ОТЗЫВ
официального оппонента Пяткина А.В.
о диссертационной работе Карпова Д.В.
«Структура связности графа»,
представленной к защите на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Актуальность темы. Объектом исследования диссертации является связность графов. Первой работой на эту тему считается классическая теорема Менгера, доказанная в 1927 году. Она утверждает, что связность двух вершин графа в точности равна максимальному числу независимых путей, соединяющих эти вершины в графе. С тех пор многие выдающиеся ученые занимались проблемами связности графов. Однако особый интерес к этой проблематике возник в 60-80 годы прошлого века. Это связано с развитием сетей связи и транспортных сетей. Все более сложная структура таких сетей требовала развития соответствующего математического аппарата для их исследования. Естественной моделью сети является граф, а его связность отражает параметры надежности и гибкости (взаимозаменяемости элементов) сети. Это делает актуальным изучение таких вопросов как:

1) Структура k-связного графа и ее описание через минимальные разрезы графа
2) Свойства вершин степени k в k-связном графе
3) Свойства вершин, удаление которых не нарушает k-связности графа
4) Построение остовных деревьев с большим числом листьев в k-связном графе

Именно эти вопросы являются предметом исследования данной диссертации, что и определяет актуальность работы.

Отметим, что исследования связности графов имеют также большое теоретическое значение, поскольку изучение структуры связности графа позволяет найти новые инварианты графов, имеющие применение в других областях теории графов (раскраски, свойства гиперграфов, и т.д.).

Научная новизна. Для получения результатов в диссертации использовались как классические, так и новые, разработанные диссертантом, методы. Так, метод построения деревьев разбиения, ранее использовавшийся для анализа односвязных графов, был обобщен автором для произвольного k, что можно трактовать как новый метод. Также новым методом является введенная автором идея гипердерева разбиения. Однако основным методом, разработанным диссертантом, является понятие части разбиения графа набором разделяющих множеств. Это позволяет различными способами группировать разделяющие множества, что дает возможность учитывать зависимые разделяющие множества. Именно благодаря этой идее удается преодолеть основные трудности, возникающие при попытке обобщить результаты для односвязных графов на случай произвольного k.

С помощью этих методов были получены основные результаты диссертации. Остановимся на них подробнее.

В *первой* главе строятся деревья разбиения для наборов попарно независимых разделяющих множеств. С помощью этих структур, удается обобщить идею дерева блоков и точек сочленения в односвязном графе на случай произвольного k. Для $k \geq 2$ приходится рассматривать наборы из k попарно независимых разделяющих множеств k-связного графа. При $k=2$ с помощью таких деревьев доказываются оценки на хроматическое число двусвязного графа. Также вводится понятие дерева разрезов, свойства которого применяется в следующей главе.

Во *второй* главе изучается структура минимальных k-связных графов, т.е. графов, связность которых уменьшается при удалении любого ребра. Получено полное описание всех таких графов с минимальным числом вершин степени k, что является новым и довольно неожиданным результатом. С его помощью обоснован алгоритм построения всех таких экстремальных k-связных графов, что обобщает результаты, полученные в 1982 году Оксли для случаев $k=2$ и $k=3$. Изучена структура минимальных k-связных графов при $k \leq 5$.

В *третьей* главе доказана теорема о разбиении, которая используется в *четвертой* главе для описания взаимного расположения компонент зависимости и частей разбиения произвольного набора k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа. Пожалуй, это является наиболее глубоким теоретическим результатом диссертации.

В *пятой* главе исследуется возможность одновременного удаления из k-связного графа набора вершин без уменьшения связности. Описан способ построения такого набора.

Наконец, в самой длинной *шестой* главе диссертации доказываются нижние оценки на максимальное число листьев остовного дерева при различных условиях на исходный граф. Все доказательства являются конструктивными, т.е. в работе приведены алгоритмы построения соответствующих деревьев. При этом все оценки являются точными, и в работе приведены бесконечные серии примеров графов, где они достигаются.

Все указанные результаты являются новыми, полученными благодаря разработанным автором оригинальным методам исследования k-связных графов. Полученные в диссертации результаты существенно улучшают ранее известные аналоги, в том числе и зарубежные, что говорит об их высоком научном уровне.

Достоверность результатов и апробация работы. Результаты опубликованы в 12 публикациях в журналах, рекомендованных ВАК РФ для докторских диссертаций. Основные результаты докладывались на 4 международных конференциях, а также на различных научных семинарах в ПОМИ, МГУ, МФТИ и ИМ СО РАН. Все результаты работы являются корректными и достоверными.

Стиль и оформление работы. Работа оформлена в соответствии с требованиями ВАК, хорошо структурирована, написана ясным математическим языком и содержит много поясняющих иллюстраций. Все доказательства изложены подробно и корректно. Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Недостатки работы. Хотя в целом диссертация написана на очень хорошем уровне, к работе имеется ряд замечаний.

1. Подавляющее количество публикаций по теме диссертации сделано автором в одном и том же журнале («Записки научных семинаров ПОМИ»). При этом полностью отсутствуют зарубежные публикации. Хотя формальных требований к разнообразию журналов ВАК не предъявляет, считаю, что более широкая география публикаций позволила бы привлечь к исследованиям автора больше интереса и внимания коллег.

2. Использованный в диссертации термин «списочные раскраски» является буквальным переводом с английского list coloring. Однако в русскоязычной литературе для них обычно употребляется введенный В.Г.Визингом термин «предписанные раскраски». Поскольку В.Г.Визинг исследовал эти задачи на два года раньше П.Эрдеша, считаю, что правильнее употреблять именно его терминологию.

3. Возможно, главы 3 и 4 стоило объединить в одну.

4. В лемме 4.9 одно и то же обозначение R используется для совершенно разных объектов. То же самое с обозначением T в доказательстве теоремы 6.1.

5. Замечания 6.14 и 6.17 говорят об одном и том же.

6. В разделах 1.4.3 и 1.4.4 рассуждения проводятся в предположении, что каждый разрез содержит ровно одно ребро (так как $|V(S)|=k-1$), хотя явно это нигде не указано.

7. В формулировках лемм 5.7 и 5.8 следовало явно указать, что граф G удовлетворяет условиям теоремы 5.2. В частности, в доказательстве леммы 5.7 без условия на степени вершин из разрезов не удается доказать опущенный ввиду очевидности подслучай, когда все $\underline{U_i}\backslash T$ пусты. Также в условии леммы 5.8 следовало указать, что $p<(k+1)/2$.

8. В формулировке следствия 1.4 вместо «степени 4» должно быть «степени 2».

9. В формулировке пункта 4 леммы 6.7 не указано, что $x\notin U$.

Считаю, однако, что указанные недостатки не носят принципиального характера и не снижают ни научной ценности работы, ни общего положительного впечатления от нее.

Таким образом, докторская диссертация Карпова Д.В. представляет собой цельную самостоятельную научно-исследовательскую работу, выполненную на высоком научном уровне. Совокупность полученных результатов, в частности, разработанные диссертантом новые методы исследования связности графов, является серьезным научным достижением и вносит весомый вклад в развитие теории графов. Работа соответствует требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

Официальный оппонент:

Заведующий лабораторией дискретной
оптимизации в исследовании операций
Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН
д.ф.-м.н., доцент А.В.Пяткин

25.06.2015

Почтовый адрес: 630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Телефон: +73833634546
Адрес электронной почты: artem@math.nsc.ru

Подпись А.В. Пяткина
удостоверяю
Зав. оргтоделом О.З. Кищалева
ИМ СО РАН
«25» 06 2015 г.