B \frac{1}{t} De^{izt}\,dt = \int\limits_A^B \frac{d}{dt}\frac{e^{izt}}{t}\,dt = \frac{e^{izA}}{A} - \frac{e^{izB}}{B},$$

$$\int\limits_A^B t^2 De^{izt}\,dt = \int\limits_A^B t^3\frac{d}{dt}\frac{e^{izt}}{t}\,dt = t^2 e^{izt}\big|_A^B + \frac{3t^2}{z^2}\frac{d}{dt}\frac{e^{izt}}{t}\big|_A^B.$$

Теперь пусть

$$h(r) = De^{-izr} + \beta(z)De^{izr}, \quad g(r) = De^{izr}, \quad \beta(z) = \frac{z - i\kappa}{z + i\kappa},$$

$$T_1^{-1}(r,s) = \frac{1}{3}\big(\frac{s^2}{r}\theta(r-s) + \frac{r^2}{s}\theta(s-r)\big), \quad D = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r},$$

$$\begin{aligned} S(r,s;z) &= \frac{i}{2z}\big(h(r)g(s)\theta(s-r) + h(s)g(r)\theta(r-s)\big) + \delta(r-s) = \\ &= \frac{i}{2z}\big(De^{-izr}De^{izs}\theta(s-r) + De^{-izs}De^{izr}\theta(r-s) + \\ &\quad + \beta(z)De^{izr}De^{izs}\big) + \delta(r-s), \end{aligned} \tag{2.47}$$

тогда при $r \geq s$ действие T^{-1} на первые два слагаемых $S(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{i}{2z}\int\limits_0^\infty T_1^{-1}(r,t)De^{-izt}De^{izs}\theta(s-t)\,dt = \\ &= \frac{i}{6z}\int\limits_0^\infty \big(\frac{t^2}{r}\theta(r-t) + \frac{r^2}{t}\theta(t-r)\big)De^{-izt}De^{izs}\theta(s-t)\,dt = \\ &= \frac{i}{6z}\frac{1}{r}De^{izs}\int\limits_0^s t^2De^{-izt}\,dt = \\ &= \frac{i}{6z}\Big(\frac{s^2}{r}e^{-izs}De^{izs} + \frac{3s}{izr}e^{-izs}De^{izs} - \frac{3}{rz^2}(e^{-izs} - 1)De^{izs}\Big) \end{aligned}$$

$$\frac{i}{2z}\int\limits_0^\infty T_1^{-1}(r,t)De^{izt}De^{-izs}\theta(t-s)\,dt =$$

$$= \frac{i}{6z}\int\limits_0^\infty \big(\frac{t^2}{r}\theta(r-t)+\frac{r^2}{t}\theta(t-r)\big)De^{izt}De^{-izs}\theta(t-s)\,dt =$$

$$= \frac{i}{6z}\frac{1}{r}De^{-izs}\int\limits_s^r t^2De^{izt}\,dt + \frac{i}{6z}r^2De^{-izs}\int\limits_r^\infty \frac{1}{t}De^{izt}\,dt =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{i}{6z}\Big(re^{izr}De^{-izs} - \frac{s^2}{r}e^{izs}De^{-izs} + \frac{3}{z^2}De^{izr}De^{-izs} + \frac{3s}{izr}e^{izs}De^{-izs} + \\ &\quad + \frac{3}{z^2r}e^{izs}De^{-izs} - re^{izr}De^{-izs}\Big),\end{aligned}$$

что в сумме дает

$$\begin{aligned}&\frac{i}{6z}\Big(\frac{s^2}{r}e^{-izs}De^{izs} + \frac{3s}{izr}e^{-izs}De^{izs} - \frac{3}{rz^2}(e^{-izs}-1)De^{izs} - \\ &\quad - \frac{s^2}{r}e^{izs}De^{-izs} + \frac{3}{z^2}De^{izr}De^{-izs} + \frac{3s}{izr}e^{izs}De^{-izs} + \frac{3}{z^2r}e^{izs}De^{-izs}\Big) = \\ &= \frac{i}{6z}\Big(\frac{s^2}{r}(e^{-izs}De^{izs} - e^{izs}De^{-izs}) + \frac{3s}{izr}(e^{-izs}De^{izs} + e^{izs}De^{-izs}) - \\ &\quad - \frac{3}{rz^2}(e^{-izs}De^{izs} + e^{izs}De^{-izs}) + \frac{3}{rz^2}De^{izs} + \frac{3}{z^2}De^{izr}De^{-izs}\Big) = \\ &= \frac{i}{2z^3}\Big(\frac{1}{r}De^{izs} + De^{izr}De^{-izs}\Big) - \frac{s^2}{3r}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

При $r \le s$ действие T_1^{-1} на первые два слагаемых $S(z)$ равно

$$\frac{i}{2z}\int\limits_0^\infty T_1^{-1}(r,t)De^{-izt}De^{izs}\theta(s-t)\,dt =$$

$$= \frac{i}{6z}\int\limits_0^\infty \big(\frac{t^2}{r}\theta(r-t)+\frac{r^2}{t}\theta(t-r)\big)De^{-izt}De^{izs}\theta(s-t)\,dt =$$

$$= \frac{i}{6z}\Big(\frac{1}{r}De^{izs}\int\limits_0^r t^2De^{-izt}\,dt + r^2De^{izs}\int\limits_r^s \frac{1}{t}De^{-izt}\,dt\Big) =$$

$$\begin{aligned}&= \frac{i}{6z}\Big(re^{-izr}De^{izs} + \frac{3}{z^2}De^{-izr}De^{izs} + \frac{r^2}{s}e^{-izs}De^{izs} - re^{-izr}De^{izs} + \\ &\quad + \frac{3}{z^2}\frac{De^{izs}}{r}\Big),\end{aligned}$$

$$\frac{i}{2z}\int\limits_0^\infty T_1^{-1}(r,t)De^{izt}De^{-izs}\theta(t-s)\,dt =$$
$$= \frac{i}{6z}\int\limits_0^\infty \big(\frac{t^2}{r}\theta(r-t)+\frac{r^2}{t}\theta(t-r)\big)De^{izt}De^{-izs}\theta(t-s)\,dt =$$
$$= \frac{i}{6z}r^2De^{-izs}\int\limits_s^\infty \frac{1}{t}De^{izt}\,dt = -\frac{i}{6z}\frac{3}{z^2}e^{izs}De^{-izs},$$

что при суммировании дает выражение

$$\frac{i}{2z^3}(\frac{De^{izs}}{r}+De^{-izr}De^{izs})+\frac{ir^2}{6zs}(e^{-izs}De^{izs}-e^{izs}De^{-izs}) =$$
$$= \frac{i}{2z^3}(\frac{De^{izs}}{r}+De^{-izr}De^{izs})-\frac{r^2}{3s}. \qquad (2.49)$$

Действие T_1^{-1} на третье слагаемое в (2.47) выглядит следующим образом

$$\frac{i}{2z}\int\limits_0^\infty T_1^{-1}(r,t)\beta(z)De^{izt}De^{izs}\,ds =$$
$$= \frac{i}{6z}\beta(z)De^{izs}\int\limits_0^\infty \big(\frac{r^2}{t}\theta(t-r)+\frac{t^2}{r}\theta(r-t)\big)De^{izt}De^{izs}\,ds =$$
$$= \frac{ir^2}{6z}\beta(z)De^{izs}\int\limits_r^\infty \frac{1}{t}De^{izt}\,dt+\frac{i}{6zr}\beta(z)De^{izs}\int\limits_0^r t^2De^{izt}\,dt =$$
$$= \frac{i}{6z}\beta(z)De^{izs}\big(-re^{izr}+\frac{1}{r}(r^2-\frac{3r}{iz}-\frac{3}{z^2})e^{izr}+\frac{3}{z^2}\big) =$$
$$= \frac{i}{2z^3}\beta(z)(De^{izr}+\frac{1}{r})De^{izs}.$$

Теперь видно, что последние слагаемые в (2.48) и (2.49), с учетом условий $r \le s$ или $s \le r$, сокращаются с действием T_1^{-1} на δ-функцию в (2.47), а остальные слагаемые группируются в выражение для $R(r,s;z)$

$$\frac{i}{2z^3}\big((\frac{1}{r}De^{izs}+De^{izr}De^{-izs})\theta(r-s)+(\frac{1}{r}De^{izs}+De^{-izr}De^{izs})\theta(s-r)+$$
$$+\beta(z)(De^{izr}+\frac{1}{r})De^{izs}\big) =$$
$$= \frac{i}{2z^3}\big(h(r)g(s)\theta(s-r)+h(s)g(r)\theta(r-s)+\frac{1+\beta}{r}g(s)\big) = R(r,s;z).$$

2.6.2. Кососимметричность ядра S

Пусть

$$S(r,s;z)=\frac{i}{2z}\big(h(r)g(s)\theta(s-r)+h(s)g(r)\theta(r-s)\big)+\delta(r-s),$$
$$h(r)=De^{-izr}+\beta(z)De^{izr},\quad g(r)=De^{izr},\quad \beta(z)=\frac{z-i\kappa}{z+i\kappa},$$

тогда, учитывая, что

$$\overline{\beta(z)}=\frac{\bar z+i\kappa}{\bar z-i\kappa}=\frac{-\bar z-i\kappa}{-\bar z+i\kappa}=\beta(-\bar z),$$

получаем

$$\begin{aligned}
\overline{S(r,s;z)}&=\frac{-i}{2\bar z}\big(\overline{h_z(r)g_z(s)}\theta(s-r)+\overline{h_z(s)g_z(r)}\theta(r-s)\big)+\delta(r-s)=\\
&=\frac{-i}{2\bar z}\big((De^{i\bar z r}+\overline{\beta(z)}De^{-i\bar z r})De^{-i\bar z s}\theta(s-r)+\\
&\quad+(De^{i\bar z s}+\overline{\beta(z)}De^{-i\bar z s})De^{-i\bar z r}\theta(s-r)\big)+\delta(r-s)=\\
&=\frac{-i}{2\bar z}\big(h_{-\bar z}(s)g_{-\bar z}(r)\theta(s-r)+h_{-\bar z}(r)g_{-\bar z}(s)\theta(s-r)\big)+\delta(r-s)=\\
&=S(s,r;-\bar z).
\end{aligned}$$

Глава 3

Квадратичные формы

Задача этой главы — построить замкнутые (замыкаемые) расширения квадратичной формы оператора Лапласа на продольном и поперечном подпространствах. Как мы увидели ранее, оператор Лапласа в таких подпространствах на функциях, быстро убывающих в начале координат, является симметрическим и имеет индексы дефекта $(3, 3)$. По теореме Фридрихса-Стоуна [42] множество замкнутых расширений квадратичной формы совпадает со множеством самосопряженных расширений симметрического оператора, определяющего начальную форму. Однако, построенные по самосопряженным операторам расширения квадратичной формы общего вида оказывается довольно сложным и включает в себя громоздкие преобразования (1.21)–(1.23). Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь сферически-симметричных расширений, которые могут быть представлены в виде трехмерных интегралов. Для расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах будет приведено по два эквивалентных выражения: в виде интегралов по дополнениям к шарам с центром в начале координат, либо в виде интеграла по всему трехмерному пространству с некоторыми локальными добавками.

3.1. Общие сведения, пример расширений квадратичной формы

Для иллюстрации свойств квадратичных форм дифференциальных операторов и их расширений обратимся к простому примеру — оператору T_0, описанному в части 2.1. Теорема Фридрихса-Стоуна [42] утверждает, что каждому полуограниченному самосопряженному оператору T соответствует замкнутая полуограниченная квадратичная форма Q, действующая по правилу

$$Q(u) = (u, Tu), \quad u \in \mathcal{W}.$$

Такая квадратичная форма задается сначала на области определения оператора $\mathcal{W}$, а потом, вследствие замкнутости, продолжается до некоторого замкнутого подпространства $\overline{\mathcal{W}}$. Может оказаться так, что та же самая квадратичная форма может быть задана с помощью некоторого полуограниченного симметрического оператора T_0. Из теоремы Фридрихса [43] следует, что среди всех расширений симметрического оператора T_0 с равными конечными, либо бесконечными индексами дефекта есть выделенное (максимальное) расширение, квадратичная форма которого получается замыканием квадратичной формы T_0:

$$Q_0(u) = (u, T_0 u), \quad u \in \mathring{\mathcal{W}}_0.$$

В нашем случае, когда самосопряженный оператор T определен с помощью преобразования Кэли как оператор T_0^a в части 2.1.1, а T_0 — это оператор из части 2.1 с индексами дефекта $(1, 1)$, расширению по Фридрихсу соответствует значение $a = 0$, а область определения квадратичной формы Q_0 включает в себя только функции исчезающие в нуле:

$$\mathcal{H}_0^1(\mathbb{R}^+) = \{u : \ (u, u) < \infty, \, (u', u') < \infty, \, u(0) = 0\}.$$

Всем остальным расширениям соответствуют квадратичные формы, заданные на одном и том же пространстве

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^+) = \{u : \ (u, u) < \infty, \, (u', u') < \infty\}$$

и действующие следующим образом

$$Q_a(u) = -\kappa(a)|u(0)|^2 + \int\limits_0^\infty |u'(r)|^2 dr.$$

Данная формула наглядно демонстрирует, что расширение по Фридрихсу, соответствующее значению $\kappa = -\infty$, среди всех форм Q_a, полуограниченных снизу, является *максимальной* формой. При этом для квадратичных форм Q_0 и Q_a выполнено условие вложенности

$$Q_0 \subset Q_a, \quad Q_a(u) = Q_0(u), \quad u \in \mathcal{W}_0^0$$

(в общем случае структура подпространств квадратичных форм самосопряженных расширений полуограниченного симметрического оператора описывается теорией Крейна [44]).

Таким образом, мы получаем соответствие между множеством самосопряженных расширений T_a, $a \neq 0$ действующих одинаково, но на разных подпространствах и множеством квадратичных форм Q_a, определенных на одном подпространстве, но действующих по-разному.

Применительно к квадратичной форме оператора Лапласа в трехмерном пространстве

$$Q_\Delta(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}|^2 d^3x, \tag{3.1}$$

рассмотренные выше формулы означают, что если замыкать данную форму, начиная с пространства функций исчезающих в нуле, то мы получим квадратичную форму на пространстве ограниченных функций, которое является классом Соболева $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ (см. [32]). Этой форме будет соответствовать самосопряженный оператор Δ_0 заданный на пространстве два раза дифференцируемых ограниченных функций. Но, в то же время, исходную квадратичную форму можно расширить до замкнутой формы $Q_\Delta^\kappa(f)$, действующей на пространстве функций, расходящихся в начале координат как $|x|^{-1}$

$$Q_\Delta^\kappa(f) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} |\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k}|^2 d^3x - (\frac{1}{\rho} - \kappa) \int\limits_{\partial B_\rho} |f(\vec{x})|^2 \, d^2s\Big), \tag{3.2}$$

здесь B_ρ – это шар радиуса ρ с центром в начале координат. Несложно увидеть, что на множестве ограниченных функций второе слагаемое исчезает, а предел первого стремится к интегралу (3.1). Перенормировка и теория рассеяния, соответствующие таким расширениям функционала энергии впервые были описаны в работе [11] в терминах операторов квантовой механики. Квадратичная форма (3.2) может быть также представлена в более удобном виде, не содержащем расходящийся интеграл

$$Q^{\kappa}_{\Delta}(f)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|x|^2}\Big|\frac{\partial}{\partial x_k}|x|f(\vec{x})\Big|^2\,d^3x+\kappa\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{\partial B_\rho}|f(\vec{x})|^2\,d^2s,$$

подробные формулы см. в [45].

3.2. Расширения квадратичных форм оператора Лапласа

Квадратичная форма скалярного оператора Лапласа (3.1) естественно переносится на векторный случай

$$Q_{\Delta}(\vec{f})=\sum_{k,j}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big|\frac{\partial f^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x. \qquad (3.3)$$

Эта форма определена на замкнутом пространстве — классе Соболева $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, при действии на векторную функцию $\vec{f}(\vec{x})$ в параметризации (1.19), (1.20), в соответствии с формулами (1.39) она диагонализуется и представляется в следующем виде

$$Q_{\Delta}(\vec{f})=(v_0,T_1v_0)+\sum_{1\le l,|m|\le l}\Big(\langle v_{lm},T_lv_{lm}\rangle_l+\langle u_{lm},T_lu_{lm}\rangle_l+(\phi_{lm},T_l\phi_{lm})\Big). \qquad (3.4)$$

Далее мы будем рассматривать сужения формы (3.3) на “поперечное”

$$Q^{\perp}_{\Delta}(\vec{f})=Q_{\Delta}(\vec{f}),\quad \vec{f}\in P^{\perp} \qquad (3.5)$$

и “продольное”

$$Q^{\parallel}_{\Delta}(\vec{f})=Q_{\Delta}(\vec{f}),\quad \vec{f}\in P^{\parallel}$$

подпространства. Для того, чтобы удостовериться в том, что такие сужения определены корректно, докажем следующее

Утверждение. *Неотрицательная квадратичная форма $Q^{\perp}_{\Delta}$ замкнута на подпространстве $P^{\perp}\cap\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$.*

То есть, для любой последовательности $\vec{f_n} \in P^\perp \cap \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, если $\|\vec{f_n} - f\|_{\mathbb{R}^3} \to 0$ и $Q_\Delta(\vec{f_n} - f_n) \to 0$, при $n \to \infty$, то $\vec{f} \in P^\perp \cap \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$.

Доказательство. Из принадлежности функции $\vec{f}(\vec{x})$ области определения квадратичной формы Q_Δ следует, что дивергенция $\partial_j f^j$ определена, по крайней мере, как функция из пространства $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^3$. Действительно, запишем неравенство, верное для фиксированных j, j'

$$\overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_j}} \frac{\partial f^{j'}}{\partial x_{j'}} + \overline{\frac{\partial f^{j'}}{\partial x_{j'}}} \frac{\partial f^j}{\partial x_j} \leq |\frac{\partial f^j}{\partial x_j}|^2 + |\frac{\partial f^{j'}}{\partial x_{j'}}|^2,$$

просуммируем его по j, j'

$$2\sum_{j,j'} \overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_j}} \frac{\partial f^{j'}}{\partial x_{j'}} = 2|\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x_j}|^2 \leq 6\sum_j \overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_j}} \frac{\partial f^j}{\partial x_j} \leq 6\sum_{j,k} \overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_k}} \frac{\partial f^j}{\partial x_k},$$

поделим на 2 и проинтегрируем по $\mathbb{R}^3$, получим

$$\|\frac{\partial f^j}{\partial x_j}\|^2_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_j}} \frac{\partial f^{j'}}{\partial x_{j'}} d^3x \leq 3\int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_k}} \frac{\partial f^j}{\partial x_k} d^3x = 3Q_\Delta(\vec{f}). \tag{3.6}$$

Из принадлежности последовательности $\vec{f_n}$ поперечному подпространству следует равенство

$$\|\frac{\partial(f^j_n - f^j)}{\partial x_j}\|^2_{\mathbb{R}^3} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\frac{\partial(f^j_n - f^j)}{\partial x_j}} \frac{\partial(f^{j'}_n - f^{j'})}{\partial x_{j'}} d^3x =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \overline{\frac{\partial f^j}{\partial x_j}} \frac{\partial f^{j'}}{\partial x_{j'}} d^3x = \|\frac{\partial f^j}{\partial x_j}\|^2_{\mathbb{R}^3}.$$

Теперь запишем неравенство (3.6) для $\vec{f_n} - \vec{f}$ и получим оценку

$$\|\frac{\partial f^j}{\partial x_j}\|^2_{\mathbb{R}^3} = \|\frac{\partial(f^j_n - f^j)}{\partial x_j}\|^2_{\mathbb{R}^3} \leq 3Q_\Delta(\vec{f_n} - \vec{f}),$$

из которой уже непосредственно следует замкнутость формы Q_Δ на поперечном подпространстве. □ Замкнутость формы $Q^{\|}_\Delta$ следует из замкнутости формы Q_Δ на всем пространстве $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ и только что доказанной замкнутости формы $Q^\perp_\Delta$.

Теперь можно перейти к основной задаче настоящей главы — выводу выражений для сферически симметричных расширений квадратичных форм $Q^\perp_\Delta$ и $Q^{\|}_\Delta$.

3.3. Квадратичная форма оператора Лапласа на поперечном подпространстве

Рассмотрим сужение формы (3.4) на поперечное подпространство. Пусть функция $\vec{f}(\vec{x})$ представлена в виде (1.20), тогда

$$Q^{\perp}_{\Delta}(\vec{f}) = \sum_{1\leq l, |m|\leq l} \Big(\langle u_{lm}, T_l u_{lm} \rangle_l + (\phi_{lm}, T_l \phi_{lm}) \Big).$$

Заменим операторы T_1 в первых слагаемых

$$\langle u_{1m}, T_1 u_{1m} \rangle_1$$

на самосопряженные расширения (2.19), соответствующие одинаковому для всех $m = -1, 0, 1$ параметру κ

$$Q^{\perp\kappa}_{\Delta}(\vec{f}) = \sum_{1\leq l, |m|\leq l} \Big(\langle u_{lm}, T^{\kappa}_l u_{lm} \rangle_l + (\phi_{lm}, T_l \phi_{lm}) \Big). \tag{3.7}$$

Посмотрим, как данная форма выглядит в терминах функции $\vec{f}(\vec{x})$, параметризованной в виде (1.20), у которой коэффициенты u_{1m} лежат в пространстве (2.18). Для этого сначала вычислим значение формы (3.7) на поперечном векторе

$$\vec{f}_m = \sqrt{2}\frac{u_{1m}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m} + \frac{u'_{1m}}{r}\vec{\Psi}_{1m}, \quad u_{1m} \in \mathcal{W}^{\kappa}_1 \tag{3.8}$$

лежащем в подпространстве с орбитальным моментом $l = 1$

$$\begin{aligned} Q^{\perp\kappa}_{\Delta}(\vec{f}_m) &= \langle u_{1m}, T^{\kappa}_1 u_{1m} \rangle_1 = \qquad\qquad (3.9)\\ &= \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\rho}^{\infty} \Big(\frac{d\bar{u}_{1m}}{dr}\frac{d}{dr} T^{\kappa}_1 u_{1m} + \frac{2}{r^2}\bar{u}_{1m} T^{\kappa}_1 u_{1m}\Big) dr = \\ &= \lim_{\rho\to 0} \int\limits_{\rho}^{\infty} \Big(\frac{d\bar{u}_{1m}}{dr}\frac{d}{dr} T_1 u_{1m} + \frac{2}{r^2}\bar{u}_{1m} T_1 u_{1m} + 2\Big(\frac{\bar{u}'_{1m}}{r^2} - \frac{2\bar{u}_{1m}}{r^3}\Big) u'_{1m}(0)\Big) dr. \end{aligned}$$

Здесь мы раскрыли действие расширенного оператора T^{κ}_1 в соответствии с определением (2.19). Последнее слагаемое в интеграле является полной производной, а все что содержит операцию T_1 можно с помощью формулы (1.37) выразить через действие оператора Лапласа на $\vec{f}_m$. Таким образом получаем

$$Q_{\Delta}^{\perp\kappa}(\vec{f}) = -\lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2 f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k^2}\, d^3x + 2u_{1m}'(0)\frac{\overline{u_{1m}(\rho)}}{\rho^2}\Big). \tag{3.10}$$

Теперь, следуя теореме Гаусса-Остроградского [28], проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2 f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k^2}\, d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho} \Big|\frac{\partial f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\, d^3x + \int\limits_{\partial B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\partial_k f_m^j(\vec{x})\, d^2\sigma_k,$$

здесь $d^2\vec{\sigma}$ — это вектор, нормальный к поверхности ∂B_ρ шара B_ρ с центром в начале координат. Полагая $\vec{x} = \vec{x}(\rho,\Omega)$ и $d^2\vec{\sigma} = \vec{x}\rho d^2\Omega$, где Ω — это, как и ранее, точка на единичной сфере $\mathbb{S}^2$, интеграл по поверхности можно переписать как интеграл по единичной сфере

$$\int\limits_{\partial B_\rho} \overline{f_m^j(\vec{x})}\partial_k f_m^j(\vec{x})\, d^2\sigma^k = \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{f_m^j(\vec{x})}|x|x_k\partial_k f_m^j(\vec{x})\, d^2\Omega\,\Big|_{|x|=\rho}. \tag{3.11}$$

Подставим выражение (3.8) в производную $x_k\partial_k\vec{f}_m$

$$\begin{aligned} x_k\partial_k\vec{f}_m &= x_k\partial_k\big(\sqrt{2}\frac{u_{1m}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m} + \frac{u_{1m}'}{r}\vec{\Psi}_{1m}\big) = \\ &= \sqrt{2}\big(\frac{u_{1m}'}{r} - 2\frac{u_{1m}}{r^2}\big)\vec{\Upsilon}_{lm} + \big(u_{1m}'' - \frac{u_{1m}'}{r}\big)\vec{\Psi}_{lm}, \end{aligned}$$

здесь мы использовали свойство независимости векторных сферических гармоник от радиальной переменной

$$x_k\partial_k\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) = 0, \quad x_k\partial_k\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) = 0.$$

Перемножая формулу для $x_k\partial_k\vec{f}_m$ и $\vec{f}_m$ получим следующее выражение для интеграла (3.11)

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{f_m^j(\vec{x})}|x|x_k\partial_k f_m^j(\vec{x})\, d^2\Omega\,\Big|_{|x|=\rho} = \\ &\quad = u_{1m}''(\rho)\bar{u}_{1m}'(\rho) - \frac{|u_{1m}'(\rho)|^2}{\rho} + 2\frac{u_{1m}'(\rho)\bar{u}_{1m}(\rho)}{\rho^2} - 4\frac{|u_{1m}(\rho)|^2}{\rho^3}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Теперь напишем разложение функции $u(\rho)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$u(\rho) = u'(0)\rho + u''(0)\frac{\rho^2}{2} + \dots, \quad u'(\rho) = u''(0)\rho + \dots, \quad \rho \to 0,$$

подставим в него граничное условие из (2.18) и вычислим первые члены разложения для квадратичных слагаемых в (3.10) и (3.12)

$$\begin{aligned}
\frac{u'(\rho)\overline{u(\rho)}}{\rho^2} &\simeq \frac{1}{\rho}|u'(0)|^2 + u''(0)\overline{u'(0)} + \frac{1}{2}u'(0)\overline{u''(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + 2\kappa\big)|u'(0)|^2,\\
\frac{|u(\rho)|^2}{\rho^3} &\simeq \frac{1}{\rho}|u'(0)|^2 + \frac{1}{2}u'(0)\overline{u''(0)} + \frac{1}{2}u''(0)\overline{u'(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + \frac{4}{3}\kappa\big)|u'(0)|^2,\\
\frac{|u'(\rho)|^2}{\rho} &\simeq \frac{1}{\rho}|u'(0)|^2 + u'(0)\overline{u''(0)} + u''(0)\overline{u'(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + \frac{8}{3}\kappa\big)|u'(0)|^2,\\
u''(\rho)\overline{u'(\rho)} &\simeq \frac{4}{3}\kappa|u'(0)|^2, \quad \frac{u''(\rho)\overline{u(\rho)}}{\rho} \simeq \frac{4}{3}\kappa|u'(0)|^2\\
\frac{\overline{u(\rho)}}{\rho^2} &\simeq \frac{1}{\rho}\overline{u'(0)} + \frac{1}{2}\overline{u''(0)} = \big(\frac{1}{\rho} + \frac{2}{3}\kappa\big)\overline{u'(0)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, для (3.12) получается оценка

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} \overline{f^j_m(\vec{x})}|x|x_k\partial_k f^j_m(\vec{x})\, d^2\Omega\,\Big|_{|x|=\rho} &= \Big(\frac{4}{3}\kappa - \big(\frac{1}{\rho} + \frac{8}{3}\kappa\big) + 2\big(\frac{1}{\rho} + 2\kappa\big) -\\
&- 4\big(\frac{1}{\rho} + \frac{4}{3}\kappa\big)\Big)|u'_{1m}(0)|^2 + \mathcal{O}(\rho) = -\big(\frac{3}{\rho} + \frac{8}{3}\kappa\big)|u'_{1m}(0)|^2 + \mathcal{O}(\rho),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

которая при подстановке в (3.10) дает

$$Q^{\perp\kappa}_{\Delta}(\vec{f}) = \lim_{\rho\to0}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big|\frac{\partial f^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2\, d^3x - \big(\frac{5}{\rho} + 4\kappa\big)|u'_{1m}(0)|^2\Big).$$

Сравним это выражение с интегралом по сфере от квадрата модуля $\vec{f}_m$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\rho} |\vec{f}_m(\vec{x})|^2\, d^2s = \int_{\partial B_\rho} \Big|\sqrt{2}\frac{u_{1m}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m} + \frac{u'_{1m}}{r}\vec{\Psi}_{1m}\Big|^2\, d^2s =&\\
= \frac{2|u_{1m}|^2}{\rho^2} + |u'_{1m}|^2 = \big(3 + \frac{16}{3}\kappa\rho\big)|u'_{1m}(0)|^2 + \mathcal{O}(\rho^2),&
\end{aligned} \tag{3.14}$$

в результате получим следующий предел, содержащий интеграл по внешности шара B_ρ и его поверхности

$$Q^{\perp\kappa}_{\Delta}(\vec{f}_m) = \lim_{\rho\to0}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big|\frac{\partial f^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2 d^3x - \big(\frac{5}{3\rho} - \frac{44}{27}\kappa\big)\int_{\partial B_\rho} |\vec{f}_m(\vec{x})|^2\, d^2s\Big). \tag{3.15}$$

Данное выражение было получено в работе [24] с использованием другого скалярного произведения, а затем перевычислено в статье [27] для произведения (1.32).

Все формулы в проделанных вычислениях остаются верными для любых поперечных функций $\vec{f}(\vec{x})$, то есть функций, представимых в виде (1.20) — это следует из ортогональности векторных сферических гармоник. Несложно увидеть, что на множестве непрерывно-дифференцируемых функций второе слагаемое в (3.15) стремится к нулю, а предел первого дает интеграл по всему пространству $\mathbb{R}^3$, то есть квадратичную форму (3.3)

$$Q_\Delta(\vec{f}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big|\frac{\partial f^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 d^3x. \tag{3.16}$$

В то же время, на функциях с сингулярностью в начале координат определенного вида интеграл по поверхности шара в (3.15) компенсирует расходимость первого слагаемого, и в результате для квадратичной формы $Q_\Delta^{\perp\kappa}$ получается конечное вещественное значение. Таким образом, можно сделать вывод, что выражение (3.15) описывает расширение квадратичной формы оператора Лапласа (3.16). Коэффициент $\frac{5}{3}$ при расходящейся степени ρ^{-1} во втором слагаемом отличается от коэффициента 1 в (3.2), так как мы получили другое расширение заданное на другом замкнутом множестве. Значение коэффициента $\frac{44}{27}$ при параметре κ зависит от выбора коэффициента в граничном условии (2.18), участвующего в фиксации области определения $\mathcal{W}_1^\kappa$ самосопряженных операторов T_1^κ

3.3.1. Другая формула для расширения квадратичной формы на поперечном подпространстве

Формула (3.15), полученная выше для сферически симметричных расширений квадратичной формы $Q_\Delta^\perp$, обладает существенным недостатком: она содержит предел интеграла по расширяющейся области от выражения, не интегрируемого по всему пространству. Для того, чтобы представить форму $Q_\Delta^{\perp\kappa}$ в виде интеграла по трехмерному пространству, можно воспользоваться техникой построения квадратичных форм, описанной в [45]. В выражении

$$Q_{\Delta}^{\perp\kappa}(\vec{f}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{5}{3}\frac{1}{x^2}\Big|\frac{\partial |x| f^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 - \frac{2}{3}\Big|\frac{\partial f^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\Big)\, d^3x + \\ + \lim_{\rho\to 0}\frac{44}{27}\kappa \int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{f}(\vec{x})|^2\, d^2\sigma. \quad (3.17)$$

все пределы и интегралы конечны для поперечных функций $\vec{f}(\vec{x})$, представимых в виде (3.8). Убедимся, что для таких поперечных функций значения форм (3.15) и (3.17) совпадают. Для этого заменим интеграл в первой строке (3.17) на предел интегралов по расширяющимся областям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{5}{3}\frac{1}{x^2}\Big|\frac{\partial |x| f^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2 - \frac{2}{3}\Big|\frac{\partial f^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\Big)\, d^3x = \\ = \lim_{\rho\to 0}\Big(\frac{5}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \frac{1}{x^2}\Big|\frac{\partial |x| f^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\, d^3x - \frac{2}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\Big|\frac{\partial f^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\, d^3x\Big)$$

и проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x|\overline{f^j_m(\vec{x})}\big)\frac{1}{x^2}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x| f^j_m(\vec{x})\big)\, d^3x = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \overline{f^j_m(\vec{x})}|x|\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{x^2}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x| f^j_m(\vec{x})\big)\, d^3x - \\ - \int\limits_{\partial B_\rho} \frac{\overline{f^j_m(\vec{x})}}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_k}|x| f^j_m(x)\, d^2\sigma_k = \\ = -\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \overline{f^j_m(\vec{x})}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f^j_m(\vec{x})\, d^3x - \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{f^j_m(\vec{x})} x_k \partial_k |x| f^j_m(x)\, d^2\Omega\Big|_{|x|=\rho}.$$

Для последнего слагаемого, с учетом равенста $r = |x|$, проведем следующие вычисления

$$x_k\partial_k|x|\vec{f}_m = x_k\partial_k\big(\sqrt{2}\frac{u_{1m}}{r}\vec{\Upsilon}_{1m} + u'_{1m}\vec{\Psi}_{1m}\big) = \sqrt{2}\big(\frac{u_{1m}}{r}\big)' r\vec{\Upsilon}_{lm} + u''_{1m} r\vec{\Psi}_{lm},$$

которые приводят к оценке

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{f_m^j(\vec{x})}x_k\partial_k|x|f_m^j(x)\,d^2\Omega\Big|_{|x|=\rho}=\Big(2\frac{\bar{u}_{1m}}{r}(\frac{u_{1m}}{r})'+\bar{u}'_{1m}u''_{1m}\Big)\Big|_{r=\rho}=$$

$$=2\bar{u}''(\rho)u'(\rho)+\mathcal{O}(\rho)=\frac{8}{3}\kappa|u'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho).$$

Далее, пользуясь равенством (3.10)

$$Q_{\Delta}^{\perp\kappa}(\vec{f})=-\lim_{\rho\to0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho}\overline{f_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2 f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k^2}\,d^3x+\big(\frac{2}{\rho}+\frac{4}{3}\kappa\big)|u'_{1m}(0)|^2\Big)$$

и оценками предыдущей части

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{f_m^j(\vec{x})}|x|x_k\partial_k f_m^j(x)\,d^2\Omega\Big|_{|x|=\rho}=\Big(2\bar{u}_{1m}(\frac{u_{1m}}{r^2})'+r\bar{u}'_{1m}(\frac{u'_{1m}}{r})'\Big)\Big|_{r=\rho}=$$

$$=-\frac{3}{\rho}|u'_{1m}(0)|^2-2\bar{u}''_{1m}(\rho)u'_{1m}(\rho)+\mathcal{O}(\rho)=-\big(\frac{3}{\rho}+\frac{8}{3}\kappa\big)|u'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho)$$

$$\int\limits_{\partial B_\rho}|\vec{f}_m(\vec{x})|^2d^2\sigma=3|u'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho),$$

получаем

$$\lim_{\rho\to0}\Big(\frac{5}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho}\frac{1}{x^2}\Big|\frac{\partial|x|f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\,d^3x-\frac{2}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho}\Big|\frac{\partial f_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\,d^3x\Big)=$$

$$=-\lim_{\rho\to0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho}\overline{f_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}f_m^j(\vec{x})\,d^3x+\big(\frac{40}{9}\kappa+\frac{16}{9}\kappa+\frac{2}{\rho}\big)|u'_{1m}(0)|^2\Big)=$$

$$=Q_{\Delta}^{\perp\kappa}(\vec{f}_m)-\frac{44}{9}\kappa|u'_{1m}(0)|^2=Q_{\Delta}^{\perp\kappa}(\vec{f}_m)-\lim_{\rho\to0}\frac{44}{27}\kappa\int\limits_{\partial B_\rho}|\vec{f}(\vec{x})|^2\,d^2\sigma,$$

что эквивалентно формуле (3.17).

3.4. Квадратичная форма оператора Лапласа на продольном подпространстве

В этом разделе, с помощью техники, разработанной для поперечного подпространства, мы рассмотрим расширения квадратичной формы $Q_{\Delta}^{\parallel}$, действующей на подпространстве продольных функций $P^{\parallel}$, представленных в виде

(1.19). Запишем продольные слагаемые квадратичной формы (3.4)

$$Q^{\|}_{\Delta}(\vec{g}) = (v_0, T_1 v_0) + \sum_{1\leq l, |m|\leq l} \langle v_{lm}, T_l v_{lm}\rangle_l.$$

и заменим операторы T_1 на самосопряженные расширения (2.19), соответствующие одинаковому для всех $m = 1, 2, 3$ параметру κ

$$Q^{\|}_{\Delta}(\vec{g}) = (v_0, T_1 v_0) + \langle v_{1m}, T_1^{\kappa} v_{1m}\rangle_1 + \sum_{2\leq l, |m|\leq l} \langle v_{lm}, T_l v_{lm}\rangle_l. \tag{3.18}$$

Посмотрим, как данная форма выглядит в терминах функции $\vec{g}(\vec{x})$, представимой в виде (1.19), с коэффициентами v_{1m}, лежащими в пространстве $\mathcal{W}_1^{\kappa}$. Для этого сначала вычислим значение формы (3.18) на продольном векторе

$$\vec{g}_m = \big(\frac{v_{1m}}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{1m} + \sqrt{2}\frac{v_{1m}}{r^2}\vec{\Psi}_{1m}, \quad v_{1m} \in \mathcal{W}_1^{\kappa}, \tag{3.19}$$

лежащем в подпространстве с орбитальным моментом $l = 1$

$$Q^{\|\kappa}_{\Delta}(\vec{g}_m) = \langle v_{1m}, T_1^{\kappa} v_{1m}\rangle_1 = \big(\vec{g}_{v_{1m}}, \vec{g}_{T_1^{\kappa} v_{1m}}\big) = \tag{3.20}$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \Big(\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)' r^2 \big(\frac{T_1^{\kappa} v_{1m}}{r}\big)' + \frac{2}{r^2}\bar{v}_{1m} T_1^{\kappa} v_{1m}\Big)\, dr =$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\Big\{\int\limits_{\rho}^{\infty} \Big(\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)' r^2 \big(\frac{T_1 v_{1m}}{r}\big)' + \frac{2}{r^2}\bar{v}_{1m} T_1 v_{1m}\Big)\, dr -$$

$$- 2\int\limits_{\rho}^{\infty} \Big(\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)' r^2 \big(\frac{v_{1m}'(0)}{r^2}\big)' + \frac{2}{r^3}\bar{v}_{1m} v_{1m}'(0)\Big)\, dr\Big\}. \tag{3.21}$$

Здесь мы раскрыли действие расширенного оператора T_1^{κ} в соответствии с (2.19). Во втором интеграле стоит полная производная

$$\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)' r^2 \big(\frac{v_{1m}'(0)}{r^2}\big)' + \frac{2}{r^3}\bar{v}_{1m} v_{1m}'(0) = 2v_{1m}'(0)\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r^2}\big)',$$

а все что содержит операцию T_1 можно с помощью формулы (1.36) выразить через действие оператора Лапласа на $\vec{g}_m$

$$\int\limits_{\rho}^{\infty} \Big(\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)' r^2 \big(\frac{T_1 v_{1m}}{r}\big)' + \frac{2}{r^2}\bar{v}_{1m} T_1 v_{1m}\Big)\, dr = -\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_{\rho}} \overline{g_m^j(\vec{x})}\frac{\partial^2 g_m^j(\vec{x})}{\partial x_k^2}\, d^3x.$$

Таким образом, получаем равенство

$$Q^{\|\kappa}_{\Delta}(\vec{g}) = -\lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho} \overline{g^j_m(\vec{x})}\frac{\partial^2 g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k^2}\,d^3x + 4v'_{1m}(0)\frac{\overline{v_{1m}(\rho)}}{\rho^2}\Big), \tag{3.22}$$

которое отличается от (3.10) коэффициентом при втором слагаемом. Теперь, следуя теореме Гаусса-Остроградского, проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho} \overline{g^j_m(\vec{x})}\frac{\partial^2 g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k^2}\,d^3x = \int\limits_{\mathbb{R}^3\backslash B_\rho} \Big|\frac{\partial g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\,d^3x + \int\limits_{\partial B_\rho} \overline{g^j_m(\vec{x})}\partial_k g^j_m(\vec{x})\,d^2\sigma_k,$$

здесь $d^2\vec{\sigma}$ — это вектор, нормальный к поверхности ∂B_ρ шара B_ρ с центром в начале координат. Полагая $\vec{x} = \vec{x}(\rho,\Omega)$ и $d^2\vec{\sigma} = \vec{x}\rho d^2\Omega$, где Ω — это, как и ранее, точка на единичной сфере $\mathbb{S}^2$, интеграл по поверхности можно переписать как интеграл по единичной сфере

$$\int\limits_{\partial B_\rho} \overline{g^j_m(\vec{x})}\partial_k g^j_m(\vec{x})\,d^2\sigma^k = \int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{g^j_m(\vec{x})}|x|x_k\partial_k g^j_m(\vec{x})\,d^2\Omega\,\Big|_{|x|=\rho}. \tag{3.23}$$

Подставим выражение (3.19) в производную $x_k\partial_k\vec{g}_m$

$$\begin{aligned} x_k\partial_k\vec{g}_m &= x_k\partial_k\Big(\big(\frac{v_{1m}}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{1m} + \sqrt{2}\frac{v_{1m}}{r^2}\vec{\Psi}_{1m}\Big) = \\ &= \big(\frac{v_{1m}}{r}\big)''r\vec{\Upsilon}_{lm} + \sqrt{2}\big(\frac{v_{1m}}{r^2}\big)'r\vec{\Psi}_{lm}. \end{aligned}$$

Перемножая полученную формулу для $x_k\partial_k\vec{g}_m$ и $\vec{g}_m$ получим следующее выражение для интеграла (3.23)

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{g^j_m(\vec{x})}|x|x_k\partial_k g^j_m(\vec{x})\,d^2\Omega\,\Big|_{|x|=\rho} = \Big(\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)'\big(\frac{v_{1m}}{r}\big)''r^2 + 2\bar{v}_{1m}\big(\frac{v_{1m}}{r^2}\big)'\Big)\Big|_{r=\rho}. \tag{3.24}$$

Теперь напишем разложение функции $v(r)$ в ряд Тейлора в окрестности нуля

$$v(r) = v'(0)r + v''(0)\frac{r^2}{2} + \mathcal{O}(r^3), \quad v'(r) = v''(0)r + \mathcal{O}(r^2), \quad \rho\to 0,$$

подставим в него граничное условие из (2.18) и вычислим первые члены разложения для квадратичных слагаемых в (3.24)

$$
\begin{aligned}
\big(\frac{\bar{v}}{r}\big)'\big(\frac{v}{r}\big)''r^2 &= \big(\bar{v}'(0)+\bar{v}''(0)r+\mathcal{O}(r^2)\big)'\big(v'(0)+v''(0)r+\mathcal{O}(r^2)\big)''r^2 = \\
&= \mathcal{O}(r^2) \\
\bar{v}\big(\frac{v}{r^2}\big)' &= \big(\bar{v}'(0)r+\bar{v}''(0)\frac{r^2}{2}+\mathcal{O}(r^3)\big)\big(\frac{v'(0)r+v''(0)\frac{r^2}{2}}{r^2}+\mathcal{O}(r)\big)' = \\
&= \big(\bar{v}'(0)r+\bar{v}''(0)\frac{r^2}{2}+\mathcal{O}(r^3)\big)\big(-\frac{v'(0)}{r^2}+\mathcal{O}(1)\big) = \\
&= -\big(\frac{1}{r}+\frac{2}{3}\kappa\big)|v'(0)|^2+\mathcal{O}(r), \\
\big(\frac{\bar{v}}{r}\big)'\big(\frac{v}{r}\big)'r^2 &= \big(\bar{v}'(0)+\bar{v}''(0)r+\mathcal{O}(r^2)\big)'\big(v'(0)+v''(0)r+\mathcal{O}(r^2)\big)'r^2 = \mathcal{O}(r^2), \\
\frac{\bar{v}v}{r^2} &= \frac{1}{r^2}\big(\bar{v}'(0)r+\bar{v}''(0)\frac{r^2}{2}+\mathcal{O}(r^3)\big)\big(v'(0)r+v''(0)\frac{r^2}{2}+\mathcal{O}(r^3)\big) = \\
&= |v'(0)|^2+r|v'(0)v''(0)|+\mathcal{O}(r^2) = \big(1+\frac{4}{3}r\kappa\big)|v'(0)|^2+\mathcal{O}(r^2).
\end{aligned}
$$

Таким образом, для интеграла по сфере (3.24) получается оценка

$$
\int\limits_{\mathbb{S}^2} \overline{g^j_m(\vec{x})}|x|x_k\partial_k g^j_m(\vec{x})\,d^2\Omega\,\big|_{|x|=\rho} = -\big(\frac{2}{\rho}+\frac{4}{3}\kappa\big)|v'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho), \tag{3.25}
$$

которая при подстановке в (3.22) дает

$$
Q^{\|\kappa}_{\Delta}(\vec{g}) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\big|\frac{\partial g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2\,d^3x-\big(\frac{6}{\rho}+4\kappa\big)|v'_{1m}(0)|^2\Big).
$$

Сравним это выражение с интегралом по сфере от квадрата модуля $\vec{g}_m$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial B_\rho}|\vec{g}_m(\vec{x})|^2\,d^2s &= \int\limits_{\partial B_\rho}\big|\big(\frac{v_{1m}}{r}\big)'\vec{\Upsilon}_{1m}+\sqrt{2}\frac{v_{1m}}{r^2}\vec{\Psi}_{1m}\big|^2\,d^2s = \\
&= r^2\Big(\big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)'\big(\frac{v_{1m}}{r}\big)'+2\frac{|v_{1m}|^2}{r^4}\Big)\Big|_{r=\rho} = \big(2+\frac{8}{3}\rho\kappa\big)|v'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho^2),
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

в результате получим следующий предел для интегрирования по дополнению к шару B_ρ и его поверхности

$$
Q^{\|\kappa}_{\Delta}(\vec{g}_m) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\big|\frac{\partial g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2 d^3x-\big(\frac{3}{\rho}-2\kappa\big)\int\limits_{\partial B_\rho}|\vec{g}_m(\vec{x})|^2\,d^2s\Big). \tag{3.27}
$$

Из ортогональности векторных сферических гармоник следует, что все формулы в проделанных вычислениях остаются верными для любых продольных функций $\vec{g}(\vec{x})$, то есть функций, представимых в виде (1.19). Выражение (3.27) отличается от (3.15) коэффициентами во втором слагаемом, это обстоятельство связано с выбором подпространств, на которых заданы рассматриваемые квадратичные формы.

3.4.1. Другая формула для расширения квадратичной формы на продольном подпространстве

Как и в поперечном случае, формула (3.27), полученная выше для сферически симметричных расширений квадратичной формы $Q_\Delta^{\|}$, обладает существенным недостатком: она содержит предел интеграла по расширяющейся области от выражения, не интегрируемого по всему пространству. Для того, чтобы представить форму $Q_\Delta^{\|\kappa}$ в виде интеграла по трехмерному пространству $\mathbb{R}^3$ можно воспользоваться техникой, описанной в предыдущей части. В квадратичной форме от регулярного выражения

$$Q_\Delta^{\|\kappa}(\vec{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{3}{x^2}\big|\frac{\partial |x|\vec{g}(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2 - 2\big|\frac{\partial \vec{g}(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2\Big)\, d^3x + \\ + \lim_{\rho\to 0} 2\kappa \int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{g}(\vec{x})|^2\, d^2\sigma \quad (3.28)$$

все пределы и интегралы конечны для продольных функций $\vec{g}(\vec{x})$, представимых в виде (3.19). Убедимся, что для таких функций значения форм (3.27) и (3.28) совпадают. Для этого заменим интеграл в первой строке (3.28) на предел интегралов по расширяющимся областям (дополнениям к шарам B_ρ)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{3}{x^2}\big|\frac{\partial |x| g_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2 - 2\big|\frac{\partial g_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2\Big)\, d^3x = \\ = \lim_{\rho\to 0}\Big(3\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \frac{1}{x^2}\big|\frac{\partial |x| g_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2\, d^3x - 2\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big|\frac{\partial g_m^j(\vec{x})}{\partial x_k}\big|^2\, d^3x\Big)$$

и проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x|\overline{g^j_m(\vec{x})}\big)\frac{1}{x^2}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x|g^j_m(\vec{x})\big)\,d^3x =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} \overline{g^j_m(\vec{x})}|x|\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{x^2}\big(\frac{\partial}{\partial x_k}|x|g^j_m(\vec{x})\big)\,d^3x-$$

$$-\int\limits_{\partial B_\rho}\frac{\overline{g^j_m(\vec{x})}}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_k}|x|g^j_m(x)\,d^2\sigma_k =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\overline{g^j_m(\vec{x})}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}g^j_m(\vec{x})\,d^3x - \int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{g^j_m(\vec{x})}x_k\partial_k|x|g^j_m(x)\,d^2\Omega\big|_{|x|=\rho}.$$

Для последнего слагаемого, с учетом равенства $r = |x|$, проведем следующие вычисления

$$x_k\partial_k|x|\vec{g}_m = x_k\partial_k\big(\big(v'_{1m}-\frac{v_{1m}}{r}\big)\vec{\Upsilon}_{1m}+\sqrt{2}\frac{v_{1m}}{r}\vec{\Psi}_{1m}\big) =$$

$$= \big(v''_{1m}r - v'_{1m}+\frac{v_{1m}}{r}\big)\vec{\Upsilon}_{lm}+\sqrt{2}\big(\frac{v_{1m}}{r}\big)'r\vec{\Psi}_{lm},$$

которые приводят к оценке

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{g^j_m(\vec{x})}x_k\partial_k|x|g^j_m(x)\,d^2\Omega\big|_{|x|=\rho} =$$

$$= \big(\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big)'\big(v''_{1m}r - v'_{1m}+\frac{v_{1m}}{r}\big)\big|_{r=\rho}+2\frac{\bar{v}_{1m}}{r}\big(\frac{v_{1m}}{r}\big)'\big|_{r=\rho} =$$

$$= \frac{1}{4}|v''_{1m}|^2\rho+\bar{v}'_{1m}(0)v''_{1m}(0)+\mathcal{O}(\rho) = \frac{4}{3}\kappa|v'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho).$$

Далее, пользуясь равенством (3.22)

$$Q^{\|\kappa}_\Delta(\vec{g}) = -\lim_{\rho\to0}\big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\overline{g^j_m(\vec{x})}\frac{\partial^2 g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k^2}\,d^3x+\big(\frac{4}{\rho}+\frac{8}{3}\kappa\big)|v'_{1m}(0)|^2\big)$$

и оценками предыдущей части (3.25), (3.26),

$$\int\limits_{\mathbb{S}^2}\overline{g^j_m(\vec{x})}|x|x_k\partial_k g^j_m(x)\,d^2\Omega\big|_{|x|=\rho} = -\big(\frac{2}{\rho}+\frac{4}{3}\kappa\big)|v'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho)$$

$$\int\limits_{\partial B_\rho}|\vec{g}_m(\vec{x})|^2d^2\sigma = 2|v'_{1m}(0)|^2+\mathcal{O}(\rho),$$

получаем

$$\lim_{\rho\to0}\Big(3\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\frac{1}{x^2}\Big|\frac{\partial|x|g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\,d^3x-2\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\Big|\frac{\partial g^j_m(\vec{x})}{\partial x_k}\Big|^2\,d^3x\Big)=$$

$$=-\lim_{\rho\to0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho}\overline{g^j_m(\vec{x})}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}g^j_m(\vec{x})\,d^3x+\big(4\kappa+\frac{8}{3}\kappa+\frac{4}{\rho}\big)|v'_{1m}(0)|^2\Big)=$$

$$=Q^{\|\kappa}_{\Delta}(\vec{g}_m)-4\kappa|v'_{1m}(0)|^2=Q^{\|\kappa}_{\Delta}(\vec{g}_m)-\lim_{\rho\to0}2\kappa\int\limits_{\partial B_\rho}|\vec{g}(\vec{x})|^2\,d^2\sigma,$$

что эквивалентно равенству (3.28).

3.5. Квадратичная форма оператора Лапласа на линейных комбинациях

Формулы (3.15) и (3.27) для сферически-симметричных расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах выглядят очень похоже и отличаются лишь коэффициентами. Данное обстоятельство связано с наличием симметрии между этими двумя подпространствами. Действительно, рассмотрим векторную функцию $\vec{h}(\vec{x})$, параметризованную следующим образом

$$\vec{h}_{w_{lm}}=\hat{l}\big(z(\frac{w'_{lm}}{r}-\frac{w_{lm}}{r^2})+\frac{w_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Upsilon}_{lm}+\big(\hat{l}^2\frac{zw_{lm}}{r^2}+\frac{w'_{lm}}{r}\big)\vec{\Psi}_{lm},\qquad(3.29)$$

где z — это комплексное число, а w_{lm} — параметризующие функции из пространств $\mathcal{H}^l$. Тогда при $z=0$ вектор $\vec{h}(\vec{x})$ является поперечным, а при $z=\infty$ вектор $z^{-1}\vec{h}(\vec{x})$ принадлежит продольному подпространству. В то же время, действие оператора Лапласа на $\vec{h}(\vec{x})$, в соответствии с формулами (1.36), (1.37), сводится к действию операторов T_l на w_{lm}

$$\Delta\vec{h}_{w_{lm}}=\hat{l}\big(z(\frac{(T_lw_{lm})'}{r}-\frac{T_lw_{lm}}{r^2})+\frac{T_lw_{lm}}{r^2}\big)\vec{\Upsilon}_{lm}+\big(\hat{l}^2\frac{zT_lw_{lm}}{r^2}+\frac{(T_lw_{lm})'}{r}\big)\vec{\Psi}_{lm}=\vec{h}_{T_lw_{lm}},$$

а скалярное произведение из трехмерного пространства индуцирует действие скобки (1.32) на w_{lm}

$$\big(\vec{h}_{w_{lm}}, \vec{h}_{w_{lm}}\big) = (1 + \hat{l}^2|z|^2)\langle w_{lm}, w_{lm}\rangle_l.$$

Таким образом, квадратичная форма оператора Лапласа на линейном подпространстве векторов вида $\vec{h}_{w_{lm}}$ сводится к квадратичной форме операторов T_l в скалярном произведении (1.32)

$$\big(\vec{h}_{w_{lm}}, \Delta\vec{h}_{w_{lm}}\big)_{\mathbb{R}^3} = (1 + \hat{l}^2|z|^2)\langle w_{lm}, T_l w_{lm}\rangle_l.$$

Это означает, что формы в подпространствах, отвечающим орбитальному моменту $l = 1$, могут быть расширены посредством расширения симметрических операторов T_1 до самосопряженных операторов T_1^κ, описанных в (2.19). В работе [27] показывается, что действие расширенных описанным способом квадратичных форм, перенесенное на векторы (3.29), выглядит следующим образом

$$Q_\Delta^\kappa(\vec{h}) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus B_\rho} |\frac{\partial\vec{h}(\vec{x})}{\partial x_k}|^2 d^3x - (\frac{\alpha}{\rho} - \beta\kappa) \int\limits_{\partial B_\rho} |\vec{h}(\vec{x})|^2\, d^2s\Big),$$

где коэффициенты α и β являются рациональными функциями параметра z

$$\alpha(z) = \frac{12|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 5}{4|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 3},$$
$$\beta(z) = \frac{4}{3}\frac{24|z|^4 + 36|z|^2(z+\bar{z}) + 4(z+\bar{z})^2 + 38|z|^2 + 16(z+\bar{z}) + 11}{(4|z|^2 + 2(z+\bar{z}) + 3)^2}.$$

Такой вид коэффициентов накладывает ограничения на область их возможных значений. Действительно, когда параметр z пробегает всю комплексную плоскость, коэффициент $\alpha(z)$ является вещественным числом, которое меняется в диапазоне

$$3 - \sqrt{2} \le \alpha(z) \le 3 + \sqrt{2}.$$

Стоит отметить, что точка $\alpha = 1$, соответствующая квадратичной форме (3.2) не попадает в этот диапазон, то есть расширения (3.2) и расширения, построенные в данной главе, являются существенно отличающимися расширениями квадратичной формы векторного оператора Лапласа.

Подпространства векторов вида (3.29), в отличие от продольного (1.19) и поперечного (1.20) подпространств, описываются сложными условиями калибровки, и, как следствие, не представляют существенного интереса с точки зрения физических приложений. Поэтому в настоящей работе мы не будем подробно описывать их свойства, а остановимся на представленных выше сведениях.

Заключение

В диссертации было рассмотрено действие оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах пространства векторных функций трех переменных. Полученные результаты состоят в следующем:

1. Было показано, что в определенной параметризации поперечного и продольного подпространств индуцированные скалярные произведения и радиальные части оператора Лапласа задаются одними и теми же дифференциальными операциями (для поперечного подпространства это свойство относится только к половине параметризующих радиальных функций).

2. Было показано, что в подпространствах с орбитальным моментом $l = 1$ радиальные части оператора Лапласа на множестве гладких функций, быстро убывающих в начале координат, в индуцированном скалярном произведении являются симметрическими операторами с индексами дефекта (1,1). Были построены самосопряженные расширения этих операторов, их резольвенты и спектральные разложения.

3. Были построены выражения для замкнутых сферически симметричных расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах, связанные с указанными выше самосопряженными расширениями радиальных операторов.

Дальнейшее развитие полученных результатов представляется возможным по двум направлениям:

1. Провести приведенные в настоящей работе вычисления для действия оператора Лапласа на подпространствах (подмногообразиях) более общего вида, то есть не только для продольного, поперечного подпространств и их линейных комбинаций.

2. Несмотря на то, что приведенные результаты опираются на базис векторных сферических гармоник, связанный со сферической симметрией и выделенной точкой, с помощью резольвентной техники и теории Крейна можно пытаться построить самосопряженные расширения оператора Лапласа на продольном и поперечном подпространствах, связанные с особенностями в двух и более выделенных точках трехмерного пространства. Соответствующая техника построения расширений квадратичных форм для пространства скалярных функций была предложена автором в работе [45].

Список литературы

1. Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. Университета, 1980. 200 с.
2. Васильев А. Н. Классическая электродинамика, краткий курс лекций, учебное пособие. СПб: БХВ-Петербург, 2010. 288 с.
3. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. 270 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Издание 4-е, стереотипное. (Теоретическая физика, том VI). М.: Наука, 1988. 736 с.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: МГУ, Наука, 2004. 798 с.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность. М.: Мир, 1978. 395 с.
7. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. 2-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2003. 303 с.
8. Мессиа А. Квантовая механика: Пер. с фр. Том 2. М: Наука, 1979. 584 с.
9. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976. 256 с.
10. Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbation of differential operators. Solvable Schrödinger type operators. Cambridge University Press, 2000. 429 pp.
11. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Доклады Академии Наук СССР. том 137 вып. 5, 1961. С. 1011-1014.
12. Павлов Б. С. Модель потенциала нулевого радиуса с внутренней структурой // Теоретическая и Математическая Физика. том 59 вып. 3. 1984. С. 345–353.
13. Кошманенко В. Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1993. 172 с.
14. Бирман М. Ш. Возмущения квадратичных форм и спектр задач с сингуляр-

ными граничными условиями // Доклады Академии Наук СССР. том 125 вып. 3. 1959. С. 471–474.

15. Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. О точечном взаимодействии для системы из трех частиц в квантовой механике // Доклады Академии Наук СССР. том 141 вып. 6. 1961. С. 1335–1338.
16. Минлос Р. А., Фаддеев Л. Д. Комментарий к задаче трех частиц с точечным взаимодействием // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. том 41. вып. 6. 1962. С. 1850–1852.
17. Павлов Б. С. Граничные условия на тонких многообразиях и полуограниченность трехчастичного оператора Шредингера с точечным потенциалом // Математический сборник. том 136(178) вып. 2(6). 1988. С. 163–177.
18. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. М.: Мир, 1984. 304 с.
19. Hill E. L. The theory of vector spherical harmonics // American Journal of Physics. Volume 22. 1954. pp 211–214.
20. Gray C. G., Nickel B. G. Debye potential representation of vector fields. // American Journal of Physics. Volume 46. Issue 7. 1978. pp 735–736.
21. Barrera R. G., Estevez G. A., Giraldo, J. Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics // European Journal of Physics. Volume 6. Issue 4. 1985. pp 287–294.
22. Carrascal B., Estevez G. A., Lee P., Lorenzo V. Vector spherical harmonics and their application to classical electrodynamics // European Journal of Physics. Volume 12. 1991. pp 184–191.
23. Gray C. G., Gubbins K. E. Theory of molecular fluids. Volume 1: Fundamentals. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1984. 626 pp.
24. Болохов Т. А. Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа // Записки научых семинаров ПОМИ. том 433. 2015. С. 78–110.
25. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория операторов в Гильбер-

товом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 264 с.

26. Болохов Т. А. Свойства радиальной части оператора Лапласа при l=1 в специальном скалярном произведении // Записки научых семинаров ПОМИ. том 434. 2015. С. 32–52.
27. Болохов Т. А. Свойства некоторых расширений квадратичной формы векторного оператора Лапласа // Записки научых семинаров ПОМИ. том 447. 2016 С. 5–19.
28. Джексон Дж. Д. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 703 с.
29. Википедия: свободная электронная энциклопедия: на английском языке [Электронный ресурс] // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_spherical_harmonics (дата обращения: 31.01.2018).
30. Debye P. Der Lichtdruck auf Kugeln von bieliebigem Material // Ann. Phys. (Leipz.) 30. 1909. pp 57–136.
31. Болохов Т. А. Собственные состояния для квантового гамильтониана свободного поперечного поля / препринт ПОМИ 9/2015, arxiv:1512.04121.
32. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М.: Наука, 1988. 336 с.
33. Васильев А. Н. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике, СПб: Петербургский ин-т ядерной физики (ПИЯФ), 1998. 774 с.
34. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Т.1. Перев. с англ. Бермана В. С. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 796 с.
35. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 358 с.
36. Подвигин И. В. Дополнительные главы функционального анализа. Курс лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2012. С. 92.
37. Болохов Т. А. Резольвенты самосопряженных расширений оператора Лапаласа на поперечном подпространстве / препринт ПОМИ 3/2018.

38. Рихтмайер Р. Д. Принципы современной математической физики. т. 1. М.: Мир, 1982. 486 с.
39. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II // Математический сборник. том 21(64). 1947. С. 365–404.
40. Хатсон В., Пим Дж. С. Приложения функционального анализа и теория операторов. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 432 с.
41. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве. М.: Наука Физматлит, 1966. 544 с.
42. Friedrichs K. Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren // Math. Ann. Volume 109. 1934. pp 465–487.

    Stone M. Linear transformations. in Hilbert spaces and their applications in analysis / Amer. Math. Soc. Colloquim Publication. 15. R.I. Providence, 1932. также см. теорему X.23 в [6].
43. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
44. Крейн М. Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Математический сборник. том 20(63). 1947. С. 431–495.
45. Болохов Т. А. Однородные расширения квадратичной формы оператора Лапласа для поля, взаимодействующего с двумя источниками // Записки научых семинаров ПОМИ. том 465. 2017. С. 46–60.