САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Алпеев Андрей Викторович

Инварианты энтропийного типа для сохраняющих меру действий счётных групп

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

профессор, д. ф.-м. н.,

А. М. Вершик

Санкт-Петербург

2017

Содержание

Введение

Основная цель данной работы — исследование новых энтропийных инвариантов для сохраняющих меру действий счётных (неаменабельных) групп.

Одним из основных предметов изучения в эргодической теории является класс измеримых сохраняющих меру действий счётных групп на вероятностных пространствах. Два действия $G \curvearrowright (X_1, \nu_1)$ и $G \curvearrowright (X_2, \nu_2)$ называются *изоморфными*, если существует измеримая в обе стороны сохраняющая меру биекция ϕ между подмножествами $X_1' \subset X_1$ и $X_2' \subset X_2$ полной меры, такая, что $\phi(gx) = g\phi(x)$ для всех $g \in G$ и для почти всех всех $x \in X_1'$.

Энтропийная теория началась со знаменитого вопроса фон Ноймана о том, изоморфно ли бернуллиевское действие с базой $(1/2, 1/2)$ и бернуллиевское действие с базой $(1/3/, 1/3, 1/3)$. Бернуллиевским действием группы называется сдвиговое действие, снабжённое мерой произведения, при этом на индивидульном «сомножителе» мера назывется базой.

В своих знаменитых работах [20], [21] 1958-го и 1959-го года А.Н. Колмогоров ввёл понятие метрической энтропии действия, которое позволило разрешить этот вопрос. В работе [26] Я.Г. Синай ввёл наиболее употребимый сейчас вариант определения. Работы Орнстина [29] и [30] 1970-го года завершили классификацию бернуллиевских действий группы $\mathbb{Z}$. В них показано, что два бернуллиевских сдвига равной энтропии изоморфны. Таким образом, введённый Колмогоровым инвариант полностью классифицирует бернуллиевские сдвиги. В 1975 году определение энтропии было обобщено Киффером в работе [28] на случай действий аменабельных групп. В том же году Стёпин в [27] показал, что класс групп, для которых выполнена теорема Орнстина, замкнут относительно перехода к надгруппам. Работа Орнстина-Вайса [22] подвела некоторый итог классического этапа изучения энтропии, в частности показав, что классификация бернуллиевских сдвигов Колмогорова-Орнстина выполняется и в случае действия произвольной счётной аменабельной группы. В этой же работе был приведён пример, надолго разуверивший исследователей в возможности расширить энтропийную теорию за пределы действий аменабельных групп: было показано, что бернуллиевский сдвиг с базой $(1/2, 1/2)$ над свободной группой факторизуется в бернуллиевский сдвиг с базой $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, что нарушает свойство монотонности энтропии при факторизации (выполненное в аменабельном случае).

В основополагающей работе [3] Льюис Боуэн определил новый инвариант, *софическую энтропию* для сохраняющих вероятностную меру действий софических групп, что позволило ему совершить серьёзный прорыв в проблеме изоморфизма бернуллиевских действий групп. A priori, значение этого инварианта зависит от используемой *софической аппроксимации* (софическая группа может иметь множество различных софических аппроксимаций). Мы будем обозначать его h, используемая софическая аппроксимация будет ясна из контекста. Класс софических групп огромен, он содержит все аменабельные и конечно-аппроксимируемые группы, известно изрядное количество положительных результатов о софичности групп, получаемых в результате определённых конструкций. Тем не менее, до сих пор неизвестно, являются ли все группы софическими. Для действия свободных групп в то же время был определён так называемый f-инвариант (см [3]).

Для некоторых примеров софическая энтропия была посчитана: для бернуллиевских действий это было сделано в самой работе [4]. В статье [5] Боуэн получил формулу для софической энтропии некоторого класса так называемых *алгебраических действий*. Эта формула была позже серьёзно обобщена Хэйсом [15] на некоторый класс алгебраических действий всех софических групп. Во всех этих результатах возникает очень интересное явление: софическая энтропия не зависит от софической аппроксимации. Однако в статье [8] Кардери привёл пример действия, имеющего положительную софическую энтропию по отношению к одной софической аппроксимации, и $-\infty$ — по отношению к другой (последнее, на самом деле, означает, что в определении произошло некоторого рода вырождение). Весьма интересен вопрос, может ли действие иметь два различных неотрицательных значения софической энтропии.

Другой инвариант энтропийного типа, *рохлинская энтропия*, был определён в работе Сюарда [31], его исследование было продолжено в статьях

[32], [34] и в готовящейся работе автора и Сюарда [1]. Эта энтропия определяется как инфимум шенноновских энтропий порождающих разбиений по отношению к подалгебре инвариантных множеств, обозначать мы её будем h_{Rok}. Происхождение название связано со знаменитой теоремой Рохлина (см. [25]), утверждающей, что энтропия Колмогорова-Синая для апериодического эргодического действия группы $\mathbb{Z}$ есть инфимум шенновских энтропий порождающих разбиений. Задача подсчёта рохлинской энтропии для действий неаменабельных групп выглядит весьма сложной (для свободных действий аменабельных групп она совпадает с обычной динамической энтропией). Известно, что рохлинская энтропия ограничивает софическую сверху (см. [4], [18], и [1] для неэргодических действий). В действительности, этот факт обеспечивает единственную известную на данный момент нижнюю оценку для Рохлинской энтропии.

В препринте [34] Сюард доказал нетривиальную верхнюю оценку для рохлинской энтропии. Ввведём некоторые обозначения, чтобы сформулировать её. Пусть G — счётная группа, действующая сохраняющим меру образом на стандартном вероятностном пространстве X. Пусть $(\xi_g)_{g\in G}$ — процесс, состоящий из независимых одинаково распределённых величин, так что каждая ξ_g распределена равномерно на единичном интервале. Пусть L_ξ обозначает подмножество всех таких $g \in G$, что $\xi_g < \xi_e$ (e обозначает единицу группы). Для разбиения α обозначим α^{L_ξ} — минимальную подалгебру, по отношению к которой разбиения α^g для всех $g \in L_\xi$ измеримы, где α^g обозначает g-сдвиг разбиения α (см. раздел 1 для точного определения). Буква H будет обозначать шенноновскую энтропию.

***Теорема* 0.1** (Сюард [34])**.** *Пусть α — порождающее разбиение для существенно свободного сохраняющего меру действия счётной группы G. Тогда рохлинская энтропия данного действия ограничена сверху выражением*

$$\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^{L_\xi}).$$

В статье [13] Габорью и Сюард доказали явные верхние и нижние оценки софической и рохлинской энтропии для некоторого класса действий, возникающего из знаменитого контрпримера Орнстина-Вайса [22].

В статье Боуэна [6] доказывается, во-первых, обобщение на случай неаменабельных групп известного результата о том, что действия нулевой энтропии типичны. В ней же доказывается удивительное утверждение: всякое действие неаменабельной группы есть фактор действия нулевой рохлинской энтропии.

0.1. Структура работы и основные результаты

В начале я докажу обобщение на случай рохлинской энтропии известного результата, утверждающего, что всякое эргодическое действие аменабельной группы есть слабо перемешивающее расширение над своим фактором

Пинскера (см. например [14]). Напомню, что фактором Пинскера называется наибольший фактор нулевой энтропии. Этот результат был изложен мною в работе [36]. В готовящейстя работе Сюарда [33] будет показано, что действие является сильно перемешивающим по отношению к своему пинскеровскому фактору для рохлинской энтропии. В работе Хэйса [16] был получен аналогичный результат для софической энтропии.

После этого, в главе 3 будут изложены мои результаты по софической и рохлинской энтропии действий софических групп, возникающих из гиббсовских мер. Они были опубликованы в работе [37] и в анонсе [38].

Пусть $G \curvearrowright A^G$ — сдвиговое топологическое действие счётной группы G (A — конечное множество), пусть φ — локальный потенциал, то есть такая функция, что её значение на для всех $x \in A^G$ определяется сужением x на некоторое конечное подмножество группы G (общее для всех x). Для потенциала на группе мы можем определить класс так называемых гиббсовских мер. Сдвиг гиббсовской меры тоже будет гиббсовской мерой. Таким образом, если потенциал обладает единственной гиббсовской мерой, то она с необходимостью будет инвариантной. Это позволяет нам задать сохраняющее меру действие группы. В знаменитой работе Добрушина [9] сформулировано достаточное условие для единственности меры Гиббса данного потенциала.

В разделе 3.2 будет доказана явная формула для софической и рохлинской энтропии для некоторого класса действий, возникающего из гиббсовских мер:

***Теорема* 0.2.** *Пусть G — софическая группа, A — конечное множество. Пусть ν — единственная гиббсовская мера на A^G для потенциала φ и α — каноническое порождающее разбиение. Предположим, что получаемая гиббсовская структура удовлетворяет условию Добрушина. Пусть $\xi = (\xi_g)_{g\in G}$ — случайный процесс независимых одинаково распределённых величин такой, что у каждой распределение — мера Лебега на интервале $[0,1]$. Положим*

$$L_\xi = \{g \in G | \xi_g < \xi_e\}.$$

Тогда софическая энтропия сдвигового действия, снабженного мерой ν, не зависит от софической аппроксимации. Её значение совпадает с рохлинской энтропией и выражается формулой

$$\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^L).$$

Этот результат был анонсирован в [38]. Отмечу, что до него рохлинская энтропия для действий неаменабельных групп была посчитана только в случае бернуллиевских действий (прямое следствие результатов статьи Боуэна [4]) и для некоторых классов действий с нулевой рохлинской энтропией (дистальные действия и специально сконструированные расширения Боуэна, о которых говорилось выше). Таким образом, представленная теорема является весомым вкладом в задачу вычисления рохлинской энтропии. Интересно, что в случае действий аменабельных групп данная формула даёт обычное значение для произвольного действия, обладающего порождающим разбиением конечной энтропии (в качестве α нужно взять такое разбиение, см. [28]).

В конце я докажу другую формулу для софической энтропии. Используемый в доказательстве подход не позволяет вычислить рохлинскую энтропию, однако он не требует выполнения условия Добрушина (как известно, оно является лишь достаточным для единственности гиббсовской меры).

***Теорема* 0.3.** *Пусть G — софическая группа, A — конечный алфавит. Пусть потенциал φ таков, что для всех $\beta \in [0,1]$ потенциал $\beta\varphi$ обладает единственной инвариантной гиббсовской мерой. Тогда софическая энтропия сдвигового действия, снабжённого единственной инвариантной мерой ν_φ для потенциала φ не зависит от софической аппроксимации и выражается формулой:*

$$h(\nu_\varphi) = \log|A| + \int_{A^G} \varphi(x) d\nu_\varphi - \int_0^1 d\beta \int_{A^G} \varphi(x) d\nu_{\beta\varphi}(x).$$

Результаты работы докладывались на семинаре по теории представлений и динамическим системам ПОМИ РАН, на международной конференции: «Dynamics, Combinatorics, Representations» в 2015 году, на семинаре «Asymptotic invariants of discrete groups, sparse graphs and locally symmetric spaces» в Будапеште в 2015 году, на конференции «Topology and Groups» в

IISER Mohali, Индия в 2016 году.

Благодарности. Беседы с Миклошем Абертом и Брэнданом Сюардом были неоценимо полезны во время работы над некоторыми из результатов настоящей диссертации. Часть результатов была получена во время моего визита на программу по измеримой теории групп в институт Эрвина Шрёдингера в Вене. На всём протяжении работы автор поддерживался лабораторией имени П.Л. Чебышёва. Благодарю своего научного руководителя Анатолия Моисеевича Вершика за полезные обсуждения и комментарии. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035.

1. Основные обозначения и предварительные сведения

Значок $\Subset$ будет обозначать «конечное подмножество».

1.1. Теория меры

Обстоятельное введение в теорию меры и эргодическую теорию можно найти в [24], [25], [14], [10].

Под мерой мы всегда будем понимать борелевскую вероятностную меру. *Измеримое пространство* — это множество, снабжённое сигма-алгеброй.

Два измеримых пространства изоморфны, если между ними существует биекция, переводящая измеримые пространства в измеримые. *Стандартное борелевское пространство* есть польское пространство, снабжённое борелевской сигма-алгеброй (или изоморфное ему измеримое пространство). Хорошо известно, что с точностью до изоморфизма существует единственное континуальное стандартное борелевское пространство, единственное счётное и всевозможные конечные, чем исчерпываются все варианты.

Два вероятностных пространства назовём изоморфными, если между их подмножествами полной меры существует измеримая в обе стороны сохраняющая меру биекция. Вероятностное пространство называется *стандартным*, если оно изоморфно стандартному борелевскому пространству, снабжённому борелевской вероятностной мерой. Известно, что всякое стандартное вероятностное пространство изоморфно объединению конечного или счётного числа атомов и куска, изоморфного отрезку вещественной оси, снабжённому мерой Лебега. Для стандартного борелевского пространства X мы будем обозначать $\mathcal{M}(X)$ — пространство всех борелевских вероятностных мер на нём. Для X — метризуемого компакта, снабдим $\mathcal{M}(X)$ $\star$-слабой топологией. Пусть X,Y — стандартные борелевские пространства, $f : X \to Y$ — борелевское отображение и $\mu \in \mathcal{M}(X)$; допуская вольность, будем обозначать $f(\mu)$ — перенос меры μ под действием отображения f. Иногда мы будем использовать обозначение $f_\sharp$ в таких случаях, о чём будет специальная оговорка.

Две подалгебры на вероятностном пространстве называются *эквивалентными*, если для каждого множества из первой существует подмножество из второй такое, что симметрическая разность этих подмножеств имеет меру нуль.

Подалгебры на стандартном вероятностном пространстве и его факторы находятся во взаимно однозначном соответствии: всякое сохраняющее меру отображение $Y \to X$ порождает подалгебру на Y, состоящую из всевозможных прообразов; обратно, всякой подалгебре соответствует стандартное вероятностное пространство X и фактор-отображение $\pi : Y \to X$, порождающее вышеуказанной процедурой эту подалгебру. Этот фактор единственен в том смысле, что для любого другого такого фактора $\pi' : Y \to X'$ имеется единственная измеримая биекция $\psi : X \to X'$, что $\pi' = \psi \circ \pi$.

Пусть X — стандартное борелевское пространство. Пусть μ — мера на X. Для подалгебры $\mathscr{A}$ и точки $x \in X$, обозначим $\mu|_x^{\mu}$ — меру, соответствующую точке x в разложении меры μ по подалгебре $\mathscr{A}$. Основное свойство этой системы мер состоит в том, что для любой функции $f \in L^1(X, \mu)$ имеет место равенство $\mathbb{E}(f|\mathscr{A}) = \int f d\mu|_x^{\mathscr{A}}$ для μ - почти всех точек $x \in X$. Направляем читателя в [10], раздел 5.3. за подробностями.

Будем говорить, что подалгебры $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ относительно независимы над общей подалгеброй $\mathscr{B}$, если для любой L^1-функции f имеем

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathscr{A}_1)|\mathscr{A}_2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathscr{A}_2)|\mathscr{A}_1) = \mathbb{E}(f|\mathscr{B}).$$

Если $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ — две счётно-порождённые подалгебры, то $\mu|_x^{\mathscr{A}}|_x^{\mathscr{B}} = \mu|_x^{\mathscr{B}}$ для μ-п.в. $x \in X$. Две подалгебры $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ μ-mod 0 эквивалентны, если $\mu|_x^{\mathscr{A}} = \mu|_x^{\mathscr{B}}$ для μ-п.в. $x \in X$. Обозначим $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ — минимальную подалгебру, содержащую $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. При фиксированной мере μ на X, под пересечением двух подалгебр будем понимать пересечение их μ-пополнений.

1.2. Метрика Канторовича

Пусть (X, r) — метрический компакт. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$ — две меры, их каплингом называется любая такая мера $\xi \in \mathcal{M}(X \times X)$, что $pr_1(\xi) = \mu_1$ и $\mathrm{pr}_2(\xi) = \mu_2$. Расстоянием Канторовича ([17]) между мерами μ_1 и μ_2 назовём величину

$$l_{X,r}(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\xi} \int_{X \times X} r(x_1, x_2)\, d\xi(x_1, x_2),$$

где инфимум берётся по всем каплингам мер μ_1 и μ_2. Известно, что топология, задаваемая этой метрикой, совпадает со $\star$-слабой. Кроме того, она выпукла. Пусть $\mu_1', \ldots, \mu_n'$ и $\mu_1'', \ldots, \mu_n''$ — две последовательности вероятностных мер, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — неотрицательные числа с суммой 1. Тогда имеет место неравенство

$$l_{X,r}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i',\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i''\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i l_{X,r}(\mu_i',\mu_i'').$$

Таким образом, шары в метрике Канторовича выпуклы.

1.3. Шенноновская энтропия

Пусть X — стандартное вероятностное или борелевское пространство. *Разбиением* будем называть не более чем счётный набор его дизъюнктных измеримых подмножеств, чьё объединение есть всё пространство. Иногда бывает полезно рассматривать разбиение как частный случай подалгебры. *Шенноновская энтропия* разбиения α на стандартном вероятностном пространстве (X,μ) определяется формулой

$$H_\mu(\alpha)=-\sum_{B\in\alpha}\mu(B)\log(\mu(B)),$$

с обычной договорённостью $0\log 0=0$. Обозначение для меры, ясной из контекста, будем опускать: $H(\alpha)$. Энтропия разбиения ограничивается сверху логарифмом количества кусков с ненулевой мерой. Если μ — мера на не более чем счётном множестве, то её энтропия $H(\mu)$ будет определяться как энтропия (единственного, очевидно) разбиения на одноточечные подмножества. Для двух разбиений α, β обозначим

$$\alpha\vee\beta=\{A\cap B|A\in\alpha,B\in\beta,A\cap B\neq\varnothing\}.$$

Мы будем обозначать

$$H(\alpha|\beta) = H(\alpha \vee \beta) - H(\beta)$$

— *относительную Шенноновскую энтропию*. Для разбиения α и подалгебры $\mathscr{A}$, определим

$$H(\alpha|\mathscr{A}) = \inf_{\beta} H(\alpha|\beta)$$

(инфимум берётся по всем $\mathscr{A}$-измеримым разбиениям β конечной шенноновской энтропии) — *шенноновскую энтропию относительно подалгебры*. Известно, что результат не изменится, если мы возьмём вместо этого инфимум по всем $\mathscr{A}$-измеримым конечным разбиениям.

Пусть $(\mathscr{A}_i)$ — mod 0 возрастающая последовательность подалгебр и пусть $\mathscr{B} = \bigcup_i \mathscr{A}_i$. Известно, что для всякого разбиения α конечной энтропии имеет место равенство

$$H(\alpha|\mathscr{B}) = \lim_{i\to\infty} H(\alpha|\mathscr{A}_i).$$

Для mod 0 убывающей последовательности подалгебр $(\mathscr{A}_i)$ положим $\mathscr{B} = \bigcap_i \mathscr{A}_i$. Для всякого разбиения α конечной энтропии имеем:

$$H(\alpha|\mathscr{B}) = \lim_{i\to\infty} H(\alpha|\mathscr{A}_i).$$

Всякая измеримая функция Y на стандартном вероятностном пространстве Ω с не более чем счётной областью значений определяет разбиение Ω.

Так что приведённые выше обозначения можно применять и к таким функциям (случайным величинам). Для случайных величин Y' и $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ обозначим

$$H(Y'|(Y_i)_{i\in\mathbb{N}})$$

— энтропию Y' относительно подалгебры, порождённой функциями $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Если α — разбиение конечной энтропии в стандартном вероятностном пространстве (X,μ), и $\mathscr{A}$ — подалгебра, то выполняется формула

$$H(\alpha|\mathscr{A}) = \int_X H_{\mu|_x^{\mathscr{A}}}(\alpha)\ d\mu(x).$$

1.4. Вероятностные ядра

Пусть X и Y — два метрических компакта. *Вероятностным ядром* называется непрерывное аффинное отображение $\bar{\pi}:\mathcal{M}(X)\to\mathcal{M}(Y)$. Оно однозначно определяется своими значениями на δ-мерах, более того, для любого непрерывного отображения $\pi: X\to\mathcal{M}(Y)$ существует единственное такое ядро $\bar{\pi}$, что $\bar{\pi}(\delta_x)=\pi(x)$ для всех $x\in X$. В таком случае будем говорить, что π — *базовая функция* для ядра $\bar{\pi}$. Для любой меры μ на X и всякой функции $\varphi\in C(Y)$ имеет место равенство

$$\int_Y \varphi(y)d(\bar{\pi}(\mu))(y) = \int_X d\mu(x)\int_Y \varphi(y)d(\pi(x))(y).$$

Очевидно и обратное: если для некоторой меры $\nu \in \mathcal{M}(Y)$, для всех $\varphi \in C(Y)$ выполнено

$$\int_Y \varphi(y)d\nu(y) = \int_X d\mu(x) \int_Y \varphi(y)d(\pi(x))(y),$$

то $\nu = \bar{\pi}(\mu)$.

Заметим, что вероятностные ядра можно естественным образом применять и к функциям, получая отображение $C(Y) \to C(X)$:

$$(\bar{\pi}(\varphi))(x) = \int_Y \varphi(y)d(\bar{\pi}(\delta_x))(y)$$

для $\varphi \in C(Y)$.

***Лемма* 1.1.** *Пусть $\bar{\pi} : \mathcal{M}(X \times Y) \to \mathcal{M}(X \times Y)$ такое вероятностное ядро, что для всякой пары точек $(x, y) \in X \times Y$ имеет место равенство $\mathrm{pr}_X(\bar{\pi}(\delta_{(x,y)})) = \delta_x$, и $\bar{\pi}(\delta_{(x,y_1)}) = \bar{\pi}(\delta_{(x,y_2)})$ для любых $x \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ (pr_X обозначает естественную проекцию $X \times Y \to X$). Пусть $\mathscr{A}$ — прообраз борелевской алгебры при отображении pr_X. Тогда для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}(X \times Y)$ равенство $\bar{\pi}(\mu) = \mu$ эквивалентно тому, что $\mu|^{\mathscr{A}}_{(x,y)} = \bar{\pi}(\delta_{(x,y)})$ для μ-п.в. (x, y) из $X \times Y$.*

Доказательство. Допустим, что $\mu|^{\mathscr{A}}_{(x,y)} = \bar{\pi}(\delta_{(x,y)})$ для μ-п.в. (x, y) из $X \times Y$. Из этого следует, что для любой непрерывной функции φ на $X \times Y$ выполнено

$$\mathbb{E}_\mu(\varphi|\mathscr{A})(x, y) = \int_{X \times Y} \varphi(x, y)d(\bar{\pi}(\delta_{(x,y)}))(x', y'),$$

для μ - п.в. (x, y) из $X \times Y$, но это означает, что

$$\int_{X\times Y} \varphi(x,y)d\mu(x,y) = \int_{X\times Y} d\mu(x,y) \int_{X\times Y} \varphi(x',y')d(\bar{\pi}(\delta_{(x,y)})),$$

что влечёт равенство $\bar{\pi}(\mu) = \mu$. Пусть теперь $\bar{\pi}(\mu) = \mu$. Докажем, что для любой функции $\varphi \in C(X \times Y)$ выполнено

$$\mathbb{E}_\mu(\varphi|\mathscr{A})(x,y) = \int_{X\times Y} \varphi(x',y')d\mu(x',y').$$

Несложно видеть, что оператор $\varphi \mapsto \bar{\pi}(\varphi)$ из $(X \times Y)$ в себя оставляет неподвижными функции, зависящие только от X, и все получаемые при его действии функции оказываются $\mathscr{A}$-измеримыми, откуда, в силу единственности декомпозиции меры, получаем требуемое.

$\square$

1.5. Динамические системы и рохлинская энтропия

Динамическая система — это действие группы на стандартном вероятностном пространстве сохраняющими меру отображениями. Допуская вольность, будем иногда просто называть их действиями.

Тройка из двух действий группы G на стандартных вероятностных пространствах (X, μ) и (Y, ν) и сохраняющего меру отображения $\pi : Y \to X$ называется *фактором* системы $G \curvearrowright (Y, \nu)$ или *расширением* системы $G \curvearrowright (X, \mu)$, если для любого $g \in G$ и для почти всех $y \in Y$ имеем $g(\pi(y)) = \pi(g(y))$. Допуская вольность, будем говорить иногда, что сама система $G \curvearrowright (X,\mu)$ является фактором системы $G \curvearrowright (Y,\nu)$, а $G \curvearrowright (Y,\nu)$ — расширением $G \curvearrowright (X,\mu)$. Всякому фактору соответствует инвариантная подалгебра, т.е. такая подалгебра, что вместе с любым множеством в ней содержатся и все его сдвиги элементами группы. Кроме того, всякой инвариантной подалгебре соответствует фактор. На самом деле, если задана конечная или счётная решётка факторов, то ей соответствует решётка инвариантных подалгебр, и обратно. Таким образом, разговаривая о структурных вопросах эргодической теории, можно зачастую думать об инвариантных подалгебрах системы.

Джойнингом двух действий одной и той же группы называется действие этой группы с фиксированными фактор-отображениями в вышеуказанные действия, причём две подалгебры, соответствующие последним, вместе порождают подалгебру всех измеримых множеств. Пусть $G \curvearrowright (X_1,\mu_1)$ и $G \curvearrowright (X_2,\mu_2)$ — два действия с общим фактором $G \curvearrowright (Z,\eta)$ посредством отображений $\pi_1 : X_1 \to Z$ и $\pi_2 : X_2 \to Z$. Будем говорить, что джойнинг $G \curvearrowright (Y,\nu)$ этих двух систем с соответствующими фактор-отображениями $\pi'_1 : Y \to X_1$ и $\pi'_2 : Y \to X_2$ есть относительно независимый джойнинг действий $G \curvearrowright (X_1,\mu_1)$ и $G \curvearrowright (X_2,\mu_2)$ над общим фактором $G \curvearrowright (Z,\eta)$, если $\pi_1 \circ \pi'_1 = \pi_2 \circ \pi'_2$, и подалгебры, соответствующие X_1 и X_2 относительно независимы над подалгеброй, соответствующей Z. Известно, что относительно независимый джойнинг существует и единственен с точностью до изомрфизма. Пусть $G \curvearrowright (Y_1,\nu_1)$

и $G \curvearrowright (Y_2, \nu_2)$ — два расширения системы $G \curvearrowright (X, \mu)$ с соответствующими фактор-отображениями π_1 и π_2. Будем говорить, что они *изоморфны*, если существует изморфизм $\psi : Y_1 \to Y_2$ между динамическими системами такой, что $\pi_2(y) = \pi_1(\psi(y))$ для почти всех $y \in Y_1$.

Зафиксируем сохраняющее меру действие группы G на стандартном вероятностном пространстве (X, μ). Для разбиения α и элемента $g \in G$ будем обозначать $\alpha^g = \{g^{-1}(B) | B \in \alpha\}$. Для $F \subset G$ обозначим $\alpha^F = \bigvee_{g \in F} \alpha^g$. Имеет смысл рассматривать последнее как разбиение для конечных F и как подалгебру — иначе. Будем говорить, что разбиение α *порождающее*, если подалгебра $\alpha^G \bmod 0$ эквивалентна подалгебре всех измеримых множеств. Известно, что α является порождающим разбиением, если существует такое подмножество полной меры X' пространства X, что точки $x, y \in X'$ не равны только при условии наличия такого $g \in G$, что $g(x)$ и $g(y)$ принадлежат различным элементам α.

Рохлинская энтропия определяется как инфимум Шенноновских энтропий порождающих разбиений относительно подалгебры инвариантных множеств:

$$h_{Rok} = \inf\{H(\alpha|\mathscr{I}), \alpha \text{ — порождающее разбиение}\},$$

$\mathscr{I}$ обозначает подалгебру инвариантных множеств. Для эргодических систем это определение, очевидно, редуцируется до простого инфимума шеннoновских энтропий порождающих разбиений.

Пусть G — счётная группа, а A — конечное множество (*алфавит*). Определим на пространстве A^G, снабжённом топологией произведения (полагая топологию на A дискретной), *сдвиговое действие* формулой

$$(gx)(h) = x(hg),$$

где $x \in A^G$ и $g, h \in G$. Это действие непрерывно. Мера ν на A^G называется инвариантной, если $g(\nu) = \nu$ для всякого $g \in G$. Пусть B_a (для $a \in A$) обозначает множество таких $x \in A^G$, что $x(e) = a$ (e обозначает единичный элемент группы). Разбиение $\alpha = \{B_a | a \in A\}$ будем называть каноническим алфавитным разбиением. Для подалгебры $\mathscr{A}$ обозначим

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \bigcap_{F \Subset G} \mathscr{A} \vee \alpha^{G \setminus F}$$

— её *насыщение*.

1.6. Софические группы и софическая энтропия

Для конечного множества R будем обозначать $\mathrm{Sym}(R)$ — группу всех его перестановок. Определим нормализованное расстояние Хэмминга d_H на $\mathrm{Sym}(R)$ формулой

$$d_H(g_1, g_2) = \frac{|\{r \in R, g_1(r) \neq g_2(r)\}|}{|R|}.$$

Пусть G — счётная группа. *Софическая аппроксимация* этой группы есть последовательность конечных множеств $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и последовательность отображений $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$, где $\sigma_i^{\cdot}: G \to \mathrm{Sym}(V_i)$ и $g \mapsto \sigma_i^g$, таких, что

1. для всех $g_1 \neq g_2$ из G имеет место $\lim_{i\to\infty} d_H(\sigma_i^{g_1}, \sigma_i^{g_2}) = 1$,

2. для всех g_1, g_2 из G имеет место $\lim_{i\to\infty} d_H(\sigma_i^{g_1} \circ \sigma_i^{g_2}, \sigma_i^{g_1 g_2}) = 0$.

Группа называется *софической*, если у неё есть софическая аппроксимация. С этого момента G — софическая группа с фиксированной софической аппроксимацией.

Будем говорить, что элемент $v \in V_i$ является S-хорошим для $S \Subset G$, если

1. $\sigma_i^{g_1}(v) \neq \sigma_i^{g_2}(v)$ для любых $g_1 \neq g_2$ из S,

2. $(\sigma_i^{g_1} \circ \sigma_i^{g_2})(w) = \sigma_i^{g_1 g_2}(w)$ для всех $g_1, g_2 \in S$ и $w \in \sigma_i^S(v)$,

3. $(\sigma_i^{g^{-1}} \circ \sigma_i^g)(w) = w$ для всех $w \in \sigma_i^S$,

4. пусть $w \in \sigma_i^S(v)$, $t \in V_i$ и $g \in S$ таковы, что $w = \sigma_i^g(t)$, тогда $t = \sigma_i^{g^{-1}}(w)$.

Простой подсчёт доказывет следующую лемму:

***Лемма* 1.2.** *Пусть S — произвольное конечное подмножество G. Обозначим V_i' (для $i \in \mathbb{N}$) — множество всех S-хороших точек в V_i. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} |V_i'|/|V_i| = 1.$$

Пусть A — конечное множество. Определим отображения $\theta_{v,i} : A^{V_i} \to A^G$ формулой

$$(\theta_{v,i}(\tau))\,(g) = \tau(\sigma_i^g(v))$$

для $\tau \in A_i^V$ (индекс $i \in \mathbb{N}$ будет обычно опускаться). Определим также отображения $\Theta_i : \mathcal{M}(A^{V_i}) \to \mathcal{M}(A^G))$ формулой

$$\Theta_i(\eta) = \frac{1}{|V_i|} \sum_{v \in V_i} \theta_v(\eta)$$

для $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$ (аналогично, индекс $i \in \mathbb{N}$ будет обычно опускаться).

Пусть ν — инвариантная относительно сдвигового действия мера на A^G. Пусть l — какая-нибудь метрика, задающая $\star$-слабую топологию на $\mathcal{M}(A^G)$. Для $\varepsilon > 0$ и $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathrm{Hom}(i, \varepsilon)$ — множество всех таких $\tau \in A^{V_i}$, что

$$l\,(\Theta(\delta_\tau), \nu) < \varepsilon.$$

Тогда *софическая энтропия* сдвигового действия с мерой ν определяется формулой

$$h(\nu) = \inf_{\varepsilon>0} \varlimsup_{i\to\infty} \frac{\log|\mathrm{Hom}(\nu, i, \varepsilon)|}{|V_i|}.$$

Софическая энтропия была введена Боуэном в [4]. Заметим, что в приведённом выше определении мы опирались на структуру сдвигового пространства. На самом же деле, эта величина зависит только от метрической структуры действия, что было показано им же (см. также [18]).

Остановимся на последнем подробнее: пусть A' — другое конечное множество, и $\nu' \in \mathcal{M}(A'^G)$ — инвариантная мера. Предположим, что полученная динамическая система изоморфна исходной, порождённой инвариантной мерой ν на пространстве A^G, снабжённом сдвиговым действием. Конструкцией софической энтропии можно воспользоваться в обоих случаях. Боуэн доказал, что результат будет одинаковым при фиксированной софической аппроксимации. Таким образом, при фиксированной аппроксимации софическая энтропия — инвариант изомрфизма динамических систем, обладающих конечными порождающими разбиениями (с помощью стандартной конструкции такие динамические системы можно реализовать на сдвиговом действии с конечным алфавитом). Чуть позже, в работах Керра и Ли [19] и Керра [18] было дано определение софической энтропии, не требующее наличия порождающего разбиения.

В дальнейшем нам будет полезно также другое понятие (вообще говоря, не эквивалентное), так называемая *горизонтальная софическая энтропия*. Для $\varepsilon > 0$ и $i \in \mathbb{N}$ обозначим $\mathrm{Map}(i, \varepsilon)$ — множество всех таких $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$, что

$$l(\Theta(\eta), \nu) < \varepsilon.$$

Определим теперь горизонтальную софическую энтропию как

$$h_{hor}(\nu) = \inf_{\varepsilon > 0} \overline{\lim} \frac{\sup\{H(\eta) | \eta \in \mathrm{Map}(\nu, i, \varepsilon)\}}{|V_i|}.$$

1.7. Доказательство равенства обычной и горизонтальной софической энтропии для эргодических мер

Равенство обычной и горизонтальной софической энтропии для эргодических действий было получено в работах [5] и [15]. В них данный результат не формулируется в нужном мне виде. Поэтому для полноты изложения я привожу его доказательство.

Пусть X — метрический компакт. Определим отображение барицентра из $\mathcal{M}(\mathcal{M}(X))$ в $\mathcal{M}(X)$ формулой

$$\mathrm{Bar}(\nu) = \int_{\mathcal{M}(\mathcal{M}(X))} \mu d\nu(\mu).$$

Если $\mathcal{M}(\mathcal{M}(X)$ тоже снабжена метрикой Канторовича (порождённой метрикой Канторовича на $\mathcal{M}(X)$), то отображение барицентра, как нетрудно проверить, не увеличивает расстояния. Определим также вложение $\mathrm{ind}: X \to \mathcal{M}(X)$ так, что $\mathrm{ind}(x) = \delta_x$. Несложно видеть, что оно будет изометрией, если $\mathcal{M}(X)$ снабжено метрикой Канторовича. Легко проверить, что $\mathrm{Bar} \circ \mathrm{ind} = \mathrm{id}$.

Пусть r — метрика на A^G, порождающая его топологию, снабдим $\mathcal{M}(A^G)$ метрикой Канторовича.

***Лемма* 1.3.** *Для любого $g \in G$ и $\varepsilon > 0$ существует такое i_0, что для любого $i > i_0$ и для любого $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$ имеем $l_{A^G,r}(g\Theta(\eta), \Theta(\eta)) < \varepsilon$.*

Доказательство. Обозначим $V_i' \subset V_i$ множество таких v, что

$$r(g\theta_v(\tau), \theta_{\sigma_i^g(v)}(\tau)) < \varepsilon/2$$

для всех $\tau \in A^{V_i}$. Несложно видеть, что

$$\lim_{i\to\infty} |V_i'|/|V_i| = 1.$$

Выберем теперь такое i_0, что для всех $i > i_0$ выполняется

$$(1 - |V_i'|/|V_i|)M < \varepsilon/2,$$

где M — диаметр метрического пространства (A^G, r). Несложно видеть, что для любого $i > i_0$ и для любого $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$ будет выполняться оценка

$$l_{A^G,r}(g\Theta(\eta), \Theta(\eta)) \leqslant \frac{1}{|V_i|} \sum_{v\in V_i} l_{A^G,r}(g\theta_v(\eta), \theta_{\sigma_i^g(v)}) =$$
$$= \frac{1}{|V_i|} \sum_{v\in V_i'} l_{A^G,r}(g\theta_v(\eta), \theta_{\sigma_i^g(v)}) + \frac{1}{|V_i|} \sum_{v\in V_i\setminus V_i'} l_{A^G,r}(g\theta_v(\eta), \theta_{\sigma_i^g(v)}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon V_i'}{2|V_i|} + \left(1 - \frac{|V_i'|}{|V_i|}\right) M < \varepsilon.$$

□

Лемма 1.4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое i_0, что для всех $i > i_0$ и для любой меры $\eta \in \mathcal{M}(A^{V_i})$ мера $\Theta(\eta)$ лежит на расстоянии менее ε от множества инвариантных мер.*

Доказательство. Заметим, во-первых, что существует такое конечное множество $S \Subset G$ и такое ε', что всякая мера $\nu' \in \mathcal{M}(A^G)$, удовлетворяющая неравенству $l_{A^G,r}(g\nu', \nu') < \varepsilon'$ при всех $g \in S$, лежит на расстоянии менее ε от множества инвариантных мер. Действительно, предполагая противное, мы можем взять всё большие и большие конечные множества и всё меньшие и меньшие ε', получая последовательность мер (ν_i') такую, что

$$\lim_{i\to\infty} l_{A^G,r}(g\nu_i', \nu_i') = 0$$

для всех $g \in G$, при этом все ν_i' лежат на расстоянии не менее ε от множества инвариантных мер. Выбирая сходящуюся подпоследовательность, получаем, что её предел лежит на расстоянии не менее ε от множества инвариантных мер и при этом является инвариантной мерой. Противоречие.

Несложно видеть теперь, что применение предыдущей леммы доказывает требуемое. $\square$

***Лемма* 1.5.** *Пусть $\nu \in \mathcal{M}(A^G)$ — эргодическая мера. Тогда для любых $a, b > 0$ существует такое положительное ε' и натуральное i_0, что для всех положительных $\varepsilon < \varepsilon'$, $i > i_0$ и для любого $\eta \in \mathrm{Map}(\nu, i, \varepsilon)$, будет выполнено*

$$\eta(\mathrm{Hom}(\nu, i, a)) > 1 - b.$$

Доказательство. Предположим противное, тогда для некоторых положительных a и b мы сможем найти возрастающую последовательность (i_j) натуральных чисел и последовательность мер (η_j) такую, что $\eta_j \in \mathcal{M}(A^{V_{i_j}})$ и

$$\lim_{j\to\infty} \Theta(\eta_j) = \nu,$$

но также $\eta_j(\mathrm{Hom}(\nu, i_j, a)) \leqslant 1-b$ для всех j. Выделяя подпоследовательность, если нужно, считаем последовательность $(\Theta(\mathrm{ind}_\sharp(\eta_j)))_{j=0}^\infty$ сходящейся:

$$\lim_{j\to\infty}(\Theta(\mathrm{ind}_\sharp(\eta_j))) = \mu.$$

Отметим, что здесь $\mathrm{ind}\colon A^{V_{i_j}} \to \mathcal{M}(A^{V_{i_j}})$, а $\mathrm{ind}_\sharp$ — индуцированное отображение из $\mathcal{M}(A^{V_{i_j}})$ в $\mathcal{M}(\mathcal{M}(A^{V_{i_j}}))$. Обозначим B — открытый шар в пространстве $\mathcal{M}(A^G)$ с цетром в точке ν и радиусом a. Несложно видеть, что в силу вышесказанного, $\mu(B) \leqslant 1-b$. Более того, $\mathrm{Bar}(\mu) = \nu$ (поскольку $\mathrm{Bar}(\Theta(\mathrm{ind}_\sharp(\eta_j))) = \Theta(\eta_j)$). В силу предыдущей леммы, мы получаем также, что носитель меры μ есть подмножество множества инвариантных мер. Получаем противоречие, так как мы смогли представить эргодическую меру ν в виде барицентра меры, сосредоточенной на инвариантных мерах. $\square$

***Лемма* 1.6.** *Пусть Q — конечное множество, $Q' \subset Q$, η — вероятностная мера на Q. Пусть $\eta(Q') > 1-b$. Тогда выполняется оценка*

$$H(\eta) \leqslant \log|Q'| + b\log|Q| + \log 2.$$

Доказательство. Рассмотрим три разбиения. Положим α' разбиением множества Q, где каждому элементу множества Q' дан собственный одноточечный элемент разбиения, а все остальные элементы множества Q объединены в общий кусок. Положим α разбиением Q на одноточечные множества. Разбиение β возьмём двухэлементным: один кусок — множество Q', другой —

его дополнение. В таком случае, как несложно видеть, будет выполнено

$$H(\eta) = H(\alpha' \vee \alpha) = H(\alpha' \vee \alpha|\beta) + H(\beta) \leqslant$$
$$\leqslant H(\alpha'|\beta) + H(\alpha|\beta) + \log 2 \leqslant \log|Q'| + b\log|Q| + \log 2.$$

□

***Лемма* 1.7.** *Для любой эргодической инвариантной меры* $\nu \in \mathcal{M}(A^G)$ *выполняется*

$$h_{hor}(\nu) \leqslant h(\nu).$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого $a > 0$ и $t > 0$ можно найти такое $\varepsilon' > 0$, что для всех положительных $\varepsilon < \varepsilon'$ будет выполнено

$$\varlimsup_{i\to\infty} \frac{\sup\{H(\eta)|\eta \in \mathrm{Map}(\nu, i, \varepsilon)\}}{|V_i|} \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \frac{\log|\mathrm{Hom}(\nu, i, a)|}{|V_i|} + t.$$

Выберем такое $b > 0$, что $b\log|A| < t$. Применим теперь лемму 1.5 к a и b. Получим ε' и i_0. Пусть теперь $i > i_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon'$, $\eta \in \mathrm{Map}(\nu, i, \varepsilon)$. Обозначим $Q = A^{V_i}$ и $Q' = \mathrm{Hom}(\nu, i, a)$. Получаем, что $\eta(Q') > 1 - b$. Применим предыдущую лемму:

$$H(\eta) \leqslant \log|\mathrm{Hom}(\nu, i, a)| + |V_i| b \log|A| + \log 2.$$

Несложно видеть, что это влечёт требуемое неравенство. □

***Теорема* 1.8.** *Пусть* $\nu \in \mathcal{M}(A^G)$ *— эргодическая инвариантная мера. Тогда*

$$h(\nu) = h_{hor}(\nu).$$

Доказательство. Нам осталось доказать, что $h(\nu) \leqslant h_{hor}(\nu)$. Для этого мы в качестве η из определения горизонтальной софической энтропии можем взять равномерную меру на $\mathrm{Hom}(\nu, i, \varepsilon)$. $\square$

2. Фактор Пинскера

В данном разделе я докажу существование фактора Пинскера по отношению к рохлинской энтропии для эргодических динамических систем, а также, что сама система является слабо перемешивающим расширением этого фактора. Пусть $\mathscr{A}$ — инвариантная подалгебра для динамической системы. Обозначим $h_{Rok}(\mathscr{A})$ — рохлинскую энтропию соответствующего фактора.

***Лемма* 2.1.** *Пусть $(\mathscr{A}_i)$ — конечная или счётная система инвариантных подалгебр эргодической динамической системы, $\mathscr{B} = \bigvee_i \mathscr{A}_i$. Тогда*

$$h_{Rok}(\mathscr{B}) \leqslant \sum_i h_{Rok}(\mathscr{A}_i).$$

Доказательство. Если сумма бесконечна, то доказывать нечего. Иначе, возьмём $\varepsilon > 0$, для каждого $\mathscr{A}_i$ выберем порождающее разбиение α_i энтропии меньше $h_{Rok}(\mathscr{A}_i) + \varepsilon/2^i$. В силу конечности суммы $\sum_i H(\alpha_i)$, существует разбиение $\alpha' = \bigvee_i \alpha$ (см. [25], полнота пространства разбиений в метрике Рохлина), и его энтропия будет ограничена сверху числом

$$\sum_i h_{Rok}(\mathscr{A}_i) + \varepsilon.$$

Значит, это же число ограничивает и рохлинскую энтропию $\mathscr{B}$, что влечёт требуемое, в силу произвольности выбора ε. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathscr{A}_i$ монотонная система инвариантных подалгебр стандартного вероятностного пространства (X, μ), проиндексированная линейно упорядоченным множеством I (произвольной мощности). Тогда можно выбрать такой счётный набор индексов $J \subset I$, что $\bigvee_{j \in J} \mathscr{A}_j$ содержит $\mathscr{A}_i$ для всех $i \in I$ по модулю множества меры нуль.*

Доказательство. Снабдим множество всех измеримых подмножеств метрикой симметрической разности: $d(A, B) = \mu(A \Delta B)$. Подалгебрам тогда соответствуют подпространства, джойнингу подалгебр — объединение подпространств с последующим замыканием. Но в силу сепарабельности объемлющего метрического пространства, мы можем извлечь требуемую счётную подпоследовательность. $\square$

С помощью леммы Цорна и двух предыдущих лемм теперь легко доказывается следующая теорема:

Теорема 2.3. *Всякая эргодическая динамическая система обладает наибольшим по включению фактором нулевой энтропии.*

2.1. Слабое перемешивание относительно фактора

Пусть группа G действует на пространстве с мерой (X,μ), обозначим это действие T. Пусть (Z,d) — метрическое пространство, снабженное мерой η, инвариантной относительно действия группы изометрий. Пусть $\{S^{g,x}\}_{g\in G, x\in X}$ — семейство изометрий пространства (Z,d), измеримое по x, и такое, что $S^{e,x}=\mathrm{id}_Z$ для μ-почти всех $x\in X$, и $S^{gh,x}=S^{g,T^h(x)}$ для всех $g,h\in G$ и для почти всех $x\in X$. На пространстве с мерой $(X\times Z,\mu\otimes\eta)$ определим действие R формулой $R^g(x,z)=(T^g(x),S^{g,x}(z))$. Несложно проверить, что это действие сохраняет меру и является расширением действия $G\curvearrowright(X,\mu)$ (посредством естественной проекции $X\times Z\to X$). Расширение, изоморфное полученному в результате такой конструкции, называется *изометрическим расширением*. Эргодическое расширение эргодической системы называется слабо перемешивающим, если его относительно независимый джойнинг с самим собой (по отношению к общему фактору) эргодичен.

Сформулируем дихотомию Фюрстенберга-Циммера(см. [35], [11]):

***Теорема* 2.4.** *Пусть $G\curvearrowright(Y,\nu)$ есть эргодическая система и $G\curvearrowright(X,\mu)$ — её фактор (посредством отображения π). Тогда либо $G\curvearrowright(Y,\nu)$ является слабо перемешивающим расширением системы $G\curvearrowright(X,\mu)$, либо существует промежуточное изометрическое расширение $G\curvearrowright(Y',\nu')$, то есть система, снабжённая морфизмами $\pi_1: Y\to Y'$ и $\pi_2: Y'\to X$ такими, что*

$\pi = \pi_2 \circ \pi_1$, *при этом расширение* $\pi_2 : Y' \to X$ *является изометрическим.*

***Лемма* 2.5.** *Пусть* $G \curvearrowright (Y, \nu)$ *— эргодическое изометрическое расширение системы* $G \curvearrowright (X, \mu)$*, имеющей нулевую рохлинскую энтропию, но не являющейся тривиальной. Тогда это расширение тоже имеет нулевую энтропию.*

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть α — порождающее разбиение для $G \curvearrowright (X, \mu)$ такое, что $H(\alpha) < \varepsilon/2$. Несложно проверить, что пространство (X, μ) не имеет атомов. Пусть $z \in Z$ — точка из носителя меры η. Обозначим C_i — шар радиуса $1/i$ с центром в точке z. Пусть D_i — подмножества положительной меры в X такие, что если

$$\beta_i = \{C_i \times D_i, X \times Z \setminus C_i \times D_i\},$$

то $\sum_i H(\beta_i) < \varepsilon/2$ (понятно, что этого можно добиться, взяв множества D_i достаточно малой меры). Обозначим $\beta = \bigvee_i \beta_i$. В силу конечности суммы энтропий, это разбиение существует и имеет энтропию меньше $\varepsilon/2$. Несложно видеть, что в силу эргодичности действия существует подмножество полной меры в $X \times Z$ такое, что для любой пары точек $(x, z_1), (x, z_2)$ из этого подмножества существует такое $g \in G$, что g-сдвиги этих точек будут лежать в различных элементах β. Таким образом, $\alpha \vee \beta$ будет порождающим разбиением с энтропией меньше ε. □

***Теорема* 2.6.** *Если фактор Пинскера эргодической динамической системы нетривиален, то она является его слабо перемешивающим расширением.*

Доказательство. Предположим противное, тогда по дихотомии Фюрстенберга-Циммера и предыдущей лемме существует больший фактор нулевой энтропии, противоречие. □

3. Меры Гиббса

3.1. Общие вопросы

Подробное введение в теорию гиббсовских мер читатель может найти в [23] и [12].

Мы начнём с рассмотрения гиббсовских мер на конечных пространствах. Пусть Q — конечное множество, $\mathcal{E}: Q \to \mathbb{R}$ — некоторая функция (энергия). Ассоциируем с ней вероятностную меру η на Q таким образом, чтобы $\eta(\{q\})$ была пропорциональна $e^{-\mathcal{E}(q)}$ для $q \in Q$. Таким образом,

$$\eta(\{q\}) = \frac{e^{-\mathcal{E}(q)}}{\sum_{q \in Q} e^{-\mathcal{E}(q)}}.$$

Следующая лемма доказывается простым применением метода множителей Лагранжа:

***Лемма* 3.1.** *Мера η — единственная точка максимума функционала*

$$\mu \mapsto H(\mu) - \int_Q \mathcal{E}(q) d\mu(q),$$

где $\mu \in \mathcal{M}(Q)$.

Под *гиббсовой структурой* $\mathcal{G}$ мы будем понимать тройку, состоящую из не более чем счётного множества V (вершин), набора конечных алфавитов $(A_v)_{v\in V}$ и потенциала $(\Phi_T)_{T\Subset V}$ (такого набора функций $\Phi_T:\prod_{v\in T}A_v\to\mathbb{R}$, что для всякой $v\in V$ все, кроме конечного числа Φ_T для $T\ni v$ тождественно равны нулю). Допуская вольность, будем применять эти функции не только к соответствующим $\prod_{v\in T}A_v$, но и к $\prod_{v\in V}A_v$. Рассмотрим множество $\Omega=\prod_{v\in V}A_v$, снабжённое топологией произведения (полагая топологию на A_v дискретной). Для $W\subset V$ обозначим $\mathrm{pr}_W:\prod_{v\in V}A_v\to\prod_{v\in W}A_v$ — естественную проекцию, а $\mathscr{B}(W)$ — прообраз борелевской алгебры с $\prod_{v\in W}A_v$ при отображении pr_W.

Приступим теперь к определению множества гиббсовских мер для данной гиббсовой структуры $\mathcal{G}$. Введём набор отображений $(\pi_{\mathcal{G},\Lambda})_{\Lambda\Subset G}$ следующим образом. Отображение $\pi_{\mathcal{G},\Lambda}$ будет сопоставлять точке $\omega\in\Omega$ вероятностную меру $\pi_{\mathcal{G},\Lambda}(\omega)$, чей носитель — множество таких точек ω', для которых $\mathrm{pr}_{V\setminus\Lambda}(\omega)=\mathrm{pr}_{V\setminus\Lambda}(\omega')$, и такую, что вероятность точки ω' из носителя пропорциональна

$$e^{-\sum_{T\cap\Lambda\neq\varnothing}\Phi_T(\omega')}$$

(отметим, что эти условия однозначно задают отображения). Полученные функции, как несложно убедиться, будут непрерывными. Продолжим их до вероятностных ядер $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}:\mathcal{M}(\Omega)\to\mathcal{M}(\Omega)$, $\Lambda\Subset V$. Легко проверить, что для любых $\Lambda \subseteq \Lambda' \Subset V$ имеет место равенство

$$\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda} \circ \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda'} = \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda'} \circ \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda} = \bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda'}.$$

Множество гиббсовых мер $\mathcal{MG}$ для данной гиббсовой структуры $\mathcal{G}$ определяется как множество всех таких мер ν на Ω, что $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu) = \nu$ для всех $\Lambda \Subset V$. Из компактности следует, что это множество всегда непусто. В случае конечного множества вершин, как нетрудно проверить, множество гиббсовских мер содержит единственную меру, однозначно определяемую тем, что вероятность точки $\omega \in \Omega$ пропорциональна

$$e^{-\sum_{T \subset V} \Phi_T(\omega)}.$$

Следующая лемма является прямым следствием леммы 1.1:

***Лемма* 3.2.** *Для меры ν имеет место $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu) = \nu$ тогда и только тогда, когда для ν-п.в. $\omega \in \Omega$ верно, что*

$$\nu|_{\omega}^{\mathscr{B}(V \setminus \Lambda)} = \pi_{\mathcal{G},\Lambda}(\omega).$$

Для $\omega \in \Omega$ и $S \subset V$ обозначим $\mathcal{G}_{S,\omega}$ новую гиббсовскую структуру, отличающуюся лишь набором алфавитов: $A'_v = A_v$ для $v \notin S$ и $A'_v = \{\omega_v\}$ для $v \in S$. Стоит отметить, что гиббсовские меры для новой структуры можно рассматривать и как меры на $\Omega = \prod_{v \in V} A_v$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определения:

Лемма 3.3. *Мера ν является гиббсовой мерой для $\mathcal{G}_{S,\omega}$ тогда и только тогда, когда $t(v)=\omega(v)$ для ν-п.в. $t \in \Omega$ и для всех $v \in S$, а*

$$\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu) = \nu$$

для всех $\Lambda \Subset V \setminus S$.

В следующих двух леммах мы исследуем множество мер $\mathcal{MG}_{F,\omega}$.

Лемма 3.4. *Предположим, что $\nu \in \mathcal{MG}$, $F \subset G$. Тогда*

$$\nu|_{\omega}^{\mathscr{B}(F)} \in \mathcal{MG}_{F,\omega}$$

для ν-п.в. $\omega \in \Omega$.

Доказательство. Сначала заметим, что для всех $v \in F$ и ν-п.в. $\omega \in \Omega$ имеем $\nu|_{\omega}^{\mathscr{B}(F)}(\{t \in \Omega | t(v)=\omega(v)\})=1$. Для $\Lambda \Subset V \setminus F$ обозначим $\mathscr{A}=\mathscr{B}(V \setminus \Lambda)$. Так как $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(F)$, и обе подалгебры счётно-порождённые, имеем $\nu|_{\omega}^{\mathscr{B}(F)}|_{\omega}^{\mathscr{A}} = \nu|_{\omega}^{\mathscr{A}} = \pi_{\mathcal{G},\Lambda}$ для ν-п.в. $\omega \in \Omega$ (мы воспользовались тем, что $\nu \in \mathcal{MG}$). Вместе это даёт требуемое. □

Лемма 3.5. *Пусть $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность подмножеств G, что $F_i \subset F_j$ для $i > j$. Пусть $F = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i$. Пусть $\omega \in \Omega$ — некоторая точка и $\{\nu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — сходящаяся последовательность мер на Ω такая, что $\nu_k \in \mathcal{MG}_{F_k,\omega}$ для $k \in \mathbb{N}$. Тогда предельная мера лежит в $\mathcal{MG}_{F,\omega}$.*

Доказательство. Обозначим ν — предел последовательности мер. Несложно видеть, что $\nu(\{t \in \Omega | t(v) = \omega(v)\}) = 1$ для $v \in F$, так как последнее условие замкнуто, и выполнено для ν_k, $k \in \mathbb{N}$. По той же причине, $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu) = \nu$ для всех $\Lambda \Subset V \setminus F$. $\square$

Нам понадобятся дополнительные обозначения для того, чтобы сформулировать условие единственности Добрушина. Напомним, нормой $\|\mu\|$ полной вариации меры μ называется $\sup\{\mu(B) - \mu(C)\}$ (супремум берётся по всевозможным парам (B, C) измеримых множеств). Обозначим

$$b_{v,u} = \sup_{\omega_1,\omega_2} \|pr_{\{v\}}(\pi_{\mathcal{G},V\setminus\{v\}})(\omega_1) - pr_{\{v\}}(\pi_{\mathcal{G},V\setminus\{v\}})(\omega_2)\|,$$

где супремум берётся по всем таким парам $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, что $\omega_1(w) = \omega_2(w)$ для всех $w \neq v$, $w \in \mathbb{N}$. Далее, обозначим

$$b_v = \sum_{u \neq v} b_{v,u}.$$

И, наконец,

$$b^\star = \sup_{v \in V} b_v.$$

Будем говорить, что гиббсова структура удовлетворяет *условию Добрушина*, если

$$b^\star < 1.$$

***Теорема* 3.6** (Добрушин, [9]). *Если $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию Добрушина, то $\mathcal{MG}$ содержит единственную меру.*

Простой проверкой доказывается следующая лемма.

***Лемма* 3.7.** *Пусть $\mathcal{G}$ — гиббсова структура, удовлетворяющая условию Добрушина, пусть $\omega \in \Omega$ — некоторая точка и F — некоторое подмножество G. Тогда $\mathcal{G}_{F,\omega}$ также удовлетворяет условию Добрушина.*

Для подалгебры $\mathscr{A}$ на Ω определим её насыщение

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \bigcap_{F \Subset V} \mathscr{A} \vee \mathscr{B}(V \setminus F).$$

Условие Добрушина позволяет «выносить за скобки» подалгебру при счётном пересечении:

***Лемма* 3.8.** *Пусть $\mathcal{G}$ — гиббсовская структура, удовлетворяющая условию Добрушина. Тогда для любого $S \subset V$ подалгебры $\mathscr{B}(S)$ и $\widetilde{\mathscr{B}(S)}$ эквивалентны.*

Доказательство. Положим $\mathscr{A} = \mathscr{B}(S)$. Зафиксируем убывающую последовательность коконечных подмножеств (F_i) множества вершин, имеющую пустое пересечение: $F_i \subset F_j$ для $i > j$; $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i = \varnothing$; $V \setminus F_i \Subset G$ для $i \in \mathbb{N}$.

Несложно проверить, что

$$\widetilde{\mathscr{A}} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{A} \vee \mathscr{B}(F_i) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathscr{B}(S \cup F_i).$$

Положим $\mathscr{A}_i = \mathscr{B}(S \cup F_i)$. Для ν-п.в. ω имеем: $\nu|_{\omega}^{\mathscr{A}_i} \to \nu|_{\omega}^{\widetilde{\mathscr{A}}}$ (по теореме о сходимости мерозначных мартингалов, см. [10] следствие 5.21 стр. 144); для всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено $\nu|_{\omega}^{\mathscr{A}_i} \in \mathcal{MG}_{S \cup F_i, \omega}$ и $\nu|_{\omega}^{\mathscr{A}} \in \mathcal{MG}_S$ (по лемме 3.4). Несложно увидеть теперь, что для почти всех $\omega \in \Omega$ имеем $\nu|_{\omega}^{\mathscr{A}_i} \to \nu|_{\omega}^{\mathscr{A}}$ (в силу леммы

3.5), таким образом, для ν-п.в. $\omega \in \Omega$ выполнено $\nu|_{\omega}^{\mathscr{A}} = \nu|_{\omega}^{\widetilde{\mathscr{A}}}$. Это влечёт, что подалгебры $\mathscr{A}$ и $\widetilde{\mathscr{A}}$ mod 0 эквивалентны. □

Для формулировки *марковского свойства* определим границу. Пусть Λ — конечное подмножество V. Его *границей* будем называть множество

$$\partial\Lambda = \bigcup \{T \setminus \Lambda | \quad T \Subset V : T \cap \Lambda \neq \varnothing, \Phi_T \not\equiv 0\},$$

где объединение берётся по всем таким $T \Subset V$, имеющим непустое пересечение с Λ, что Φ_T не является тождественным нулём. Очевидно, $\partial\Lambda$ всегда конечно. Во избежание двусмысленности будем указывать используемую гиббсову структуру в некоторых случаях: $\partial_{\mathcal{G}}\Lambda$.

Сформулируем теперь марковское свойство:

***Лемма* 3.9.** *Для всякого* $\Lambda \Subset V$ *функция* $\mathrm{pr}_\Lambda(\pi_{\mathcal{G},\Lambda})$ *измерима относительно подалгебры* $\mathscr{B}(\partial\Lambda)$.

Таким образом, для $\Lambda \Subset V$ мы можем естественным образом доопределить

$$\pi_{\mathcal{G},\Lambda} : \prod_{v \in W} A_v \to \mathcal{M}(\prod_{v \in W} A_v)$$

для всякого $W \subset V$ такого, что $W \supset \Lambda \cup \partial\Lambda$. Мы можем также доопределить $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}$ на $\mathcal{M}(\prod_{v \in W} A_v)$.

Другая (и более полезная) формулировка марковского свойства:

***Лемма* 3.10.** *Пусть $(X_v)_{v\in V}$ — случайный процесс, чьё распределение — некоторая гиббсова мера для $\mathcal{G}$. Тогда для любого $\Lambda \Subset V$ распределение $(X_v)_{v\in\Lambda}$ при условии $(X_v)_{v\in V\setminus\Lambda}$ mod 0 совпадает с распределением $(X_v)_{v\in\Lambda}$ при условии $(X_v)_{v\in\partial\Lambda}$.*

Пусть W — подмножество V. Будем говорить, что мера μ на $\prod_{v\in W} A_v$ является $(\mathcal{G},\Lambda)$-*допустимой*, если $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\mu)=\mu$. Принадлежность меры ν ко множеству гиббсовых мер можно проверить локально (по всевозможным конечным распределениям):

***Лемма* 3.11.** *Мера ν является гиббсовой мерой для гиббсовой структуры $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда для всех пар $\Lambda, W \Subset V$ таких, что $\Lambda\cup\partial\Lambda\subset W$, выполнено*

$$\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\mathrm{pr}_W(\nu)) = \mathrm{pr}_W(\nu).$$

Доказательство. Возьмём произвольное $\Lambda \Subset V$. Рассмотрим такую последовательность (W_i) конечных подмножеств в V, что: $\Lambda\cup\partial\Lambda\subset W_i$ для всех i; для всех $i<j$ имеем $W_i\subset W_j$; и $V=\bigcup_i W_i$. По условию, $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\mathrm{pr}_{W_i}(\nu)) = \mathrm{pr}_{W_i}(\nu)$. Таким образом, для всех i и для ν-почти всех $\omega\in\Omega$ имеем

$$\mathrm{pr}_\Lambda(\nu|_\omega^{\mathscr{B}(W_i\setminus\Lambda)}) = \mathrm{pr}_\Lambda(\pi_{\mathcal{G},\Lambda}(\omega)).$$

Используя теорему о сходимости мерозначных мартингалов, получаем, что $\mathrm{pr}_\Lambda(\nu|_\omega^{\mathscr{B}(V\setminus\Lambda)}) = \mathrm{pr}_\Lambda(\pi_{\mathcal{G},\Lambda}(\omega))$ для ν-почти всех $\omega\in\Omega$. Таким образом, $\nu_\omega^{V\setminus\Lambda} =$

$\pi_{\mathcal{G},\Lambda}(\omega)$, откуда вытекает, что $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu)=\nu$. В силу произвольности выбора конечного подмножества Λ, получаем, что мера ν гиббсовская. $\square$

***Лемма* 3.12.** *Предположим, что гиббсова структура $\mathcal{G}$ обладает единственной гиббсовой мерой ν. Пусть $K\Subset V$. Зафиксируем произвольную метрику, задающую $\star$-слабую топологию на $\mathcal{M}(\prod_{v\in K}A_v)$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ найдётся такое конечное подмножество $\Lambda\Subset V$, $K\subset\Lambda$, что для любого подмножества $W\subset V$, такого что $\Lambda\cup\partial\Lambda\subset W$, и для всякой $(\mathcal{G},\Lambda)$-допустимой меры μ на $\prod_{v\in W}A_v$, проекция $\mathrm{pr}_K(\mu)$ будет ε-близка к $\mathrm{pr}_K(\nu)$.*

Доказательство. Предположим противное. Возьмём растущие последовательности подмножеств (Λ_i) и (W_i), такие, что $\bigcup_i\Lambda_i=V$, $\Lambda_i\cup\partial\Lambda_i\subset W_i$ для $i\in\mathbb{N}$, и K-проекции $(\mathcal{G},\Lambda_i)$-допустимых мер μ_i на $\prod_{v\in W_i}A_i$ не будут ε-близки к K-проекции ν. Выделим подпоследовательность мер, у которых сходятся все конечномерные распределения; соответствующие предельные распределения будут, очевидно, совместимы, поэтому они определяют гиббсову меру на Ω. Но её K-проекция будет ε-далека от pr(ν), противоречие. $\square$

3.2. Гиббсовы структуры и меры над софическими группами

Определим инвариантные относительно сдвига гиббсовы структуры над группой G. Положим множеством вершин G, алфавит будет одинаков для всех

$g \in G$: A. Имеет смысл считать, что A содержит не менее двух элементов. Будем требовать, чтобы существовала функция $\varphi : A^D \to \mathbb{R}$ ($D \Subset G$) такая, что $\Phi_T(\tau) = \varphi(g(\tau))$, $\omega \in A^G$, если $T = Dg$ для некоторого $g \in G$ (в противном случае полагаем Φ_T тождественным нулём). В данной ситуации потенциалом мы будем называть саму функцию φ, а гиббсовскую структуру — *инвариантной относительно сдвига гиббсовской структурой*.

Пусть $\mathcal{G}$ — инвариантная относительно сдвига гиббсова структура над G, имеющая единственную меру. Несложно проверить, что эта мера инвариантна относительно сдвига и, таким образом, порождает динамическую систему.

Покажем, что инвариантные гиббсовские меры всегда индуцируют существенно свободные действия.

***Лемма* 3.13.** *Пусть ν — инвариантная гиббовская мера для инвариантной гиббсовской структуры $\mathcal{G}$ над счётной группой G. Тогда получаемое сдвиговое действие является существенно свободным.*

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $g \in G \setminus \{e\}$. Докажем, что $g\omega \neq \omega$ для ν-п.в. $\omega \in \Omega$. Рассмотрим такую последовательность $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ элементов группы, что все множества $\{g_i g, g_i\}$ являются попарно дизъюнктными. Определим множества $B_i = \{\omega \in \Omega | \omega_{g_i g} = \omega_{g_i}\}$. Из определения гиббсовской меры следует существование такой константы $c < 1$, что

$$\nu(B_0 \cap \ldots \cap B_n \cap B_{n+1}) \leqslant c \cdot \nu(B_0 \cap \ldots \cap B_n)$$

для $n \in \mathbb{N}$ (в качестве c можно взять $\sup_{\omega \in \Omega}(\pi_{\mathcal{G},\{g,e\}}(\omega))(B_0)$). Из этого следует, что $\nu(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i) = 0$, что влечёт требуемое. □

Лемма 3.14. *Единственная гиббсовская мера для некоторого потенциала с необходимостью эргодична.*

Доказательство. Это стандартный факт. Он, например, следует из того, что единственная гиббсовская мера обладает тривиальной хвостовой подалгеброй (следует из теоремы 8.8 в [12]) и того, что подалгебра инвариантных множеств содержится в хвостовой подалгебре (утверждение 14.9 там же). □

Если группа G — софическая, то мы можем определить особо важную последовательность гиббсовых структур $\mathcal{G}^i$. Для $\mathcal{G}^i$ множество вершин будет V_i (из определения софической аппроксимации). Для каждой вершины алфавит будет одинаков: A.

Потенциал для $\mathcal{G}^i$ определим следующим образом:

$$\Phi_T(\tau) = \sum_{v \in V_i} \varphi(\theta_v(\tau))$$

для $\tau \in A^{V_i}$ и $T \subset V_i$, сумма берётся по всем таким $v \in V_i$, что $\sigma_i^D(v) = T$ (чаще всего количество слагаемых будет нуль или один). Обозначим η_i — единственную гиббсовскую меру для гиббсовой структуры $\mathcal{G}^i$.

***Лемма* 3.15.** *Для любого $\Lambda \Subset G$ есть такое $S \Subset G$, что если $v \in V_i$ является S-хорошим элементом, то мера $\theta_v(\eta_i)$ является $(\mathcal{G}, \Lambda)$-допустимой.*

Доказательство. Возьмём $S = \partial_{\mathcal{G}}\Lambda \cup \Lambda \cup D \cup D^{-1}$. Несложно проверить, что для такого S условие выполняется. □

***Лемма* 3.16.** *Пусть ν — какая-то точка накопления последовательности $(\Theta(\eta_i))_{i\in\mathbb{N}}$. Тогда ν — инвариантная гиббсовская мера для $\mathcal{G}$.*

Доказательство. Инвариантность меры ν следует из леммы 1.4. Зафиксируем $\Lambda \Subset G$. С помощью предыдущей леммы получим подмножество $S \Subset G$. Обозначим V_i' — подмножество S-хороших точек в V_i для $i \in \mathbb{N}$. Мы знаем, что для всех $v \in V_i'$ выполнено

$$\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\theta_v(\eta_i)) = \theta_v(\eta_i).$$

Пусть r — произвольная метрика, совместимая с топологией на A^G, l_r — соответствующая метрика Канторовича на $\mathcal{M}(A^G)$. Пусть M — диаметр (A^G, r). Несложно видеть теперь, что

$$l_r(\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\Theta(\eta_i)), \Theta(\eta_i)) \leqslant \frac{|V_i \setminus V_i'|}{V_i} M.$$

В силу леммы 1.2 мы получаем, что $\bar{\pi}_{\mathcal{G},\Lambda}(\nu) = \nu$. Произвольность выбора $\Lambda \Subset G$ теперь означает, что $\nu \in \mathcal{MG}$. □

Следующая лемма есть прямое следствие леммы 3.1.

***Лемма* 3.17.** *Пусть $\mathcal{G}'$ — гиббсовская структура с конечным множеством вершин V'. Тогда единственная гиббсовская мера η для $\mathcal{G}'$ является одновременно единственной вероятностной мерой на Ω', на которой достигает своего максимума функционал*

$$\eta \mapsto H(\eta) - \int_{\Omega'} \sum_{T \subset V'} \Phi_T(\omega) d\eta(\omega),$$

$\eta \in \mathcal{M}(A^{V'})$.

***Теорема* 3.18.** *Пусть $\mathcal{G}$ — инвариантная относительно сдвига гиббсова структура над софической группой G с фиксированной софической аппроксимацией, ν — единственная инваринтная гиббсова мера для $\mathcal{G}$, а последовательность η_i определена как указано выше. Тогда софическую энтропию сдвигового действия G на A^G с мерой ν можно посчитать по формуле*

$$h(\nu) = \varlimsup_{i \to \infty} \frac{H(\eta_i)}{|V_i|}.$$

Доказательство. Нам будет удобно использовать горизонтальную софическую энтропию. Так как любая точка накопления последовательности $(\Theta(\eta_i))$ яляется инвариантной гиббсовской мерой (по лемме 3.16), получаем, что эта последовательность стремится к ν. Это влечёт неравенство

$$h(\nu) \geqslant \varlimsup_{i \to \infty} \frac{H(\eta_i)}{|V_i|}.$$

Докажем теперь обратное неравенство. Возьмём $\varepsilon' > 0$. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ будет выполнено

$$\left| \int \varphi(\omega) d\nu(\omega) - \int \varphi(\omega) d\nu'(\omega) \right| < \varepsilon'/2,$$

лишь только $l(\nu, \nu') < \varepsilon$. Начиная с некоторого i будет выполнено $l(\nu, \Theta(\eta_i)) < \varepsilon$.

Зная теперь, что η_i максимизирует величину

$$H(\eta) - \int_{\Omega_i} \sum_{T \subset V'} \Phi_T(\omega) d\eta(\omega) = H(\eta) - |V_i| \int \varphi(\omega) d(\Theta(\eta))(\omega),$$

мы получаем, что

$$\sup\{H(\eta) | \eta \in \mathrm{Map}(i, \varepsilon)\} < H(\eta_i) + |V_i'|\varepsilon'.$$

Таким образом,

$$h(\nu) \leqslant \varlimsup_{i \to \infty} \frac{H(\eta_i)}{|V_i|} + \varepsilon'.$$

В силу произвольности выбора ε' это влечёт требуемое. □

***Лемма* 3.19.** *Пусть ν — единственная мера Гиббса для $\mathcal{G}$. Пусть K — конечное подмножество G. Фиксируем произвольную метрику для $\star$-слабой топологии на $\mathcal{M}(A^K)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное подмножество S группы G, что $K \cup \partial_{\mathcal{G}} K \subset S$, и для любой S-хорошей точки $v \in V_i$ проекция $\mathrm{pr}_K(\theta_v(\eta_i))$ ε-близка к $\mathrm{pr}_K(\nu)$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 3.12, получим такое конечное подмножество Λ, что для любого $W \subset V$, удовлетворяющего $\Lambda \cup \partial_{\mathcal{G}} \Lambda \subset W$, и для любой $(\Lambda, \mathcal{G})$-допустимой меры μ на A^W проекция $\mathrm{pr}_K(\mu)$ будет ε-близка к

$\mathrm{pr}_K(\nu)$. Воспользуемся предыдущей леммой, чтобы получить такое подмножество S, что для всякой S-хорошей точки $v \in V_i$ мера $\theta_v(\eta_i)$ будет $(\Lambda, \mathcal{G})$-допустимой. $\square$

***Лемма* 3.20.** *Для любого $F \Subset G$ существует такое $S \Subset G$, что для всякого S-хорошего элемента $v \in V_i$ выполнено $\partial_{\mathcal{G}^i}(\sigma_i^F(v)) = \sigma_i^{\partial_{\mathcal{G}} F}(v)$.*

Доказательство. Достаточно взять в качестве $S = F \cup \partial_{\mathcal{G}} F \cup D \cup D^{-1}$. $\square$

***Лемма* 3.21.** *Пусть F — конечное подмножество группы G. Зафиксируем произвольную метрику для $\star$-слабой топологии на $\mathcal{M}(A^{F \cup \partial_{\mathcal{G}} F})$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое конечное подмножество S в G, что $S \supset F \cup \partial_{\mathcal{G}} F \cup D \cup D^{-1}$, и что для всякой S-хорошей точки $v \in V_i$ выполняется $\partial_{\mathcal{G}^i}(\sigma_i^F(v)) = \sigma_i^{\partial_{\mathcal{G}} F}(v)$, а проекция $\mathrm{pr}_{F \cup \partial_{\mathcal{G}} F}(\theta_v(\eta_i))$ является ε-близкой к $\mathrm{pr}_{F \cup \partial_{\mathcal{G}} F}(\nu)$.*

Доказательство. Несложно видеть, что условия предыдущих лемм продолжат выполняться, если соответствующие подмножества S заменить на большие. Возьмём в качестве S для этой леммы их объединение. $\square$

Доказательство следующей леммы опирается на аргумент случайного упорядочивания из [2]. Напомним, что $(\xi_g)_{g \in G}$ — случайный процесс независимых величин, каждая из которых равномерно распределена на единичном отрезке $[0, 1]$, а $L_\xi = \{g \in G | \xi(g) < \xi(e)\}$.

Лемма 3.22. *Пусть $\nu \in \mathcal{MG}$ — единственная гиббсовская мера. Тогда для всякого конечного $F \subset G$ имеем*

$$h(\nu) \geqslant \mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^{L_\xi \cup (G \setminus F)}).$$

Доказательство. Пусть $(\chi_v)_{v \in V_i}$ — случайный процесс, состоящий из независимых величин, распределённых равномерно на единичном отрезке. Обозначим $L_{v,\chi}$ для $v \in V_i$ — множество всех таких $w \in V_i$, что $\chi_w < \chi_v$. Пусть $(Y_v)_{v \in V_i}$ — случайный процесс с распределением η_i. Пусть $(X_g)_{g \in G}$ — случайный процесс с распределением ν. По цепному правилу для энтропии:

$$H(\eta_i) = \sum_{v \in V_i} \mathbb{E}_\chi H\left(Y_v | (Y_w)_{w \in L_{v,\chi}}\right).$$

Фиксируем произвольную метрику для $\star$-слабой топологии на $\mathcal{M}(A^{F \cup \partial_{\mathcal{G}} F})$, пусть $\varepsilon > 0$ (значение его выберем позднее). Применим предыдущую лемму, чтобы получить множество S. Пусть $V_i' \subset V_i$ (где $i \in \mathbb{N}$) обозначает множество всех S-хороших элементов. Мы знаем, что $\lim_{i \to \infty} |V_i'|/|V_i| = 1$. Для элемента $v \in V_i'$ рассмотрим соответствующее ему слагаемое:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\chi H\left(Y_v | (Y_w)_{w \in L_{v,\chi}}\right) \geqslant \mathbb{E}_\chi H\left(Y_v | (Y_w)_{w \in L_{v,\chi} \cup (V_i \setminus \sigma_i^F(v))}\right) = \\
= \mathbb{E}_\chi H\left(Y_v | (Y_w)_{w \in (L_{v,\chi} \cap \sigma_i^F(v)) \cup (\partial_{\mathcal{G}^i} \sigma_i^F(v))}\right) = \\
= \mathbb{E}_\chi \left(H((X_w)_{w \in \{v\} \cup (L_{v,\chi} \cap \sigma_i^F(v)) \cup (\partial_{\mathcal{G}^i} \sigma_i^F(v))}) - H((X_w)_{w \in (L_{v,\chi} \cap \sigma_i^F(v)) \cup (\partial_{\mathcal{G}^i} \sigma_i^F(v))})\right) \geqslant \\
\geqslant \mathbb{E}_\xi \left(H\left((X_g)_{g \in \{e\} \cup (L_\xi \cap F) \cup \partial_{\mathcal{G}} F}\right) - H\left((X_g)_{g \in (L_\xi \cap F) \cup \partial_{\mathcal{G}} F}\right)\right) - \varepsilon'.
\end{aligned}$$

В оценках выше мы воспользовались марковским свойством для процесса $(Y_v)_{v\in V_i}$ и тем фактом, что для любого $\varepsilon'>0$ мы можем выбрать настолько малый $\varepsilon>0$, что процесс $(Y_w)_{w\in\sigma_i^{F\cup\partial_{\mathcal{G}}F}}$ будет так близок по распределению к процессу $(X_g)_{g\in F\cup\partial_{\mathcal{G}}F}$ (с перемаркировкой при помощи функции $g\mapsto\sigma_i^g(v)$), что для любого $R\subset F\cup\partial_{\mathcal{G}}F$ будет выполнено

$$\left|H((X_g)_{g\in R})-H((Y_w)_{w\in\sigma_i^R(v)})\right|<\varepsilon'/2.$$

Применим теперь марковское свойство для процесса $(X_g)_{g\in G}$:

$$\mathbb{E}_\xi\left(H\left((X_g)_{g\in\{e\}\cup(L_\xi\cap F)\cup\partial_{\mathcal{G}}F}\right)-H\left((X_g)_{g\in(L_\xi\cap F)\cup\partial_{\mathcal{G}}F}\right)\right)=$$
$$=\mathbb{E}_\xi\left(H\left((X_g)_{g\in\{e\}\cup L_\xi\cup(G\setminus F)}\right)-H\left((X_g)_{g\in L_\xi\cup(G\setminus F)}\right)\right)=$$
$$=\mathbb{E}_\xi H\left(X_e|(X_g)_{g\in L_\xi\cup(G\setminus F)}\right)=\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^{L_\xi\cup(G\setminus F)}).$$

Оценка

$$\lim_{i\to\infty}|V_i'|/|V_i|=1$$

(лемма 1.2) влечёт, что

$$h(\nu)\geqslant\varlimsup_{i\to\infty}\frac{H(\eta_i)}{|V_i|}\geqslant\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^{L_\xi\cup(G\setminus F)})-\varepsilon',$$

что завершает доказательство, так как ε' можно взять произвольно малым.

$\square$

***Теорема* 3.23.** *Пусть μ — единственная мера Гиббса для потенциала φ, и α — каноническое порождающее разбиение. Тогда*

$$h(\mu)\geqslant\mathbb{E}_\xi H(\alpha|\widetilde{\alpha^L})$$

(для любой софической аппроксимации).

Доказательство теоремы 3.23. Пусть (R_n) — последовательность коконечных подмножеств G такая, что $R_i \subset R_j$ для $i > j$ и $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} R_i = \varnothing$. Для всякой реализации ξ имеем $H(\alpha|\alpha^{L_\xi \cup R_n}) \to H(\alpha|\widetilde{\alpha^{L_\xi}})$ (при $n \to \infty$). Из предыдущей леммы и теоремы о мажорированной сходимости заключаем, что

$$h(\nu) \geqslant \mathbb{E}_\xi H(\alpha|\widetilde{\alpha^{L_\xi}}).$$

□

***Утверждение* 3.24.** *Пусть $\mathcal{G}$ — гиббсова структура, удовлетворяющая условию Добрушина, и ν — единственная гиббсова мера для этой структуры. Тогда для всякого $S \subset G$ подалгебры $\widetilde{\alpha^S}$ и α^S являются ν-mod 0 эквивалентными.*

Доказательство. Это утверждение является прямым следствием леммы 3.8.

□

Доказательство теоремы 0.2. Известно, что

$$h(\nu) \leqslant h_{Rok}(\nu)$$

(см. например [3]); далее,

$$h_{Rok}(\nu) \leqslant \mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^L)$$

(по теореме 0.1), и

$$h(\nu) \geqslant \mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^L)$$

(комбинация предыдущего утверждения и теоремы 3.23). Получаем:

$$h_{Rok}(\mu) = h(\mu) = \mathbb{E}_\xi H(\alpha|\alpha^L).$$

□

3.3. Давление

Цель этого раздела — доказательство теоремы 0.3.

В этом разделе потенциал будет изменяться, поэтому во избежание неоднозначности мы будем указывать его в гиббсовской системе: $\mathcal{G}^\varphi$, $\mathcal{G}^{\varphi,i}$. Мы будем всегда предполагать, что гиббсовская система $\mathcal{G}^\varphi$ имеет единственную инвариантную гиббсовскую меру. Обозначим для гиббсовской системы $\mathcal{G}^{\varphi,i}$ и $\tau \in \Omega_i$ функцию

$$\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau) = \sum_{v \in V_i} \varphi(\theta_v(\tau)).$$

Обозначим

$$Z_{\varphi,i} = \sum_{\tau \in \Omega_i} e^{-\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau)}.$$

По определению, единственная гиббсовская мера η_i для $\mathcal{G}^{\varphi,i}$ задаётся соотношением:

$$\eta_i(\{\tau\}) = \frac{e^{-\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau)}}{Z_{\varphi,i}}.$$

Для фиксированной гиббсовской системы $\mathcal{G}^{\varphi}$ с единственной инвариантной гиббсовской мерой и софической аппроксимации будем называть *давлением* величину

$$P_{\varphi} = \lim_{i\to\infty} \frac{\log Z_{\varphi,i}}{|V_i|},$$

в случае, если последний предел существует. Тогда мы будем говорить, что давление существует.

***Утверждение* 3.25.** *Если для данной гиббсовской системы существует давление, то софическая энтропия выражается формулой*

$$h(\nu_{\varphi}) = P_{\varphi} + \int_{\Omega} \varphi(\omega) d\nu_{\varphi}(\omega).$$

Доказательство. Воспользуемся определением горизонтальной энтропии. Для этого посчитаем шенноновскую энтропию меры $\eta_{\varphi,i}$:

$$H(\eta_{\varphi,i}) = -\sum_{\tau\in\Omega_i} \eta_{\varphi,i}(\{\tau\}) \log \eta_{\varphi,i}(\{\tau\}) = \sum_{\tau\in\Omega_i} \frac{e^{-\mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau)}}{Z_{\varphi,i}} (\log Z_{\varphi,i} + \mathcal{E}_{\varphi,i}(\tau)) =$$
$$= \log Z_{\varphi,i} + |V_i| \int_{\Omega} \varphi(\omega) d\nu_{\varphi,i}(\omega).$$

Переходя к пределу, получаем

$$h(\nu_{\varphi}) = \overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{H(\eta_{\varphi,i})}{|V_i|} = P_{\varphi} + \int_{\Omega} \varphi(\omega) d\nu_{\varphi}(\omega).$$

□

Несложно заметить, что для нулевого потенциала давление будет равно $\log|A|$.

***Утверждение* 3.26.** *Пусть для потенциала ψ существует давление. Пусть φ — локальная функция, и для всех $\beta \in [0,1]$ потенциал $\psi + \beta\varphi$ имеет единственную инвариантную гиббсовскую меру. Тогда потенциал $\psi + \varphi$ имеет давление, и оно выражается формулой*

$$P_{\psi+\varphi} = P_{\psi} - \int_0^1 d\beta \int_{\Omega} \varphi(\omega) d\nu_{\psi+\beta\varphi}(\omega).$$

Доказательство. Рассмотрим производную:

$$\frac{1}{|V_i|}\frac{d(\log Z_{\psi+\beta\varphi})}{d\beta} = \frac{1}{|V_i| Z_{\psi+\beta\varphi}}\frac{dZ_{\psi+\beta\varphi}}{d\beta} = -\int_{\Omega} \varphi(\omega) d\nu_{\psi+\beta\varphi,i}.$$

Таким образом,

$$\frac{Z_{\psi+\varphi}}{|V_i|} = \frac{Z_{\psi}}{|V_i|} - \int_0^1 d\beta \int_{\Omega} \varphi(\omega) d\nu_{\psi+\beta\varphi,i}(\omega).$$

Так как $\nu_{\psi+\beta\varphi,i} \to \nu_{\psi+\beta\varphi}$ (по лемме 3.16), то, переходя к пределу, получаем требуемое.

□

Доказательство теоремы 0.3. Объединяя утверждения 3.26 и 3.25 с наблюдением о давлении нулевого потенциала, получаем формулу для энтропии

$$h(\nu_{\varphi}) = \log|A| + \int_{A^G} \varphi(\omega) d\nu_{\varphi}(\omega) - \int_0^1 d\beta \int_{A^G} \varphi(\omega) d\nu_{\beta\varphi}(\omega).$$

Нетрудно видеть, что выражение в правой части не зависит от софической аппроксимации. □

Заключение

В диссертации было доказано существование факторов Пинскера для рохлинской энтропии у эргодических действий (максимальных факторов нулевой энтропии), а также, что исходная система является слабо перемешивающим расширением своего пинскеровского фактора. Была доказана явная формула для софической и рохлинской энтропии действия, порождённого гиббсовской мерой для инвариантной гиббсовской системы, удовлетворяющей условию Добрушина, над софической группой. Доказана ещё одна формула для софической энтропии некоторого класса гиббсовских мер. В последних двух случаях важно заметить, что софическая энтропия не зависит от софической аппроксимации, это не выполняется в общем случае. Самым важным я считаю результат о вычислении рохлинской энтропии, ибо определение последней одновременно весьма просто и составляет большую сложность в работе. Её определение крайне естественно для любого специалиста по энтропийной теории, но только после работ Боуэна о ней стало возможно доказать что-то в неаменабельном случае. Замечу, что существование действий положительной рохлинской энтропии известно только для софических групп.

Изучение софической и рохлинской энтропии далеко от завершения. Конечно же, один из главных вопросов, масштаб которого, безусловно, больше энтропийной теории действий счётных групп — правда ли, что все счётные группы софические? Мало известно про зависимость софической энтропии от софической аппроксимации: существуют ли, например, действия с двумя различными неотрицательными значениями софической энтропии (конечно, для разных софических аппроксимаций). Непонятно, правда ли, что всякая группа обладает действием положительной софической энтропии (это бы следовало из того, что всякая счётная группа является софической). Как доказал Сюард, последнее влекло бы разрешение одной из гипотез Капланского о групповых алгебрах: пусть $a, b \in k[G]$, где G — счётная группа, k — поле положительной характеристики, правда ли, что $ab = 1$ влечёт $ba = 1$?

Энтропийная теория действий неаменабельных групп черпает вдохновение в аменабельном случае, где, как известно, есть огромный корпус результатов. Однако неаменабельность вносит свою специфику: она требует новой интуиции, новых методов, допускает новые интересные явления (как, например, результат Боуэна о том, что всякое действие неаменабельной группы есть фактор действия нулевой рохлинской энтропии).

Список литературы

[1] A. Alpeev and B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups III*, in preparation

[2] C. Borgs, J. Chayes, J. Kahn, and L. Lovász, *Left and right convergence of*

graphs with bounded degree, Random Structures and Algorithms, 2013, 42.1, 1–28

[3] L. Bowen, *A measure conjugacy invariant for actions of free groups*, Annals of Mathematics, 2010, 171 no. 2, 1387–1400.

[4] L. Bowen, *Measure conjugacy invariants for actions of countable sofic groups*, Journal of the American Mathematical Society, 2010, no. 23, 217–245.

[5] L. Bowen, *Entropy for expansive algebraic actions of residually finite groups*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2011, no. 31.03, 703–718.

[6] L. Bowen, *Zero entropy is generic*, Entropy, 2016, 18, no. 6, Paper no. 220, 20 pp.

[7] L. Bowen and H. Li, *Harmonic models and spanning forests of residually finite groups*, Journal of Functional Analysis, 2012, no. 263.7, 1769–1808.

[8] A. Carderi, *Ultraproducts, weak equivalence and sofic entropy*, 2015, arXiv preprint arXiv:1509.03189.

[9] Р. Л. Добрушин, *Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности*, Теория вероятностей и ее применения, 1968, том 13, выпуск 2, 201–229.

[10] M. Einsiedler and T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*, Graduate texts in mathematics, Springer, 2011, vol. 259, xvii+481 pp.

[11] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, Journal d'Analyse Mathematique, 1977, 31, 204–256.

[12] H.-O. Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, De Gruyter studies in mathematics, De Gruyter, 2011, vol. 9, xiv+545 pp.

[13] D. Gaboriau and B. Seward, *Cost, l^2-Betti numbers, and the sofic entropy of some algebraic actions*, 2015, arXiv preprint arXiv:1509.02482.

[14] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Mathematical Surveys and Monographs, 101. American Mathematical Society, 2003, vol. 101, xii+384 pp.

[15] B. Hayes, *Fuglede-kadison determinants and sofic entropy*, 2014, arXiv preprint arXiv:1402.1135.

[16] B. Hayes, *Mixing and spectral Gap Relative to Pinsker factors for sofic groups*, to appear in the Proceedings in honor of Vaughan F. R. Jones' 60th birthday conferences.

[17] Л. В. Канторович, *О перемещении масс*, Доклады Академии Наук СССР, 1942, 37, № 7–8, 227–229.

[18] D. Kerr, *Sofic measure entropy via finite partitions*, Groups, Geometry and Dynamics, 2013, 7, 617–632.

[19] D. Kerr and H. Li, *Entropy and the variational principle for actions of sofic groups*, Inventiones Mathematicae, 2011, 186 , 501–558.

[20] А. Н. Колмогоров, *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега*, Доклады Академии Наук СССР, 1958, 119, 861–864.

[21] А. Н. Колмогоров, *Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов*, Доклады Академии Наук СССР, 1959, 124, 754–755.

[22] D. S. Ornstein and B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*, Journal d'Analyse Mathématique, 1987, 48.1, 1–141.

[23] F. Rassoul-Agha and T. Seppäläinen, *A course on Large Deviations with an Introduction to Gibbs Measures*, American Mathematical Society, 2015, vol. 162.

[24] В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры*, Математический сборник, 1949, 67, № 1, 107–150.

[25] В.А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой*, Успехи математических наук, 1967, 22, № 5, 3–56.

[26] Я. Г. Синай, *О понятии энтропии динамической системы*, Доклады Академии Наук СССР, 1959, 124, 768–771.

[27] А. М. Степин, *Сдвиги Бернулли на группах*, Доклады Академии Наук СССР, 1975, 223(2), 300–302.

[28] J. C. Kieffer, *A generalized Shannon-mcMillan theorem for the action of an amenable group on a probability space*, The Annals of Probability, 1975, 1031–1037.

[29] D. Ornstein, *Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic*, Advances in Mathematics, 1970, 4(3), 337-352.

[30] D. Ornstein, *Two bernoulli shifts with infinite entropy are isomorphic*, Advances in Mathematics, 1970, 5(3), 339–348.

[31] B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups I*, 2014, arXiv preprint arXiv:1405.3604.

[32] B. Seward, *Krieger's finite generator theorem for actions of countable groups II*, 2015 , arXiv preprint arXiv:150.03367.

[33] B. Seward, *Positive entropy actions of countable groups factor onto Bernoulli shifts*, in preparation.

[34] B. Seward, *Weak containment and Rokhlin entropy*, 2016, arXiv preprint arXiv:1602.06680.

[35] R. Zimmer, *Extensions of ergodic group actions*, Illinois Journal of Mathematics, 1976, 20, no. 3, 373–409.

Публикации автора по теме диссертации:

[36] А. В. Алпеев, *Факторы Пинскера для рохлинской энтропии*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, 432, 30–35

[37] А. В. Алпеев, *Энтропия гиббсовских мер на софических группах*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2015, 436, 34–48

[38] А. В. Алпеев, *Анонс энтропийной формулы для некоторого класса гиббсовских мер*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2016, 448, 7–13