ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Боровицкого Вячеслава Андреевича "Многопараметрические оценки в гармоническом анализе: варианты неравенства Рубио де Франсиа и интерполяция абстрактных пространств типа Харди", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа В.А.Боровицкого посвящена, в основном, двум актуальным задачам из разделов гармонического анализа, восходящих к теории Литтвуда – Пэли и теории интерполяции пространств Харди.

Центральным результатом классической теории Литтвуда – Пэли (J. E. Littlewood, R.E.A.C. Paley, 1936-1937) является двустороннее неравенство, показывающее эквивалентность (при всех $p \in (1, \infty)$) $L^p$-нормы функции и $L^p$-нормы квадратичной функции (=дискретной $\ell^2$ нормы последовательности частных сумм ряда Фурье с лакунарными спектрами). Следует отметить, что квадратичная функция для рядов Фурье впервые была использована А.Н.Колмогоровым (1924). Для интегралов Фурье аналог теоремы Литтвуда – Пэли был получен И. Стейном (1958). Как показывают примеры, лакунарность разбиения спектральной области необходима для сохранения двустороннего неравенства при всех $p \in (1, \infty)$. Однако в 1985 году испанский математик Х. Л. Рубио де Франсиа с помощью оценок векторнозначных сингулярных интегралов получил односторонние неравенства при $p \in [2, \infty)$ и $p \in (1, 2]$ для произвольных дизъюнктных разбиений. Кроме того, в одномерном случае им получены аналоги с весовыми нормами для весовых функций Макенхаупта. В дальнейшем эти результаты обобщались и дополнялись в работах многих авторов – Ж. Л. Журне, Ф. Сориа, Ж. Бургейн и других, а также в школе академика С.В. Кислякова.

В изучении интерполяционных свойств шкал пространств Харди, помимо традиционных методов Марцинкевича и Рисса – Торина, появился метод, основанный на доказательстве K-замкнутости функциональных пар. Это – второе направление, к которому относятся задачи диссертации. В частности, в ней рассматриваются вопросы интерполяции некоторых абстрактных обобщений весовых пространств Харди на торах $\mathbb{T}^1$ и $\mathbb{T}^2$.

Следует отметить также, что техника доказательств различных результатов диссертации основана на использовании многопараметрических сингулярных интегральных операторов и методов их оценок.

Диссертация состоит из трех глав, введения и заключения.

Первая глава посвящена интерполяции некоторых абстрактных обобщений пространств Харди. Пространства Харди $H^p(\mathbb{T}^D)$ являются классическими объектами комплексного и гармонического анализа. Тогда как вопросы об интерполяционных свойствах таких пространств, как и их весовых обобщений, в случае $D = 1$ можно более или менее считать закрытыми, в размерностях $D \geq 2$ остается значительное количество открытых вопросов. В частности, для $D = 2$ весовые интерполяционные результаты до сих пор были известны, по-видимому, лишь для весов с разделяющимися переменными: $w(x_1, x_2) = a(x_1)b(x_2)$. В работе диссертанта вопрос весовой интерполяции в размерностях $D = 1, 2$ рассматривается через понятие $K$-замкнутости, а сами пространства Харди при этом обобщаются через понятие абстрактных модулей над $w^*$-подалгебрами в $L^\infty(\mu)$, удовлетворяющих определенной аксиоматике. Такая постановка вопроса позволяет, с одной стороны, доказывать результаты в довольно общем виде, а с другой несколько упрощает доказательства. Главным следствием, которое удается получить посредством такого абстрактного подхода, является доказательство $K$-замкнутости весовых пространств Харди на двумерном торе с весами вида $w(x_1, x_2) = a(x_1)u(x_1, x_2)b(x_2)$, где $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}$, а $u$ удовлетворяет некоторому условию Макенхаупта по одной из переменных и условию вида $\log u \in \mathrm{BMO}$ по другой. Отдельно отмечу, что в рамках первой главы получен абстрактный вариант аналитического разложения единицы Бургейна, который может иметь некоторый самостоятельный интерес.

Во второй главе рассматривается вариант неравенства Рубио де Франсиа, связанный с преобразованием Фурье – Виленкина. Конкретнее, доказывается, что для функций $\{f_k\}$ на $[0,1)^D$, чей спектр Фурье – Виленкина лежит в непересекающихся прямоугольниках в $\mathbb{Z}_+^D$

$$\Big\|\sum\nolimits_k f_k\Big\|_{L^p([0,1)^D)} \le C\|\{f_k\}\|_{L^p([0,1)^D, l^2)}, \qquad 1 < p \le 2,$$

с константой $C$ не зависящей от выбора прямоугольников и функций $\{f_k\}$. Это неравенство сводится к вопросу об ограниченности некоторых операторов, который разрешается с помощью доказанного в диссертации специального варианта теоремы Ганди об ограниченности операторов, переводящих мартингалы в измеримые функции. Среди других результатов главы можно выделить ослабленное неравенство Рубио де Франсиа для показателей $p \le 1$, неравенство Рубио де Франсиа, связанное с преобразованием Фурье – Уолша, для нестандартного понятия отрезка в $\mathbb{Z}_+$, а также результат, показывающий, что неравенство Рубио де Франсиа при $1 < p \le 2$ перестаёт быть верным для последовательностей функций с произвольными непересекающимися спектрами (не только прямоугольниками). Рассуждения здесь основаны, в основном, на методах, связанных с атомными разложениями мартингальных пространств Харди.

Третья глава также посвящена некоторому варианту неравенства Рубио де Франсиа, а именно весовому аналогу неравенства Рубио де Франсиа для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ (преобразование Фурье — обыкновенное тригонометрическое). Рассуждения этой главы сочетают идеи Кислякова – Парилова – Осипова, которые позволяют сводить неравенство Рубио де Франсиа к вопросу об ограниченности — в данном случае многопараметрических — сингулярных интегральных операторов, а также методы Р. Феффермана и некоторое их современное развитие. Эти методы позволяют вывести ограниченность возникающих здесь многопараметрических сингулярных интегральных операторов из некоторых оценок с участием сильной максимальной функции и атомных разложений в весовых пространствах Харди.

В целом обсуждаемая диссертационная работа демонстрирует высокий уровень профессионализма, широту эрудиции и глубину математической культуры диссертанта.

В диссертационной работе и автореферате имеются опечатки, не влияющие на высокую оценку диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 научных статьях в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ, являются новыми и представляют интерес для специалистов в гармоническом анализе и смежных областях. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание.

На основании изложенного считаю, что диссертация «Многопараметрические оценки в гармоническом анализе: варианты неравенства Рубио де Франсиа и интерполяция абстрактных пространств типа Харди» удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Боровицкий Вячеслав Андреевич, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

17 января 2022 г.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН,
главный научный сотрудник
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
"Вычислительный центр ДВО РАН –
обособленное подразделение Хабаровского ФИЦ ДВО РАН"
680000, Дальневосточный Федеральный округ, г. Хабаровск,
ул. Ким Ю Чена, д. 65
Телефон/факс: +7 4212 22 72 67
e-mail: admvc@ccfebras.ru

Степанов Владимир Дмитриевич

Подпись Степанова В.Д. заверяю
Главный специалист
по кадрам
Солонина Т.Ю.
17.01.2022 г.